Universidad Autónoma de Coahuila

FCFM

MÉTODOS NUMÉRICOS

APROXIMACIÓN POLINOMIAL SIMPLE E INTERPOLACIÓN

Profesora: Maria Guadalupe Godina Cubillo

Alumno: Oscar Joel Castro Contreras

22 de noviembre de 2021

Resumen

En este reporte explico un poco lo que es la interpolación y en que consiste, también explico qué es, cómo se aplica la aproximación polinomial simple a una cierta cantidad de puntos dados y cuáles son le fallos que encontré al programarlo y hacer distintas pruebas con distintas series de puntos.

Palabras clave: Polinomio, interpolación, Sistema de ecuaciones.

Introducción

Una función de interpolación es aquella que pasa a través de puntos dados como datos, los cuales se muestran comúnmente por medio de una tabla de valores o se toman directamente de una función dada.
La interpolación de los datos puede hacerse mediante un polinomio, la interpolación polinomial ajustar un polinomio a los puntos dados, es uno de los temas más importantes en métodos numéricos, ya que La mayoría de los métodos numéricos se basan en la interpolación polinomial. Por ejemplo, los métodos de integración numérica se obtienen integrando fórmulas de interpolación polinomial, y los métodos de diferenciación numérica se obtienen derivando las interpolaciones polinomiales. [1]
Cuando el numero de datos disponibles es reducido para intentar obtener una ecuación o modelo matemático que los represente, o simplemente se requiere una estimación rápida de un valor intermedio, o fuera del intervalo de observación, resulta conveniente recurrir a la aproximación polinomial. Un polinomio de enésimo orden tiene la forma siguiente:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

Y puede se ajustado a $n+1$ puntos, de manera que existe uno y solo un polinomio de enésimo orden que pasa a través de todos los puntos. [2]

Metodología

El método de aproximación polinomial simple consiste en tener nuestra tabla de puntos dados y formar un polinomio de un grado enésimos dependiendo de los n datos que se tengan, este polinomio cruza por todos los puntos dados. Para poder encontrar una función polinomial con los datos de la tabla 1, primero

Puntos	0	1	2	...	n
x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

Tabla 1: Tabulación de una función $f(x)$. [3]

debemos crear un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n \\ f(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n \\ f(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n \\ \\ f(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n \end{aligned}$$

O en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Al resolver este sistema por el método que más conveniente, obtendremos el valor de a_0, a_1, a_2, hasta a_n y podremos construir el polinomio de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Este polinomio $P(x)$ al graficarlo o evaluarlo pasara por los puntos dados de la tabla 1.

Resultado

Puntos	0	1	2	3	4	5	6
T(^0C)	56.5	78.6	113.0	144.0	181.0	205.0	214.5
P(atm)	1	2	5	10	20	30	40

Tabla 2: Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones, datos completos. [3]

Puntos	0	1	2
T(^0C)	56.5	113.0	181.0
P(atm)	1	5	20

Tabla 3: Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones, datos incompletos. [3]

Tenemos estas tablas de datos, la tabla 2 tiene mas datos que la tabla 3. En la tabla 3 se redujo el numero de datos para poder hacer él polinomio más fácilmente que usando todos los datos de la tabla 2. Con el polinomio obtenido de los datos de la tabla 3 podremos aproximarnos a los valores de la tabla 2 que no están en la tabla 3. Siguiendo la explicación de antes tomamos los puntos de la tabla 3, para crear nuestro sistema de ecuaciones y obteniendo:

$$\begin{aligned} 56.5 &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 \\ 113 &= a_0 + a_1(5) + a_2(5)^2 \\ 181 &= a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 20 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56.5 \\ 113 \\ 181 \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema llagamos a que, $a_0 = 39.85$, $a_1 = 17.15$, y $a_2 = -0.5048$. Solo falta acomodar estos valores de la forma antes explicada para crear el polinomio $P(x)$ de los puntos de la tabla 3, el polinomio es:

