

Projekt 1: Numerisk fortplantning av våg

Pedram Anari

Ulrich Icimpaye

Oscar Jacobson

29 december 2022



UPPSALA
UNIVERSITET

Sammanfattning

I denna rapport använder vi oss av numeriska metoder för att lösa vågekvationen i rummet och tiden. Detta görs med hjälp av ett antal olika metoder för att lösa ordinära differential ekvationer som modifieras för att fungera i rummet. Undersökningar för de olika metodernas konvergens med mera undersöks även för att få en förståelse om begränsningarna för beräkningen av vågens rörelse i 1 dimension.

1 Inledning

Målet med detta projekt är att numeriskt beräkna en vågs rörelse i rummet för tre olika randvillkor; Neuman, Dirichlet samt Robin. Problemet med att numeriskt lösa en vågrörelse kan delas upp i ett antal mindre problem som individuellt måste lösas. Till att börja med så löses ett skalärt begynnelsevärdesproblem.

Efter att det skalära problemet lösts med välkända metoder så ställer vi upp några ytterligare metoder som på olika sätt kan användas för att lösa det slutliga problemet. För dessa metoder undersöks konvergens, noggrannhetsordning och energibevarande för att få en uppfattning om vilka fördelar och nackdelar de olika metoderna har.

Under de slutliga delarna av projektet så undersöks konvergens, spektralradie och egenvärden för de olika metoderna som löser vågekvationen. Slutprodukten för projektet blir att vi med hjälp av de lösningsmetoderna kan förutspå en vågrörelse i rummet och tiden.

2 Begynnelsevärdesproblem

I projektets första del kommer vi att studera ett begynnelsevärdesproblem som kan liknas vid den harmoniskt dämpade svängningen från mekaniken. Se ekvation 1. Olika värden på koefficienterna a, b kommer att antas vilket ger upphov till olika differentialekvationer. För att lösa ekvationen behöver välkända RK metoder implementeras men även andra numeriska metoder. Olika metoder används beroende på koefficienternas värden. För att säkerställa att metoden implementerats på ett korrekt sätt görs olika konvergensstudier.

Till att börja med studerar vi för vilka stegländer numerisk stabilitet uppnås. Den dämpade harmoniska svängningen ges av följande ODE:

$$\begin{aligned} y_{tt} &= ay_t + by + g(t), 0 \leq t \\ y &= f, y_t = 0, t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Detta skrivs sedan om till en ODE av första ordningen med hjälp av omskrivningen $w = y_t$:

$$v_t = Av + G(t) \quad (2)$$

Vilket på matrisform ser ut som

$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

För att sedan veta begränsningarna på detta problem kan vi anta en generell 2 x 2 matris:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (4)$$

Och dess determinant med egenvärden:

$$\det A = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \quad (5)$$

De faktorer som icke är lambda (a+d samt ad-bc) kallas för matrisens trace (a+b) och matrisens determinant (ad-bc). Detta kan sedan jämföras med faktoriseringen för matrisens egenvärden som är uppställda på ett liknande sätt:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow$$

$$(a + d) = (\lambda_1 + \lambda_2), (ad - bc) = (\lambda_1\lambda_2) \quad (7)$$

Vilket betyder att originalmatrisens trace är lika med summan av egenvärdena för matrisen och matrisens determinant är lika med produkten av matrisens egenvärden. Detta tar vi sedan hjälp av för att testa om en matris är stabil eller inte. En matris anses vara stabil om realdelen av dess egenvärde är mindre eller lika med 0. Enligt ekvation 7 så är summan av egenvärdena lika med (a + d) i vår matris. Detta betyder att om matrisen är stabil och båda egenvärdena är mindre än 0 så är matrisens trace även mindre än noll. På samma sätt gäller det att för stabilitet så måste matrisens determinant vara större än noll då den är lika med produkten av de två (negativa för stabil matris) egenvärdena.

För vår matris:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \quad (8)$$

Gäller då att matrisen är stabil om matrisens trace är mindre än noll ((0+a)<0). Samt att matrisens determinant är större än noll ((0 a-1b)>0) \Rightarrow För stabilitet gäller: $a \leq 0, b \leq 0$

Matrisens stabilitet undersöks för några fall av konstanterna a och b . Då a är rent imaginärt måste b förhålla sig till a för att ODE:n ska vara stabil enligt ekvation 14-15 är detta förhållande:

$$b < \frac{\omega^2}{4} \quad (9)$$

Där $a = i\omega$

När $a = 0$ samt $b < 0$ blir egenvärdena rent imaginära. Detta innebär att systemet kommer oscillera odämpat. Detta sker då vi varken har en negativ eller positiv realdel som annars hade påverkat stabiliteten av systemet. Följande är ekvationer som visar på begränsningarna för de olika fallen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ b & a-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda(a - \lambda) - b = -\lambda * a + \lambda^2 - b = \lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 4b}{4}} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b} \quad (11)$$

Fall då $a, b \in \mathbb{R}$

$a < 0$ ger ODE stabilitet.

$$\Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b} < 0 \quad (12)$$

a är negativt

\Rightarrow

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b} < \frac{a}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4b} < a \Leftrightarrow a^2 + 4b < a^2 \Leftrightarrow b < 0 \quad (13)$$

Fall då $a \in \mathfrak{I}, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + 4b} \quad (14)$$

$$a = i\omega$$

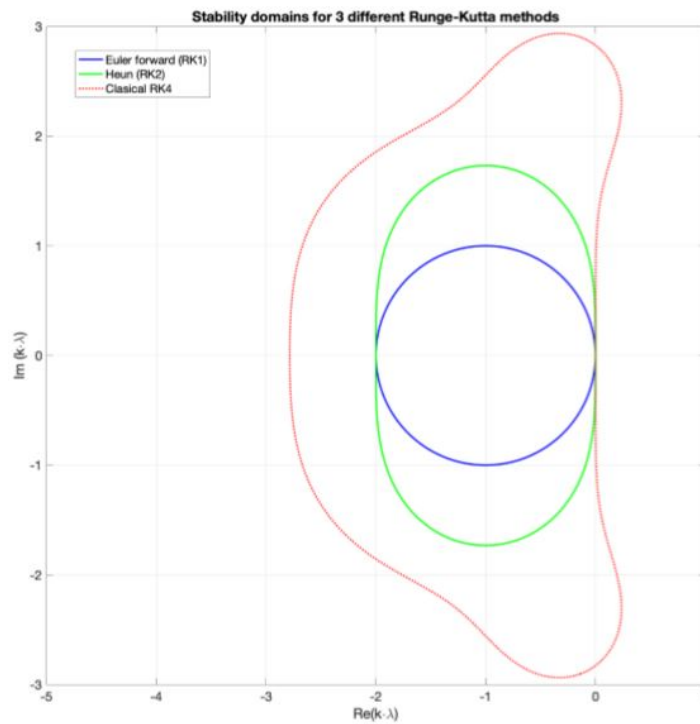
$$\frac{i\omega}{2} \pm \sqrt{-\omega^2 + 4b} \quad (15)$$

$$-\omega^2 + 4b < 0 \Leftrightarrow b < \frac{\omega^2}{4} \quad (16)$$

Fall då $a=0$, $b<0$

$$\lambda = \pm\sqrt{4b} \Rightarrow \pm\lambda \in \mathfrak{I} \Rightarrow \text{energin bevaras}$$

