Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Matemáticas
Análisis Numérico

Taller Interpolación

Victor Barón, Estefania Aristizabal, Oscar Falla, Nicolas Gil Hernandez
Baronvl@javeriana.edu.co aristizabalj-e@javeriana.edu.co
falla_o@javeriana.edu.co nicolas_gil@javeriana.edu.co

18 de Abril del 2020

1. Interpolación

En general, el problema de la interpolación consiste en determinar una aproximación $f(x)$ en un punto xi del dominio de $f(x)$, a partir del conjunto (xi, yi) de valores conocidos o en sus vecindades. Particularmente, la interpolación polinómica consiste en determinar $f(xi)$ a partir de un polinomio $P(x)$ de interpolación de grado menor o igual que n que pasa por los $n+1$ puntos.

1. Dados los $n+1$ puntos distintos (xi, yi) el polinomio interpolante que incluye a todos los puntos es único.

   En un intervalo $[a, b] \in R$ y $x_0, x_1, ..., x_n, n+1$ puntos distintos que se encuentran en el intervalo $[a, b]$ existe un único polinomico de grado n o menor que satisface lo siguiente:

   $$P_n(x_i) = f(x_i) \tag{1}$$

   $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \tag{2}$$

   Existencia:

   $$L_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x - s_j}{x_i - x_j} \tag{3}$$

   Si para cada x_i xiste un polinomio $L_i(x)$ (este polinomio siempre existe y además es continuo) de grado n, entonces existe un polinomio $P_n(x)$ de grado n como máximo.

   Unicidad: Si suposieramos la existencia de dos polinomios distintos $P1_n(x)$ y $P2_n(x)$ de grado menor o igual a n y que son solución ,por que satisfacen $P1_n(x_i) = f(x_i)$ y $P2_n(xt) = f(x_i)$, podriamos entonces suponer un nuevo polinomio $R_n(x) = P1_n(x) - P2_n(x)$ que tiene grado menor o igual a n y satisface $R_n(x) = 0$ para cada $i \in x_0, x_1, ..., x_n$. Por tanto y según el teorema fundamental del algebra este polinomio $R_n(x)$ tiene solución y n 1 raices por lo que podríamos concluir que $P1_n(x) y P2_n(x)$ son el mismo : $P1_n = P2_n(x)$.

2. Construya un polinomio de grado tres que pase por: (0,10), (1,15), (2,5) y que la tangente sea igual a 1 en x_0

Al tener los tres puntos por los que queremos conocer el polinomio de grado tres que pasa por estos, utilizamos la función CubicSpline que nos permite enviarle los puntos a interpolar y las derivadas de estos mismos, para que se cumpla la condición x_0 sea igual a 1.

Para la interpolación se utilizaron los intervalos de (0,1) y de (1,2). En el primer intervalo del primer polinomio, se obtuvo un resultado de $10x^3 + 8,25x^2 + x - 4,25$ y para el segundo intervalo el polinomio que describe la curva es $15x^3 - 2,50x^2 - 11,75x + 4,25$.

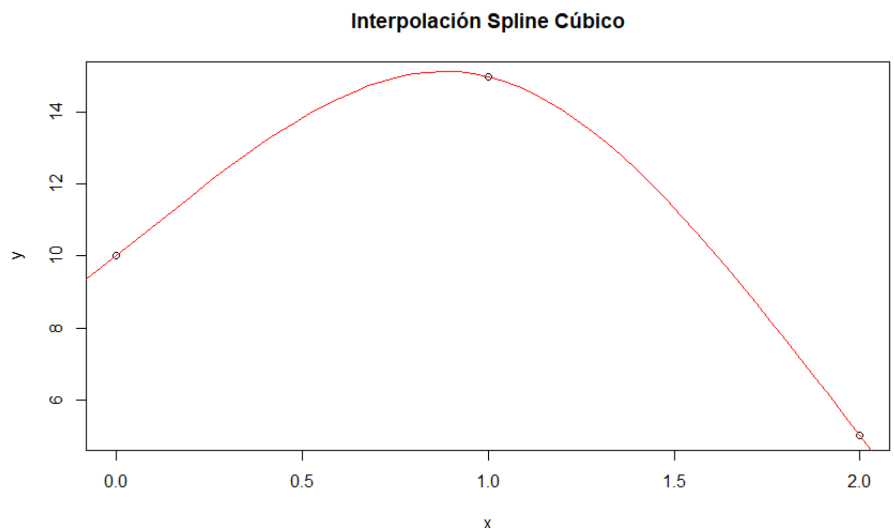
```
require(pracma) ## Loading required package: pracma
library(pracma)

x <- c(0,1,2)
y <- c(10,15,5)

xi <- seq(0,2,by=1)

f <- cubicspline(x, y, xi = NULL, endp2nd = FALSE, der = c(1,1))
ffun <- function(xi) ppval(f,xi)
print(f)
# $breaks
# [1] 0 1 2
#
# $coefs
#       [,1]   [,2]  [,3] [,4]
# [1,] -4.25   1.00  8.25   10
# [2,]  4.25 -11.75 -2.50   15
#
# $pieces
# [1] 2
#
# $order
# [1] 4
#
# $dim
# [1] 1
#
# attr(,"class")
# [1] "pp"
plot(x,y, main="Interpolación Spline Cúbico")
plot(ffun, xlim=c(-1,3), add=TRUE, col ="red", main="
     Interpolación Spline Cúbico")
```

