Optimización de Portafolios: Maximización del Ratio de Sharpe mediante Programación Cuadrática, Simulación Monte Carlo y Algoritmos Genéticos

*Note: Repositorio de Kaggle, Repositorio de GitHub

Santiago Flórez Suárez
Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Coahuila
Saltillo, Coahuila, México
santiagoflorez.s12@gmail.com

Oscar J. Castro C.
Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Coahuila
Saltillo, Coahuila, México
oscar-castro@uadec.edu.mx

***Resumen*—Este trabajo presenta un estudio comparativo entre la optimización de portafolios mediante programación cuadrática clásica y algoritmos genéticos. El objetivo es maximizar el rendimiento ajustado al riesgo bajo restricciones de inversión realistas. Se emplea la teoría moderna de portafolios de Markowitz (1952) y se desarrolla un componente evolutivo implementado en Python para resolver el problema de maximización del ratio de Sharpe. Los resultados muestran que el enfoque evolutivo logra soluciones factibles y competitivas, aunque sin mejoras significativas respecto al método determinista.**

***Palabras clave*—Optimización de portafolios, programación cuadrática, Monte Carlo, algoritmos genéticos, ratio de Sharpe.**

I. Introducción

La optimización de portafolios es un área estudiada dentro de las finanzas cuantitativas y la ingeniería financiera, ya que permite identificar combinaciones óptimas de activos para maximizar el retorno esperado bajo un nivel de riesgo determinado. El modelo pionero de Markowitz (1952) [1] estableció la base de la Teoría Moderna de Portafolios (MPT), definiendo el riesgo mediante la varianza y proponiendo la frontera eficiente como conjunto de combinaciones óptimas.

Sin embargo, los modelos clásicos de optimización lineal presentan limitaciones cuando se incorporan restricciones realistas como límites de inversión, costos de transacción y restricciones de no negatividad. En este contexto, las técnicas como la programación cuadrática, simulación de Monte Carlo o los algoritmos genéticos ofrecen una alternativa flexible para abordar problemas no lineales o no convexos.

El reto de optimizar un portafolio esta en la gestión de diversos activos y consideraciones de riesgo para crear una proporción de asignación de capital a cada activo destinada a aumentar la rentabilidad o reducir la exposición al riesgo [2].

En este trabajo se desarrolla un modelo de optimización de portafolio con restricciones exactas mediante programación cuadrática, simulación de Monte Carlo y algoritmos genéticos, combinando la teoría de Markowitz con la implementación práctica en Python. Además, se utiliza la tasa de rentabilidad del bono de Estados Unidos a 10 años como tasa libre de riesgo, siguiendo la recomendación de Damodaran (2008) [3].

II. Metodología

El modelo de Markowitz busca minimizar la varianza del portafolio dado un retorno esperado:

$$\min_{\omega} \omega^T \Sigma \omega \tag{1}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0 \tag{2}$$

donde ω es el vector de pesos de los activos y Σ la matriz de covarianzas. El rendimiento esperado del portafolio se define como:

$$E[R_p] = \omega^T \mu \tag{3}$$

donde μ representa el vector de rendimientos esperados de cada activo.

Consideremos un universo compuesto por n activos, cada uno con una rentabilidad esperada μ_i, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Podemos definir el vector de rentabilidades esperadas como

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^T . \tag{4}$$

A partir de estas rentabilidades se construye la matriz de covarianzas Σ, cuyos elementos σ_{ij} representan la covarianza entre los activos i y j:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

la cual es una matriz simétrica y semidefinida positiva.

Sea ahora ω el vector que contiene las proporciones de el capital invertido en cada activo:

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]^T . \tag{6}$$

Con estos parámetros, las principales características del portafolio son:

- Rentabilidad esperada del portafolio:

$$\mu_p = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \cdots + \mu_n\omega_n = \mu^T\omega \tag{7}$$

- Varianza del portafolio

$$\sigma_p^2 = \omega^T\Sigma\omega \tag{8}$$

Finalmente, la restricción de presupuesto impone que la totalidad del capital sea invertido, lo cual se expresa como

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1 \tag{9}$$

y podemos compactar con un vector $l = [1, 1, \ldots, 1]^T$ y la vemos como

$$l^T\omega = 1 \tag{10}$$

Considerando que nuestro objetivo al optimizar un portafolio es minimizar la varianza del portafolio, con una rentabilidad esperada del portafolio lo cual podemos formular el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega && (11) \\ \text{s.a.} \quad & \mu^T\omega = \mu_p && (12) \\ & l^T\omega = 1 && (13) \\ & \omega \geq 0 && (14) \end{aligned}$$

donde agregamos la restricción $\omega \geq 0$ con la consideración de que no tenemos ventas a corto plazo. Al resolver este problema para distintos valores de la rentabilidad objetivo μ_p, se obtiene un conjunto de soluciones que representan los portafolios de mínima varianza para cada nivel de retorno esperado. La colección de todos estos portafolios conforma la frontera eficiente, la cual describe la combinación óptima de riesgo y rendimiento, y constituye una de las principales herramientas del modelo de Markowitz [1] para la selección racional de portafolios.