För att testa, numeriska stabiliteten för den välkända metoden Runge-Kutta 4 användes metodens visuella stabilitetsområde.



Figur 1: Olika RK metoder och dess stabilitetsområden. För begynnelsevärdesproblemet är k tidssteget och λ egenvärdet.

Från figur 1 ses att metodens steglängd multiplicerat med matrisens egenvärde ska ligga innanför ett ungefärligt värde av 2.8i. Med hjälp av detta räknas sedan den

maximala tidssteget för numerisk stabilitet ut. Svaret blir cirka 0.28 och detta går till som så:

$$\lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b} \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a=-2 \\ b=-101 \\ f=1 \\ g(t)=\sin(\pi t) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda(+) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 404} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{-400} = -1 + \frac{20i}{2} = 10i - 1 \quad (18)$$

\Rightarrow

$$|\lambda(\pm)| = \sqrt{101} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \infty i = 2.8i \Leftrightarrow k|\lambda(\pm)| = 2.8 \Leftrightarrow k = \frac{2.8}{\sqrt{101}} = 0.2786$$

Då vi bestämt det största möjliga tidssteget för numerisk stabilitet och skrivit om ode:n till första ordningen enligt ekvation 2 kan RK4 implementeras. För de givna värdena på koefficienterna a,b(-2, -101) samt tidssteget 0.01 används. Då den analytiska lösningen är känd görs en konvergenstudie där de numeriska värdena jämförs med de analytiska. För att beräkna felet och konvergenstakten används ekvationerna:

$$e = |y(t_n) - y_n| \quad \text{endequation} \quad q = \log(e_{k1}/e_{k2})/\log(k_1/k_2) \quad (20)$$

Här är $y(t_n)$ samt y_n det analytiska respektive numeriska värdet vid tidpunkten t_n .

ODE:n kan formas för att bevara energin som tidigare nämnt i undersökningen av matriserna. Detta ger att $a = 0$ och $g(t) = 0$ i ekvation 1. Dessa konstanter ger följande energikonserverande ODE:

$$\begin{aligned} y_{tt} &= by, t \geq 0 \\ y &= f, y_t = 0, t = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Tre andra metoder som användes för att lösa problemen i projektet härleddes sedan. Dessa metoder kallas CD 2, 4, 6 (Centralkoefficienter med noggrannhetsordning 2,4,6) och har bland annat fördelen med att inte vara dissipativa. Vilket betyder att energin i metoden bevaras. Nedan är den matematiska härledningen av CD6 och från denna härledning kan CD4 också finnas genom att bryta Taylorutvecklingen vid ordning 6e ordningen.

$$y_{tt} = by \Rightarrow y_{tttt} = b^2 y \Rightarrow y_{ttttt} = b^3 y \quad (22)$$

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{b^2} = by = T(t_n) \quad (23)$$

(Taylorutveckla $y(t_n \pm k)$ kring $y(t_n)$)

Taylorutvecklingen:

$$y(t_n \pm b) = y(t_n) \pm ky_t(t_n) + \frac{k^2}{2}y_{tt}(t_n) \pm \frac{k^3}{3!}y_{ttt}(t_n) + \frac{k^4}{24}y_{tttt}(t_n) \pm \frac{k^5}{5!}y_{ttttt}(t_n) + \frac{k^6}{6!}y_{tttttt}(t_n) \pm \frac{k^7}{7!}y_{ttttttt}(t_n) + (Ok^8)$$

Insättning av taylorutveckling i 23 ger:

$$\frac{k^2}{12}y_{tttt}(t_n) + \frac{2k^4}{6!}y_{tttttt}(t_n) + O(k^8) = T(k) \quad (24)$$

Enligt 22 kan 24 skrivas som:

$$\frac{k^2}{12}b^2y + \frac{k^4}{360}b^3y + O(k^6) \quad (25)$$

Ekvation 25 adderas till ekvation 23. y^{n+1} löses sedan ut vilket ger:

$$y^{n+1} = (by^n + \frac{k^2}{12}b^2y^n + \frac{k^4}{360}b^3y^n)k^2 + 2y^n - y^{n-1} \quad (26)$$

Där:

$$y_2 = (1 + \frac{k^2}{2}b + \frac{k^4}{4!}b^2 + \frac{k^6}{6!}b^3)F \quad (27)$$

För att kunna starta lösningen krävs ytterligare startpunkt som kan approximeras som:

$$0 = y_t(t_1) \approx \frac{y_2 - y_1}{k} \quad (28)$$

Med hjälp av taylorutveckling på samma sätt som för ekvation 23 samt begynnelsevillkoren:

$$y_t(t_1) = 0, y_{tt}(t_1) = 0 \quad (29)$$

Kan ekvation 28 skrivas som:

$$\frac{k}{2}by(t_1) + \frac{k^3}{4!}b^2y(t_1) + \frac{k^5}{6!}b^3y(t_1) + O(k^6) = 0 \quad (30)$$

Om man ansätter ekvation 28 = ekvation 30 och att $y_1 = F$

Kan y_2 lösas ut som:

$$\frac{y_2 - F}{k} = \frac{k}{2}by(t_1) + \frac{k^3}{4!}b^2y(t_1) + \frac{k^5}{6!}b^3y(t_1) = \quad (31)$$

$$y_2 = (\frac{k}{2}by(t_1) + \frac{k^3}{4!}b^2y(t_1) + \frac{k^5}{6!}b^3y(t_1))k + F = \quad (32)$$

$$y_2 = (1 + \frac{k^2}{2}b + \frac{k^4}{4!}b^2 + \frac{k^6}{6!}b^3)F \quad (33)$$

CD2 behöver endast taylorutvecklingen till ord 3 kring $y(t_1)$ vid härledningen av andra startvärdet.