Finalmente, en la gráfica se pueden observar los puntos iniciales y la curva que describe los dos polinomios de interpolación.

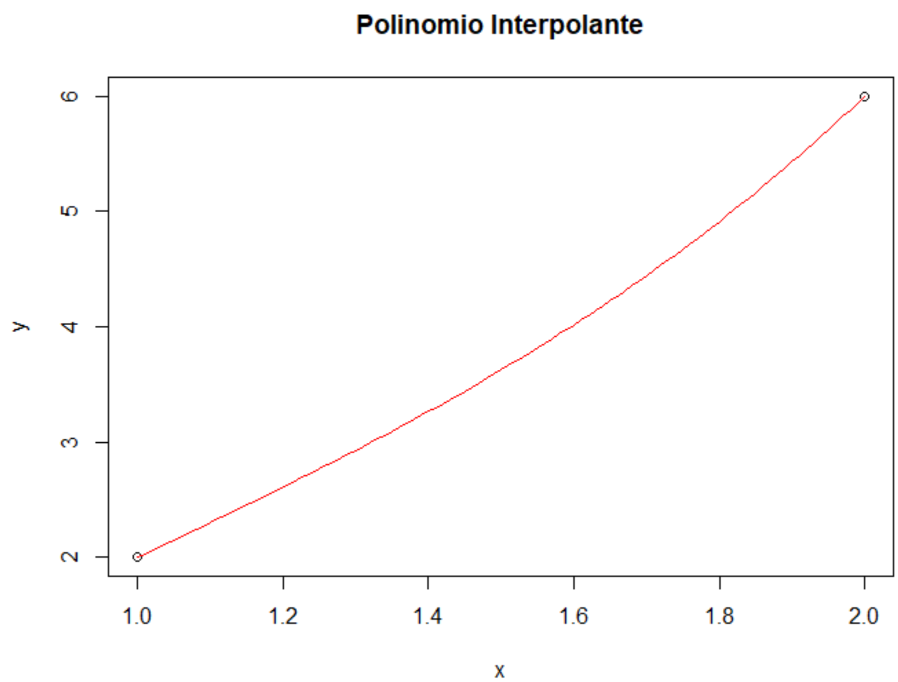


3. Construya un polinomio del menor grado que interpole una función $f(x)$ en los siguientes datos: $f(1) = 2; f(2) = 6; f'(1) = 3; f'(2) = 7; f''(2) = 8$ Basandonos en estos datos, se crea la tabla de diferencias divididas: $f(1) = 2; f'(1) = 0; f[1,1] = 3; f[1,1,2] = 1; f[1,1,2,2] = 2; f[1,1,2,2,2] = -1; f(1) = 2; f[1,2] = 4; f[1,2,2] = 3; f[1,2,2,2] = 1; f(2) = 6; f'(2) = 0; f[2,2] = 7; f[2,2,2] = 4; f(2) = 6; f[2,2] = 7; f(2) = 6$

   Después, encontramos el polinomio de interpolación por medio de la fórmula de Newton generalizada: $P(x) = f[1] + f[1,1](x-1) + f[1,1,2](x-1)^2 + f[1,1,2,2](x-1)^2(x-2) + f[1,1,2,2,2](x-1)^2(x-2)^2$. En donde los coeficientes son los elementos de la primera fila de la tabla de diferencias divididas junto con $(x-x_0) + ... + (x-x_0)^2(x-x_1)^2...(x-x_n)$.

