MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Profesora: Maria Guadalupe Godina Cubillo

Alumno: Oscar Joel Castro Contreras

11 de octubre de 2021

Resumen

En este reporte explico un poco de los métodos que existen para encontrar las raíces de cualquier polinomio o función que tenga raíces, y en específico explico, qué es, en que consiste y cuales son las limitaciones del método de Newton Raphson para encontrar raíces.

Palabras clave: Raíces, Newton Raphson, Tangente, Derivada, Maximo, Mínimo.

Introducción

Los polinomios son uno de los conceptos más importantes en álgebra y son fundamentales en matemáticas y ciencia en general. Determinar las raíces de un polinomio es uno de los problemas más antiguos en matemáticas.
Puesto que las ecuaciones polinomiales aparecen en un amplio rango de áreas de la ciencia, desde química y física básica hasta economía, el problema de determinar raíces de polinomios es, con frecuencia, un paso obligado en la resolución de problemas.[1]
La razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de métodos computacionales es que algunas ecuaciones carecen de solución exacta, excepto por unas pocas. Por lo que existen métodos numéricos diseñados para obtener las raíces, aunque cada uno tiene sus propias limitaciones y defectos. Algunos métodos se muestran en la tabla 1[2]

Métodos numéricos para obtener raíces	
Nombre	**Características**
Bisección	Aplicable a funciones no analiticas
Regla falsa	Convergencia lenta en un intervalo grande
Método de Newton	Rápido, se nesecita calcular derivada
Método de secante	Rápido, no se requiera calcular derivada
Sustitución sucesiva	Puede no converger

Tabla 1: Métodos numéricos para obtener raíces [2]

En general, no es posible determinar los ceros de una función, es decir, valores x^* tal que $f(x^*) = 0$, en un número finito de pasos. Tenemos que usar métodos de aproximación. Los métodos son usualmente iterativos y tienen la forma: Iniciando con una aproximación inicial x_0 (o un intervalo $[a, b]$) , se calculan aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, ...$ y elegimos x_n como aproximación de x^* cuando se cumpla un criterio de parada dado. A los ceros de un polinomio se les conoce también como raíces.
El método de Newton Raphson:
Utiliza las rectas tangentes que se evalúan analíticamente. El método de Newton se puede aplicar al dominio complejo para hallar raíces complejas. También se puede extender a las ecuaciones no lineales simultaneas. [3]
La fórmula de Newton-Raphson sea la más ampliamente utilizada. Si el valor inicial para la raíz es a, entonces se puede trazar una tangente desde el punto $(a, f(a))$. Por lo común, el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz. El método de Newton Raphson se deduce a partir de esta interpretación geométrica (un método alternativo basado en la serie de Taylor). Se tiene

que la primera derivada de la función es equivalente a la pendiente:

$$f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x - x_1}$$

que se arregla para obtener

$$x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

la cual se conoce como fórmula de Newton Raphson. [4]

Metodología

El método a diferencia de bisección y regla falsa solo toma un valor inicial a estimado, de donde esta la raíz de la función y con la primera derivada de la función se traza un recta tangente que cruce por el punto $(a, f(a))$, esta recta tangente a la función cruza por el eje x en un cierto punto, este punto es una aproximación a la raíz. Entonces el método se basa en que la primera derivada de la función es una aproximación a la pendiente de la recta por lo que tenemos

$$f'(x) = \frac{f(a) - 0}{a - x}$$

si dejamos x

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

, esta x calculada ahora lo cambio por nuestro valor inicial $a = x$ y así vamos iterando las veces necesarias hasta encontrar la mejor aproximación a la raíz de la función. Si la función tiene mas de una raíz, el método encuentra la raíz que se encuentra más cerca al valor inicial dado.

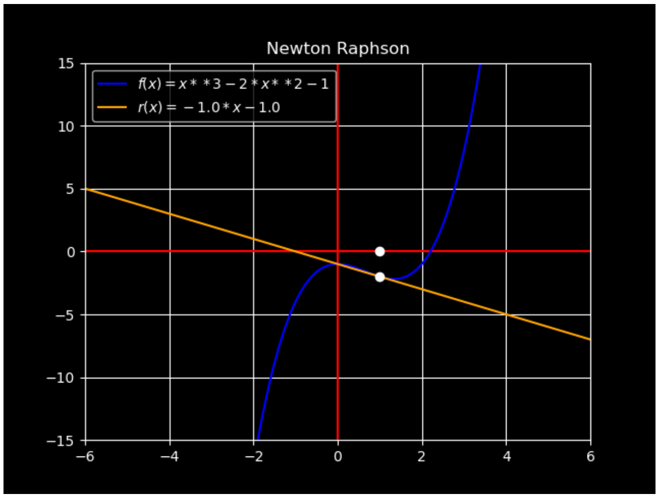
El criterio para parar las iteraciones es el mismo que bisección y ragla falsa, está dado por el número de cifras significativas que queramos, de aquí obtenemos una tolerancia, la cual en cada interacción se compara con el error relativo y absoluto, si uno de los errores es menor o igual a la tolerancia, detener las interacciones.