I fallet för konstantmarisen som uppstår som lösning till vågekvationen senare i projektet så ersätts b med c^2A . Där A är en konstantmatris som beror av randvillkoren.

Största tidssteget för numerisk stabilitet för de olika CD metoderna bestäms sedan både analytiskt och numeriskt. För CD2 konstateras det att tillväxtfaktorn α är:

$$\alpha = 1 + \frac{bk^2}{2} \quad (34)$$

Detta gör att rötterna till de karakteristiska polynomet från differensekvationen kan bestämmas som:

$$r^2 + 2\alpha r + 1 = 0 \quad (35)$$

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (36)$$

Då absolutbeloppet av de två rötterna är mindre än eller lika med ett fås numerisk stabilitet. För CD4 och CD6 är enbart fallet då $kb < 0$ av intresse. Genom att ta små tidssteg och undersöka när tillväxtfaktorn α^2 är mindre än eller lika med 1 fås numerisk stabilitet.

De olika CD metoderna implementeras för att lösa ekvation 22. Analytiska lösningen tas fram och ges av $e^{\sqrt{bt}}$. Med den analytiska lösningen kan felen tas fram och en konvergensstudie görs med fel och felkonvergens uträknade på samma sätt som tidigare. (se ekvation ?? samt 20).

Ekvation 21 löses igen, fast nu med RK4. Detta som ekvation 1 löstets fast med justeringar i koefficientmatrisen.

Då RK4 impelenterasts går det att undersöka för vilket tidssteg lösningen divergerar eller går mot oändligheten för en stor sluttid. Genom prövning fås det största tidssteget till 2.8284 vilket är högre än det tidssteg vi fick fram visuellt tidigare på

grund av att konstantändringen leder till ett nytt egenvärde. Konvergensstudie görs då b sätts till -1.

Då problemet är energikonserverande borde energin i systemet vara konstant till den grad som trungeringsfelet för de olika metoderna påverkar lösningen. Då vi nu vet för vilka tidssteg de olika metoderna är stabila så är detta möjligt. Vi kan anta att energin för de olika CD metoderna kan approximeras med:

$$E_n = (D_0 y^n)^2 - b(y^n)^2 \quad (37)$$

$$\text{Där } D_0 y^n r^{\frac{y^n+1-y^n-1}{2k}}$$

Och energin för RK4 kan approximeras med:

$$E_n = (w^n)^2 - b(y^n)^2 \quad (38)$$

För att beräkna den diskreta energin används ovanstående ekvationer för att utvärdera energin i problemet efter en lång tid. En stor sluttid $T=100000$ används för att lättare kunna se avvikelser i energin. Olika tidssteg k används för att undersöka hur de påverkar de olika metodernas dissipation. För att beräkna felet använder vi oss av att energin vid tiden $t=0$ som är 1, subtraheras med energin vid tiden $t=T$. En konvergensstudie som visar på energiförlusterna i de olika metoderna görs.

3 Numerisk lösning av vågekvationen

Andra ordningens vågekvation $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$, modellerar propagerande vågor där c är vågens hastighet. Där u är den analytiska lösningen. Vi kommer att lösa denna ekvation i ett begränsat domän. med icke periodiska randvillkor. Vi begränsar domänet till $-1 \leq x \leq 1$. Det behövs två begynnelse villkor för att lösa problemet då det är andra tidsderivata. Vi har att:

$$u(x, 0) = f = \exp(-5x)^2, u_t(x, 0) = 0 \quad (39)$$

Följande funktioner används för den analytiska lösningen av vågekvationen där u_1 är lösningen med Neumann RV och u_2 är lösningen med Dirichlet RV :

$$\theta_1(x, t) = \exp\left(-\left(\frac{x - ct}{r_*}\right)^2\right), \theta_2(x, t) = -\exp\left(-\left(\frac{x + ct}{r_*}\right)^2\right) \quad (40)$$

Där $r_* = 0.2$. Om begynnelsevärden sätts till:

$$u(x, 0) = \theta_1(x, 0), u_t(x, 0) = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= +\frac{1}{2}\theta_1(x+2, t) - \frac{1}{2}\theta_2(x-2, t), \text{NeumanRV} \\ u_2(x, t) &= -\frac{1}{2}\theta_1(x+2, t) + \frac{1}{2}\theta_2(x-2, t), \text{DirichletRV} \end{aligned} \quad (42)$$

Ungefär när $ct \in [1.75, 2.25]$.

Om problemet ska vara välställd behövs randvärden för båda ändarna av domänen, så två stycken. Vi kommer lösa problemet med dirichlet, neumann och robin randvillkor, där båda ändarna har samma randvillkor, inte kombinationer. t.ex. $u(-1, t) = u(1, t) = 0$ (detta är Dirichlet). Domänen diskretiserades genom att använda m ekvidistanta rutnätspunkter. Där steglängden h ges av:

$$h = \frac{2}{m-1} \quad (43)$$

En fjärde ordningens differens approximation av vågekvationen användes för att få diskretiseringsmatriserna för neumann, dirichlet och robin randvillkor. Diskretiseringen av vågekvationen resulterade till följande begynnelsevärdesproblem:

$$v_{tt} = c^2 A v, t \geq 0 \quad (44)$$

med samma begynnelsevärden som ges i ekvation 39. Där A är en $m \times m$ diskretiserings matris. Ekvation 44 kan skrivas om till första ordningens DE. Då vi låter $w = v_t$:

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & I \\ c^2 A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, t \geq 0 \quad (45)$$

där I är en $m \times m$ identitets matris. Egenvärdena till vågekvationen med Dirichlet och neumann randvillkor beräknades både analytiskt och numeriskt. Analytiskt gäller följande:

$$\lambda_n = \frac{icn\pi}{2} \quad (46)$$

där n är något positivt heltal. I våra beräkningar lät vi n gå från 1 till 31. Medan de numeriska egenvärden gavs av egenvärden till matrisen: $\begin{bmatrix} 0 & I \\ c^2 A & 0 \end{bmatrix}$ För Robin randvillkor beräknas det enbart numeriskt för olika värden av parametern b.

Sedan studerade vi spektralradien för olika randvillkor. Genom att först beräkna det mest negativa egenvärdet av $h^2 A$ (där h är en rumslig steglängd), för olika steglängder. Detta egenvärdet noterades med γ . Vars spektral radie gavs av:

$$\sqrt{(ch)^2 |\gamma|} \quad (47)$$

Utöver det studerades tillväxten av γ för negativa värden på robin parametern b. Detta visualiserades med hjälp av en logplot.