   Finalmente, al simplificar queda: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

```
x<-c(1,2)
y<-c(2,6)
plot(x,y,type="p" , main = "Polinomio Interpolante")
p<-function(x) x^3-3*x^2+6*x-2
plot(p,xlim = c(1,2),ylim = c(0,6),type="l",add=TRUE,col = "red")
```



4. Con la función $f(x) = \ln x$ construya la interpolación de diferencias divididas en $x_0 = 1; x_1 = 2$ y estime el error en $[1, 2]$.

   Con la función $f(x) = \ln x$ se debe contruir la intrpolación de diferencias divididas en $x_0 y x_1$ y estimar el error en $[1, 2]$: $x_0 = 2$ Con dos puntos de genera un polinomio interpolante de a lo sumo primer grado. Este está dado por la siguiente ecuación: $P(x) = f[x_0] + f[x_0](x - x_0)$ De esta forma entonces el polinomio está dado por: $P(x) = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0)$. Al remplazar, el polinomio interpolante es:

$$P(x) = \ln 1 + \frac{\ln 1 - \ln 2}{1 - 2}(x - 1) \tag{4}$$

   Como tenemos dos puntos (x_0, x_1) con $x_0 < x_1$ el error de la interpolación lineal está dado por: $f(x) - P(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(E(x))$ Entonces el error está acotado por: $|f(x) - P(x)| <= M2\frac{(x_1 - x_0)^2}{8}$ por lo tanto $|f(x) - P(x)| <= 1/8$.

```
P<-function(x) log(1)+((log(1)-log(2))/(1-2))*(x-1)
print(abs(log(1.5)-P(1.5)))
```

Luego, en el caso de $x = 1{,}5$ el error es de 0.05889152

5. Utilice la interpolación de splines cúbicos para el problema de la mano y del perrito.

   un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios. En los problemas de interpolación, se utiliza a menudo la interpolación mediante splines porque da lugar a resultados similares requiriendo solamente el uso de polinomios de bajo grado, evitando así las oscilaciones.

   Interpolación segmentaria cuadratica

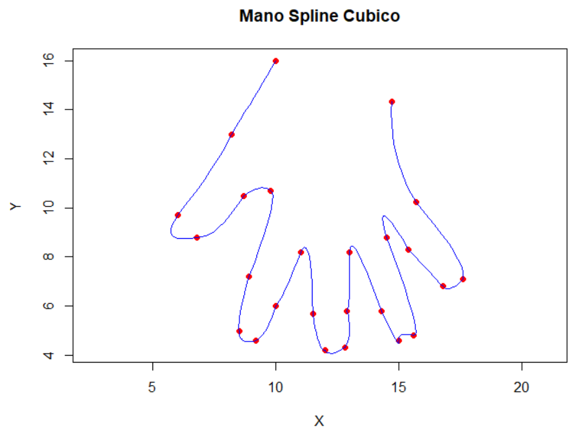
   En este caso, cada polinomio $P(x)$ a través del que construimos los Splines en $[m, n]$ tiene grado 3. Esto quiere decir, que va a tener la forma:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{5}$$

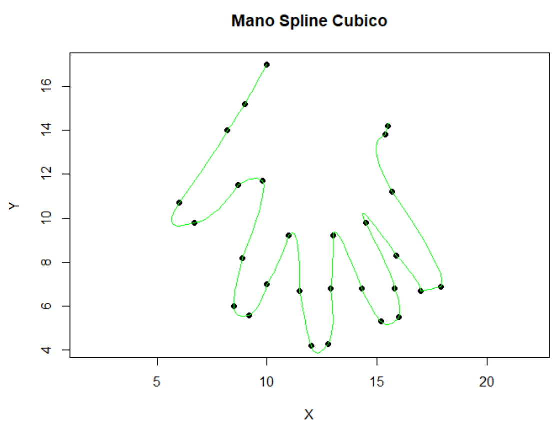
   En este caso vamos a tener cuatro incógnitas por cada intervalo (a, b, c, d), y una nueva condición para cada punto común a dos intervalos, respecto a la derivada segunda:

