Algebra lineal computacional

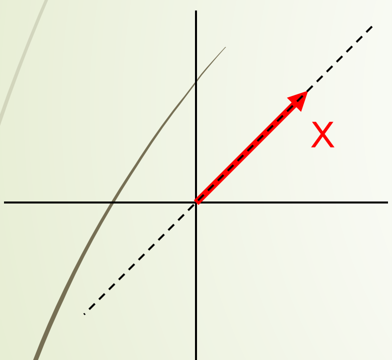
Carlos Aguirre Maeso

Escuela Politécnica superior

Autovalores y autovectores

Sea A_{nxn}; λ ***autovalor*** de A $\Leftrightarrow \exists\, x \neq 0\ tal\ que\ Ax = \lambda\, x$

x es ***autovector*** asociado a λ



$$\exists x \neq 0,\ Ax - \lambda\, x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists x \neq 0,\ Ax - \lambda\, Ix = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists x \neq 0,\ (A - \lambda\, I)x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\underbrace{\left| A - \lambda\, I \right|}_{\text{Polinomio característico}} = 0}_{\text{Ecuación característica}}$$

Autovalores y autovectores

Ejemplo

Calcular los autovalores y autovectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$\lambda_1=-4$, $\lambda_2=6$

$v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$v_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Autovalores y autovectores

Propiedades

$$(i)\quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = trA$$

$$(ii)\quad \left.\begin{array}{r} \lambda_1 \neq \lambda_2,\ x_1\ con\ autovalor\ \lambda_1 \\ x_2\ con\ autovalor\ \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1\ \ y\ \ x_2\ son\ l.i.$$

Diagonalización de matrices

$$A_{n\times n}\ simétrica \ \Leftrightarrow\ A = A^* \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

$$A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores: diagonalización

Si A simétrica entonces existen autovalores reales $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

con autovectores asociados $e_1, \cdots, e_n$ ortonormales tales que

$$A_{nxn} = \underbrace{\left(e_1 \,\middle|\, e_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, e_n \right)}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \\ \hline e_n' \end{pmatrix}}_{P'}$$

A=PDP*, siendo D diagonal y P ortogonal

(Toda matriz simétrica es diagonalizable)

Autovalores y autovectores: diagonalización

Ejemplo

Diagonalizar

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Ejecutad en Python:

```
import numpy as np

a=np.array([[3,-np.sqrt(2)],[-np.sqrt(2),2]])
l,v=np.linalg.eig(a)
print(l)
print(v)
```

Autovalores y autovectores: representación espectral

Sea $A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$

Si A es simétrica entonces existen autovalores reales

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ con autovectores ortonormales $e_1, \cdots, e_n$

tales que $A = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' + \cdots + \lambda_n e_n e_n'.$

Autovalores y autovectores: representación espectral

Ejemplo

Descomposición espectral de

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

- Sea $V \subset \mathbb{R}^p$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^p$

  si V es espacio vectorial,

  es decir, si $\forall u, v \in V \;\; y \; \forall a, b \in \mathbb{R}\,;\; au + bv \in V$

- Dado A = $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

$$span\ A \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \quad : c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Propiedades

$$(i)\;\; A \subset span\ A$$

$$(ii)\; span(A)\ es\ un\ subespacio$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Proposición_

$$v \perp u_i \quad i = 1, \cdots, n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v \perp span\{u_1, \cdots, u_n\}$$

Demostración

$$u \in span\{u_1, \cdots, u_n\}$$

$$\langle u, v\rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v, u_i\rangle = 0$$

∎

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Dado un conjunto de vectores l.i., se puede construir otro conjunto ortogonal que genere el mismo espacio.