El desempeño ajustado por riesgo se mide a través del **ratio de Sharpe**:

$$S = \frac{E[R_p] - R_f}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}} \tag{15}$$

donde R_f es la tasa libre de riesgo. Según [3], esta tasa debe corresponder a bonos del gobierno a largo plazo, en este caso, el bono estadounidense a 10 años obtenido de [4].

Un ratio $S < 1$ indica un desempeño bajo, $1 < S < 2$ aceptable, $2 < S < 3$ muy bueno, y superior a 3 excelente.

Con el ratio de Sharpe el problema de optimización [5] que se encuentra es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \frac{\mu^T\omega - R_f}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}} && (16) \\ \text{s.a.} \quad & l^T\omega = 1 && (17) \\ & \omega \geq 0 && (18) \end{aligned}$$

el cual tiene un función objetivo , lo que nos genera un problema de optimización no lineal, pero podemos reformular como un problema de programación cuadrática

En este caso, la función objetivo es una razón entre un término lineal y la raíz cuadrada de un término cuadrático. Esta forma no es convexa y no está definida cuando $\omega^\top\Sigma\omega = 0$, lo que convierte el problema en una optimización no lineal. Sin embargo, el problema puede reformularse como uno de programación cuadrática equivalente, al fijar un rendimiento objetivo μ_p^* y minimizar la varianza sujeta a dicho retorno:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega && (19) \\ \text{s.a.} \quad & \mu^T\omega - R_f = \mu_p^* && (20) \\ & l^T\omega = 1 && (21) \\ & \omega \geq 0 && (22) \end{aligned}$$

Al resolver este problema para distintos valores de μ_p^* se obtiene la frontera eficiente, el portafolio con mayor ratio de Sharpe se identifica como aquel que presenta la pendiente máxima en dicha frontera.

II-A. Método de Programación Cuadrática (QP)

Consideremos el caso clásico de optimización de portafolios sin la restricción de ventas a corto plazo. El problema puede formularse como:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega && (23) \\ \text{s.a.} \quad & \mu^T\omega = \mu_p && (24) \\ & l^T\omega = 1 && (25) \\ & && (26) \end{aligned}$$

donde el objetivo es determinar la proporción óptima de capital a asignar en cada activo, de manera que se minimice la varianza total del portafolio para un nivel esperado de retorno μ_p.

Este problema puede resolverse de forma analítica mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, dado que únicamente involucra restricciones de igualdad (véase el Apéndice A). A partir de dicha solución se obtiene la relación funcional entre el rendimiento esperado μ_p y la volatilidad σ_p, que define la conocida frontera eficiente en teoría moderna de portafolios.

En este trabajo, sin embargo, se incluye la restricción de no ventas a corto plazo y la optimización del ratio de Sharpe, lo que conduce al siguiente problema de programación cuadrática con restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega && (27) \\ \text{s.a.} \quad & \mu^T\omega - R_f = \mu_p^* && (28) \\ & l^T\omega = 1 && (29) \\ & \omega \geq 0 && (30) \end{aligned}$$

La inclusión de la restricción de no negatividad incrementa la complejidad de resolución del problema, por lo que se requiere el uso de algoritmos numéricos y computacionales más eficientes para aproximar la solución óptima [6], [7].

Para resolver este problema se empleó la biblioteca de Python `PyPortfolioOpt` [8], que permite resolver numéricamente problemas de optimización cuadrática para la optimización de portafolios, obtener los portafolios de máxima ratio de Sharpe y construir la correspondiente frontera eficiente (véase la Figura 5).

II-B. Método de Simulación de Monte Carlo (SMC)

La simulación de Monte Carlo es un método o tipo de algoritmo computacional que buscar aprovechar el computo para realizar un muestreo aleatorio repetitiva de una posible situaciones incierta y evaluar o prever posibles resultados [9].

El método de Monte Carlo construye un modelo que permite generar posibles resultados para aquellas variables que presentan incertidumbre. Posteriormente, el modelo repite este proceso múltiples veces utilizando conjuntos de números aleatorios sujetos a determinadas restricciones. Al realizar miles de estas simulaciones, se obtiene una amplia distribución de resultados posibles, a partir de la cual es posible identificar, mediante métricas de desempeño, las soluciones más convenientes para el problema analizado [10], [11].

En la optimización del portafolio, el método de Monte Carlo ofrece diversas ventajas, ya que permite explorar una amplia gama de combinaciones posibles de asignación de capital entre los activos. Este enfoque se basa en la generación aleatoria de pesos que satisfacen las restricciones del modelo, y la evaluación sistemática de su desempeño según el criterio del ratio de Sharpe [2].

II-C. Método de Algoritmo Genético (AG)

La computación evolutiva constituye un conjunto de técnicas inspiradas en la selección natural, con el objetivo de encontrar soluciones óptimas en espacios de búsqueda complejos. Los algoritmos genéticos (AG), introducidos por [12], son una de las metodologías más empleadas dentro de esta familia.

