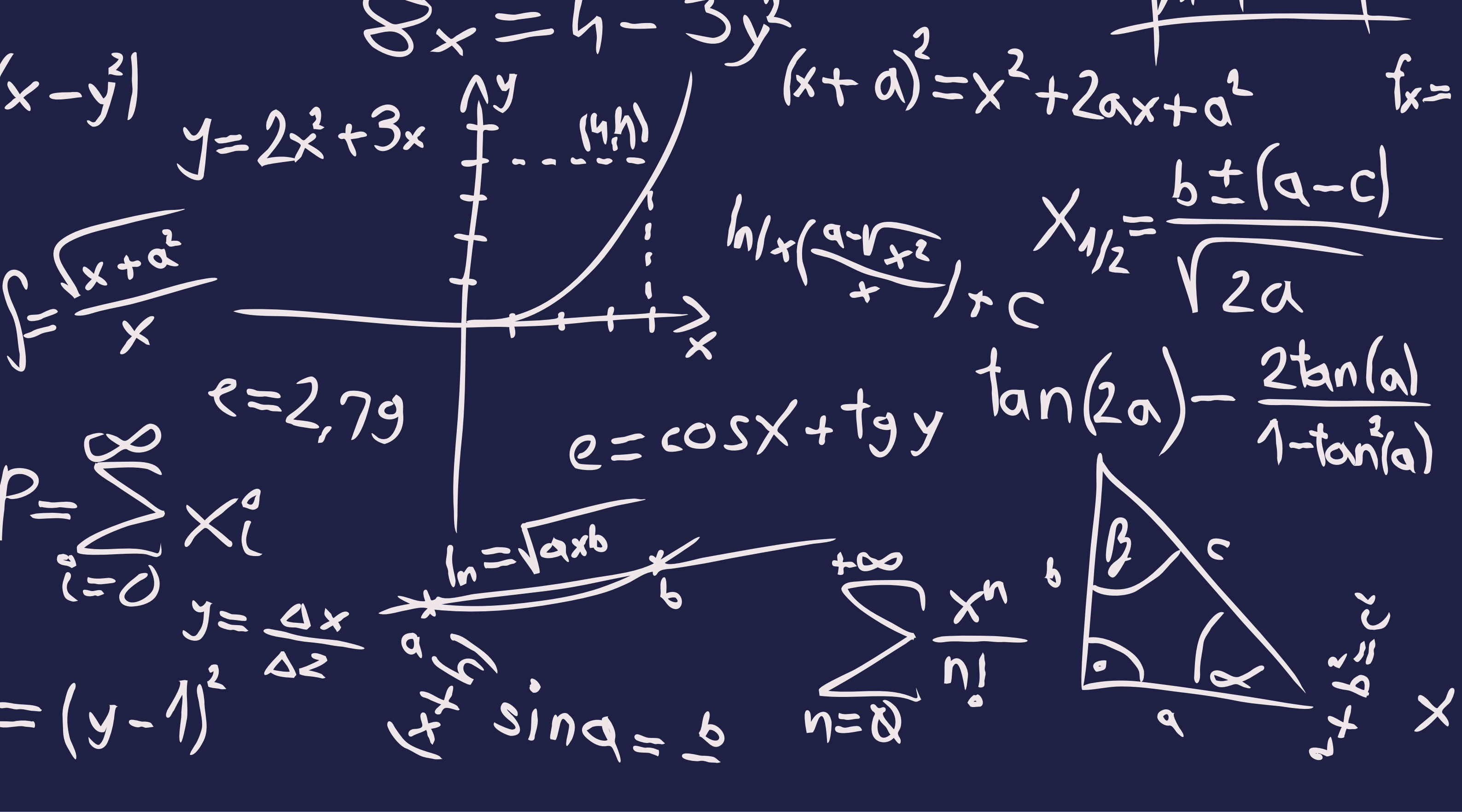