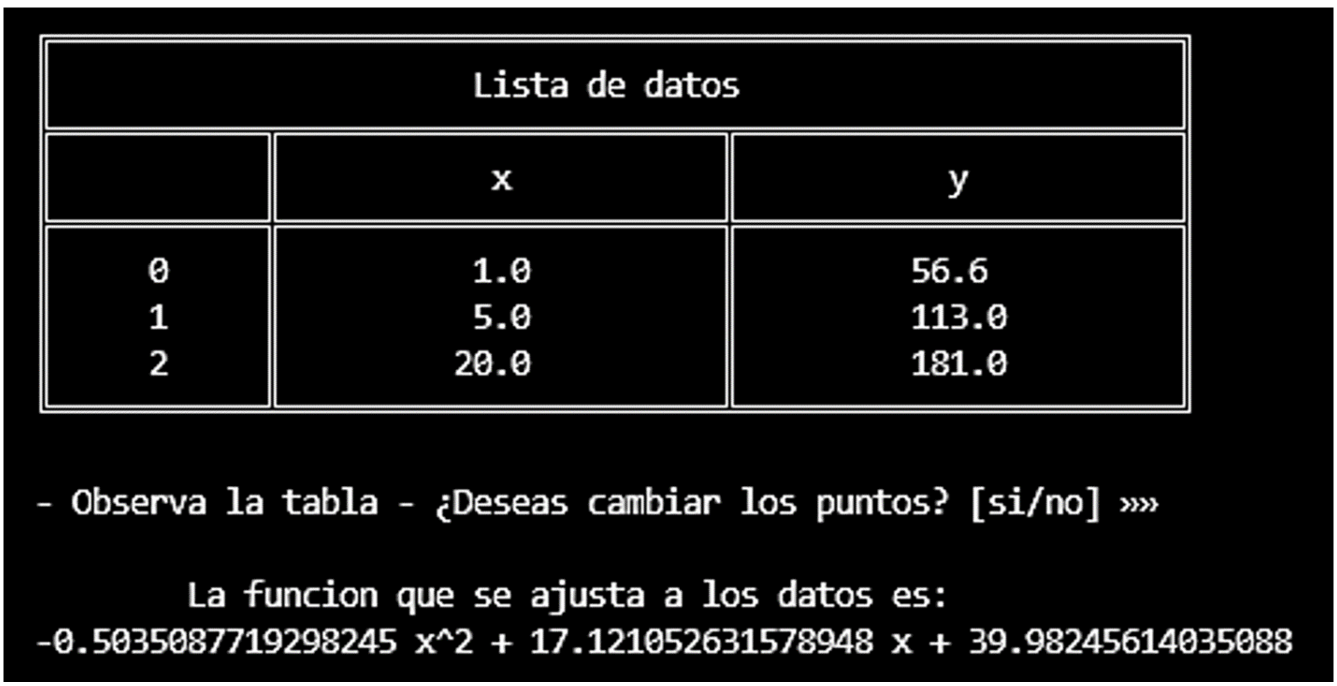
$$P(x) = -0.5048x^2 + 17.15x + 39.85$$

Ahora hay que evaluar esta función en los datos de la tabla 2 que no están en la tabla 3 una y obtendremos una aproximación de estos valores que se muestran en la tabla 4. Si observamos los datos de la tabla 4,

Puntos	0	1	2	3
T(^0C)	72.1	161	100.1	-81.7
P(atm)	2	10	30	40

Tabla 4: Datos aproximado de la tabla 2 con la función $P(x)$ obtenida con los datos de la tabla 3.

si se aproximan a los de la tabla 2, estas aproximaciones se pueden ver mejores si se usan mas datos de los que se usaron en la tabla 3, pero esto conlleva a tener que resolver un sistema de ecuaciones aun mas grande y obtener una función polinomial de grado aun mayor, por esta razón es mejor crear un programa que realice todo. Realizando todo el procedimiento anterior con mi programa obtengo:



