Stochastic Systems --- Discrete Time Systems

Ejercicios --- Primer conjunto

Fecha de entrega: 12 Noviembre 2020

I

Se dibuja un cuadrado unitario (de lado 1) con un circulo unitario (de diámetro 1) inscrito. Se generan puntos aleatorios con distribución uniforme dentro del cuadrato.

i) ¿Cuál es el universo de eventos de este experimento?

ii) ¿Cuál es la probabilidad que un punto generado esté incluido dentro del círculo?

iii) Usar la respuesta del punto ii) para escribir un programa que calcule π con tres cifras significativas. Entregar el código (es corto...), el valor conseguido (primera cinco cifras decimales), explicar el criterio de parada que se ha usado para determinar cuando terminar el cálculo (sin usar el valor de π, claro...) y el número de puntos que se han generado.

II

Una caja contiene r pelotas rojas y b pelotas azules, $r \geq 1$ and $b \geq 3$. Se sacan tres pelotas de la caja (sin remplazar las que se han sacado). Usando el concepto de probabilidad condicional, calcular la probabilidad que las tres pelotas salgan en secuencia *azul,rojo,azul*.

III

Como ejercicio de probabilidad, este es muy fácil, pero es muy gracioso, me gusta, y quiero preguntarlo. Se trata del juego de las tres puertas.

Hay tres puertas, y detrás de una de ellas hay un premio. El presentador os pide elegir una, sin abrirla. Después, abre una de las otras dos, y os muestra que allí no está el premio. Finalmente os pide si queréis cambiar la puerta o confirmar la elección inicial.

¿Cuál es la decisión que maximiza la probabilidad de ganar, y que probabilidad de ganar os da?

IV

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(\pi x) & \texttt{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \texttt{en caso contrario} \end{cases}$$

¿Es una densidad de probabilidad?

V Dada una cadena de Markov con un conjunto finito de estados $\{1, \ldots, M\}$, sea $p_m(t)$ la probabilidad que la cadena esté en el estado m al instante t. Se defina el vector

$$p(t) = [p_1(t), \ldots, p_m(t)]' \tag{1}$$

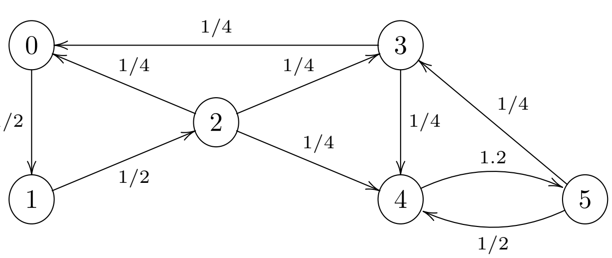
i) Usar la definición de la matrix de transición $\mathbf{P}$ para demostrar que

$$p'(t+1) = p'(t)\mathbf{P} \tag{2}$$

Y por tanto, si λ es la distribución inicial

$$p'(t) = \lambda'\mathbf{P}^t \tag{3}$$

Consideremos la siguiente cadena de Markov



(4)

Se asuma que cada estado tiene un "self-loop" con la probabilidad necesaria para que la suma de las probabilidades en salida sea 1. Escribir un programa (son como mucho 10 líneas en python... nada de que preocuparse) para contestar a las preguntas siguientes:

ii) Considerando $\lambda = [1, 0, 0, 0, 0, 0]'$ (es decir: se empieza a $t = 0$ en el estado 0), calcular $p(2)$, $p(10)$, $p(100)$.

iii) repetir el cálculo de $p(2)$, $p(10)$, $p(100)$ con $\lambda = [0, 0, 1, 0, 0, 0]'$.

iv) repetir el cálculo de $p(2)$, $p(10)$, $p(100)$ con $\lambda = [0, 0, 0, 0, 0, 1]'$.

v) ¿Cómo cambian los tres vectores $p(2)$, $p(10)$, $p(100)$? ¿Cómo cambia su dependencia de las condiciones iniciales? ¿Qué implica esto para $p(\infty)$?