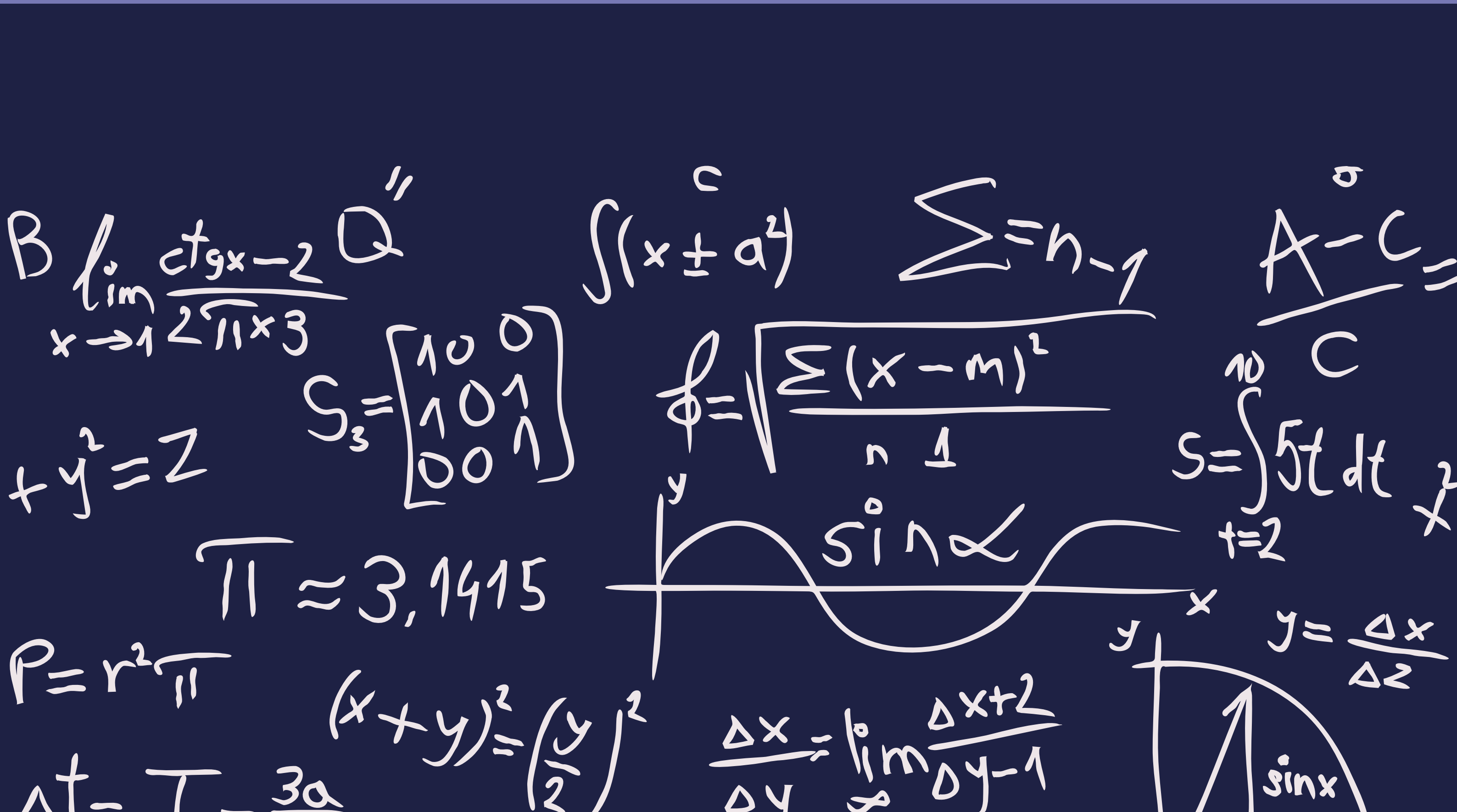