En la optimización de portafolios, los AG permiten manejar restricciones de tipo no lineal o discreto, el flujo básico del algoritmo incluye:

1. Generar una población inicial de soluciones factibles (vectores de pesos).
2. Evaluar la función objetivo (minimizar la varianza o maximizar el ratio de Sharpe).
3. Seleccionar los mejores individuos.
4. Aplicar operadores genéticos: cruce, mutación y elitismo.
5. Iterar hasta alcanzar la convergencia.

El algoritmo genético se implementó completamente en Python, con el fin de tener un mayor control sobre los parámetros evolutivos y el proceso de optimización. La población inicial se genera mediante vectores aleatorios de pesos ω, los cuales son reparados para cumplir las restricciones $\sum_i \omega_i = 1$ y $\omega_i \geq 0$ mediante una función de normalización (`repair_weights`).

La función objetivo corresponde al **ratio de Sharpe**, definido como:

$$f(\omega) = \frac{\mu^T \omega - R_f}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega}} \tag{31}$$

donde se busca su maximización. El proceso evolutivo utiliza los siguientes operadores:

- **Selección por torneo:** se eligen aleatoriamente $k = 3$ individuos, seleccionando el que posea mayor valor de fitness.
- **Cruce lineal:** se combinan dos padres p_1 y p_2 de acuerdo con
$$h = \alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2, \quad \alpha \sim U(0, 1) \tag{32}$$
- **Mutación gaussiana:** se perturba cada gen con una distribución $\mathcal{N}(0, \sigma)$ con probabilidad $p_m = 0.2$ y $\sigma = 0.05$.
- **Elitismo:** los 5 mejores individuos de cada generación son preservados.

Los parámetros empleados se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros del algoritmo genético.

Parámetro	Valor
Tamaño de población	100
Número de generaciones	300
Probabilidad de cruce	0.8
Probabilidad de mutación	0.2
Desviación estándar de mutación σ	0.05
Número de élites	5
Tamaño del torneo k	3

El proceso de evolución se detiene tras 300 generaciones o cuando el mejor valor de fitness no mejora en varias iteraciones consecutivas. Durante la ejecución se registra el mejor ratio de Sharpe por generación, lo que permite analizar la convergencia del algoritmo (véase la Figura 4).

III. Experimentación

III-A. Herramientas Utilizadas

El código por completo fue hecho en Python, ya que tiene distintas librerías que permiten la facilidad de extraer, organizar, manipular y analizar los datos, las librerías usadas son:

