FÍSICA 3

# TAREA 2 - LEY DE GAUSS

**Profesora:** Ricardo Pérez Martínez

**Alumno:** Oscar Joel Castro Contreras

10 de septiembre de 2021

# Índice

# Formulas:

$$k_e = 8.99 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad \epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$
$$\rho = \frac{Q}{V}, \quad \sigma = \frac{Q}{A}, \quad \lambda = \frac{Q}{L}$$
$$dq = \rho dV, \quad dq = \sigma dA, \quad dq = \lambda dL$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$
$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E} \tag{1}$$
$$\phi_E = \oint E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \tag{2}$$

# 1. Problema 1:

Sobre la superficie de una coraza esférica aislante de radio $R$, está distribuida con uniformidad una carga negativa $-Q$. Calcula la fuerza (magnitud y dirección) que ejerce la coraza sobre una carga puntual positiva $q$ ubicada a una distancia:

a) $r > R$ del centro de la coraza (fuera de la coraza).

$$\phi_E = \oint E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$
$$\phi_E = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{-Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = -k_e \frac{Q}{r^2}$$
$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E} = -k_e \frac{Q q_0}{r^2} \hat{r}$$

b) $r < R$ del centro de la coraza (dentro de la coraza).

$$\phi_E = \oint E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$
$$\phi_E = E \oint dA = EA = 0$$
$$E = 0$$

# 2. Problema 2:

Un conductor cílindrico de longitud infinita tiene un radio $R$ y densidad superficial de carga uniforme $\sigma$

a) En términos de $\sigma$ y $R$. ¿Cuál es la carga por unidad de longitud $\lambda$ para el cilindro?

$$dq = \sigma dA \quad dq = \lambda dl$$

$$q_{in} = \sigma 2\pi Rl \quad q_{in} = \lambda l$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\sigma 2\pi Rl} \quad \lambda = \sigma 2\pi R$$

b) En términos de $\sigma$, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico producido por el cilindro con carga a una distancia $r > R$ de su eje?

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E \oint dA = E(2\pi rl) = \frac{\sigma 2\pi Rl}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R}{r\epsilon_0}$$

c) Expresa el resultado del enciso b) en términos de $\lambda$ y demuestra que el campo eléctrico fuera del cilindro es el mismo que si toda la carga estuviera sobre el eje.

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E \oint dA = E(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} = 2k_e\frac{\lambda}{r}$$

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E \oint dA = E(2\pi Rl) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi Rl\epsilon_0}$$

$$E = 2k_e\frac{Q}{Rl}$$

Compara tu resultado c el que se obtuvo en clase para una línea infinita de carga.
Se puede observar que la ecuación con sigma es distinta a la del lambda, pero cuando se sustituye el valor de sigma y el de lambda las ecuaciones son iguales.

# 3. Problema 3:

Una cubierta cilíndrica con un radio de $7.00cm$ y longitud de $240cm$ tiene una carga con distribución uniforme sobre su superficie curva. La magnitud del campo eléctrico un punto que está a $19.0cm$ radialmente hacia afuera de su eje (medido a partir del punto medio de la cubierta) es de $36.0\frac{kN}{C}$. Determine:

$$R = 7.00cm = 0.07m, \quad r = 19.0cm = 0.19m, \quad l = 240cm = 2.40m$$

$$E = 3.6\frac{kN}{C} = 3.6 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

a) La carga neta sobre la cubierta.

$$dq = \sigma dA \Longrightarrow q_{in} = \sigma 2\pi Rl, \quad \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi Rl}$$

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E\oint dA = E(2\pi rl) = \frac{\sigma 2\pi Rl}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R}{r\epsilon_0} = \left(\frac{Q}{2\pi Rl}\right)\frac{\sigma R}{r\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi rl\epsilon_0}$$

$$E = 2k_e\frac{Q}{rl}$$

$$Q = E\frac{rl}{2k_e} = \frac{(3.6 \times 10^4 \frac{N}{C})(0.19m)(2.40m)}{2(8.99 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2})}$$

$$Q = 9.13 \times 10^{-7}C$$

b) El campo eléctrico que existe en un punto a $4.00cm$ del eje, medido radialmente hacia afuera del punto medio de la cubierta.
La superficie gaussiana está dentro de la cubierta cilíndrica, la superficie gaussiana no encierra ninguna carga por lo:

$$E = 0$$

# 4. Problema 4:

Un alambre largo y recto, rodeado por un cilindro de metal hueco cuyo eje coincide con el suyo, tiene una carga por unidad de longitud $L$, y el cilindro una carga por unidad de longitud $2L$. Con esta información, utilice la ley de Gauss para determinar:

$$q_a = \lambda L, \quad q_c = 2\lambda L$$

a) La carga por unidad de longitud en las superficies interna y externa del cilindro.

