Stochastic Systems --- Discrete Time Systems

Ejercicios --- Conjunto final

Fecha de entrega: 27 Noviembre 2020

I.
En los apuntes hay el ejemplo del *gambler's ruin* como cadena de Markov. Hacer un gráfico del número medio de jugadas que el jugador puede hacer antes de arruinarse en función del dinero inicial. En cada jugada se juega 1 Euro, y el juego es ecuo (el jugador tiene una probabilidad 1/2 de ganar).

Estimar media y varianza con 20 ejecuciones considerando un dinero inicial de $1, 2, \ldots, 50$ Euros. Indicar media y varianza. ¿Cómo varian la media y la varianza cuando aumenta el dinero inicial?

II. Indicar cuales de las siguientes matrices, si usadas como dunámica de un sistema a tiempo discreto son

a. stable (todos los autovalores λ tienen $|\lambda| < 1$)

b. inestable (hay por lo menos un autovalor λ con $|\lambda| > 1$)

c. marginal (hay por lo menos un autovalor λ con $|\lambda| = 1$ y los demás tienen $|\lambda| < 1$)

d. oscilantes (hay por lo menos un autovalor λ con $|\lambda| = -1$ y los demás tienen $|\lambda| < 1$)

Indicar los autovalores y los autovectores correspondientes a las componentes estables, inestables, marginales y oscillantes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.175 & 0.125 & 0.725 & -0.225 \\ 0.125 & 0.175 & -0.225 & 0.725 \\ 0.725 & -0.225 & 0.175 & 0.125 \\ -0.225 & 0.725 & 0.125 & 0.175 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.30 & -0.30 & 0.95 & -0.45 \\ -0.30 & 0.30 & -0.45 & 0.95 \\ 0.95 & -0.45 & 0.30 & -0.30 \\ -0.45 & 0.95 & -0.30 & 0.30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.05 & 0.70 & -0.20 \\ -0.05 & 0.05 & -0.20 & 0.70 \\ 0.70 & -0.20 & 0.05 & -0.05 \\ -0.20 & 0.70 & -0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.125 & 0.775 & -0.025 \\ -0.125 & -0.125 & -0.025 & 0.775 \\ 0.775 & -0.025 & -0.125 & -0.125 \\ -0.025 & 0.775 & -0.125 & -0.125 \end{bmatrix}$$

III. Considerando el sistema dinámico

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}u_t + w_t \\ z_t &= \mathbf{C}x_t + v_t \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.150 & 0.150 & 0.700 & -0.200 \\ 0.150 & 0.150 & -0.200 & 0.700 \\ 0.700 & -0.200 & 0.150 & 0.150 \\ -0.200 & 0.700 & 0.150 & 0.150 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [1.0,\ 1.0,\ 1.0,\ 1.0]' \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.0, 0.0, 0.0, 0.0 \\ 0.0, 1.0, 0.0, 0.0 \end{bmatrix}$$

w es un ruido gaussiano con media cero y desviación estándar igual a 10, v es un ruido gaussiano con media cero y desviación estándar definida a continuación.

Crear un filtro de Kalman para estimar el estado de este sistema y hacer un gráfico del error

$$\sum_{k=1}^{t} (\hat{x}_{t,k} - x_{t,k})^2 \tag{1}$$

por $t = 1, \ldots, 100$ en los dos casos en que la desviación estándar de v_t sea 1.0 o 10.0.

Note. La presencia de $u + t$ supone un pequeño cambio en la ecuación que calcula $\bar{x}_{t+1}$. La recursión del filtro es:

Compute the Kalman Gain	$K_t = \bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}'(\mathbf{C}\bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}' + \mathbf{R})^{-1}$
Update the estimate	$\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t(z_t - \mathbf{C}\bar{x}_t)$
Update the covariance	$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - K_t\mathbf{C})\bar{\mathbf{P}}_t$
Compute the priors	$\bar{x}_{t+1} = \mathbf{A}\bar{x}_t + \mathbf{B}u_t$
	$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_t\mathbf{A}' + \mathbf{Q}$

La ecuación de K_t supone una inversión de una matriz. En este caso de trata de una matrix 2×2, por tanto no debería suponer problemas. Se puede hacer a mano o usando numpy. También se puede transformar la ecuación en un sistema lineal

$$K_t(\mathbf{C}\bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}' + \mathbf{R}) = \bar{\mathbf{P}}_t\mathbf{C}'$$

donde K_t es la icógnita. Esta manera de calcular es en general más estable, pero en este caso lo más sencillo es probablemente invertir la matrix.

Los ruidos son gaussianos con complnentes independientes e identicamente distribuidas, esto quiere decir que las matrices $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ tienen la forma $\sigma^2\mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matrix identidad y σ^2 la variancia (¡Ojo! el valor que os doy en el enunciado es la deviación estándar, y no la varianza)