   - Que las partes de la función a trozos $P(x)$ pasen por ese punto. Es decir, que las dos $P_n(x)$ que rodean al $f(x)$ que queremos aproximar, sean igual a $f(x)$ en cada uno de estos puntos.
   - Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos "lados"de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.
   - Que la derivada segunda en un punto siempre coincida para ambos "lados"de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

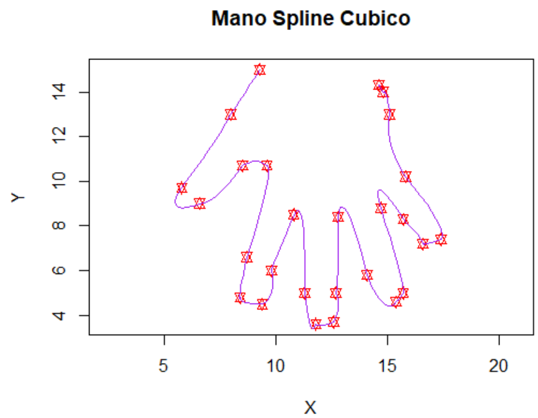
   Para el calculo del error se calculo del error se calculo la distandia de los puntos deseados hasta los puntos entregados por la función.



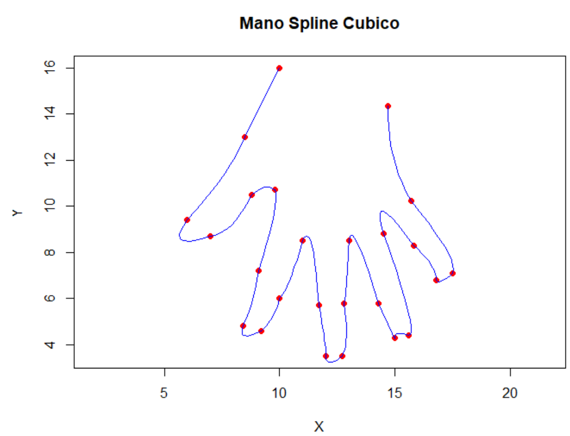
Mano asignada a Victor.



Mano asignada a Estefanía.



Mano asignada a Oscar.



Mano asignada a Nicolás.

6. Sea $f(x) = tan(x)$ utilice la partición de la forma $x_1 = \delta k$ para implementar una interpolación para $n = 10$ puntos y encuentre el valor de δ que minimice el error.

7. Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$ utilice el método de lagrange y determine el tamaño del paso que me produzca un error por debajo de 10^-5.¿Es posible utilizar el polinomio de Taylor para interpolar en este caso?

   Sustituir la función original por $T_n^[f(x)]$ en un punto de la función

Cuanto más nos alejamos de este punto inicial de pegado, más error se cometerá en la estimación. Pero, el error se minimiza aumentando el grado del polinomio

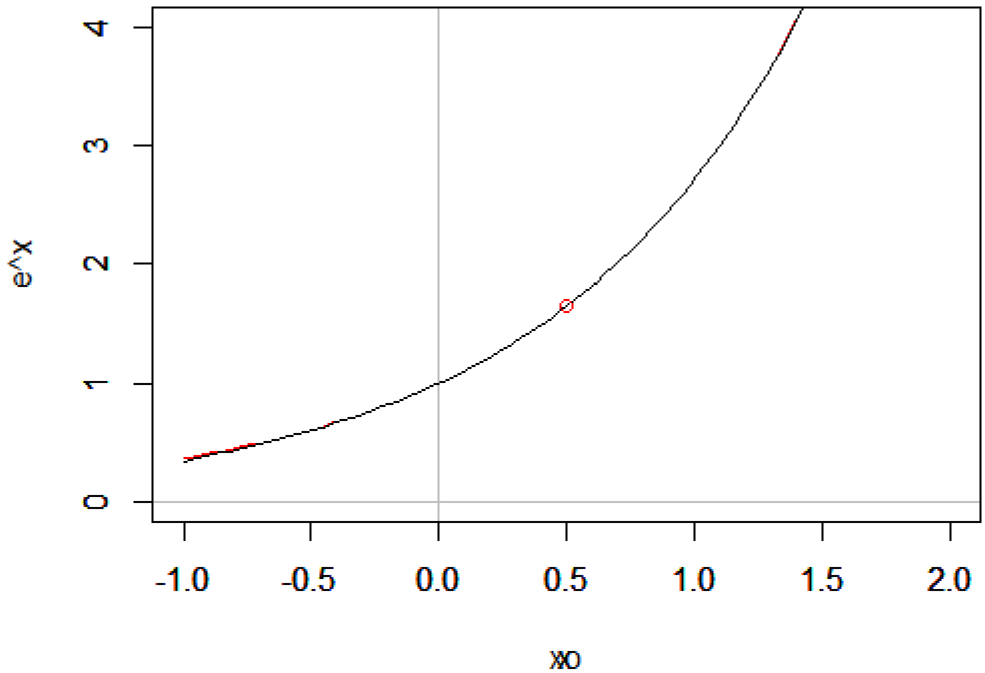
- Paso 1: Elegir el punto del polinomio de pegado original x_0
- Paso 2: Aplicar la expresión del polinomio de Taylor

