MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODO DE MÜLLER

Profesora: Maria Guadalupe Godina Cubillo

Alumno: Oscar Joel Castro Contreras

30 de octubre de 2021

Resumen

En este reporte explico un poco de los métodos que existen para encontrar las raíces de cualquier polinomio o función que tenga raíces, y en específico explico, qué es, en que consiste y cuales son las limitaciones del método de Müller para encontrar raíces reales y imaginarias.

Palabras clave: Raíces imaginarias, Müller, Numero complejo.

Introducción

Los polinomios son uno de los conceptos más importantes en álgebra y son fundamentales en matemáticas y ciencia en general. Determinar las raíces de un polinomio es uno de los problemas más antiguos en matemáticas.
Puesto que las ecuaciones polinomiales aparecen en un amplio rango de áreas de la ciencia, desde química y física básica hasta economía, el problema de determinar raíces de polinomios es, con frecuencia, un paso obligado en la resolución de problemas.[1]
La razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de métodos computacionales es que algunas ecuaciones carecen de solución exacta, excepto por unas pocas. Por lo que existen métodos numéricos diseñados para obtener las raíces, aunque cada uno tiene sus propias limitaciones y defectos. Algunos métodos se muestran en la tabla 1.[2]

Métodos numéricos para obtener raíces	
Nombre	**Características**
Bisección	Aplicable a funciones no analiticas
Regla falsa	Convergencia lenta en un intervalo grande
Método de Newton	Rápido, se nesecita calcular derivada
Método de secante	Rápido, no se requiera calcular derivada
Sustitución sucesiva	Puede no converger

Tabla 1: Métodos numéricos para obtener raíces [2]

En general, no es posible determinar los ceros de una función, es decir, valores x^* tal que $f(x^*) = 0$, en un número finito de pasos. Tenemos que usar métodos de aproximación. Los métodos son usualmente iterativos y tienen la forma: Iniciando con una aproximación inicial x_0 (o un intervalo $[a, b]$) , se calculan aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, ...$ y elegimos x_n como aproximación de x^* cuando se cumpla un criterio de parada dado. A los ceros de un polinomio se les conoce también como raíces.
El método de Müller:
El método de Müller se puede usar para encontrar cualquier tipo de raíz, real o compleja, de una función arbitraria. Su aplicación requiere valores iniciales y es una extensión del método de la secante. Se toman tres valores iniciales x_0, x_1, x_2 y se halla el polinomio $p(x)$ de segundo grado que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$, y se toma una de las raíces de $p(x)$, la mas cercana a x_2, como la siguiente aproximación x_3. Se repite la operación con los nuevos valores iniciales x_1, x_2, x_3, y se termina el proceso tan pronto como se satisfaga algún criterio de convergencia.[3]

Metodología

El método de Müller parte de tres puntos x_0, x_1, x_2 aproximados a las raíces del polinomio sin importara si es real o compleja. Con estos 3 puntos creamos una ecuación cuadrática $p(x)$ que los cruce.
Esta ecuación la obtenemos tomando el polinomio cuadrático

$$p(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

que pasa por

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)).$$

Para obtener los componentes a, b y c es apartir de las siguientes condiciones

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$
$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$
$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c = c$$

