MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODO DE GAUSS SIEDEL

Profesora: Maria Guadalupe Godina Cubillo

Alumno: Oscar Joel Castro Contreras

24 de noviembre de 2021

Resumen

En este reporte explico un poco lo que es un método iterativo y en qué consisten. También explico a detalle cual es el procedimiento que sigue el método de Gauss Seidel, doy algunos ejemplos y explico cuáles son sus condiciones y las restricciones que tiene.

Palabras clave: Método iterativo, Método de Jacobi, Matriz diagonalmente dominante.

Introducción

Los métodos iterativos se caracterizan por la sencillez de las operaciones asociadas y ser de fácil implementación en ordenadores. Son relativamente insensibles a la propagación de errores. Cada método iterativo, y a partir de una solución aproximada, genera una sucesión de soluciones que bajo ciertas condiciones converge hacia la solución exacta. Son métodos preferibles a los directos para sistemas de cientos de variables, particularmente si muchos de los coeficientes son nulos, como ocurre en problemas numéricos asociados a ecuaciones en derivadas parciales. Los métodos iterativos para sistemas lineales son una generalización del método del punto fijo para obtener los ceros de una función no lineal. Dado el sistema lineal $Ax = b$, donde A es una matriz no singular, todo método iterativo para resolverlo está definido por una descomposición particular $A = M - N$, donde M es una matriz no singular fácilmente invertible. El sistema lineal puede representarse como $Mx = Nx + b$, de donde obtenemos $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. De esta forma, obtenemos el sistema lineal equivalente al original $x = Px + c$, siendo $P = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b$ que tiene la forma apropiada para aplicar el método iterativo del punto fijo para el sistema lineal de ecuaciones:

$$x_{n+1} = Px_n + c$$

[1]

Metodología

El método de Gauss seidel consiste en tener un sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde A es una matriz con un determinante distinto de cero y que sea invertible, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Para entender de forma más fácil, si usamos este sistema de ecuaciones la que se haría es despeja x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda y x_3 de la tercera, así sucesivamente, dependiendo de las ecuaciones que se tengan. Donde a_{11}, a_{22} y a_{33}, son distintos de cero. entonces tendríamos algo como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{aligned}$$

Una ves que se tenga esto se da un valor inicial a cada variable, por lo que tendríamos un vector como:

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix}$$

Donde en este método, los valores que se van calculando en la $(k+1)-$ésima iteración se emplean para estimar los valores faltantes de esa misma iteración, es decir con $x^{(k)}$ se calcula $x^{(k+1)}$ de acuerdo con

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}) \end{bmatrix}$$

Entonces siguiendo esto ir iterando, el método convergerá cuando los valores de x^k se acerquen a la solución del sistema, el criterio de paro esta dado por:

$$\| x^{k+1 \smile} x^k \| < \epsilon$$

Es cuando el valor absoluto de la resta de los vector $x^{k+1} - x^k$ es menor un cierto número de cifras significativas deseado (ϵ). Pero hay mas condiciones para que este método converge como algunas ya dichas. La matriz que se forme tenga un determinante distinto de cero, que esta matriz tenga inversa y que en la diagonal no haya ceros. Pero aún hay mas condiciones, por ejemplo, este método también solo converge sin la matriz es diagonalmente dominante, esto significa que la diagonal de la matriz cumple con:

$$\begin{array}{ccccc} \mid a_{11} \mid & > & \mid a_{12} \mid + \mid a_{13} \mid & + \cdots + & \mid a_{1n} \mid \\ \mid a_{22} \mid & > & \mid a_{21} \mid + \mid a_{23} \mid & + \cdots + & \mid a_{2n} \mid \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mid a_{nn} \mid & > & \mid a_{n1} \mid + \mid a_{n2} \mid & + \cdots + & \mid a_{nn-1} \mid \end{array}$$

Si la matriz no cumple estas condiciones el método nunca converge, en contrario diverge. Pero como son muchas condiciones solo hay que enfocarnos en que sea diagonalmente domínate y que no tenga ceros en la diagonal, si lo matriz cumple estos 2 criterios, todo los demás criterios automaticamente se cumplirán.