$$T[f(x), x_0] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{6}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{7}$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^{(2)} + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{(n)} \tag{8}$$

Entre más términos tenga el polinomio, más se ajustará a la función original



e^x en el intervalo $[0, 1]$ interpolada con taylor

8. Considere el comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación virial de estado. Los siguientes datos para el nitrógeno N_2.

$T(K)$	100	200	300	400	450	500	600
$B(cm^3)/mol$	-160	-35	-4.2	9.0	?	16.9	21.3

Donde T es la temperatura $[K]$ y B es el segundo coeficiente virial. El comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación virial de estado:

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + ... \tag{9}$$

Donde P es la presión, V el volumen molar del gas, T es la temperatura Kelvin y R es la constante de gas ideal. Los coeficientes $B = B(T)$, $C = C(T)$, son el segundo y tercer coeficiente virial, respectivamente. En la práctica se usa la serie truncada para aproximar.

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} \tag{10}$$

En la siguiente figura se muestra como se distribuye la variable B a lo largo de la temperatura.

a) Determine un polinomio interpolante para este caso.

Para calcular el polinomio interpolante se utilizó la función poly_calc del paquete polinomF. Se decidió omitir el primer punto $(100, -160)$ porque se consideró como un valor atípico, haciendo que el polinomio no se generará de la manera correcta.

```
#install.packages("Matrix")
#library(Matrix)
#install.packages("PolynomF")
#library(PolynomF)

T = c(100,200,300,400,500,600)
B = c(-160,-35,-4.2,-9,16.9,21.3)

res = poly_calc(T,B)
res
```

Entonces, el polinomio interpolante resultante es:

$$y = (-4,9375e{-}08)x^4 + (8,0175e{-}05)x^3 - (0,04678125)x^2 + (11,67475)x - 1061,1 \tag{11}$$

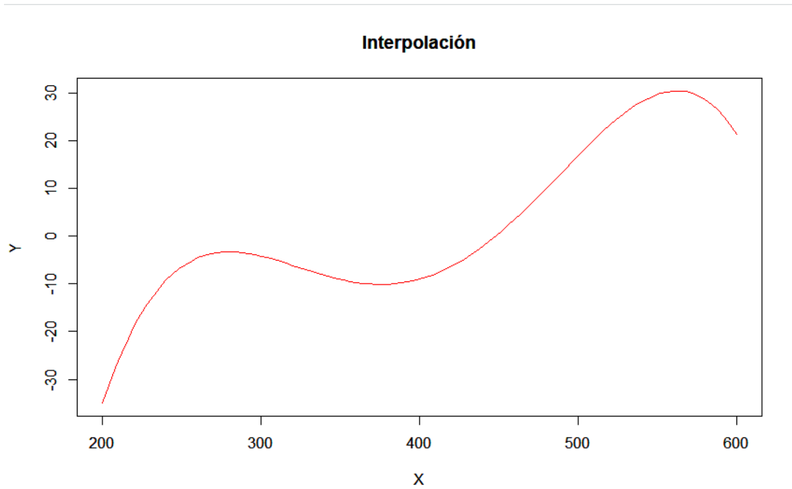
b) Utilizando el resultado anterior calcule el segundo y tercer coeficiente virial a $450K$