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import yfinance as yf
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import cvxpy as cp
from pypfopt.efficient_frontier import
    EfficientFrontier
```

III-B. *Extracción y análisis de datos*

En este estudio se analiza un portafolio compuesto por las siguientes empresas:

- Apple Inc. (AAPL)
- Microsoft Corp. (MSFT)
- Alphabet Inc. (GOOG)
- Amazon.com Inc. (AMZN)
- Tesla Inc. (TSLA)

Los datos históricos de precios fueron obtenidos mediante el paquete `yfinance` [13], que permite descargar información financiera directamente desde el portal de https://finance.yahoo.com. Se utilizaron los precios de cierre diario de cada activo desde inicios de 2019 hasta comienzos de 2025 (véase la Figura 1).

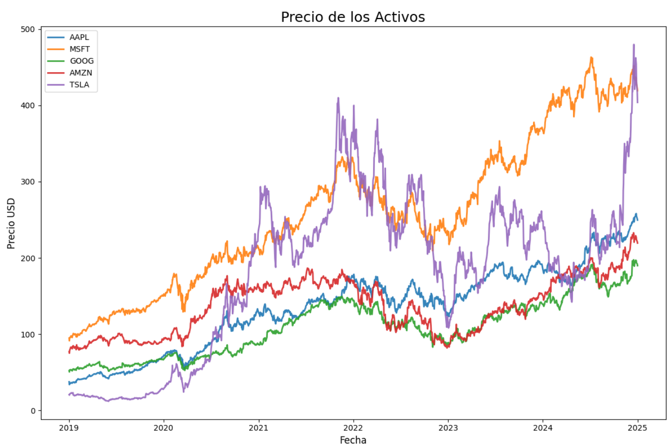

Figura 1: Evolución temporal de los precios de cierre diario de los activos seleccionados.

A partir de los precios diarios de cada activo, existen dos maneras de calcular los rendimientos de un activo o portafolio:

- Retornos simples:

$$R_i(t+1) = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \tag{33}$$

- Retornos logarítmicos:

$$R_i(t+1) = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \tag{34}$$

donde P_t representa el precio de cierre del activo i en el día t.

comparando se puede notar que los retornos que arrojan son aproximadamente iguales para variaciones pequeñas en el precio. Sin embargo, en este trabajo se emplean los retornos logarítmicos debido a varias ventajas teóricas y

- Permiten que los rendimientos de varios periodos se pueden sumar directamente, lo cual facilita el análisis de series de tiempo y el cálculo de retornos acumulados.
- Asumen una distribución más cercana a la normalidad, lo que nos permite obtener fácilmente la rentabilidad esperada de cada activo simplemente calculando la media.
- Son independientes de la unidad de medida del precio.

Por estas ventajas se recomienda en [14] que es conveniente calcular los rendimientos utilizados en el análisis se calcularon en su forma logarítmica, a partir de los precios diarios de cierre de cada activo. Generando la distribución de los retornos diarios (véase la Figura 2).

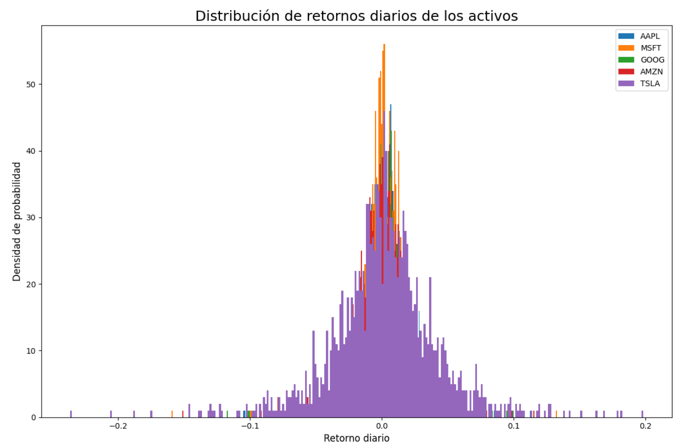

Figura 2: Distribución de los retornos diarios de los activos seleccionados.

Analizando la Figura 2 observamos que hay un comportamiento aproximado a la una distribución normal, por lo que para el calculo de la rentabilidad esperada de cada activo es conveniente hacerla a través de la media de los retornos diarios los cuales multiplicando por 251, ya que durante el año solo en 251 días se trazan valores [15] (véase la Tabla 2).

Tabla 2: Rentabilidades esperadas anualizada de los activos seleccionados.

Activos	Rentabilidad esperada
AAPL	0.314915
MSFT	0.247287
GOOG	0.215582
AMZN	0.174255
TSLA	0.494367

A partir de los datos en la Tabla 2 podemos generar nuestro vector de rentabilidades esperadas μ.

Con los retornos diarios podemos obtener la matriz de covarianzas Σ la cual anualizamos de igual forma que la rentabilidad esperada de cada activo (véase la Figura 3).

Algo importante también es la tasa libre de riesgo esta tasa ya que nuestros activos son empresas que reciden en Estados Unidos debe corresponder a bonos del gobierno a largo plazo, en este caso, el bono a 10 años obtenido de [4].

$$R_f = 0.04151 \tag{35}$$

Como ya tenemos todos los parámetros de nuestro problema ahora la cuestión es encontrar ω la proporción del capital a invertir en cada activo que nos genere el portafolio mas óptimo.

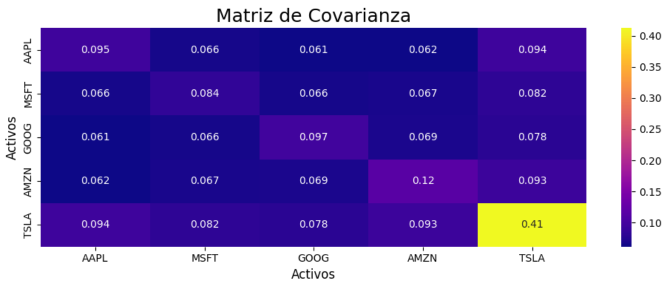

Figura 3: Matriz de covarianzas anualizada de los activos seleccionados.

III-C. *Implementación del Método de Monte Carlo*