Resultado

Si tomamos de ejemplo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

Y si lo vemos de forma matricial seria:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{pmatrix}$$

Donde el resultado es $x_1 = 3$, $x_2 = -2.5$ y $x_3 = 7$.
Ahora hay que ver que los criterios para este método se cumplan. El primero, la diagonal no puede tener ceros y observando el sistema este criterio si se cumplen. El segundo, la diagonal de la matriz debe ser dominante, hacemos los cálculos siguiendo lo explicado:

$$\begin{array}{rcrcl} \mid 3 \mid & > & \mid -0.1 \mid + \mid -0.2 \mid & = & 0.3 \\ \mid 7 \mid & > & \mid 0.1 \mid + \mid -0.3 \mid & = & 0.4 \\ \mid 10 \mid & > & \mid 0.3 \mid + \mid -0.2 \mid & = & 0.5 \end{array}$$

Vemos que si se cumple por lo que ahora procedemos a despejar como se dijo anteriormente cada variable obteniendo:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

Ahora tenemos que dar un valor inicial a cada variable lo más común es que se les dé un valor de cero, por lo que el vector $x^{(0)}$ seria

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora hay que obtener lo que vale la primera variable x_1 sustituyendo lo valores iniciales que dimos entonces

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = 2.616667$$

Ahora hay que obtener lo que vale la segunda variable x_2 sustituyendo ahora con el valor de x_1 y los valores iniciales dado de las otras variables entonces obtendríamos

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0.3/(0)}{7} = 2.794524$$

Seguimos ahora con la variable x_3, de igual forma sustituyendo los valores que se obtuvieron de las anteriores variables, entonces tendríamos que

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

Y así se ira iterando hasta obtener la solución del sistema, por lo que hay que realizar un programa de computadora para realizar esto más rápido, si introduzco este sistema de ecuaciones en mi programa que realiza el procedimiento anterior y tomando el criterio de paro que ya se menciono antes, obtengo lo que se puede ver en la figura 1.

```
Valor x1 = 0
Valor x2 = 0
Valor x3 = 0

Cifras significativas:5

3.0 x1 - 0.1 x2 - 0.2 x3 = 7.85
0.1 x1 + 7.0 x2 - 0.3 x3 = -19.3
0.3 x1 - 0.2 x2 + 10.0 x3 = 71.4

Matriz:

   3.0     -0.1     -0.2    ¦  7.85

   0.1      7.0     -0.3    ¦  -19.3

   0.3     -0.2     10.0    ¦  71.4
```

Metodo de Gauss Seidel

Iteracion	Solucion	Error
0	[0.0, 0.0, 0.0]	0.0
1	[2.61666666, -2.79452381, 7.00560952]	1.0
2	[2.9905565, -2.49962468, 7.00029081]	0.059436981
3	[3.00003189, -2.49998799, 6.99999928]	0.001183543
4	[3.00000035, -2.50000003, 6.99999998]	4.2135e-06

Solucion aproximada ≈ [3.0, -2.5, 7.0]

x0 ≈	3.0
x1 ≈	-2.5
x2 ≈	7.0

Figura 1: Interfas de mi programa despues de realizar las iteraciones para encontra la solucion del sistema anterior, con el metodo de Gauss Seidel.

Vemos que mi programa converge en 4 iteraciones y llega a la solución antes dicha, ahora voy a meter un sistema de ecuaciones donde la diagonal no sea dominante, mi programa me arroja lo que se muestra en la figura 2 del sistema de ecuaciones siguiente.

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\
5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 8 \\
9x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

o visto de forma matricial

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

La solución de este sistema es $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 2$

```
1.0 x1 + 2.0 x2 + 3.0 x3 = 4.0
5.0 x1 + 6.0 x2 + 7.0 x3 = 8.0
9.0 x1 + 1.0 x2 + 2.0 x3 = 3.0

Matriz:

   1.0      2.0      3.0    ¦   4.0

   5.0      6.0      7.0    ¦   8.0

   9.0      1.0      2.0    ¦   3.0

        Error:  La matriz no es diagonalmente dominante.
```