För att lösa ekvation 44 med hjälp av RK4 användes omskrivningen från ekvation 45, då DE skrivs om till första ordningen. Varefter vi implementerade RK4 algoritmen. Lösningen initierade med begynnelse villkoret som ges i ekvation 39. För att beräkna det största möjliga tidssteget använde vi stabilitet domänen för RK4 (se fig 9). Och med hjälp av γ beräknades tidssteget på så vis:

$$k = \frac{2.8}{\sqrt{|\gamma|}} \quad (48)$$

Varefter CFL värdet som beräknades gavs av :

$$CFL = k/h \quad (49)$$

För randvillkoren Neuman och Dirichlet ges konvergenshastigheten för de olika metoderna av:

$$q = \log_{10}\left(\frac{\|u - v^{(m1)}\|_h}{\|u - v^{(m2)}\|_h}\right) / \log_{10}\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \quad (50)$$

Här är u den analytiska lösningen och $v^{(m1)}$ den korresponderande lösningen med m_1 okända. Den diskreta l_2 normen för felet ges av:

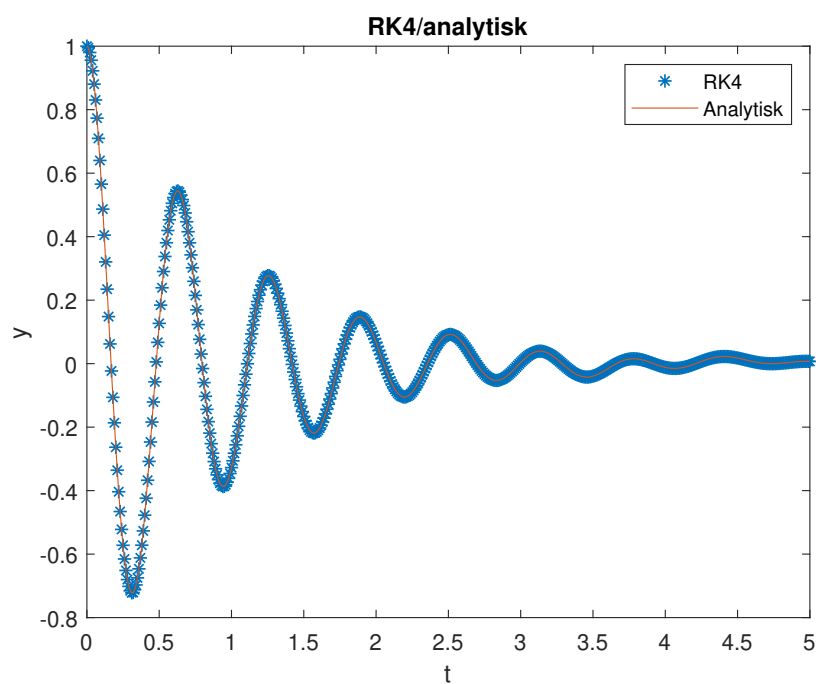
$$\|u - v^{(m1)}\|_h \equiv \frac{1}{\sqrt{m_1}} \sqrt{\sum_{j=1}^{m_1} (u(x_j) - v_j)^2} \quad (51)$$

Sedan löste vi ekvation 44 med CD2-6. Härledningen av dessa med en konstantmatris kan hittas i del 2 ekvation 33. Vi modifierade då programmet som löste ekvation 1 för att lösa vågekvationen med konstantmatrisen och begynnelsevillkoret som i ekvation 39 som vi initierar våran lösning med. Största tidssteg för numerisk stabilitet beräknades på samma sätt som i del 2 med hjälp av den karakteristiska ekvationen, se ekvation 35. Sedan beräknades CFL värdet som i ekvation 49.

Slutligen utfördes en konvergensstudie för CD metoderna som löste vågekvationen med hjälp av ekvationerna 50 och 51.

4 Resultat

4.1 Begynnelsevärldesproblem



Figur 2: Analytiska och numeriska lösningen till ekvation 1 med RK4 för tidssteget $k=0.01$. I problemt är $a=-2$, $b=-101$ och $g(t)=\sin(\pi t)$.

Tabell 1: Konvergensstudie för RK4 till figur 1 med sluttid $T=1$.

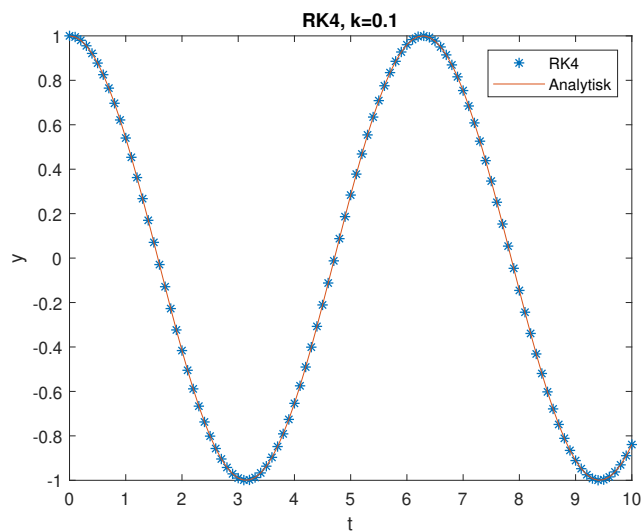
Tidssteg k	Fel	Konvergens q
0.04	5.2652e-07	
0.02	2.0476e-08	4.6845
0.01	9.0328e-10	4.5026
0.001	5.6612e-14	4.2029
0.0005	3.4402e-15	4.0406

Tabell 2: Maximala tidssteget för de olika CD metoderna till ekvation 21.

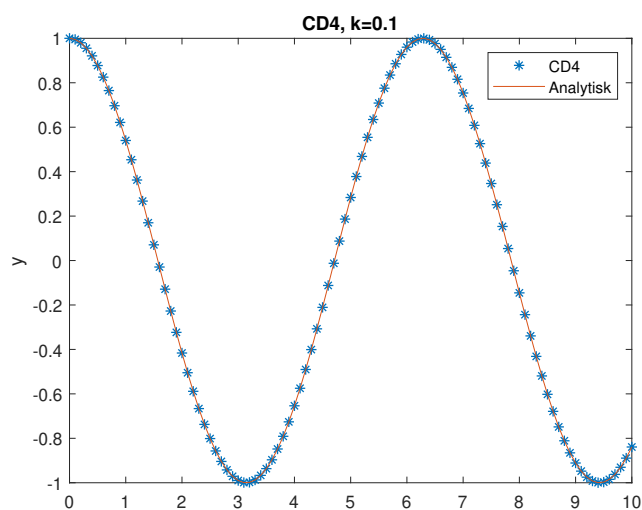
	Max tidssteg K_*
CD2	2
CD4	3.4641
CD6	2.7517

Tabell 3: Konvergensstudie för de olika CD metoderna till ekvation 21.