El procedimiento general puede describirse de la siguiente manera:

1. Generar aleatoriamente vectores de pesos ω que cumplan las restricciones del portafolio ($l^T\omega = 1$ y $\omega \geq 0$).
2. Evaluar para cada conjunto de pesos el valor del ratio de Sharpe.
3. Repetir el proceso de generación y evaluación para construir una familia de posibles portafolios.
4. Seleccionar el portafolio que maximice el ratio de Sharpe.

Las simulaciones de Monte Carlo que se realizaron con un total de 30000 vectores de pesos ω, garantizando una exploración adecuada del espacio de soluciones factibles.

III-D. *Implementación del Algoritmo Genético*

Para la experimentación, el algoritmo genético fue aplicado al conjunto de activos descrito previamente. La función de aptitud utilizada fue la maximización del ratio de Sharpe, considerando como tasa libre de riesgo $R_f = 0.04151$.

El algoritmo se ejecutó con una población de 100 individuos durante 300 generaciones, con un control de elitismo que preserva los mejores cinco portafolios. La Figura 4 muestra la evolución del mejor ratio de Sharpe en cada generación, evidenciando una rápida convergencia en las primeras 100 iteraciones, seguida de una estabilización progresiva.

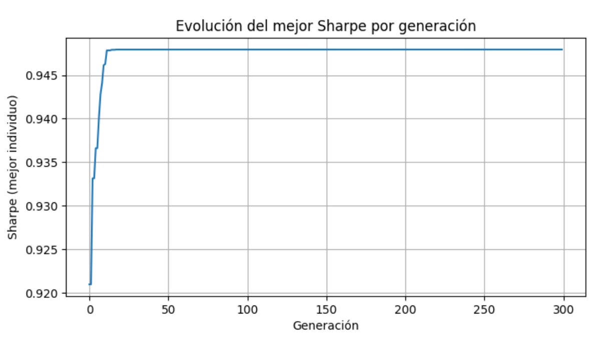

Figura 4: Evolución del mejor ratio de Sharpe por generación en el algoritmo genético.

IV. Resultados

IV-A. *Resultados por Método de Programación Cuadrática*

El portafolio óptimo obtenido por el método de programación cuadrática asigno los pesos que se observan en la Tabla 3. Observamos una rentabilidad esperada anual de $34.49\,\%$, una volatilidad anual de $32.10\,\%$ y un ratio de Sharpe de 0.9453. Se da una preferencia sobre el activos Apple Inc. (AAPL), con una proporción de $74.94\,\%$, seguido de Tesla Inc. (TSLA) con un $19.05\,\%$.

Tabla 3: Resultados del portafolio óptimo obtenido por el QP II-A).

Rentabilidad Esperada (%):	34.49
Volatilidad (%):	32.10
Ratio de Sharpe:	0.9453
Activo	**Peso óptimo (%)**
AAPL	74.94
MSFT	5.82
GOOG	0.10
AMZN	0.10
TSLA	19.05

En la Figura 5 se gráfica la volatilidad vs la rentabilidad y se coloco la frontera eficiente y se destaca con un triangulo amarillo el portafolio optimo con el máximo ratio de Sharpe dado por el método de Programación Cuadrática.

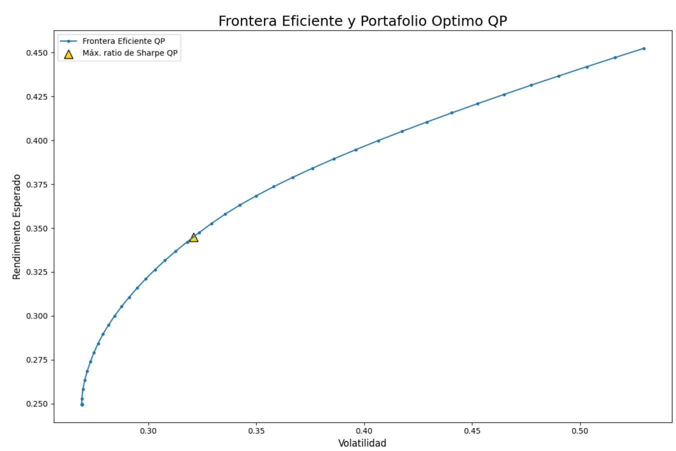

Figura 5: Frontera eficiente y máximo ratio de Sharpe de los activos seleccionado calculados por el QP.

IV-B. *Resultados por Método de Simulación de Monte Carlo*

El portafolio óptimo obtenido por la simulación de Monte Carlo asigno los pesos que se observan en la Tabla 4. Observamos una rentabilidad esperada anual de $35.34\,\%$, una volatilidad anual de $33.34\,\%$ y un ratio de Sharpe de 0.9415. Se da una preferencia sobre el activos Apple Inc. (AAPL), con una proporción de $73.65\,\%$, seguido de Tesla Inc. (TSLA) con un $23.90\,\%$.

En la Figura 6 podemos observar una gráfica de la volatilidad vs la rentabilidad esperada, donde se graficaron todos los conjuntos de portafolios que se simularon, se destaca en color azul el portafolio optimo con el máximo ratio de Sharpe dado

Tabla 4: Resultados del portafolio óptimo obtenido por el SMC II-B.

Rentabilidad Esperada (%):	35.54
Volatilidad (%):	33.34
Ratio de Sharpe:	0.9415
Activo	**Peso óptimo (%)**
AAPL	73.65
MSFT	0.23
GOOG	2.18
AMZN	0.04
TSLA	23.90

por la simulación de Monte Carlo y el color de cada punto indica el ratio de Sharpe, que mide la eficiencia del portafolio ajustada al riesgo: valores más altos (colores amarillos) indican una mejor relación rendimiento–riesgo.

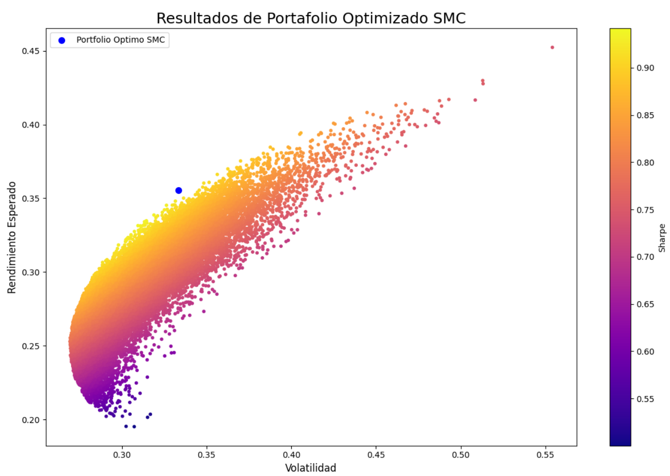

Figura 6: Resultados de Portafolio Optimo obtenido por el SMC.

IV-C. *Resultados por Método de Algoritmo Genético*