Lista de datos

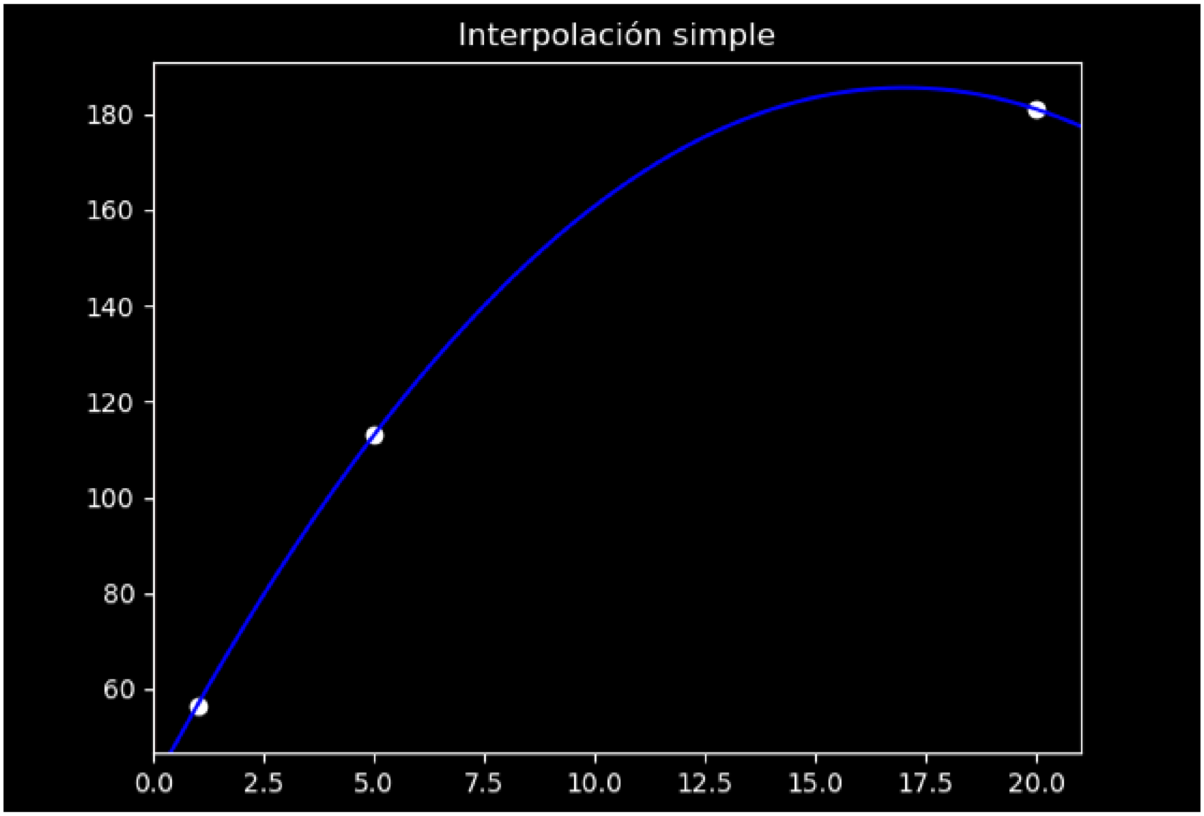
	x	y
0	1.0	56.6
1	5.0	113.0
2	20.0	181.0

- Observa la tabla - ¿Deseas cambiar los puntos? [si/no] »»

La funcion que se ajusta a los datos es:
-0.5035087719298245 x^2 + 17.121052631578948 x + 39.98245614035088

Figura 1: Función creada por mi programa a partir de los datos de la tabla 3

Se puede ver que la ecuación es la misma, solo que tiene todos los decimales que puede usar la computadora, mi programa también grafico los datos y la función como se puede ver en la gráfica 1:



Grafica 1: Grafica de la función $P(x)$ obtenida de los datos de la tabla 3

En la grafica 1 se puede observar que la función si cruza por los datos de la tabla 3, ahora realizare lo mismo, pero con todos los datos de la tabla 2.

Lista de datos		
	x	y
0	1.0	56.5
1	2.0	78.6
2	5.0	113.0
3	10.0	114.0
4	20.0	181.0
5	30.0	205.0
6	40.0	214.5

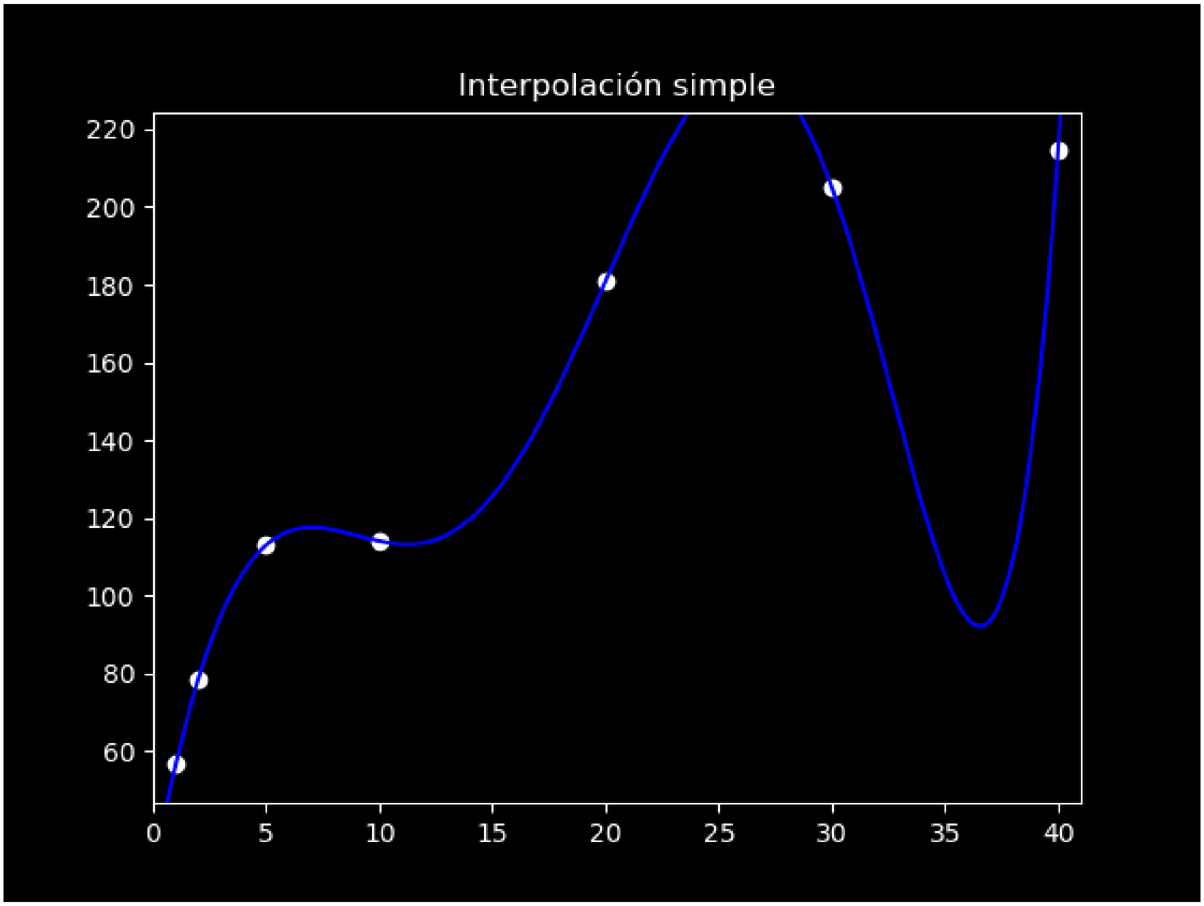
```
- Observa la tabla - ¿Deseas cambiar los puntos? [si/no] »»

        La funcion que se ajusta a los datos es:
6.029938166961775e-06 x^6 - 0.0005015992346028659 x^5 + 0.011184270677061119 x^4 + 0.03
6239598775895374 x^3 - 3.3562353875035287 x^2 + 31.762434601091563 x + 28.0468724862554
45
```