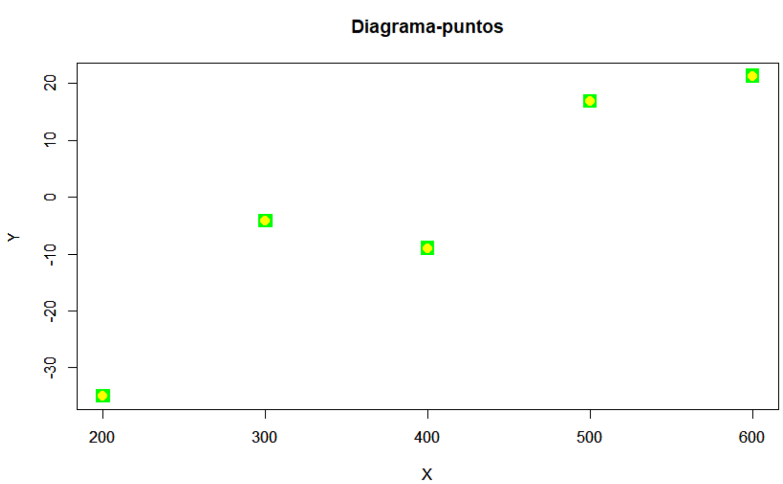
```
#Punto B
cat("El segundo y tercer coeficiente virial en 450 es",res(450),"\n")
```

Al evaluar el polinomio con $x = 450$ se obtuvo como resultado 0.59765625.

c) Grafique los puntos y el polinomio que ajusta.

```
#Punto C
tablaInterpolada = data.frame(seq(200, 600, by=100),res(seq(200, 600, by=100)))
tablaInterpolada
tablaPuntos = data.frame(T,B)
tablaPuntos
#plot(tablaPuntos,pch=15, cex=2, col = "green", xlab="X",ylab="Y")
par(new = TRUE)
#plot(tablaInterpolada, pch=20, cex=2, col = "yellow",xlab="X", ylab="Y", main="Diagrama-puntos")
par(new = TRUE)
curve(res,add=T,from =200, to = 600,col = "red", xlab="X", ylab="Y", main="Interpolación")
```





d) Utilice la interpolación de Lagrange y escriba el polinomio interpolante.
Al ultilizar la interpolacion de Lagrange se obtuvo la siguiente tabla de datos:

$$L_0 = \frac{(x-300)(x-400)(x-500)(x-600)}{(200-300)(200-400)(200-500)(200-600)} \tag{12}$$

$$L_1 = \frac{(x-200)(x-400)(x-500)(x-600)}{(300-200)(300-400)(300-500)(300-600)} \tag{13}$$

$$L_2 = \frac{(x-200)(x-300)(x-500)(x-600)}{(400-200)(400-300)(400-500)(400-600)} \tag{14}$$

$$L_3 = \frac{(x-200)(x-300)(x-400)(x-600)}{(500-200)(500-300)(500-400)(500-600)} \tag{15}$$

$$L_4 = \frac{(x-200)(x-300)(x-400)(x-500)}{(600-200)(600-300)(600-400)(600-500)} \tag{16}$$

Después de tener las L, se procede a multiplicar con su respectivo Y. Finalmente, se suman todas las L obteniendo como resultado el polinomio:

$$y = (-4,37505e{-}09)x^4 + (8,175e{-}06)x^3 - (0,00583)x^2 + (1,95475)x - 251,1 \tag{17}$$

e) Compare su resultado con la serie truncada (modelo teórico), ¿cuál aproximación es mejor? ¿por qué?.

Al realizar la interpolación por diferentes métodos se puede mirar los cambios que tienen estos métodos y cual de ellos es mas cercano a los datos reales

$T(K)$	DatosReales	Interpolados	Lagrange
200	-35.0	-35.0	-35.0
300	-4.2	-4.2	-4.1
400	-9.0	-9.0	9.2
450	?	0.6	13.5
500	16.9	16.9	17.2
600	21.3	21.3	21.7

Como podemos observar en la tabla comparativa de los datos obtenidos por las interpolaciones anteriores, podemos notar como la interpolación común representa correctamente el comportamiento dde los datos reales.

Por otro lado, por medio de la interpolación de Lagrange se puede notar que si bien llega a tener unos puntos muy cercanos a los reales (problemas dados por errores de redondeo de valores), existen otros puntos los cuales se alejan bastante de los datos verdaderos.