El portafolio óptimo obtenido mediante el algoritmo genético asignó los pesos mostrados en la Tabla 5. Se observa una fuerte preferencia por el activo de Apple Inc. (AAPL), con una participación del 75 %, seguido de Tesla Inc. (TSLA) con un 19 %, mientras que las demás acciones presentan pesos mínimos o nulos. El portafolio resultante presenta una rentabilidad esperada anual de 34.64 %, una volatilidad anual del 32.17 %, y un ratio de Sharpe de 0.9479.

Tabla 5: Pesos óptimos del portafolio obtenido por el algoritmo genético.

Activo	Peso óptimo	Rentabilidad esperada (%)
AAPL	0.7501	31.49
MSFT	0.0000	24.73
GOOG	0.0000	21.55
AMZN	0.0596	17.43
TSLA	0.1903	49.43

En comparación, el portafolio equiponderado presentó un ratio de Sharpe de 0.8225, mientras que el portafolio obtenido por programación cuadrática alcanzó valores ligeramente superiores. Esto evidencia que el algoritmo genético logra soluciones competitivas, aunque su desempeño depende del espacio de búsqueda y de la sensibilidad a los parámetros evolutivos.

Nuevamente en la Figura 7 podemos observar una gráfica de la volatilidad vs la rentabilidad esperada, donde se gratificaron todos los conjuntos de portafolios que se simularon, por el método de algoritmo genético, se destaca en color azul el portafolio que ofrecio el mejor resultado.

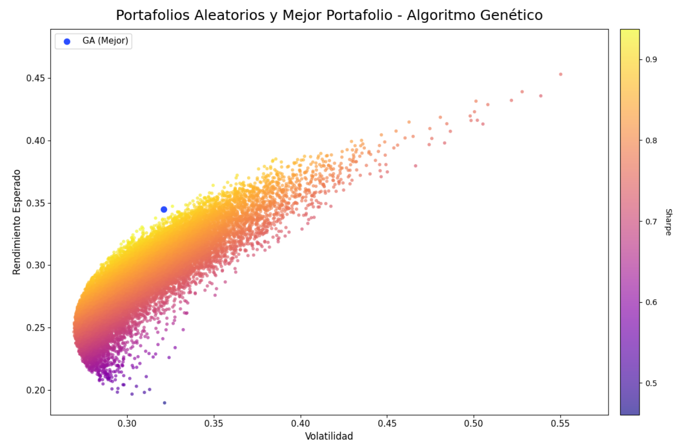

Figura 7: Resultados de Portafolio Optimo obtenido por el GA.

Además, se realizó una validación *walk-forward* para analizar la estabilidad temporal del modelo. Los resultados promedios mostraron una rentabilidad de 5.12 %, volatilidad de 27.59 % y ratio de Sharpe promedio de 0.1426 ± 0.8968. A pesar de la dispersión en los resultados entre periodos, el método mantuvo la factibilidad de las soluciones, demostrando su capacidad de adaptación frente a cambios de mercado.

IV-D. *Comparación de las soluciones de SMC con QP*

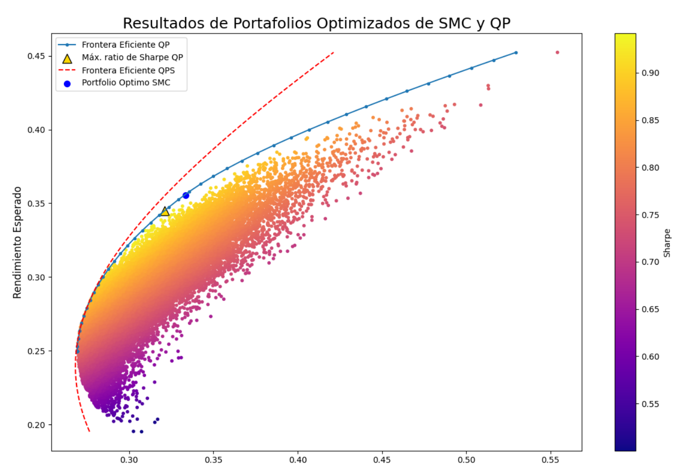

Figura 8: Comparación resultados de portafolio optimo en SCM y QP.

En la Figura 8 se puede observar que los resultados del método SMC se distribuyen alrededor de la frontera eficiente QP, mostrando que, aunque el enfoque de simulación puede aproximar la frontera teórica, la optimización analítica por QP logra identificar de forma más precisa los portafolios óptimos. Además, ambos métodos coinciden en la región de mayor rendimiento esperado para un nivel de riesgo moderado, lo que valida la consistencia del procedimiento de Monte Carlo y su capacidad para explorar adecuadamente el espacio de soluciones factibles. La curva azul continua representa la frontera eficiente obtenida mediante Programación Cuadrática (QP), que define las combinaciones óptimas entre riesgo y rendimiento según la teoría de Markowitz. El triángulo amarillo identifica el portafolio con el máximo ratio de Sharpe obtenido con QP, mientras que el punto azul muestra el portafolio óptimo hallado mediante la simulación Monte Carlo (SMC). Al comparar los puntos óptimos, se observa que el portafolio óptimo SMC se encuentra muy próximo al punto de máximo Sharpe de QP, lo que evidencia que el método de Monte Carlo, pese a su naturaleza aleatoria, es capaz de aproximar la frontera eficiente al incrementar el número de simulaciones. Asimismo, la línea roja discontinua (QPS) corresponde a la frontera eficiente sin restricciones de no venta corta, la cual delimita la envolvente teórica superior de rendimientos posibles.

IV-E. Comparación de las soluciones de GA con QP

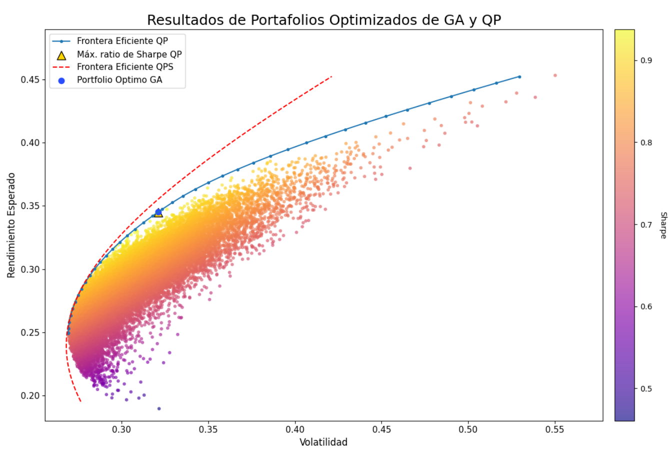

Figura 9: Comparación resultados de portafolio optimo en GA y QP.

En la Figura 9 se presenta, en el punto azul el portafolio óptimo obtenido mediante el Algoritmo Genético (GA) y el triángulo amarillo señala el portafolio con el máximo ratio de Sharpe obtenido por QP.

