MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODO DE BISECCIÓN

Profesora: Maria Guadalupe Godina Cubillo

Alumno: Oscar Joel Castro Contreras

5 de octubre de 2023

Resumen

En este reporte explico un poco de los métodos que existen para encontrar las raíces de cualquier polinomio o función que tenga raíces, y en específico explico, qué es, en que consiste y cuales son las limitaciones del método de bisección para encontrar raíces.

Palabras clave: Raíces, Bisección, Valor Intermedio, Tolerancia.

Introducción

Los polinomios son uno de los conceptos más importantes en álgebra y son fundamentales en matemáticas y ciencia en general. Determinar las raíces de un polinomio es uno de los problemas más antiguos en matemáticas.
Puesto que las ecuaciones polinomiales aparecen en un amplio rango de áreas de la ciencia, desde química y física básica hasta economía, el problema de determinar raíces de polinomios es, con frecuencia, un paso obligado en la resolución de problemas.[1]
La razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de métodos computacionales es que algunas ecuaciones carecen de solución exacta, excepto por unas pocas. Por lo que existen métodos numéricos diseñados para obtener las raíces, aunque cada uno tiene sus propias limitaciones y defectos. Algunos métodos se muestran en la tabla 1[2]

Métodos numéricos para obtener raíces	
Nombre	**Características**
Bisección	Aplicable a funciones no analiticas
Falsa posición	Convergencia lenta en un intervalo grande
Método de Newton	Rápido, se nesecita calcular derivada
Método de secante	Rápido, no se requiera calcular derivada
Sustitución sucesiva	Puede no converger

Tabla 1: Métodos numéricos para obtener raíces [2]

En general, no es posible determinar los ceros de una función, es decir, valores x^* tal que $f(x^*) = 0$, en un número finito de pasos. Tenemos que usar métodos de aproximación. Los métodos son usualmente iterativos y tienen la forma: Iniciando con una aproximación inicial x_0 (o un intervalo $[a, b]$) , se calculan aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, ...$ y elegimos x_n como aproximación de x^* cuando se cumpla un criterio de parada dado. A los ceros de un polinomio se les conoce también como raíces. [3]
El método de Bisección:
Este es uno de los métodos más sencillos y de fácil intuición, para resolver ecuaciones en una variable. Se basa en el Teorema de los Valores Intermedios, el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$ en el que se encuentra la raíz, toma todos los valores que se hallan entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, que todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ es la imagen de al menos un valor en el intervalo $[a, b]$.
En caso de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos, es decir, $f(a)f(b) < 0$, el valor cero sería un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, por lo que con certeza existe un x^* en $[a, b]$ que cumple $f(x^*) = 0$. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación $f(x) = 0$. [2]

Metodología

El método consiste en suponer que tengamos un intervalo $[a, b]$ donde esta una raíz de la función $f(x)$. Primero evaluamos la función en los intervalos y verificamos

$$f(a)f(b) < 0$$

si esto no se cumple el método no funcionara, después de verificar que lo anterior se cumple, debemos calculamos el punto medio del intervalo $[a, b]$.

$$x_m = \frac{a+b}{2}, \text{ donde para reducir el error en el código se uso } x_m = b + \frac{a-b}{2}$$

Después calculamos $f(x_m)$. En caso de que $f(x_m) = 0$, ya hemos encontrado la raíz. Pero en caso de que no lo sea, ahora la raíz se encuentra entre $[a, x_m]$ o $[x_m, b]$. para poder determinar a cuál de los 2 intervalos pertenece la raíz, hay que verificar

$$f(a)f(x_m) > 0$$

si esto se cumple, entonces, la raíz se encuentra en $[a, x_m]$, si no se cumple ahora, hay que verificar

$$f(b)f(x_m) > 0$$

si esto se cumple, entonces, la raíz se encuentra en $[x_m, b]$. Ahora repetimos todo el proceso, pero con el intervalo que obtuvimos. Así vamos interando y reduciendo el intervalo la veces necesarias para encontrar la mejor aproximación al raíz de la función $f(x)$.
El criterio para parar las interacciones esta dado por el numero de cifras significativas que queramos, de aquí obtenemos una tolerancia, la cual en cada interacción se compara con el error relativo y absoluto, si uno de los errores es menor o igual a la tolerancia, detener las interacciones. De todo esto surge una ecuación que nos permite determinar el número exacto de interacciones, para aproximarnos a la raíz una cierta cantidad de cifras significativas. La ecuación es

$$n = \frac{\log|b-a| - \log|tol|}{\log|2|}$$

Resultado

En esta parte de mi programa se calcula la tolerancia para las determinar el número interacciones que se realizaran.

```
cf = int(input("\n\t Cifras significativas:"))
tol = 10**(-1*(cf))
n = int((math.log(b-a)-math.log(tol))/math.log(2))
```

Esta parte calcula el valor medio entre el intervalo $[a.b]$, con la ecuación $x_m = b + \frac{a-b}{2}$.

```
if a == -1*b or b == -1*a:
      xm = round((tol)/2,cf-1)
else:
      xm = b+((a-b)/2)
```

Esta parte define cual será el siguiente intervalo en el que se calculará el valor medio.

```
if fxm == 0:
     break
elif fxm*fa > 0:
     a = xm
elif fxm*fb > 0:
     b = xm
```

Observación

Si regresamos a la condición inicial de que

$$f(a)f(b) < 0$$

si esta condición no se cumple, el método no funciona para esa función, este es una de las limitaciones del método, esto ocurre en diferentes situaciones.
La condicion no se cumple cuando:

- En el intevalo $[a, b]$, no hay la raícas, de la función.
- La funcion no tiene raíces reales,
- Hay mas de 1 raiz en el intervalo $[a, b]$ dado.
- En general cuando la evaluación de $f(a)$ tiene el mismo signo que $f(b)$.

Conclusión

En conclusión, el método de bisección permite encontrar la raíz aproximada de una función a partir de un intervalo $[a, b]$ en el que este la raíz de la función, con el teorema de los valores intermedios. Esto lo puede realizar siempre y cuando se cumpla la condicione de que $f(a)f(b) < 0$ ya que, si esta condición no se cumple, puede que dentro del intervalo no existe ninguna raíz, que la función no tenga raíces reales o que halla mas de una raíz en el intervalo. Solo para estas condiciones especiales este método de bisección no funciona.

Referencias

[1] de la Vega, H. M. El calculo de raıces de polinomios. Una historia sin fin. Recuperado de Pagina web de [1].

[2] Nakamura, S. (1998). Metodos Numericos Aplicados Con Software. En Solución de ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 62–63). Prentice Hall.

[3] Mora, W. (2010). Introducción a los Métodos Numéricos. Implementaciones en R. Ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 95,110) Recuperado de Pagina web de [3].