Sean $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ linealmente independientes

$$v_1 = a_1$$

$$v_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$v_3 = a_3 - \frac{\langle a_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle a_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle} v_2$$

$$\vdots$$

$$v_n = a_n - \frac{\langle a_n,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} v_1 - \ldots - \frac{\langle a_n,v_{n-1}\rangle}{\langle v_{n-1},v_{n-1}\rangle} v_2$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Entonces:

1) $\text{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

2) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es ortogonal

3) $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ es ortonormal

Descomposición QR

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n) \quad \text{con} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \xrightarrow{Gram-Schmidt} \quad \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

$$Q = (y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n) \implies Q^* A = R \iff A = QR$$

Con Q matriz ortogonal (Q*Q=I) y R matriz triangular superior.

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $v_1 = a_1 \Longrightarrow y_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 0.3015 \\ 0.9045 \\ 0.3015 \end{pmatrix}$
- $v_2 = a_2 + \lambda v_1$

$$\lambda = -\frac{8}{11}$$

$$v_2 = a_2 - \frac{8}{11} v_1 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ 25 \end{pmatrix} \Longrightarrow y_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 0.4449 \\ -0.4132 \\ 0.7946 \end{pmatrix}$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

- $v_3 = a_2 + \lambda v_1 + \mu v_2$

$$\lambda = -\frac{10}{11}$$

$$\mu = -\frac{41}{990}$$

$$v_3 = a_3 - \frac{10}{11}v_1 - \frac{41}{990}v_2 = \frac{1}{990}\begin{pmatrix} 1496 \\ -187 \\ -935 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1496 \\ -187 \\ -935 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$y_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} 0.8433 \\ -0.1054 \\ -0.5270 \end{pmatrix}$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

$$Q = (y_1 \; y_2 \; y_3) = \begin{pmatrix} 0.3015 & 0.4449 & 0.8433 \\ 0.9045 & -0.4132 & -0.1054 \\ 0.3015 & 0.7946 & -0.5270 \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 0.3015 & 0.9045 & 0.3015 \\ 0.4449 & -0.4132 & 0.7946 \\ 0.8433 & -0.1054 & -0.5270 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$R = \begin{pmatrix} 3.3166 & 2.4121 & 3.0151 \\ 0 & 2.8604 & 1.3031 \\ 0 & 0 & 1.7920 \end{pmatrix}$$

$$A = QR$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Ejecutad ahora el siguiente código Python

