Práctica #1: Sistema de Lotka Volterra.

González Ramírez Oscar [$M25210050$]
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

February 18, 2026

Palabras clave: Sistemas no lineales; Método de Heun; Regresión Lineal; Puntos de Equilibrio; Aproximaciones.

Correo: **m25210050@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Maestría en Ciencias de la Ingeniería**

Asignatura: **Biología de Sistemas**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Modelo matemático

El sistema presa-depredador de Lotka-Volterra se formula mediante las siguientes dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) no lineales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} &= \delta xy - \gamma y, \end{aligned}$$

donde los parámetros $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ y las condiciones iniciales $x(0), y(0) \geq 0$. La variable $x(t)$ representa a las presas [*hares*], la variable $y(t)$ representa a los depredadores [*lynx*] y el tiempo t se mide en años.

2 Análisis de positividad

El análisis de positividad permite obtener conclusiones sobre la dinámica de las semitrayectorias positivas (Γ^+) [sección 2.3] para condiciones iniciales no negativas [$x(0), y(0) \geq 0$], para esto se debe evaluar al sistema en la frontera del primer cuadrante (ortante positivo) como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}\big|_{x=0} &= \alpha(0) - \beta(0)y = 0, \\ \dot{y}\big|_{y=0} &= \delta x(0) - \gamma(0) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, con base en el **Lema de Positividad** en sistemas no lineales [sección 2.6], se establece que el sistema presa-depredador de Lotka-Volterra tiene soluciones positivamente invariantes [sección 3.1] para condiciones iniciales no negativas.

3 Puntos de equilibrio

Para calcular los puntos de equilibrio es necesario igualar cada ecuación del sistema a cero y resolver para cada una de las variables, es decir:

$$\begin{aligned} \alpha x - \beta xy &= 0, \\ \delta xy - \gamma y &= 0, \end{aligned}$$

$\text{assume}\,(\alpha, \text{positive}) = (0, \infty)$

$\text{assume}\,(\beta, \text{positive}) = (0, \infty)$

$\text{assume}\,(\delta, \text{positive}) = (0, \infty)$

$\text{assume}\,(\gamma, \text{positive}) = (0, \infty)$

lo anterior permite establecer que los cuatro parámetros del sistema son positivos. Al aplicar el comando *Compute-Solve-Exact*, se obtienen los siguientes puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned} (x_1^*, y_1^*) &= (0, 0)\,, \\ (x_1^*, y_1^*) &= \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Nota: En algunos libros cuando el origen del espacio de estados es un equilibrio del sistema se escribe así:

$$(x_0^*, y_0^*) = (0, 0)\,.$$

4 Estabilidad asintótica

Para analizar la estabilidad local de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico [secciones 5.1 y 5.2.3] es necesario calcular la matriz Jacobiana [sección 2.7], como se indica a continuación:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}.$$

Ahora, se evalúa cada uno de los puntos de equilibrio calculados, primero se analiza $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)\,,$ obteniendo el siguiente resultado:

$$J|_{(x_1^*, y_1^*)} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}_{x=0, y=0} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix},$$

entonces, debido a que el resultado es una matriz diagonal [sección 2.7], los valores propios están dados por cada uno de los elementos de dicha diagonal, es decir,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha, \\ \lambda_2 &= -\gamma, \end{aligned}$$

con base en estos resultados se concluye lo siguiente: El punto de equilibrio $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ es inestable [secciones 5.1 y 5.2.3].

Al evaluar el segundo punto de equilibrio $(x_1^*, y_1^*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, se obtiene el siguiente resultado:

$$J|_{(x_1^*, y_1^*)} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}_{x=\frac{\gamma}{\delta},, y=\frac{\alpha}{\beta}} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta\frac{\alpha}{\beta} & -\beta\frac{\gamma}{\delta} \\ \delta\frac{\alpha}{\beta} & \delta\frac{\gamma}{\delta} - \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto, se deben calcular los valores propios mediante la siguiente ecuación [sección 2.7]:

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

donde A es la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio, $\lambda \in \mathbf{R}$ (es un coeficiente) e I es la matriz identidad, al sustituir se obtiene lo siguiente:

$$\det\left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0,$$

entonces, al realizar las operaciones aritméticas necesarias se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \det\left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] &= 0, \\ \det\left[\begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda \end{pmatrix}\right] &= 0, \\ \lambda^2 + \alpha\gamma &= 0, \end{aligned}$$

y los valores propios están dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 + \sqrt{-\alpha\gamma} = +i\sqrt{\alpha\gamma}, \\ \lambda_2 &= 0 - \sqrt{-\alpha\gamma} = -i\sqrt{\alpha\gamma}, \end{aligned}$$

y se concluye que el punto de equilibrio es marginalmente estable, denominado centro [sección 5.2.3], por lo tanto, en una vecindad lo suficientemente cerca al punto de equilibrio se esperan oscilaciones sostenidas a lo largo del tiempo $(t > 0)$.