Regiones de Estabilidad

Regiones de Estabilidad

Consideremos el problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{aligned} &u' = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ &u(0) = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Definición 1 (Regiones de estabilidad)**.** Dado un método numérico para EDO's donde u_n denota la aproximación a la solución de (1) en tiempo t_n con paso $h > 0$ constante, entonces definimos la región de estabilidad $\mathcal{R}$ como

$$\mathcal{R} = \{z = \lambda h \in \mathbb{C} \ : \ u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Ejemplo: Método de Euler:

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) = u_n(1 + \lambda h) = (1 + \lambda h)^{n+1}$$

Entonces $\mathcal{R}_{\text{Euler}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |1 + z| < 1\}$

Definición 2 (A-estable)**.** Un método numérico es A-estable (absolutamente estable) si

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) < 0\} \subseteq \mathcal{R}$$

A-estabilidad de Métodos Runge-Kutta

Sea el método Runge-Kutta $RK(A, b)$ dado mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} U_i =& u_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_j h, U_j), \quad i = 1, \dots, s, \\ u_{n+1} =& u_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j h, U_j) \end{aligned}$$

Para el problema (1), nos quedaría

$$U = e \otimes u_n + \lambda h A U \tag{2}$$

$$u_{n+1} = u_n + \lambda h b^T U \tag{3}$$

donde $U = (U_1, ..., U_s)^T$ y $e = (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^s$. De (2), se tiene que

$$U = (I - \lambda h A)^{-1} e \otimes u_n,$$

e introduciendo esta fórmula en (3) tenemos

$$u_{n+1} = (1 + \lambda h b^T (I - \lambda h A)^{-1} e) u_n,$$

dado que u_n es escalar.

Definición 3. Dado un método RK, se define la función de estabilidad del método Runge-Kutta o función de amplificación

$$F_{\text{est}}(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e.$$

Obsérvese que $u_n = (F_{\text{est}}(\lambda h))^n$. De lo que se sigue inmediatamente que la región de estabilidad para los métodos Runge-Kutta viene definida por:

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |F_{\text{est}}(z)| < 1\}$$

Guión de la Práctica:

Programar la función

```
function F=Fest_RK(x,y,A,b,c)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Calcula la función
%        z=x+1i*y
%       |F_est(z)|-1=|1+zb^T(I-zA)^{-1}e|-1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Dibujar las regiones de estabilidad utilizando el comando

```
ezplot(@(x,y)Fest_RK(x,y,A,b,c),[-5,2,-3,3])
```

Comentarios: Para realizar esta práctica se puede implementar todas las funciones o ficheros .m auxiliares que se necesiten aparte de los citados aquí.

Ejercicios:

1. Representar las regiones de estabilidad para los diferentes métodos Runge-Kutta explícitos de la hoja de Runge-Kutta explícitos. Comprobar que para dos métodos distintos del mismo orden las regiones de estabilidad coinciden. Probar con RK de orden 1,2,3,4.

2. Representar las regiones de estabilidad para los métodos Runge-Kutta implícitos de los que habíamos dado el tablero en la hoja de Runge-Kutta implícitos.

3. Aportar conclusiones relacionando los resultados numéricos obtenidos con lo visto en teoría.