Tidssteg k	Fel CD2	q	Fel CD4	q	Fel CD6	q
0.1	0.0023		7.5671e-7		1.3514e-10	
0.05	5.6730e-4	2.0047	4.7242e-8	4.0016	2.1122e-12	5.9995
0.025	1.4171e-4	2.0012	2.9518e-9	4.0004	8.7708e-15	7.9118



(a) RK4



(b) CD4

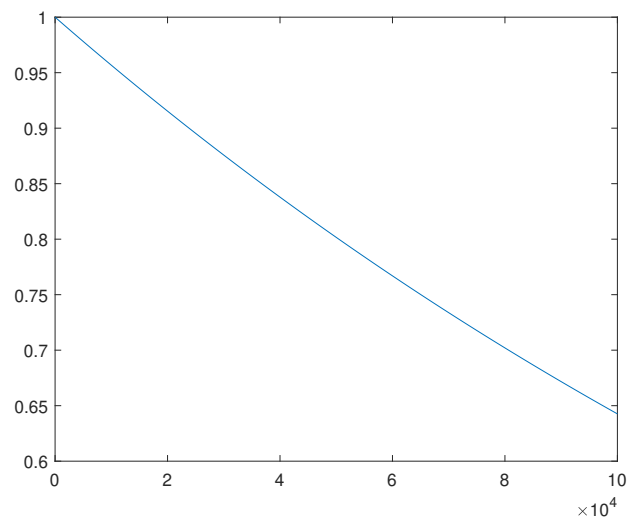
Figur 3: Analytiska och numeriska lösningen till ekvation 21 med RK4 och CD4 för tidssteget $k=0.1$.

Tabell 4: Konvergensstudie för RK4 till ekvation 21.

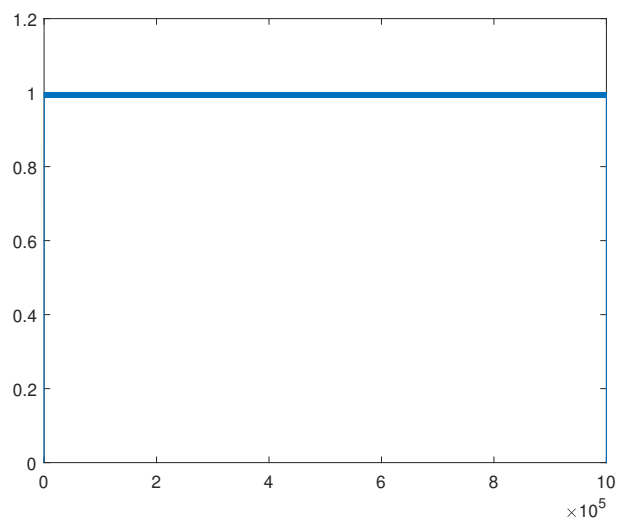
Tidssteg k	e	q
0.1	3.9353e-06	
0.05	2.6489e-07	3.8930
0.025	1.7136e-08	3.9503

Tabell 5: Diskreta energin för de olika CD metoderna och RK4 till ekvation 21.

Tidssteg (s)	Energislut CD2	Energifel	Energislut CD4	Energifel
1	0.8125	0.1875	0.9996	0.0004
0.5	0.9953	0.0047	0.9988	0.0012
0.1	0.9989	0.0011	0.9999	0.0001
0.05	0.9996	0.0004	1.0000	0.0000
	Energislut CD6	Energifel	Energislut RK4	Energifel
1	0.7350	0.2650	0	1
0.5	0.9818	0.0182	5.4656e-19	1
0.1	0.9999	0.0001	0.9862	0.0138
0.05	1.0000	0.0000	0.9996	4.3380e-4