Metodo de Gauss Seidel

Iteracion	Solucion	Error
0	[0.0, 0.0, 0.0]	0.0
1	[4.0, -2.0, -15.5]	1.0
2	[54.5, -26.0, -230.75]	0.932388605
3	[748.25, -353.0, -3189.125]	0.927605006
4	[10277.375, -4842.5, -43825.4375]	0.927227837
5	[141165.312, -66506.75, -601989.031]	0.927198673
6	[1938984.59, -913498.625, -8268679.85]	0.927196455
7	[26633040.8, -12547406.1, -113574979.0]	0.927196288
8	[365819753.0, -172345651.0, -1560016064.0]	0.927196275
9	[5024739501.0, -2367264173.0, -2142769566.0]	0.927196274
10	[6901761535.0, -3251570117.0, -2943214184.0]	0.927196274
125	[4.912423e+141, -2.3143494e+141, -2.0948728e+142]	0.927196274
126	[6.7474885e+142, -3.1788887e+142, -2.8774254e+143]	0.927196274
127	[9.268054e+143, -4.366382e+143, -3.9523052e+144]	0.927196274
128	[1.2730192e+145, -5.9974706e+144, -5.4287128e+145]	0.927196274
129	[1.7485632e+146, -8.2378622e+145, -7.4566416e+146]	0.927196274
130	[2.4017497e+147, -1.1315165e+147, -1.0242115e+148]	0.927196274
131	[3.2989379e+148, -1.5542014e+148, -1.406812e+149]	0.927196274
132	[4.5312763e+149, -2.1347829e+149, -1.9323352e+150]	0.927196274
133	[6.2239621e+150, -2.932244e+150, -2.6541707e+151]	0.927196274
134	[8.5489611e+151, -4.0276017e+151, -3.6456524e+152]	0.927196274
135	[1.1742477e+153, -5.5321368e+152, -5.0075081e+153]	0.927196274

Figura 1: Interfas de mi programa despues de realizar las iteraciones para encontra la solucion del sistema con diagonal no dominate, con el metodo de Gauss Seidel.

Si vemos la figura 2 podemos ver que mi programa al iterar con un sistema con diagonal no dominante, no encuentra la solución del sistema ya que el método diverge y pues se queda en un ciclo iterando infinitamente sin llegar a la solución.

Observación

En algunas ocasiones, aunque la diagonal no fuera dominante el método si podía aproximaba a la solución del sistema, lo diferencia es que se tardaba más de 20 iteraciones encontrarla o hasta más de 100, pero esto ocurría con muy pocos sistemas con la mayoría que no tenían diagonal dominante no se encontraba la solución. En otras ocasiones me encontré con sistemas de ecuaciones que no pueden tener un diagonal dominante, de ninguna forma en la que se acomoden las ecuaciones.
Por todo esto y por las demás condiciones que se necesitan para mi este método es muy deficiente ya que no siempre nos encontramos con un sistema que tenga una diagonal dominante, y hasta hay sistemas que no pueden tener un diagonal dominante. Esto hacer que tenga muchas limitaciones.

Conclusión

El método de gauss seidel es un método iterativo que tiene como condiciones principales, que el sistema tenga una diagonal dominante y que no tenga ceros en la diagonal. Se da un valor inicial a cada variable con el cual se puede iterar. se despeja cada variable en las ecuaciónes y se comienza a obtener el valor de la primera variable con los valores iniciales dados, después se obtiene el valor de la segunda variable con el valor de la variable anterior obtenida y con los valores iniciales dados, y así sucesivamente hasta encontrar la solución del sistema. Cuando la diagonal no es dominante en ocasiones si encuentra la solución, pero la mayoría de las veces no, sé queda en un ciclo infinito, y si encuentra la solución hace mucha iteración.

Referencias

[1] Luis, V. (2021). Métodos numéricos para la física y la ingeniería. En Métodos iterativos (Primera ed., pp. 135–140). DERECHOS RESERVADOS.

[2] Federico, D. S. C., & Antonio, N. H. (2014). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería. En Métodos iterativos (pp. 231–242). Grupo Editorial Patria.

[3] Steven, C. C., & P. C. Raymond (2006). Metodos Numericos Para Ingenieros, Matrices especiales y el método de Gauss-Seidel, GAUSS-SEIDEL (Quinta ed., pp. 310–317). McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES.