Universidad Autónoma de Coahuila

FCFM

MÉTODOS MATEMATICOS

MÉTODO DE HORNER

Profesora: Maria Guadalupe Godina Cubillo

Alumno: Oscar Joel Castro Contreras

17 de febrero de 2023

Resumen

En este reporte explico un poco de los métodos que existen para encontrar las raíces de cualquier polinomio o función que tenga raíces, y en específico explico, qué es, en que consiste y cuales son las limitaciones del método de Horner para encontrar raíces de polinomios.

Palabras clave: Raíces, Horner, División sintética, Maximo, Mínimo.

Introducción

Los polinomios son uno de los conceptos más importantes en álgebra y son fundamentales en matemáticas y ciencia en general. Determinar las raíces de un polinomio es uno de los problemas más antiguos en matemáticas.
Puesto que las ecuaciones polinomiales aparecen en un amplio rango de áreas de la ciencia, desde química y física básica hasta economía, el problema de determinar raíces de polinomios es, con frecuencia, un paso obligado en la resolución de problemas.[1]
La razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de métodos computacionales es que algunas ecuaciones carecen de solución exacta, excepto por unas pocas. Por lo que existen métodos numéricos diseñados para obtener las raíces, aunque cada uno tiene sus propias limitaciones y defectos. Algunos métodos se muestran en la tabla 1.[2]

Métodos numéricos para obtener raíces	
Nombre	**Características**
Bisección	Aplicable a funciones no analiticas
Regla falsa	Convergencia lenta en un intervalo grande
Método de Newton	Rápido, se nesecita calcular derivada
Método de secante	Rápido, no se requiera calcular derivada
Sustitución sucesiva	Puede no converger

Tabla 1: Métodos numéricos para obtener raíces [2]

En general, no es posible determinar los ceros de una función, es decir, valores x^* tal que $f(x^*) = 0$, en un número finito de pasos. Tenemos que usar métodos de aproximación. Los métodos son usualmente iterativos y tienen la forma: Iniciando con una aproximación inicial x_0 (o un intervalo $[a, b]$) , se calculan aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, ...$ y elegimos x_n como aproximación de x^* cuando se cumpla un criterio de parada dado. A los ceros de un polinomio se les conoce también como raíces.
El método de Horner:
Llamado así en honor del maestro de escuela británico William George Horner quien lo describió en 1819. Se trata de un método que es utilizado para aproximar una raíz real de una ecuación polinómica.[3]
Al usar el método de Newton para localizar los ceros aproximados de un polinomio $P(x)$, necesitamos evaluar $P(x)$ y $P'(x)$ en valores específicos. Puesto que tanto $P(x)$ como $P'(x)$ realice de la manera anidada. El método de Horner incorpora esta técnica anidada y como consecuencia, sólo requiere n multiplicaciones y n sumas para evaluar un polinomio de enésimo grado.[4]
Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Defina $b_n = a_n$ y
$$b_k = a_k + b_{k+1}x_0, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0.$$
Entonces $b_0 = P(x_0)$. Además, si
$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1,$$
Entonces
$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0.$$
Por definición de $Q(x)$
$$\begin{aligned}(x - x_0)Q(x) + b_0 &= (x - x_0)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1) + b_0\\ &= (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x)\\ &= (b_n x_0 x^{n-1} + \cdots + b_2 x_0 x^2 + b_1 x_0) + b_0\\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - b_n x_0)x^{n-1} + \cdots + (b_1 + b_2 x_0)x + (b_0 - b_1 x_0).\end{aligned}$$
Por la hipótesis, $b_n = a_n$ y $b_k - b_{b+1}x_0 = a_k$, por lo que
$$(x - x_0)Q(x) + b_0 = P(x) \text{ y } b_0 = P(x_0)$$

Metodología

El método de Horner para encontrar raíces solo puede ser usado para polinomios, el método consiste en tomar un polinomio $P(x)$, y dar un punto x_0 que este cercano un de sus raíces reales, con la ayuda de este punto y de la división sintética se reducirá el polinomio a uno de grado menor $Q(x)$, de esta división sintética guardamos lo que vale la evaluación de $P(x_0)$.
$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad x_0$$
$$\begin{array}{ccccc|c} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & b_4x_0 & b_3x_0 & b_2x_0 & b_1x_0 & x_0 \\ \hline b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & P(x_0) = b_0 \end{array}$$

Después, volvemos a realizar división sintética con el mismo punto x_0 y el polinomio que reducido $Q(x)$ y de esta división sintética guardamos lo que vale $Q(x_0)$.
$$Q(x) = b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1$$
$$\begin{array}{cccc|c} b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \\ & c_4x_0 & c_3x_0 & c_2x_0 & x_0 \\ \hline c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & Q(x_0) = c_1 \end{array}$$