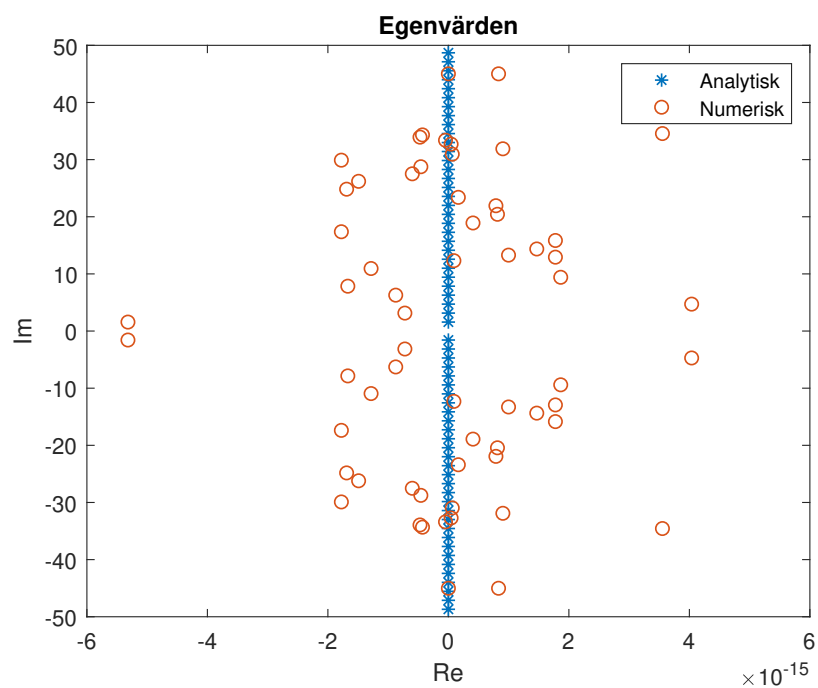
(a) *RK4*



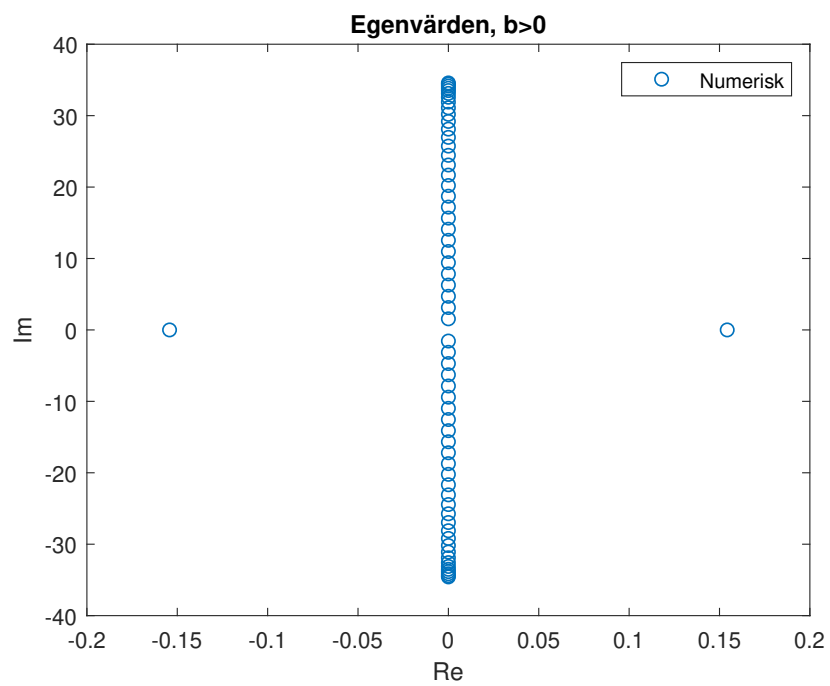
(b) *CD4*

Figur 4: Energin över tiden för metoderna RK4 och CD4 med tidssteget $k=0.2$

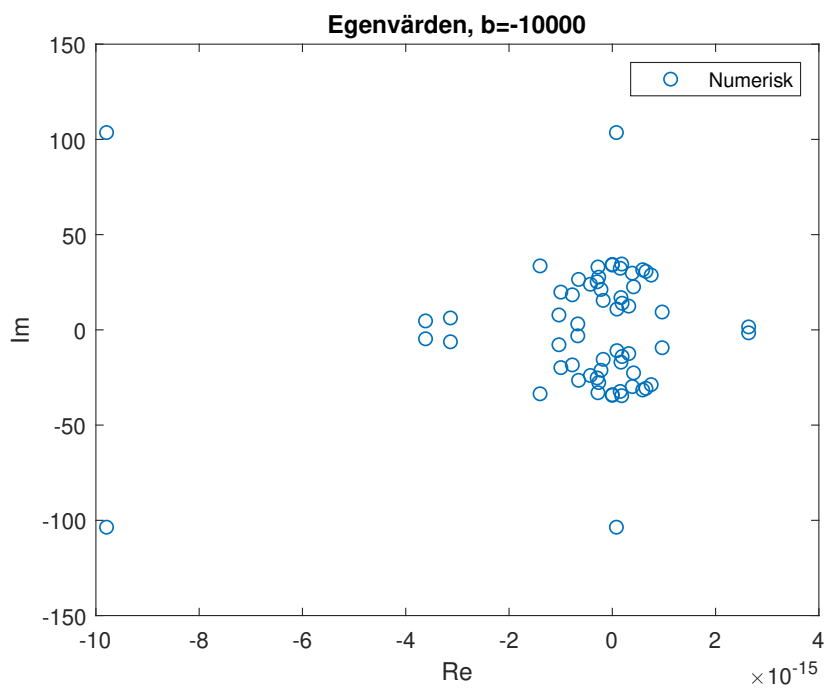
4.2 Numerisk lösning av vågekvationen



Figur 5: *Egenvärdena för Dirichlet randvilkor beräknade analytiskt och numeriskt.*



(a) $b > 0$

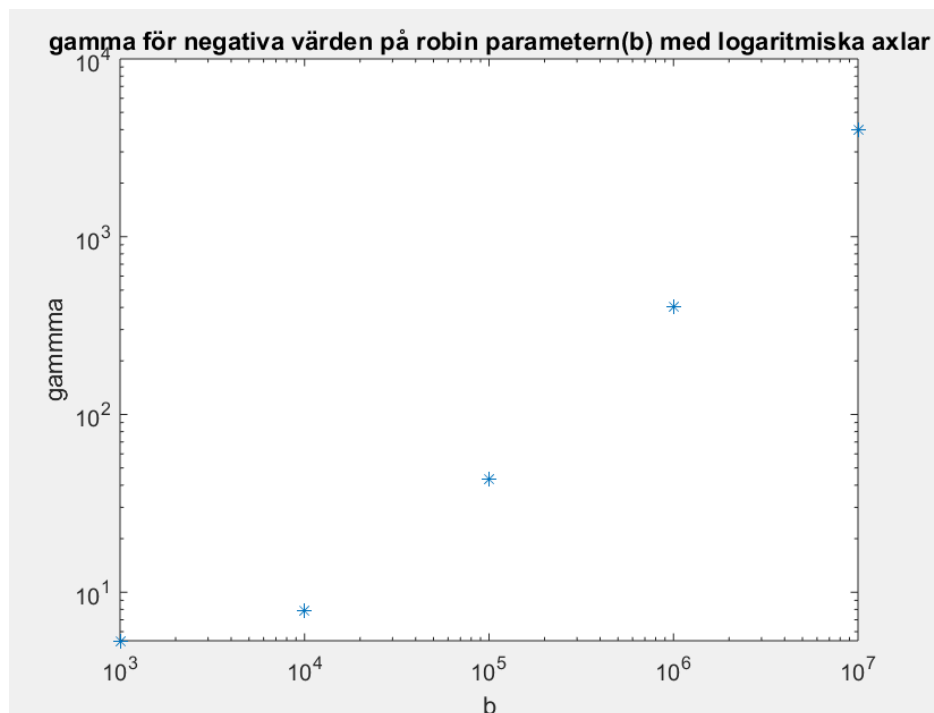


(b) $b \ll 0$

Figur 6: Eigenvärdena för Robin randvillkor beräknade numeriskt.