Álgebra Lineal 2

Una aventura en las matemáticas

Rudik Roberto Rompich



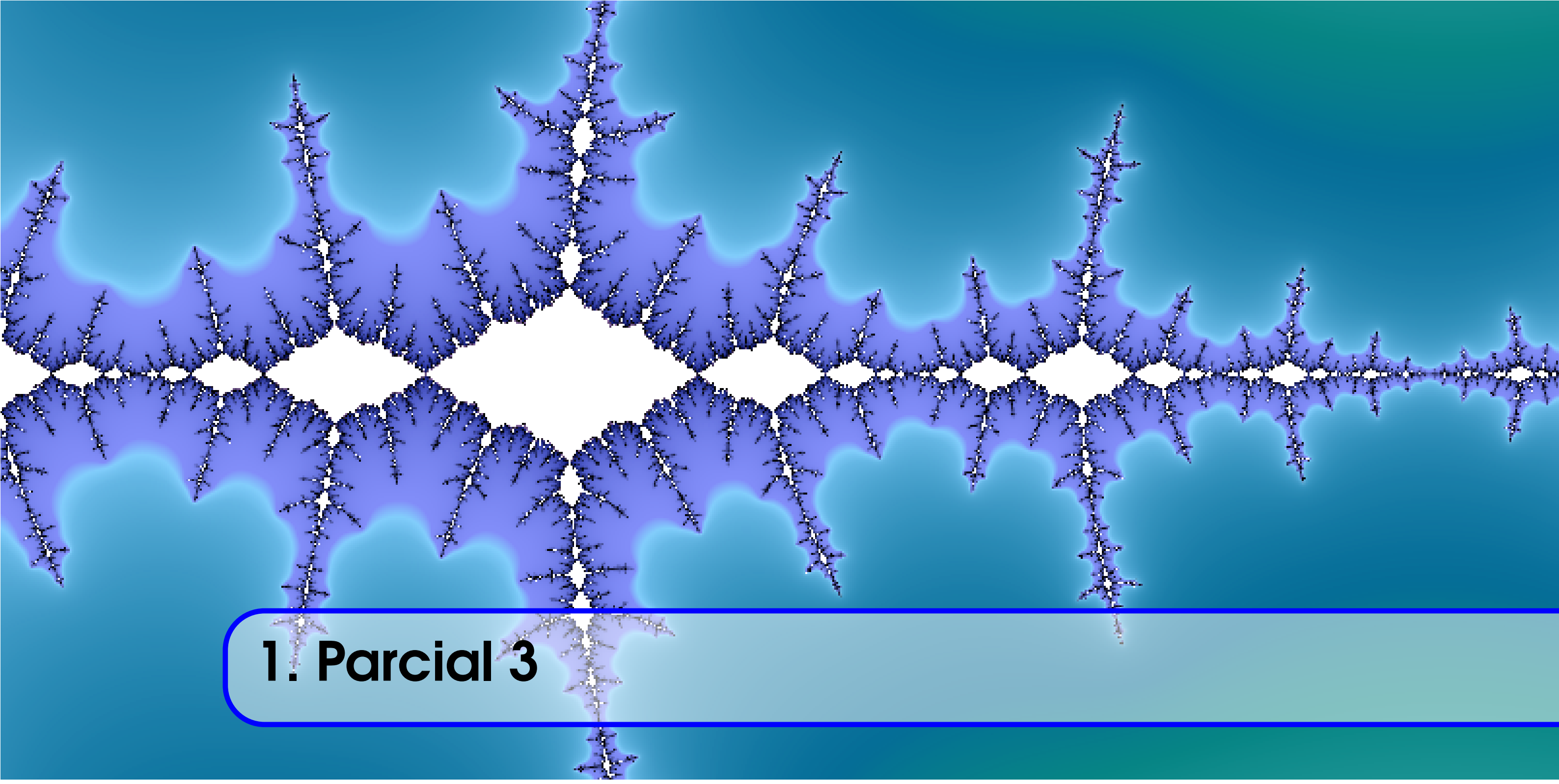
PUBLISHED BY RUDIKS

RUDIKS.COM

First printing, October 2020

Índice general

Tercer parcial



1. Parcial 3

1.1 Funcionales lineales

Definición 1.1.1 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Entonces, una transformación lineal

$$f : V \mapsto \mathbb{F}$$

es un funcional lineal sobre V.

Ejercicio 1.1 Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \ni$$

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$$

$\Rightarrow \Phi$ es funcional lineal. ■

Nota 1.1.

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \ni$$

$$\Phi(x, y) = 2x - y$$

Ejercicio 1.2 Sea $C[0,1]$ un conjunto de funciones continuas en [2,1] y considere:

$$T : C[0,1] \mapsto \mathbb{R} \ni$$

$$T(g) = \int_0^1 g(x)dx$$

Nótese si $f, g \in [0,1]$ y $\alpha \in R \Rightarrow T(\alpha f + g) = \int_0^1 [\alpha f + g](x)dx = \int_0^1 [(\alpha f)(x) + g(x)]dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \alpha T[f] + T[g] \Rightarrow$ es lineal $\Rightarrow$ T es funcional lineal. ■