$$\lambda = \frac{q_c}{2l}$$

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E\oint dA = E(2\pi RL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi R\epsilon_0} = 2k_e\frac{\lambda}{R} = 2k_e\frac{1}{R}\left(\frac{q_c}{2l}\right)$$

$$E = k_e\frac{q_c}{LR}$$

$$q_c = \frac{ELR}{k_e}$$

b) El campo eléctrico exterior al cilindro, a una distancia $r$ de su eje.

$$q_t = q_a + q_c = \lambda L + 2\lambda L = 3\lambda L, \quad \lambda = \frac{q_t}{3L}$$

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E\oint dA = E(2\pi rL) = \frac{3\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{3\lambda}{2\pi r\epsilon_0} = 2k_e\frac{3\lambda}{r} = 6k_e\frac{\lambda}{r}$$

$$E = 6k_e\frac{1}{r}\left(\frac{q_t}{3L}\right) = 2k_e\frac{q_t}{rL}$$

# 5. Problema 5:

Una delgada placa conductora y cuadrada de $50.0cm$ de lado se encuentra sobre el plano $xy$. Se deposita una carga total de $4\times 10^{-8}C$ sobre la placa. Determine:

$$l = 50.0cm = 0.05m, \quad Q = 4\times 10^{-8}C$$

a) La densidad de carga sobre la placa.

$$dq = \sigma dA \Longrightarrow q_{in} = \sigma l^2, \quad \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{l^2}$$

b) El campo eléctrico justo por encima de la placa.

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E\oint dA = E(l^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{Q}{l^2\epsilon_0}$$
$$E = \frac{Q}{l^2\epsilon_0} = \frac{(4\times 10^-8C)}{(0.05^2(8.8542\times 10^{12}\frac{C^2}{Nm^2})}$$
$$E = 1.81\times 10^{-18}\frac{N}{C}$$

c) El campo eléctrico justo por debajo de la misma. La densidad de carga es uniforme.
Como la densidad de carga es uniforme en la placa, la parte de de abajo de la placa tiene el mismo campo eléctrico que la parte de arriba.

# 6. Problema 6:

Un cilindro largo de radio $R$ con una densidad de carga que es proporcional a la distancia a partir de su eje: $\rho = kr$, donde $k$ es una constante y $r \in (0, R)$. Encuentra el campo eléctrico dentro del cilindro, es decir, para puntos $0 < r < R$.

$$\rho = kr$$
$$dq = \rho dV \implies q_{in} = \rho\pi r^2 l$$
$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$
$$\phi_E = E\oint dA = E(2\pi rl) = \frac{\rho\pi r^2 l}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \frac{(kr)r}{2\epsilon_0} = \frac{kr^2}{2\epsilon_0}$$

# 7. Problema 7:

Un cascarón esférico con espesor, de radio interno $a$ y radio externo $b$, tiene una densidad de carga $\rho = \frac{k}{r^2}$ en la región $a \leq r \leq b$. Encuentra el campo eléctrico en las tres regiones:

I) $r < a$

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$
$$\phi_E = E\oint dA = EA = 0$$
$$E = 0$$

II) $a < r < b$

$$V = \frac{4\pi b^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)$$

$$dq = \rho dV \Longrightarrow q_{in} = \rho\frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3), \quad \rho = \frac{k}{r^2}$$