Se observa que el portafolio óptimo GA se encuentra muy próximo a la frontera eficiente QP, lo que indica que el algoritmo evolutivo logra aproximar de forma precisa la solución teórica.

La ligera desviación del punto azul respecto a la frontera puede atribuirse a la naturaleza estocástica del GA y a la limitación del número de generaciones o tamaño poblacional, factores que determinan la convergencia hacia el óptimo global.

En conjunto, la figura ilustra cómo el método genético es capaz de explorar el espacio de soluciones y obtener resultados consistentes con la teoría clásica de Markowitz, pero con la ventaja de poder extenderse fácilmente a problemas no convexos o con restricciones más complejas, donde los métodos cuadráticos tradicionales podrían fallar.

V. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos demuestran que los tres enfoques de optimización (programación cuadrática, simulación de Monte Carlo y algoritmos genéticos) son capaces de construir portafolios eficientes bajo la teoría de Markowitz. La programación cuadrática presentó el mejor desempeño en términos del ratio de Sharpe, al ofrecer una solución determinista y convexa, mientras que el método de Monte Carlo permitió explorar de forma amplia el espacio de soluciones factibles.

Por su parte, el algoritmo genético alcanzó resultados competitivos con un ratio de Sharpe de 0.9479, destacando su capacidad para manejar restricciones no lineales y mantener factibilidad de los pesos a lo largo del proceso evolutivo. La validación *walk-forward* reveló una disminución en el desempeño promedio, atribuida a la variabilidad temporal de los retornos y a la sensibilidad del algoritmo a los parámetros evolutivos.

En conjunto, se concluye que los algoritmos genéticos constituyen una alternativa robusta y flexible frente a los métodos deterministas, especialmente en problemas donde las funciones objetivo o las restricciones no son convexas.

REFERENCIAS

[1] H. Markowitz, “Portfolio selection,” *The Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.
[2] J. G. de la Vega Meneses, “Análisis de portafolios de inversión mediante simulación de monte carlo en python:: Evaluación del riesgo y rendimiento con acciones mexicanas,” *Economía & Negocios*, vol. 7, no. 2, 2025.
[3] A. Damodaran, “What is the risk-free rate? a search for the basic building block,” Stern School of Business, New York University, Tech. Rep., 2008. [Online]. Available: https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/pdfiles/papers/riskfreerate.pdf
[4] Investing.com. (2025) U.s. 10 year bond yield. Recuperado el 5 de noviembre de 2025. [Online]. Available: https://mx.investing.com/rates-bonds/u.s.-10-year-bond-yield
[5] A. Kourtis, “The sharpe ratio of estimated efficient portfolios,” *Finance Research Letters*, vol. 17, pp. 72–78, 2016.
[6] M. J. Best, *Quadratic programming with computer programs*. Chapman and Hall/CRC, 2017.
[7] A. L. Peressini, F. E. Sullivan, and J. J. U. Jr., *The Mathematics of Nonlinear Programming*, 1st ed., ser. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1988, springer Science+Business Media New York.
[8] R. A. Martin, “Pyportfolioopt: portfolio optimization in python,” *Journal of Open Source Software*, vol. 6, no. 61, p. 3066, 2021. [Online]. Available: https://doi.org/10.21105/joss.03066
[9] “ẁué es la simulación monte carlo?” https://www.ibm.com/mx-es/think/topics/monte-carlo-simulation, Sep. 2024, accessed: 2025-11-9.
[10] J. I. Illana, “Métodos monte carlo,” *Universidad de Granada, Departamento de Física Teórica y del Cosmos*, 2013.
[11] A. Serrano Cádiz, “Optimización estocástica mediante métodos de monte carlo,” 2011.