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 2, 3],
              [3, 1, 2],
              [1, 3, 1]])
Q, R = np.linalg.qr(A)
print(Q)
print(R)
```

¿Se obtiene la misma solución que en el ejemplo?
¿Son correctas ambas soluciones?.

Matrices ortogonales

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrices ortogonales

- A_{nxn}; inversa A^{-1}: $A A^{-1} = A^{-1}A = I$.
- A' transpuesta de A.
- Q_{nxn} es ortogonal si $Q^*Q = QQ^* = I$.

(las columnas de una matriz ortogonal son vectores ortonormales)

Matrices ortogonales

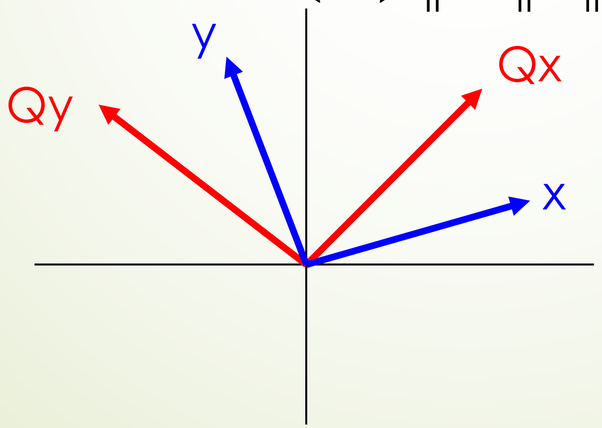
Propiedades

$$x, y \in \mathbb{R}^p; Q\ matriz\ ortogonal$$

$$(i) \quad \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(ii) \quad x \perp y \Rightarrow Qx \perp Qy$$

$$(iii) \quad \|Qx\| = \|x\|$$



Descomposición singular de una matriz

Dada la matriz A_{mxn}, A*A es cuadrada y simétrica; por tanto, diagonalizable.

λ_i es un ***valor singular*** de A, si λ_i^2 es autovalor de A*A.

Descomposición singular

Sea A una matriz *mxn*; $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ valores singulares de A.

Entonces existen matrices ortogonales U y V tales que:

$$A = U \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right) V$$

Descomposición en valores singulares

- A^*A es hermítica y semidefinida positiva
- Sus autovalores son reales no negativos $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ (pudiendo estar repetidos, pero ordenados de forma que los r primeros son no nulos y los $n-r$ últimos son nulos).
- $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ son los valores singulares de la matriz A.
- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto ortonormal de vectores propios de A^*A, dispuestos de forma que $A^*Av_i = \sigma_i^2 v_i$

$$\|Av_i\|_2^2 = v_i^* A^* A v_i = v_i^* \sigma_i^2 v_i = \sigma_i^2$$

- $Av_i = 0$ si $i \geq r+1$.

Descomposición en valores singulares

- Sea $V = (v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_n)$ y definamos

$$u_i = \sigma_i^{-1} A v_i \qquad 1 \leq i \leq r$$

- Los vectores u_i constituyen un sistema ortonormal.

- Eligiendo vectores adicionales $u_{r+1}, \ldots, u_m$ de tal forma que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ constituya una base ortonormal de $\mathbf{C}^m$ y construyendo las matrices $U_{m\times n}(u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m)$ y la matriz diagonal $\Sigma_{m\times n}$ con $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ se tiene que

$$A = U\Sigma V^*$$

- *Toda matriz compleja A, de orden $m \times n$ puede ser factorizada de la forma $A = U\Sigma V^*$ donde U es una matriz unitaria $m \times m$, Σ una matriz diagonal $m \times n$ y V una unitaria de orden $n \times n$.*

Descomposición en valores singulares

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 24 & 24 & 24 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

$$P_{A^t A}(\lambda) = \det(\lambda I - A^T A) = \lambda^3 - 84\lambda^2 + 864\lambda = \lambda(\lambda - 12)(\lambda - 72)$$

Descomposición en valores singulares

- $\lambda_1 = 72 \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \sqrt{72} = 8.4853$
- $\lambda_2 = 12 \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ -0.7071 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \sqrt{12} = 3.4641$
- $\lambda_3 = 0 \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4082 \\ -0.8165 \\ 0.4082 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = 0$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8.4853 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4641 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ 0.5774 & 0 & -0.8165 \\ 0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \end{pmatrix}$$

Descomposición en valores singulares

- $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4082 \\ 0.4082 \\ 0 \\ 0.8165 \end{pmatrix}$
- $u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4082 \\ 0.4082 \\ -0.8165 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ base de $\mathbf{R}^4 \implies \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8165 \\ 0 \\ -0.4082 \\ -0.4082 \end{pmatrix} \qquad u_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8165 \\ 0.4082 \\ -0.4082 \end{pmatrix}$$

Descomposición en valores singulares

$$U = \begin{pmatrix} 0.4082 & -0.4082 & 0.8165 & 0 \\ 0.4082 & 0.4082 & 0 & 0.8165 \\ 0 & -0.8165 & -0.4082 & 0.4082 \\ 0.8165 & 0 & -0.4082 & -0.4082 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8.4853 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4641 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ 0.5774 & 0 & -0.8165 \\ 0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \end{pmatrix}$$

Verificándose que $A = U\Sigma V^T$

Descomposición en valores singulares

```
import numpy as np


A=np.array([[1,2,3],[3,2,1],[-2,0,2],[4,4,4]])

u,s,vh=np.linalg.svd(A)

print(u.shape, s.shape, vh.shape)


print(u)

print(s)

print(vh)


smat = np.zeros((4, 3))

smat[:3, :3] = np.diag(s)

print(smat)

print(np.allclose(A, np.dot(u, np.dot(smat, vh))))
```