Tabell 6: Spektralradie för olika randvillkor och steglängd

Steglängd	Neuman spektral	Diriclet spektral	Robin Spektral	Gamma
51	57.7229	75.0228	58.4655	Ordning(N,D,R)
101	115.4458	150.0457	116.9310	-5.3331
201	230.8915	300.0914	233.8620	-9.0055
301	346.3373	450.1370	350.7930	-5.4691

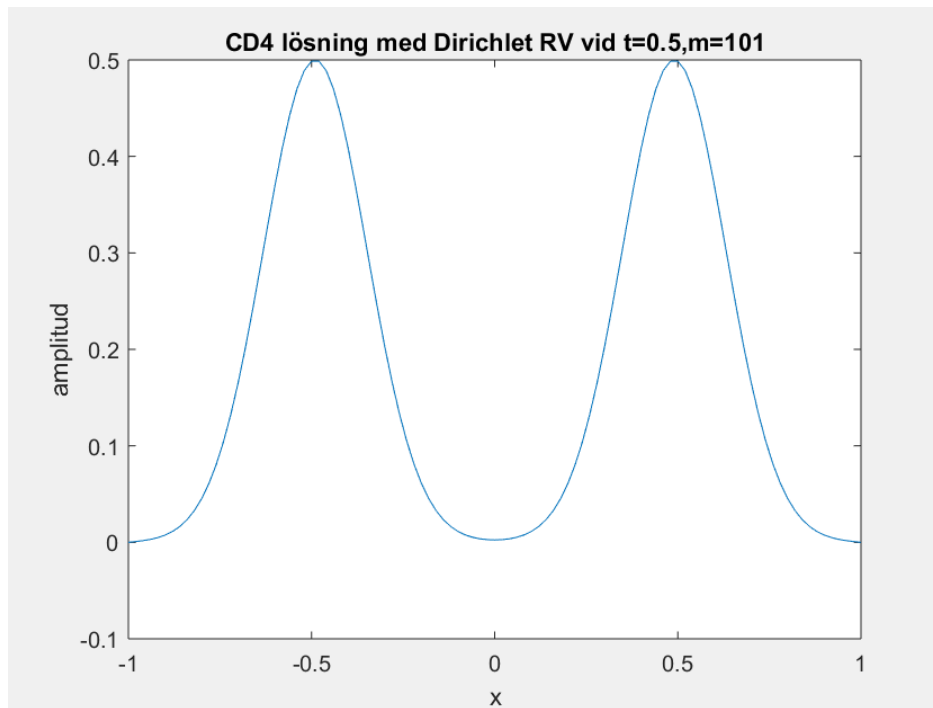


Figur 7: tillväxt av gamma med olika värden på b

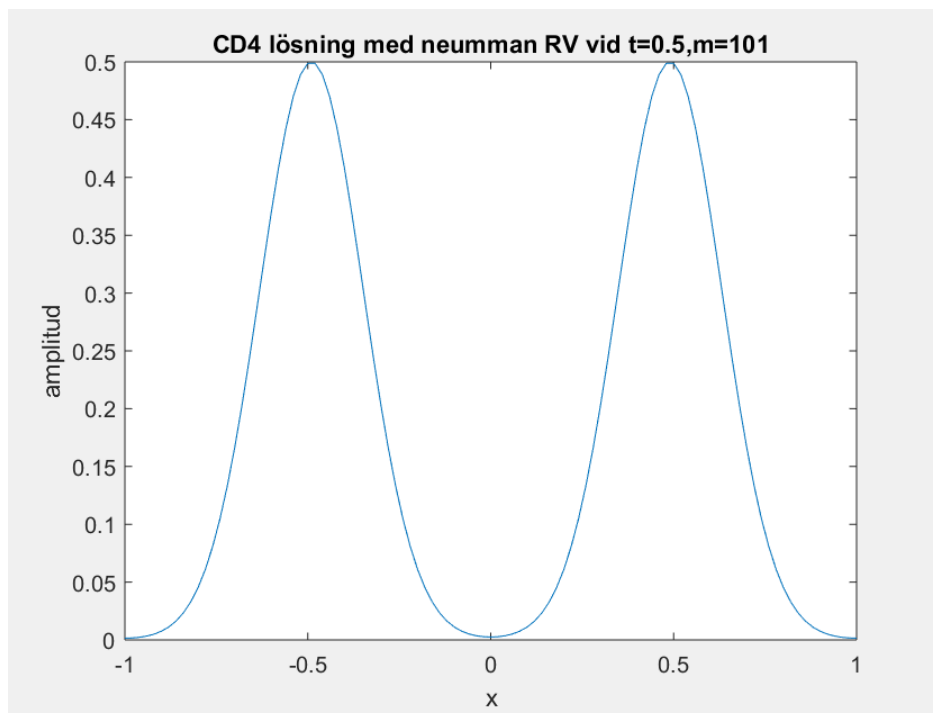
För plottar på lösningen av vågekvationen med RK4 vid olika tidssteg samt CFL värden se appendix.

Tabell 7: Konvergensstudie av RK4 för olika randvillkor, HFL = 0.1

RK4 Dirichlet	Norm	NO	RK4 Neuman	Norm	NO
51	0.0015			4.5226e-04	
101	2.8764e-05	5.7868		3.4396e-05	3.7704
201	1.7619e-06	4.0581		2.1003e-06	4.0627
301	3.5534e-07	3.9650		4.0404e-07	4.0820



Figur 8: lösning med CD4 då $CFL=0.5$ och $k=0.01$, jämför lösning med RK4 som är visuellt identisk. Vilket gäller också för CD2, CD6. Men felen skiljer sig. Se tabellerna 7, 10, 11 och 12



Figur 9: lösning med CD4 då $CFL=0.5$ och $k=0.01$, jämför lösning med RK4 som är visuellt identisk. Vilket gäller också för CD2, CD6. Men felen skiljer sig. Se tabell 7 samt 10-12

Tabell 8: Genomsnittlig maximal CFL värde för Diriclet samt Neuman, då CFL värden konvergerar

	Neuman CFL	Diriclet CFL
CD2	0.8662	0.6665
CD4	1.4963	1.1350
CD6	1.1888	0.9138
RK4	1.2127	0.9330

Tabell 9: CFL för Robin konvergerar ej oberoende av metod, värden nedan är för CD2

Robin CFL	b=-1000	b=-10000	b=-100000	b=-1000000	b=-10000000
CD2	0.8662	0.7148	0.3041	0.0996	0.0316

Tabell 10: Konvergensstudie av CD2 metoder med HFL = 0.1

CD2 Dirichlet	Norm	NO	CD2 Neumann	Norm	NO
51	0.0015			3.3389e-04	
101	2.2327e-05	6.1576		2.0427e-05	4.0889
201	7.2842e-06	1.6276		7.0324e-06	1.5495
301	3.5509e-06	1.7793		3.5130e-06	1.7188