Podemos ver que ya obtuvimos lo que vale c. De esto tomamos a

$$h_0 = x_0 - x_2$$

$$h_1 = x_1 - x_2$$

y podemos decir que

$$f(x_0) = ah_0^2 + bh_0 + c$$
$$f(x_0) - c = ah_0^2 + bh_0$$

$$f(x_1) = ah_1^2 + bh_1 + c$$
$$f(x_1) - c = ah_1^2 + bh_1$$

De esto tomamos que

$$e_0 = f(x_0) - c$$
$$e_1 = f(x_1) - c$$

Ahora resolvemos el sistema

$$e_0 = ah_0^2 + bh_0$$
$$e_1 = ah_1^2 + bh_1$$

y tomando a

$$w = h_1 - h_0^2 - h_1^2 - h_0$$

llegamos a que

$$a = \frac{e_0 h_1 - e_1 h_0}{w}$$
$$b = \frac{e_1 h_0^2 - h_1^2 e_0}{w}$$

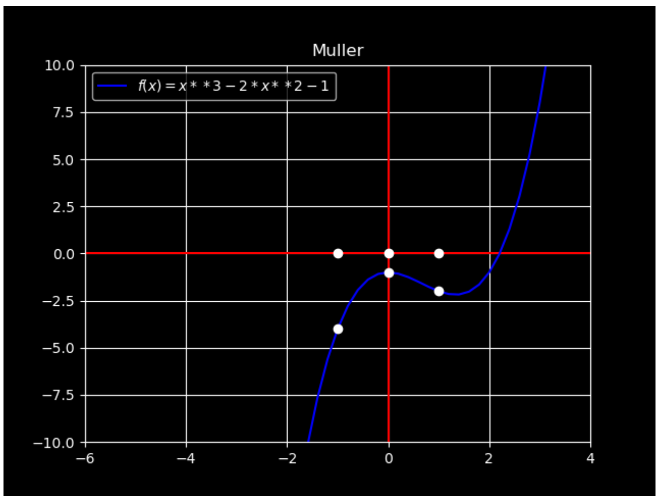
Después, de obtener los coeficientes de la ecuación cuadratica hacemos una aproximación nueva a la raíz x_3 con la ayuda de la formula cuadratica, modifica para reducir el error.

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

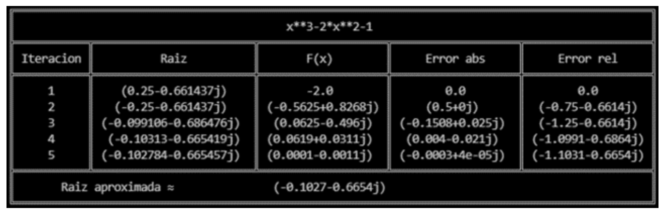
Al final iteramos con uno de los puntos anteriores la nueva aproximación y ahora realizamos el proceso pero con los puntos x_1, x_2, x_3, esto se repite hasta que se llega a un abuena aproximación de la raíz real o compleja.

Resultado

Si tomamos el polinomio $x^3 - 2x^2 - 1$ y damos los punto $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Hacemos la evaluación para obtener la raíz con 5 cifras significativas, el programa nos arroja



Grafica 1: Valores iniciales dados en la ecuación $x^3 - 2x^2 - 1$.



x**3-2*x**2-1				
Iteracion	Raiz	F(x)	Error abs	Error rel
1	(0.25-0.661437j)	-2.0	0.0	0.0
2	(-0.25-0.661437j)	(-0.5625+0.8268j)	(0.5+0j)	(-0.75-0.6614j)
3	(-0.099106-0.686476j)	(0.0625-0.496j)	(-0.1508+0.025j)	(-1.25-0.6614j)
4	(-0.10313-0.665419j)	(0.0619+0.0311j)	(0.004-0.021j)	(-1.0991-0.6864j)
5	(-0.102784-0.665457j)	(0.0001-0.0011j)	(-0.0003+4e-05j)	(-1.1031-0.6654j)
Raiz aproximada ≈	(-0.1027-0.6654j)			

Tabla 2: Iteraciones a la aproximación de la raíz de la función $x^3 - 2x^2 - 1$.

Observamos que la aproximación a una raíz compleja es $-0.1027 - 0.6654i$, con 5 iteraciones.

Observación

La única limitación que tiene el método es cuando $w = 0$, ya que en estos casos no se podría crear la ecuación cuadrática debido a que a y b dependen de w. Pero esa sería la única y en muy pocas ocasiones esto ocurre.

Conclusión

En conclusión, el método de Müller toma 3 puntos cercanos a cualquier raíz real o compleja de cualquier función, de estos puntos crea una ecuación cuadrática que cruce por los puntos y se calcula una aproximación a la raíz de la función con la ayuda de la función cuadrática.

Referencias

[1] de la Vega, H. M. El calculo de raıces de polinomios. Una historia sin fin. Recuperado de Pagina web de [1].

[2] Nakamura, S. (1998). Metodos Numericos Aplicados Con Software. En Solución de ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 62–63). Prentice Hall. Pagina web de [3].

[3] Federico, D. S. C., Antonio, N. H. (2014). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería. En Método de Müller (Primera ed., pp. 79–85). Grupo Editorial Patria.