El programa se basa mucho en lo explicado antes, en esta parte de mi programa se obtiene la derivada de la función (der), se evalúan el valor inicial (a), en la derivada $(fder)$ y la función (fa) y por ultimo se calcula el punto por el que se cursa en eje x (r), esta parte es la mas importante del programa, ya que de aquí se obtiene la aproximación a la raíz.

```
der = ecuacion.diff(x)
fder = der.subs(x,a)
fa = ecuacion.subs(x,a)
if fder != 0:
    r = a - (fa/fder)
```

Resultado

Si tomamos el polinomio $x^3 - 2x^2 - 1$ y damos el punto $x = 1$. Hacemos la evaluación para obtener la raíz con 5 cifras significativas, el programa nos arroja



Grafica 1: Recta Tangente de la funcion que cruza $x^3 - 2x^2 - 1$ en $x = 1$.

x**3 - 2*x**2 - 1				
Interaccion	Raiz	F(x)	Error abs	Error rel
1	-1.00000000000000	2.0	0.0	0.0
2	-0.428571428571429	4.0	1.428571428	3.333333333
3	0.209781209781210	1.446064139	0.218790218	1.042944785
4	-1.31586390610699	1.078784227	1.525645115	1.159424701
5	-0.671243142553731	6.741411122	1.987107048	2.960338695
6	-0.125354469844723	2.203574961	0.796597612	6.354760331
7	1.75848495192495	1.033397274	1.633130482	0.928714505
8	2.53732233423494	1.746829575	0.778837382	0.306952479
9	2.26897998941534	2.459283674	0.268342344	0.118265628
10	2.20856418314042	0.384781661	0.060415806	0.027355241
11	2.20557657970103	0.017325143	0.002987603	0.001354568
Raiz aproximada ≈	2.2055			
Paro por error relativo				

Tabla 2: Iteraciones a la aproximación de la raíz de la función $x^3 - 2x^2 - 1$.

Observamos que la aproximación a la raíz es 2.2055, con 11 iteraciones. El criterio de paro fue por el error relativo.

Observación

El método tiene algunas limitaciones, una de ellas es que en algunos casos la derivada de la función caerá en los máximos o a un mínimo de la función, cuando ocurre esto la recta deja de cruzar por el eje x, por lo que en estos casos el método se parar y se le debe de pedir al usuario que coloque un valor inicial un más cercano a la raíz. Otra de las limitaciones es cuando la función no tiene raíces reales, cuando se queda en un bucle donde la función tiene un valor mínimo o cuando se colocó un valor inicial muy lejano a la raíz y en vez de que el método converger este diverge, en estos casos el método nunca deja de iterar, por lo que se le debe de dar un paro a una cierta cantidad de iteraciones.

Conclusión

En conclusión, el método de Newton Raphson, toma un valor inicial a y con la ayuda de la derivada de la función y la pendiente de la recta tangente que cruza por el punto $(a, f(a))$ se obtiene una formula con la que se puede calcular, por donde cruza la recta tangente el eje x, e sustituir el valor inicial por el nuevo valor encontrado $a = x$ y evaluar de nuevo la función, pero ahora con el nuevo valor y así ir iterando hasta llegar a la raíz de la función. Las limitaciones del método son, cuando la derivada de la función cae en un máximo o un mínimo de la función, cuando la función no tiene raíces reales o cuando la recta se queda en un bucle donde hay un mínimo de la función y cuando se coloca un valor inicial muy lejos de la raíz donde puede que, en vez de converger, diverge.

Referencias

[1] de la Vega, H. M. El calculo de raıces de polinomios. Una historia sin fin. Recuperado de Pagina web de [1].

[2] Nakamura, S. (1998). Metodos Numericos Aplicados Con Software. En Solución de ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 62–63). Prentice Hall.

[3] Mora, W. (2010). Introducción a los Métodos Numéricos. Implementaciones en R. Ecuaciones no lineales (Primera ed., pp. 95,110) Recuperado de Pagina web de [3].

[4] Chapra, S. (2015). Métodos numéricos para ingenieros. RAICES DE ECUACIONES (7.a ed., pp. 91–180). Editorial McGraw-Hill.