Figura 2: Función creada por mi programa a partir de los datos de la tabla 2

Si vemos la función es de grado 6, si le reducimos las cifras significativas podemos ver mejor la función:

$$6.03 \times 10^{-6}x^6 - 5.01 \times 10^{-4}x^5 + 1.12 \times 10^{-2}x^4 + 0.036x^3 - 3.36x^2 + 31.8x + 28.0$$

Ahora si graficamos los datos de la tabla 2 y la función que me da mi programa, mi programa arroga la gráfica 2.



Grafica 2: Grafica de la función obtenida de los datos de la tabla 2

Observación

Al hacer pruebas con mi programa de distintas tablas de datos, casi en toda podía se podía ajustar una función, pero en algunas no se podía, lo que tenían en común es que además de ser muchos datos, los valores que había en x se repetían mucho, por ejemplo, había más de cinco $x = 1$ o $x = 3$ y de igual forma con los valora en y. En estos casos la función obtenida a veces solo cruzaba por uno de estos puntos que se repetía y en otras ocasiones no cruzaba por ningunos.

Cuando los puntos están muy dispersos y son muchos este método no es el mejor para obtener una aproximación de los datos que no se conocen de la lista de datos, ya que cuando esto ocurre la función solo cruza por lo puntos pero no sigue una trayectoria uniforme sino que varia mucho dependiendo de la posición en la que estén, por ejemplo, si observamos la gráfica 1, esta forma una curva uniforme, no varia mucho, pero si observamos la grafica 2, donde se usan mas puntos, la grafica varia mucho en el espacio que hay entre cada punto, por esta razón este método no es el mejor para obtener las aproximaciones.

Conclusión

El método toma los puntos o datos dados en una tabla, con este punto se crea un sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de la función que cruzará por todos los puntos, dependiendo de cuantos puntos sean, el polinomio sera de un grado mayor mientras mas puntos se tengan y de grado menor mientras menos puntos se tengan, al resolver el sistema de ecuaciones, que siempre tendrá solución ya que, si colocamos el sistema en forma matricial, podemos ver que la primera fila es de puros unos. Con los resultados del sistema, los acomodamos de forma que se cree la función polinomial y esta tenga un grado igual al numero de puntos usados, esta función cruzara todos los puntos usados.

Referencias

[1] Nakamura, S. (1998). Metodos Numericos Aplicados Con Software. En Solución de ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 62–63). Prentice Hall.

[2] Aranda, D. F. C. (2003). Introducción a los métodos numéricos: software en basic y aplicaciones en hidrología superficial. En Interpolación mediante Polinomios (p. 30). Uaslp.

[3] Federico, D. S. C., & Antonio, N. H. (2014). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería. En Aproximación funcional e interpolación (Primera ed., pp. 370–373). Grupo Editorial Patria.