Tabell 11: Konvergensstudie av CD4 metoder med HFL = 0.1

CD4 Dirichlet	Norm	NO	CD4 Neumann	Norm	NO
51	0.0015			4.5220e-04	
101	2.8760e-05	5.7870		3.4392e-05	3.7704
201	1.7617e-06	4.0581		2.1001e-06	4.0627
301	3.5530e-07	3.9650		4.0400e-07	4.0825

Tabell 12: Konvergensstudie av CD6 metoder med HFL = 0.1

CD6 Dirichlet	Norm	NO	CD6 Neumann	Norm	NO
51	0.0015			4.5219e-04	
101	2.8759e-05	5.7871		3.4392e-05	3.7704
201	1.7616e-06	4.0581		2.1000e-06	4.0627
301	3.5523e-07	3.9653		4.0399e-07	4.0823

5 Analys och slutsater

5.1 Begynnelsevärdesproblem

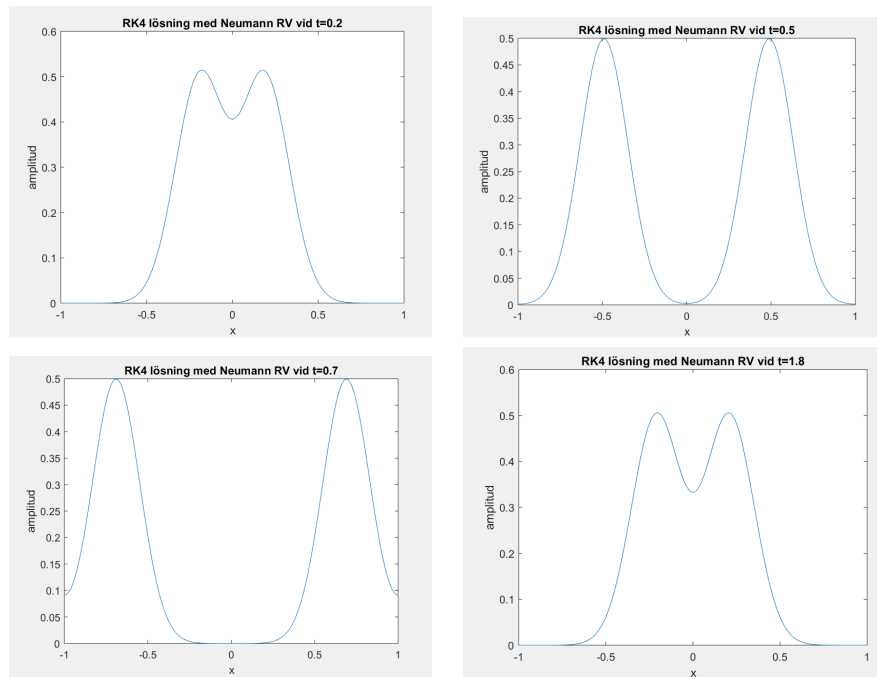
Tabell 1 och 3 visar att RK4 och de olika CD metoderna har den förväntade noggrannhetsordningen. Tabell 3 och 4 visar även att CD6 ger den mest noggranna lösningen då felet för CD6 är minst i alla tidssteg. Felet är även så litet att avrundningsfel hos datorn påverkar uträkningen för noggrannhets ordningen som blir ungefär 8 istället för det förväntade värdet 6.

Tabell 5 visar att energifelet är 0 för tidssteget $k=0.05$ för både CD4 och CD6. För samma metoder är energifelet 0.0001 för tidssteget $k=0.1$. Av denna anledning ses att CD4 med tidssteget $k=0.1$ är bäst att använda vid längre beräkningar då den ger lika bra noggrannhet som CD6 men det går åt mindre datakraft.

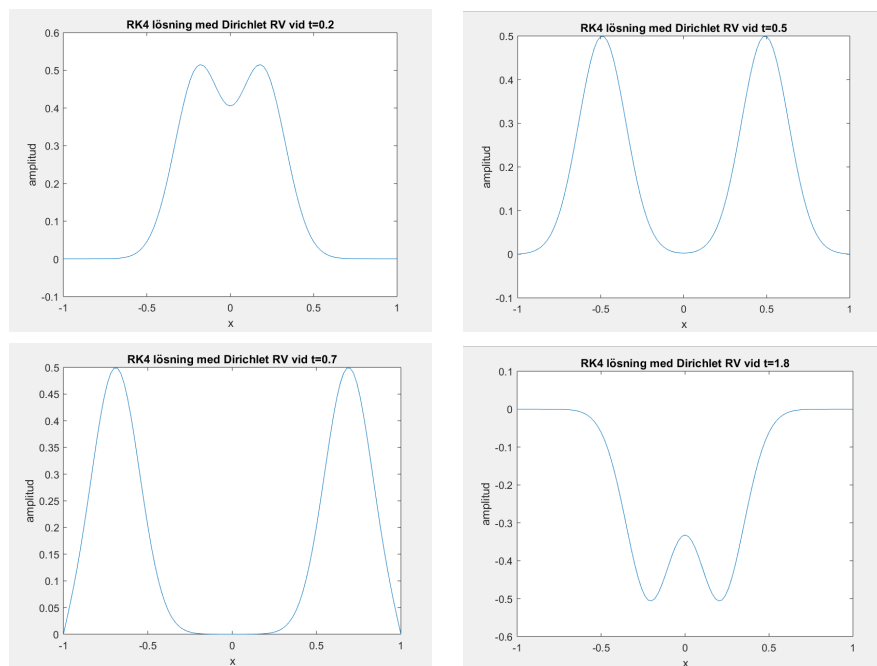
5.2 Numerisk lösning av vågekvationen

I figur 7 kan man se att stora negativa värden på robinparametern gav instabila RVBP då gamma faktorn växer expoentiellt. Medan Dirichlet och Neumann randvillkor gav stabila RVBP. Dessutom konvergerade inte CFL värdet för robin RV på grund av gamma faktorns tillväxt. Medan CFL värdet konvergerade för Dirichlet och Neumann RV. Detta kan man se i tabell 9 och figur 7. Vi fick en lösning med hjälp av RK4 för vågekvationen vars noggrannhetsordning konvergerade mot 4 vilket ses i tabell 7. Dock så kan man se i tabell 12 att man fick NO 4 även på CD6. Detta beror av att felet på differentialoperatören dominerar då den är av ordning 4.

A Appendix



Figur 10: 1D vågekvationen löst för Neuman randvillkor med $m=101$.



Figur 11: 1D vågekvationen löst för Dirichlet randvillkor med $m=101$.