Al final usamos la formula del método de Newton Raphson para obtener una aproximación, y tomamos a $Q(x_0)$ como si fuera la derivada. Después, tomamos la aproximación obtenida e iteramos realizando todo el procedimiento de nuevo.
$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

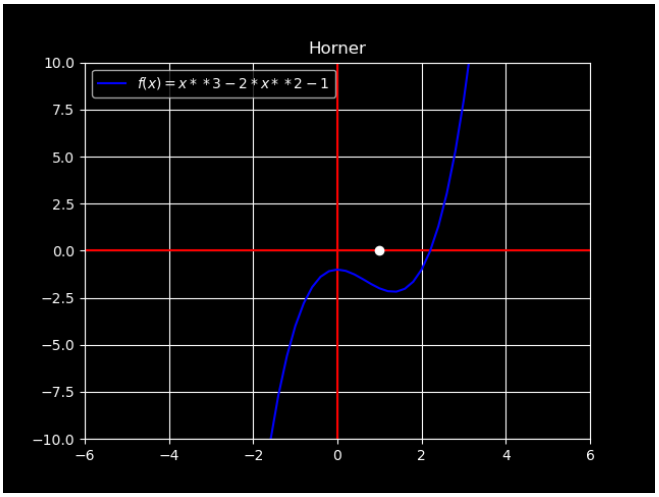
```
qin = [exp[0]]
p = 0
for i in range(1,len(exp)):
    if i == 1:
        pin = exp[i]+(exp[i-1]*a)
    else:
        pin = exp[i]+(pin*a)
    qin.append(pin)
p = qin[gr]
```

Figura 1: La división sintética de un polinomio en codigo

Esta parte de mi programa realiza las divisiones sintéticas, tomando los coeficientes del polinomio y retornando el valor de $P(x_0)$ o $Q(x_0)$.

Resultado

Si tomamos el polinomio $x^3 - 2x^2 - 1$ y damos el punto $x = 1$. Hacemos la evaluación para obtener la raíz con 5 cifras significativas, el programa nos arroja



Grafica 1: Punto aproximado a la raíz dado $x^3 - 2x^2 - 1$ en $x = 1$.

x**3-2*x**2-1				
Iteracion	Raiz	F(x)	Error abs	Error rel
1	-1.0	4.0	0.0	0.0
2	-0.4285714285714286	1.446064139	1.428571428	3.333333333
3	0.20978120978120973	1.078784227	0.218790218	1.042944785
4	-1.3158639061069861	6.741411122	1.525645115	1.159424701
5	-0.671243142553731	2.203574961	1.987107048	2.960338695
6	-0.12535446984472343	1.033397274	0.796597612	6.354760331
7	1.758484951924947	1.746829575	1.633130482	0.928714505
8	2.53732233423494	2.459283674	0.778837382	0.306952479
9	2.268979989415344	0.384781661	0.268342344	0.118265628
10	2.2085641831404224	0.017325143	0.060415806	0.027355241
11	2.2055765797010296	4.12612e-05	0.002987603	0.001354568
Raiz aproximada ≈	2.2055			
Paro por error relativo				

Tabla 2: Iteraciones a la aproximación de la raíz de la función $x^3 - 2x^2 - 1$.

Observamos que la aproximación a la raíz es 2.2055, con 11 iteraciones. El criterio de paro fue por el error relativo.

Observación

El método tiene una limitación, la cual ocurre cuando $Q(x_0) = 0$, cuando ocurre esto es por que el punto donde se da la aproximación es un máximo o un mínimo de la función, en estos casos el método se detiene y se tiene que iniciar de nuevo pero dando otra aproximación que no sea un mínimo o un máximo.

Conclusión

En conclusión, el método de Horner solo puede encontrar raíces reales de polinomios, tomando una aproximación inicial x_0 y con la ayuda de la división sintética y la aproximación, obtener $P(x_0)$ y $Q(x_0)$ los cuales se sustituyen en la formula del método de Newton Raphson, tomando a $Q(x_0)$ como la derivada. Sus limitaciones es cuando la aproximación cae en un máximo o un mínimo de la función en estos casos $Q(x_0) = 0$, por lo que el método se detiene.

Referencias

[1] de la Vega, H. M. El calculo de raıces de polinomios. Una historia sin fin. Recuperado de Pagina web de [1].

[2] Nakamura, S. (1998). Metodos Numericos Aplicados Con Software. En Solución de ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 62–63). Prentice Hall.

[3] Restrepo García, C. J. (2019). Un estudio histórico sobre la aproximación a las raíces reales de una ecuación polinómica a través del método de Horner como recurso para la enseñanza de ecuaciones en grado 10° de la Educación Media. Pagina web de [3].

[4] Burden, A. M., Faires, D. J. (2017). Análisis numérico (10a. ed.). En Método de Horner (10a. ed., pp. 69–72). Cengage Learning.