Práctica 2: Aproximación de funciones.

Antes de implementar la práctica, responded a las siguientes preguntas.

1. Si una función es periódica ¿Puede estar bien interpolada por un polinomio de Hermite?
2. En qué condiciones pensáis que un polinomio de Hermite puede interpolar bien una función periódica.
3. ¿Qué método pensáis que podría ser mejor para implementar funciones periódicas?

Hasta ahora hemos empleados polinomios para aproximar funciones, sin embargo, existen otras bases de funciones que no son polinomios, por ejemplo, la función exponencial compleja $\mathrm{g(x) = e^{-2\pi ihx}}$, que, por la fórmula de Euler ($\mathrm{e^{it} = \cos(t) + i\,sen(t)}$) es una función periódica, siendo h la frecuencia.

Quisiéramos, por tanto, expresar una función f como $\mathrm{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-2\pi i h_k x}}$, es posible demostrar que

$$\mathrm{c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i h_k x} dx}$$

Apartado 1: Considerar la función $\mathrm{f(x) = \cos^2(x) - \sin(x)}$ ¿Es f una función periódica? Considerad ahora los valores de x, x=i*(π/32), i=0, …, 640, dibujad la función para esos valores de x.

Apartado 2: Implementad una función coefs(f,x) que calcule los coeficientes $\mathrm{c_n, n = 0, \ldots, 640}$ usando sumas de Riemann y tomando como valores de $\mathrm{h_k = \frac{32n}{640\pi}}$.

Es decir,

$$\mathrm{c_n = \frac{\pi}{32}\sum_{k=0}^{640} f(x_k)*e^{2\pi i \frac{32n}{640\pi} x_k} = \frac{\pi}{32}\sum_{k=0}^{640} f(x_k)*e^{i\frac{n}{10} x_k}}, \qquad \mathrm{n = 0, \ldots, 640}$$

La función devolverá un array con los valores $\mathrm{c_n, n = 0, \ldots, 640}$ y tomará como argumentos:

f: función cuyos coeficientes queremos calcular

x: valores de la variable x

Sugerencia: Observad que el cálculo anterior se puede implementar como el producto de una matriz por un vector.

Pintad una gráfica con el módulo de los coeficientes (ya que pueden ser valores complejos).

Apartado 3: Implementad una función eval(coefs,x) que implemente la fórmula de aproximación mediante funciones periódicas

$$f(x) = \frac{1}{640}\sum_{n=0}^{640} c_n e^{-2\pi i \frac{32\mathrm{n}}{640\pi} x} = \frac{1}{640}\sum_{n=0}^{640} c_n e^{-i\frac{\mathrm{n}}{10} x}$$

donde:

coefs: coeficientes devueltos por la función coefs
x: punto a evaluar la aproximación

Calcular el valor aproximado en los puntos, x=2,5 x=0, x=.01, x=.1, x=π y calcular el error absoluto en esos puntos. Por los datos obtenidos ¿Estamos ante un método de interpolación o de regresión?

Preguntas y ejercicios opcionales.

1. ¿Por qué en la fórmula $c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ikx}dx$, tomamos como valores de k al aproximar mediante sumas de Riemann números de la forma $h_n = \frac{32n}{640\pi}$?.
   Nota: La respuesta no es fácil, y tiene que ver con la razón por la cual los Compact Disc tienen una tasa de muestreo de 44.100 Hz, os tocará tirar un poco de bibliografía.
2. Para calcular el valor de la integral anterior hemos usado sumas de Riemann, Probad a calcular la integral anterior mediante métodos un poco mejores, como, por ejemplo, la regla de trapecio, o incluso un método de Gauss. ¿Obtenéis mejores aproximaciones?
3. Aproximad ahora la función mediante Splines, Smooth Splines y polinomios de Legendre. ¿Con cuál de los cuatro métodos obtenéis una mejor aproximación?