[12] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.

[13] R. Aroussi, "yfinance: Download market data from yahoo! finance's api," https://pypi.org/project/yfinance/, 2019.
[14] L. Berggrun *et al.*, *Introducción al análisis de riesgos financiero*. Ecoe ediciones, 2011.
[15] "NYSE: Holidays and trading hours," https://www.nyse.com/markets/hours-calendars, accessed: 2025-11-8.
[16] R. G. Leyva Ortiz, "Construcción y optimización de portafolios de inversión con python," 2024.
[17] N. Besser. (2020) Optimización de portafolios en python: Sharpe ratio y mínima varianza. Medium. [Online]. Available: https://nicobesser.medium.com/...
[18] F.-M. D. R. Fortin, M.-A. Gardner, M. Parizeau, and C. Gagné, "Deap: Evolutionary algorithms made easy," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 13, pp. 2171–2175, 2012.
[19] N. Reyes-Hernández, "Optimización de portafolios mediante algoritmos evolutivos," Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana, 2017.
[20] M. Rodríguez López, J. García Mejía, and J. Martínez Garduño, "Diseño de un portafolio de inversión con algoritmos evolutivos," *Facat Journal*, 2020.
[21] F. Martínez, M. González, and J. Ramírez, "Modelo de optimización de portafolio: un caso aplicado a la bolsa mexicana de valores," *Contaduría y Administración*, vol. 60, no. 3, pp. 603–622, 2015.
[22] J. Castillo, E. Delgado, and J. Rojas, "Hybrid evolutionary methods for portfolio optimization under nonlinear constraints," *Soft Computing*, vol. 27, pp. 14 987–15 004, 2023.

APÉNDICE A
SOLUCIÓN DE CASO ESPECIAL DE PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN CUADRÁTICAS POR MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega \\
\text{s.a.} \quad & \mu^T\omega = \mu_p \\
& l^T\omega = 1 \\
& \omega \geq 0
\end{aligned}
$$

Obtenemos el lagrangeano del sistema

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega - \lambda_1(\mu^T\omega - \mu_p) - \lambda_2(l^T\omega - 1)$$

Al aplicar las condiciones de primer orden,

$$
\begin{gathered}
\nabla_\omega L = \Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2 l = 0 \\
\nabla_{\lambda_1} L = \mu^T\omega - \mu_p = 0 \\
\nabla_{\lambda_2} L = l^T\omega - 1 = 0
\end{gathered}
$$

se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2 l &= 0 \\
\mu^T\omega - \mu_p &= 0 \\
l^T\omega - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema

$$\omega = \lambda_1\Sigma^{-1}\mu + \lambda_2\Sigma^{-1}l$$

Al substituir ω se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para λ_1 y λ_2

$$
\begin{gathered}
\lambda_1\mu^T\Sigma^{-1}\mu + \lambda_2\mu^T\Sigma^{-1}l = \mu_p \\
\lambda_1 l^T\Sigma^{-1}\mu + \lambda_2 l^T\Sigma^{-1}l = 1
\end{gathered}
$$

donde renombramos a

$$A = \mu^T\Sigma^{-1}\mu, \qquad B = \mu^T\Sigma^{-1}l, \qquad C = l^T\Sigma^{-1}l$$

entonces

$$
\begin{aligned}
A\lambda_1 + B\lambda_2 &= \mu_p \\
B\lambda_1 + C\lambda_2 &= 1
\end{aligned}
$$

la solución a este sistema es

$$D = AC - B^2$$

$$\lambda_1 = \frac{C\mu_p - B}{D}, \qquad \lambda_2 = \frac{A - B\mu_p}{D}$$

Entonces la varianza del portafolio óptimo es

$$\sigma_p^2 = \omega^T \Sigma \omega = \omega^T \Sigma (\lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} l)$$
$$\sigma_p^2 = \omega^T [\lambda_1 \mu + \lambda_2 l]$$
$$\sigma_p^2 = \lambda_1 \omega^T \mu + \lambda_2 \omega^T l$$

aplicando algunas de nuestras restricción y sustituyendo λ_1 y λ_2

$$\sigma_p^2 = \lambda_1 \mu_p + \lambda_2$$
$$\sigma_p^2 = \left[\frac{C\mu_p - B}{D}\right] \mu_p + \frac{A - B\mu_p}{D}$$
$$\sigma_p^2 = \frac{C\mu_p^2 - 2B\mu_p + A}{D}$$

encontramos la ecuación mas importante en teoría de finanzas, que nos relaciona la rentabilidad esperada μ_p y la varianza σ_p. Esta relación se le denomina frontera eficiente.