Ejercicio 1.3 Sea

$$d : \mathbb{R}^{nxn} \mapsto \mathbb{R} \ni$$

$$d(A) = \text{determinante de A}$$

Recordar que:

$$det(A+B) \neq det(A) + det(B)$$

$$det(\alpha A) \neq \alpha det(A)$$

$$d(A) \text{ no es funcional lineal}$$

■

Ejercicio 1.4 Sea

$$T : \mathbb{R}^{nxn} \mapsto \mathbb{R} \ni$$

$$T(A) = \text{ traza de A}$$

$$\text{Si } A = [a_{ij}] \Rightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$\Rightarrow Tr(A) \text{ es funcional lineal.}$$

■

Ejercicio 1.5 Sea V el espacio de todas las funciones sobre $\mathbb{R}$. Definimos

$$C_t : V \mapsto \mathbb{R} \ni$$

$$C_t(f) = f(t) \text{ , donde t es un número fijo.}$$

Nótese que:

1. Sea $f, g \in V \Rightarrow L_t[f+g] = (f+g)(t) = L_t(f) + L_t(g)$
2. Sea $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto L_t(\alpha f) = (\alpha f)(t) = \alpha f(t) = \alpha L_t(f) \Rightarrow$ Es funcional lineal.

■

Nota 1.2. *Considere el funcional lineal*

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \ni$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{R}$$

(fijos) Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base usual de $\mathbb{R}^n$ y sea $B' = \{1\}$ la base usual de $\mathbb{R}$.

$$f(1, 0, \ldots, 0) = \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \ldots + \alpha_1(0)$$

$$= \alpha_1$$

$$f(0, 1, 0, \ldots, 0) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow [f]_B^{B'} = [\alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n]$$

Nota 1.3. *Si f son funcionales lineales.*

$$f \in f[V,\mathbb{F}] \text{ si dim(V)=n}$$
$$\Rightarrow dim(f[V,\mathbb{F}]) = n \cdot 1 = n$$

Definición 1.1.2 — V^*. Al espacio de funciones lineales de V es $\mathbb{V}$ es $\mathbb{F}$ se le llama al espacio dual de V.

Nota 1.4. *Si $dim(V) = n \Rightarrow dim(V^*) = n$*

1.1.1 Teorema

Teorema 1.1.1 Sea V un espacio vectorial finito dimensional y $B = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ una base ordenada de V. Entonces, existe una base: $B^* = \{\Phi_1, ..., \Phi_n\}$ de V^*, tal que:

$$\Phi_i(V_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

$$\Phi_i(V_j) = \delta_{ij} \xleftarrow{\text{Delta de Kronecker}}$$

1.1.2 Ejercicio

Ejercicio 1.6 Considere la base de $\mathbb{R}^2$,

$$B = \{(2,1),(3,1)\}$$

entonces, encuentre una base para para $(\mathbb{R}^{\not{2}})^* \xleftarrow{\mathscr{L}[\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2]}$ ■

Solución:

$$B^* = \{\phi_1, \phi_2\} \qquad \text{es tal que:} \tag{1.1}$$

Debemos encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

$$\phi_1(x,y) = \alpha_1 x + \alpha_2 y \tag{1.2}$$
$$\phi_2(x,y) = \beta_1 x + \beta_2 y \tag{1.3}$$

Encontramos $\alpha_1 y \alpha_2$:

$$\phi_1(v_1) = \phi(2,1) = 2\alpha_1 + \alpha_1 = 1 \qquad \delta_{11} \tag{1.4}$$
$$\phi_1(v_2) = \phi(3,1) = 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \qquad \delta_{11} \tag{1.5}$$
$$\Longrightarrow \alpha_1 = -1, \alpha = 3 \tag{1.6}$$
$$\Longrightarrow \phi_1(x,y) = -x + 3y \tag{1.7}$$

Encontramos B_1, B_2:

$$\phi_2(v_1) = \phi_2(2,1) = 2\beta_1 + \beta_2 = 0 \tag{1.8}$$
$$\phi_2(v_2) = \phi_2(3,1) = 3\beta_1 + \beta_2 = 1 \tag{1.9}$$
$$\Longrightarrow \beta_1 = 1, \beta_2 = -2 \tag{1.10}$$
$$\Longrightarrow \phi_2(x,y) = x - 2y \tag{1.11}$$

$\Longrightarrow$ La base dual de B, denotada por B^* (i.e. la base del espacio dual $V^{)}*$, es $B^* = \{-x + 3y, -x + 2y\}$

