Universidad Autónoma de Coahuila

FCFM

MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODO DE LA SECANTE

Profesora: Maria Guadalupe Godina Cubillo

Alumno: Oscar Joel Castro Contreras

2 de octubre de 2023

Resumen

En este reporte explico un poco de los métodos que existen para encontrar las raíces de cualquier polinomio o función que tenga raíces, y en específico explico, qué es, en que consiste y cuales son las limitaciones del método de la Secante para encontrar raíces.

Palabras clave: Raíces, Recta secante, Pendiente, intervalo.

Introducción

Los polinomios son uno de los conceptos más importantes en álgebra y son fundamentales en matemáticas y ciencia en general. Determinar las raíces de un polinomio es uno de los problemas más antiguos en matemáticas.
Puesto que las ecuaciones polinomiales aparecen en un amplio rango de áreas de la ciencia, desde química y física básica hasta economía, el problema de determinar raíces de polinomios es, con frecuencia, un paso obligado en la resolución de problemas.[1]
La razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de métodos computacionales es que algunas ecuaciones carecen de solución exacta, excepto por unas pocas. Por lo que existen métodos numéricos diseñados para obtener las raíces, aunque cada uno tiene sus propias limitaciones y defectos. Algunos métodos se muestran en la tabla 1[2]

Métodos numéricos para obtener raíces	
Nombre	**Características**
Bisección	Aplicable a funciones no analiticas
Regla falsa	Convergencia lenta en un intervalo grande
Método de Newton	Rápido, se nesecita calcular derivada
Método de la secante	Rápido, no se requiera calcular derivada

Tabla 1: Métodos numéricos para obtener raíces [2]

En general, no es posible determinar los ceros de una función, es decir, valores x^* tal que $f(x^*) = 0$, en un número finito de pasos. Tenemos que usar métodos de aproximación. Los métodos son usualmente iterativos y tienen la forma: Iniciando con una aproximación inicial x_0 (o un intervalo $[a, b]$) , se calculan aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, ...$ y elegimos x_n como aproximación de x^* cuando se cumpla un criterio de parada dado. A los ceros de un polinomio se les conoce también como raíces.
El método de la Secante:
Un problema potencial en la implementación del método de Newton Raphson es la evaluación de la derivada. Aunque esto no es un inconveniente para los polinomios ni para muchas otras funciones, existen algunas funciones cuyas derivadas en ocasiones resultan muy difíciles de calcular. [3]
El método de la secante se aproxima utilizando los dos valores $[a, b]$ de iteraciones consecutivas de $f(x)$. Esto elimina Ia necesidad de evaluar tanto a $f(x)$ como a $f'(x)$ en cada iteración. Por lo tanto, el método de la secante es más eficiente, particularmente cuando $f(x)$ es una función en la que se invierte mucho tiempo al evaluarla. El método de la secante también está íntimamente ligado con el método de la falsa posición. [2]
Las aproximaciones sucesivas para la raíz en el método de la secante están dadas por un intervalo donde

$[a, b]$, obtenemos la pendiente de la recta formada por el intervalo y por un limite del intervalo y el punto que cruza por el eje x, entonces tenemos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - f(a)}{x - a}$$

y llegamos a que la raíz es

$$x = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

que es parecida a la de Newton Raphson.

Metodología

El método de la Secante es parecido al de Newton Raphson, este parte de un intervalo $[a, b]$, al evaluar la función $f(x)$ en el intervalo obtenemos 2 puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por estos puntos se traza una recta secante que cruce por los 2 puntos. Después a partir de la fórmula de la recta, obtenemos la pendiente, con la ayuda de los puntos encontrados al evaluar el intervalo y tenemos que la pendiente es

$$m_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

, después volvemos a calcular la pendiente pero con el punto por el que la recta cruza el eje x, y uno de los puntos obtenidos, entonces tenemos los puntos $(a, f(a))$ y $(x, 0)$, calculamos la pendiente

$$m_2 = \frac{f(a) - 0}{x - a}$$

, igualamos esta pendiente y despejamos para x

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} == \frac{f(a) - 0}{x - a}$$

