## Ejercicios: Aproximación de funciones.

## Parte 1: Interpolación de Lagrange.

**1.** Para las funciones dadas f(x) sean $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$, y $x_2 = 0.9$. Construir polinomios de interpolación de Lagrange para calcular f(0.45) y encuentre el error absoluto.
**a.** $f(x) = \cos x$
**b.** $f(x) = \sqrt{1 + x}$
**c.** $f(x) = \ln(x + 1)$
**d.** $f(x) = \tan x$

2. Para las funciones dadas f(x) sean $x_0 = 1$, $x_1 = 1.25$, y $x_2 = 1.6$. Construir polinomios de interpolación de Lagrange para calcular f(1.4) y encuentre el error absoluto.
**a.** $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$
**b.** $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
**c.** $f(x) = \log_{10}(3x - 1)$
**d.** $f(x) = e^{2x} - x$

3. Use polinomios de interpolación de Lagrange para aproximar cada uno de los siguientes conjuntos de datos.
a. $f(8.4)$ si $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$
b. $f(-1/3)$ si $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$
c. $f(0.25)$ si $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$
d. $f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

4. Los datos para el ejercicio anterior se generaron usando las siguientes funciones. Use la fórmula del error para encontrar una cota del error y compárela con el error real.

a. $f(x) = x \ln x$

b. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$

c. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$

d. $f(x) = \operatorname{sen}(e^x - 2)$

5. Si P3(x) es el polinomio de interpolación para los datos (0, 0), (0.5, y), (1, 3) y (2, 2). El coeficiente de $x^3$ en P3(x) es 6. Encuentre y.

6. Construir los polinomios de interpolación de Lagrange para las siguientes funciones y encuentre una cota para el error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

a. $f(x) = e^{2x} \cos 3x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$

b. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$, $x_0 = 2.0$, $x_1 = 2.4$, $x_2 = 2.6$

c. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.3$, $x_3 = 1.4$

d. $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1.0$

**Parte II: Método de Newton**

1. Aplicar el método de Newton para encontrar los polinomios de interpolación correspondientes. Aproximar el valor especificado usando cada uno de los polinomios.

a. $f(8.4)$ si $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$
b. $f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

2. Utilice la fórmula de diferencias de Newton para construir los polinomios de interpolación para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.
a. $f(-1/3)$ si $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$
b. $f(0.25)$ si $f(0.1) = -0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

3.

a. Utilizar el algoritmo de Newton para construir el polinomio interpolante de grado tres para los puntos espaciados de manera desigual que se dan en la siguiente tabla:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| −0.1 | 5.30000 |
| 0.0 | 2.00000 |
| 0.2 | 3.19000 |
| 0.3 | 1.00000 |

b. Agregue $f(0.35)$ 5 0.97260 a la tabla y construya el polinomio interpolante de grado cuatro.

4.

a. Demostrar que los polinomios cúbicos

$$P(x) = 3 - 2(x + 1) + 0(x + 1)(x) + (x + 1)(x)(x - 1)$$
y
$$Q(x) = -1 + 4(x + 2) - 3(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(x + 1)(x)$$

Interpolan los datos

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −1 | 3 | 1 | −1 | 3 |

b. ¿Por qué la parte a) no viola la propiedad de unicidad de los polinomios de interpolación?

**Parte III: Splines**

1. Determine el spline cúbico natural S que interpola los datos f (0) = 0, f (1) = 1, y f (2) = 2.
2. Construya el spline cúbico natural para los siguientes datos.

**a.**

| *x* | *f (x)* |
|---|---|
| 8.3 | 17.56492 |
| 8.6 | 18.50515 |

**b.**

| *x* | *f (x)* |
|---|---|
| 0.8 | 0.22363362 |
| 1.0 | 0.65809197 |

**c.**

| *x* | *f (x)* |
|---|---|
| −0.5 | −0.0247500 |
| −0.25 | 0.3349375 |
| 0 | 1.1010000 |

**d.**

| *x* | *f (x)* |
|---|---|
| 0.1 | −0.62049958 |
| 0.2 | −0.28398668 |
| 0.3 | 0.00660095 |
| 0.4 | 0.24842440 |

3. Los datos en el ejercicio anterior se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los splines cúbicos construidos en dicho ejercicio para el valor determinado de x con el fin de aproximar f (x) y f'(x) y calcule el error real.
a. $f(x) = x \ln x$; aproxime f (8.4) y f '(8.4).
b. $f(x) = \mathrm{sen}(e^x - 2)$; aproxime f (0.9) y f '(0.9).
c. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$; aproxime f (−13) y f '(−13).
d. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$; aproxime f (0.25) y f '(0.25).
4. Un spline cúbico natural S se define mediante
*S(x)* =
$S0(x) = 1 + 2x - x^3$, si $0 \le x < 1$,
$S1(x) = 2 + b(x - 1) + c(x - 1)2 + d(x - 1)3$, si $1 \le x \le 2$.

Encontrar los valores de b c y d.

4.Construya un spline cúbico natural para aproximar $f(x) = \cos \pi x$ al usar los valores dados por f(x) en x 5 0, 0.25, 0.5, 0.75, y 1.0. Integre el spline sobre [0, 1] y compare el resultado para $\int_0^1 \cos \pi x \, dx = 0$. Use las derivadas del spline para aproximar f '(0.5) y f'' (0.5). Compare estas aproximaciones con los valores reales.

5. Construya un spline cúbico natural para aproximar $f(x) = e^{-x}$ al usar los valores dados por f(x) en 0, 0.25, 0.75 y 1.0. Integre el spline sobre [0, 1] y compare el resultado para $\int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}$.Use las derivadas del spline para aproximar f' (0.5) y f'' (0.5). Compare las aproximaciones con los valores reales.