1.1.3 Ejercicio

Ejercicio 1.7 Dada la base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(1,-1,3),(0,1,-1),(0,3,-2)\},$$

encuentre la base dual de B^* (i.e. la basa para $\mathscr{L}[\mathbb{R}^3,\mathbb{R}]$) ■

$$\phi_1(x,y,z) = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \tag{1.12}$$
$$\phi_2(x,y,z) = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \tag{1.13}$$
$$\phi_3(x,y,z) = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \tag{1.14}$$

Encontramos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\phi_1(v_1) = \phi_1(1,-1,3) = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \tag{1.15}$$
$$\phi_2(v_2) = \phi_1(0,1,-1) = 0\alpha_1 + \alpha_2 - 1\alpha_3 = 0 \tag{1.16}$$
$$\phi_3(v_3) = \phi_1(0,3,-2) = 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \tag{1.17}$$
$$\implies \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \implies \phi_1(x,y,z) = x \tag{1.18}$$

Encontramos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$\phi_2(v_1) = \phi_2(1,-1,3) = 1\beta - 1\beta + 2\beta = 0 \tag{1.19}$$
$$\phi_2(v_2) = \phi_2(0,1,-1) = 0\beta + 1\beta - 1\beta = 1 \tag{1.20}$$
$$\phi_2(v_3) = \phi_2(0,3,-2) = 0\beta + 3\beta - 2\beta = 0 \tag{1.21}$$
$$\implies \beta_1 = 7, \beta_2 = -2, \beta_3 = -3 \implies \phi_2(x,y,z) = 7x - 2y - 3z \tag{1.22}$$

Encontramos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\phi_3(v_1) = \phi_3(1,-1,3) = 1\gamma - 1\gamma + 2\gamma = 0 \tag{1.23}$$
$$\phi_3(v_2) = \phi_3(0,1,-1) = 0\gamma + 1\gamma - 1\gamma = 1 \tag{1.24}$$
$$\phi_3(v_3) = \phi_3(0,3,-2) = 0\gamma + 3\gamma - 2\gamma = 0 \tag{1.25}$$
$$\implies \gamma_1 = 2, \gamma_2\gamma_3 = 1 \implies \phi_3(x,y,z) = -2x + y + z \tag{1.26}$$

Por lo tanto:

$$B^* = \{x, 7x - 2y - 3z, -2x + y + z\} \tag{1.27}$$

Por otra parte, es necesario probar que B^* es linealmente independiente

$$\text{Considere: } \upsilon_1\phi_1 + \upsilon_2\phi_2 + \ldots + \upsilon_n\phi_n = 0 \tag{1.28}$$
$$\text{A probar: } \upsilon_1 = \upsilon_2 = \ldots = \upsilon_n = 0 \tag{1.29}$$

Sea $v_i \in B$, $1 \leq i \leq n$

$$\implies (\upsilon_1\phi_1 + \ldots + \upsilon_1\phi_i + \ldots + \upsilon_n\phi_n)(v_i) = 0(v_i) \tag{1.30}$$
$$\implies \upsilon_1\phi_1(v_i) + \ldots + \upsilon_1\phi_i(v_i) + \ldots + \upsilon_n\phi_n)(v_i) = 0 \tag{1.31}$$
$$\implies 0 + 1 + 0 \qquad = 0 \tag{1.32}$$
$$\implies \upsilon_1 = \upsilon_2 = \ldots = \upsilon_n = 0 \implies \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \text{ es linealmente independiente} \tag{1.33}$$

(1.34)

1.1.4 Teorema

Teorema 1.1.2 Sea V un espacio vectorial finito dimensiona y sea $B = \{x_1, \ldots, x_2\}$ una base ordenada para V. Entonces existe una base $B^* = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ para $V^* \ni$

$$\phi_i(x_j) = \delta_i j$$

Además,

$$(i)\forall \phi \in V^*, \text{ se tiene:} \tag{1.35}$$
$$\phi = \phi(x_1)\phi_1 + \phi(x_2)\phi_2 + \ldots + \phi(x_n)\phi_n \tag{1.36}$$
$$(ii)\forall x \in V, \text{se tiene que:} \tag{1.37}$$
$$x = \phi_1(x)x_1 + \phi_2(x)x_2 + \ldots + \phi_n(x)x_n \tag{1.38}$$
$$\tag{1.39}$$

Demostración.

A probar: B^* es linealmente independiente. Considere:

$$\alpha_1\phi_1 + \ldots + \alpha_n\phi_n? \tag{1.40}$$

■

Índice alfabético

F