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \rho\frac{4\pi}{3\epsilon_0}(b^3 - a^3)$$

$$E = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3r^2\epsilon_0} = \left(\frac{k}{r^2}\right)\frac{b^3 - a^3}{3r^2\epsilon_0}$$

$$E = \frac{k(b^3 - a^3)}{3r^4\epsilon_0}$$

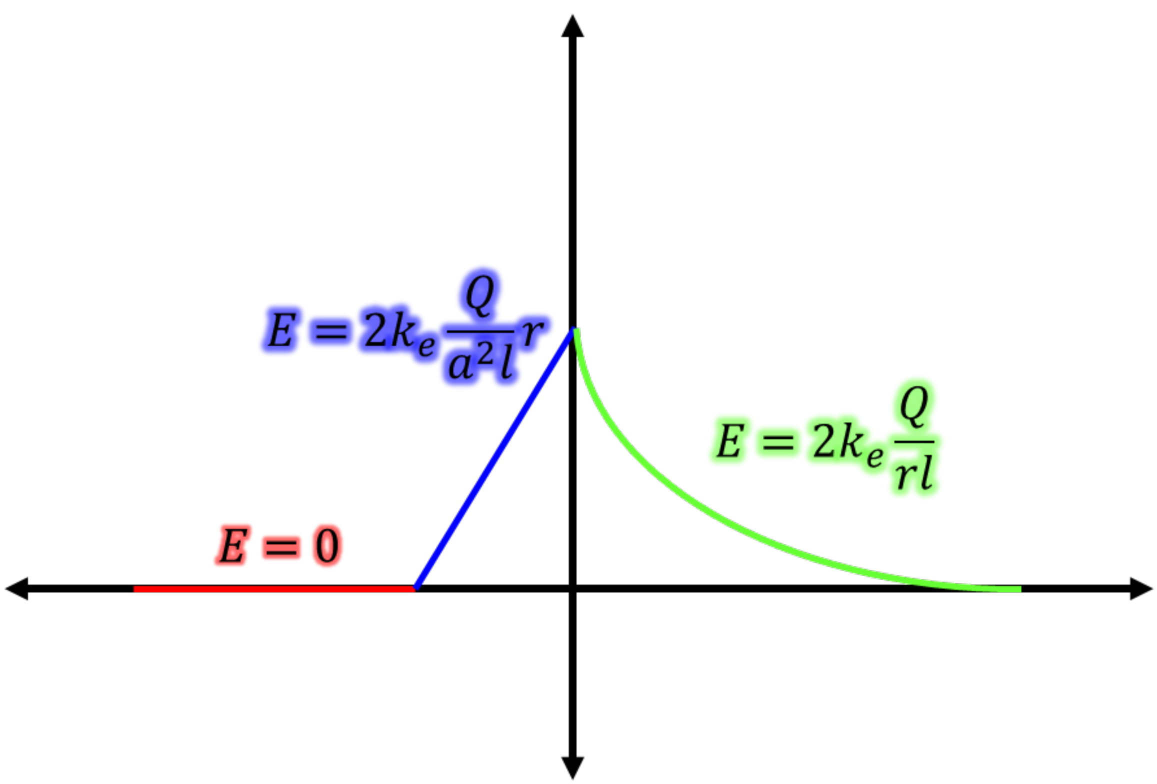
III) $r > b$..

$$\phi_E = \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \rho\frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2\epsilon_0} = k_e\frac{Q}{r^2}$$

Realiza una gráfica del campo eléctrico. En función de $r$.



# 8. Problema 8:

Un cable coaxial largo tiene una densidad de carga volumétrica uniforme en el cilindro interno de radio $a$ y una densidad superficial de carga uniforme en el cascarón cilíndrico externo de radio $b$, $b > a$. Esta carga superficial es negativa y con magnitud tal que todo el cable coaxial es eléctricamente neutro. Encuentra el campo eléctrico en las tres regiones:

I) Dentro del cilindro interno $(r < a)$.

$$dq = \rho dV \implies q_{in} = \rho \pi r^2 l, \quad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi a^2 l}$$

$$\phi_E = \oint E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E \oint dA = E(2\pi r l) = \frac{\rho \pi r^2 l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \left(\frac{Q}{\pi a^2 l}\right) \frac{r}{2\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Qr}{2\pi a^2 l \epsilon_0} = 2k_e \frac{Q}{a^2 l} r$$

II) Entre los cilindros $(a < r < b)$.

$$\phi_E = \oint E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E \oint dA = E(2\pi r l) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0} = 2k_e \frac{Q}{rl}$$

III) fuera del cable coaxial $(r > b)$.

$$q_{in} = Q - Q = 0$$

$$\phi_E = \oint E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = E \oint dA = EA = 0$$

$$E = 0$$