llegamos a que la aproximación de la raíz es

$$x = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

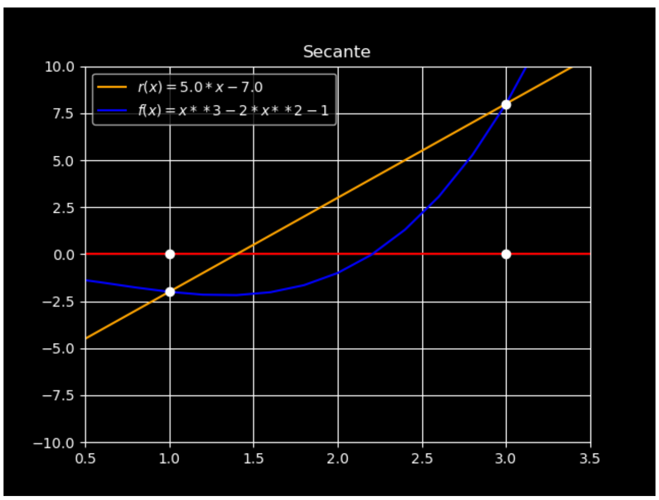
, ahora evaluamos la aproximación en la función $f(x) = 0$ si es igual a cero se encontró la raíz si no, esté valor obtenido, lo cambiamos por un límite del intervalo inicial, y volvemos a iterar con el nuevo punto, hasta que llegamos a la raíz. Este método es como una combinación de Newton Raphson y Regla falsa.
El criterio para parar las iteraciones es el mismo que bisección, ragla falsa y Newton Raphson, está dado por el número de cifras significativas que queramos, de aquí obtenemos una tolerancia, la cual en cada interacción se compara con el error relativo y absoluto, si uno de los errores es menor o igual a la tolerancia, detener las interacciones.
La parte mas importante del programa es el calculo de la aproximacion de la raiz

```
r = a - ((fa*(b-a))/(fb-fa))
```

Figura 1: Formula de aproximacion a la raiz por el metodo de la Secante

Resultado

Si tomamos el polinomio $x^3 - 2x^2 - 1$ y damos de intervalo inicial $[1, 3]$. Hacemos la evaluación para obtener la raíz con 5 cifras significativas, el programa nos arroja



Grafica 1: Recta Secante que cruza $x^3 - 2x^2 - 1$ en el intervalo donde $x = [1, 3]$.

x**3-2*x**2-1

Interaccion	Raiz	F(x)	Error abs	Error rel
1	1.4	2.0	0.0	0.0
2	1.742138364779874	2.176	0.342138364	0.196389891
3	1.9713501004501182	1.782621945	0.229211735	0.11627145
4	2.096817884735037	1.111339847	0.125467784	0.059837234
5	2.1573148920033294	0.574326107	0.060497007	0.028042733
6	2.1846155242796454	0.267855305	0.027300632	0.012496767
7	2.1965580961166653	0.118914104	0.011942571	0.005436947
8	2.2017103806712366	0.051633236	0.005152284	0.002340128
9	2.2039198176992056	0.02220316	0.002209437	0.001002503
10	2.2048648262784543	0.009507903	0.000945008	0.000428601
11	2.2052685709538626	0.004064212	0.000403744	0.000183081
12	2.205440984483412	0.001735941	0.000172413	7.81764e-05
13	2.2055145963211102	0.000741227	7.36118e-05	3.33763e-05

Raiz aproximada ≈ 2.2055

Paro por error relativo

Tabla 2: Iteraciones a la aproximación de la raíz de la función $x^3 - 2x^2 - 1$.

Observamos que la aproximación a la raíz es 2.2055, con 13 iteraciones. El criterio de paro fue por el error relativo.

Observación

El método tiene algunas limitaciones, casi las mismas que el método de Newton Raphson en algunos casos la diferencia de $f(b) - f(a)$ es igual a cero ya $f(a)$ es igual que $f(b)$, cuando ocurre esto la recta secante no cruzar por el eje x, por lo que en estos casos el método se parar y se le pedir al usuario que coloque un intervalo inicial diferente. Otra de las limitaciones es cuando la función no tiene raíces reales o cuando se coloca un intervalo inicial muy lejano a la raíz, en estos casos el método nunca deja de iterar, por lo que se le debe de dar un paro a una cierta cantidad de iteraciones, el máximo de iteraciones que le coloque a mi programa es de 1000.

Conclusión

En conclusión, el método de la Secante toma un intervalo inicial $[a, b]$ con el que se hace un recta secante que cruza por el eje x, y con la formula obtenida de la pendiente de la recta secante, se va internado hasta llegar a un buena aproximación de la raíz. Las limitaciones del método son cuando se tiene un intervalo que al evaluar en la función se tiene que $f(a)$ y $f(b)$ son iguales, en este caso la recta no cruza el eje x y cuando no tiene raíces reales o cuando se coloca un intervalo inicial muy lejano a la raíz el método nunca se detiene.

Referencias

[1] de la Vega, H. M. El calculo de raıces de polinomios. Una historia sin fin. Recuperado de Pagina web de [1].

[2] Nakamura, S. (1998). Metodos Numericos Aplicados Con Software. En Solución de ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 62–63). Prentice Hall.

[3] Mora, W. (2010). Introducción a los Métodos Numéricos. Implementaciones en R. Ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 95,110) Recuperado de Pagina web de [3].

[4] Chapra, S. (2015). Métodos numéricos para ingenieros. RAICES DE ECUACIONES (7.a ed., pp. 91–180). Editorial McGraw-Hill.