Práctica 1. Método de Euler y Runge-Kutta explícitos

Guión:

En estas notas implementaremos en MATLAB el método de Euler y métodos Runge-Kutta explícitos para resolver correctamente el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{aligned} &u'(t) = f(t, u(t)), \qquad t \in (t_0, T), \\ &u(t_0) = u_0 \end{aligned}$$

1. Método de Euler

La ecuación modificada asociada al PVI es

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

con

$$h = \frac{T - t_0}{N}.$$

En primer lugar, vamos a implementar la función **euler.m**:

```
function [u,t]=euler(f,N,t0,T,u0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Esta función resuelve el problema de valor inicial
%       u'=f(t,u)
%       u(t0)=u0
% utilizando el método de Euler
%
%           [u,t]=euler(N,t0,T,u0)
%
%  Variables de Entrada:
%
%       f: vector columna. función que rige el sistema de EDO,
%          tiene dos argumentos f(t,u) donde t es escalar
%          y u vector columna.
%       N: número de pasos en los que dividimos el intervalo de
%          integración
%       t0: tiempo inicial
%       T:  tiempo final
%       u0: vector columna. Dato inicial
%
%  Variables de Salida:
%       u: matriz de length(u0) x N que contiene la solución
%       t: vector de tiempos
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

2. Método de Runge-Kutta explícito

Queremos ahora construir una función que nos permita resolver un método Runge-Kutta explícito general de s etapas:

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

donde

$$k_1 = f(t_n + c_1 h, u_n)$$

y para $i > 1$

$$k_i = f(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad i = 2, \ldots, s.$$

1. Implementar la función **RKexplicito.m**:

```
function [u,t]=RKexplicito(f,T,t0,N,u0,b,c,A)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Esta función resuelve el problema de valor inicial
%       u'=f(t,u)
%       u(t0)=u0
% utilizandodo un método Runge-Kutta explícito
%
%       [u,t]=RKexplicito(f,T,t0,N,u0,b,c,A)
%
%  Variables de Entrada:
%
%       f: vector columna. función que rige el sistema de EDO,
%          tiene dos argumentos f(t,u) donde t es escalar
%          y u vector columna.
%       N: número de pasos en los que dividimos el intervalo de
%          integración
%       t0: tiempo inicial
%       T:  tiempo final
%       u0: vector columna, dato inicial
%       b,c,A: coeficientes del tablero de BUTCHER.
%              A: matriz cuadrada de orden s
%         c: vector columna de orden s
%    b: vector fila de orden s
%
%  Variables de Salida:
%
%       u: matriz de length(u0) x length(t) que contiene la solución
%       t: vector de tiempos
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Algunos tableros de Butcher de Runge-Kutta explícitos:

- Método de Runge (1895) de orden 2:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

- Método de Heun de orden 2:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

- Método de Heun de orden 3:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

- Método de Kutta (1905) de orden 4:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

- Método de los 3/8 de orden 4:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

3. Ejercicios:

1. Utilizar las funciones Euler y RKexplicito con los tableros dados anteriormente para resolver el problema de valor inicial siguiente: En el intervalo $[0, 10]$,

$$\begin{cases} u' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix} \\ u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2. Representar gráficamente la solución exacta frente a la solución aproximada para varios valores de h.

3. Representar gráficamente las poligonales formadas por los valores (h, error) y calcular la media de las pendientes de cada uno de los segmentos.

4. Aportar conclusiones relacionando los resultados numéricos obtenidos con lo visto en teoría.

5. Para $t \in [0, 10]$, consideramos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 999(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix} \\ u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

   Este sistema tiene la misma solción que el ejercicio 1, sin embargo, con un número de pasos no muy grande ($N = 10000$) nos aparecen problemas. Cúal es la razón.