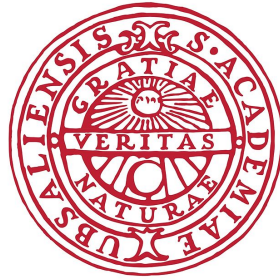


December 29, 2022

Anton Boberg
Felicia Fredriksson
Harald Agélii
Oscar Jacobson



UPPSALA UNIVERSITET

REGLERTEKNIK I, 1RT490

Projektorienterad laboration - Kompensering av DC-servo

Abstract

I denna experimentella laboration används simuleringsverktyg för att utforma en regulator för positionsstyrning av en DC-motor. Regulatorn har krav på specifikationer av nogrannhet, hastighet och felsäkerhet. Problemet modelleras med hjälp av sinus in - sinus ut principen. En preliminär regulator ansätts efter givna specifikationer och modeller för att sedan utvecklas till ett lead-lag filter som kan eliminera konstanta störningar.

1 Inledning

En stor del av reglerteknik handlar om att konstruera regulatorer för att kunna möta specifika krav som systemet måste tillgodose. Syftet med denna laboration är att på experimentell väg skapa en regulator som möter förutbestämda specifikationer. Denna laboration, Laboration 2, bygger på en tidigare introducerande laboration, Laboration 1, vars syfte var att testa på utrustningen samt se enklast möjliga fallet av reglering. Systemet som undersöks är en DC-motor som driver en roterande skiva. Vi använder oss av positionsstyrningen, utsignalen är skivans position i $[rad]$ och insignalen är spänningen över motorn i $[V]$.

I Laboration 1 härledes en enkel modell av en Likströmsmotor genom att använda sig av dess momentekvation. Resultatet blev den överföringsfunktion som används genom denna laboration:

$$G(s) = \frac{K_f}{s(1 + sT)} \quad (1)$$

Där T är tiden det tar för utsignalen att nå 63% av slutgiltiga värdet. K_f är systemets statiska förstärkning och under Laboration 1 beräknades värdet av $K_f = 1.4$ samt $T = 0.7$.

Med Ekv (2) kan vi definiera systemets krets förstärkning:

$$G_0(s) = G(s)F(s) \quad (2)$$

Där $F(s)$ är reglatorsystemet.

1.1 Regulatordesign i frekvensplanet

Genom att utforma reglatorsystemet och ge den olika egenskaper i frekvensplanet kan vi skapa den krets förstärkning som önskas för systemet. Krets förstärkningens frekvenssvar kallas för Nyquistkurvan, $G_0(i\omega)$.

De viktiga parametrarna som behöver bestämmas för att ge systemets krets förstärkning rätt egenskaper är:

- Skärfrekvensen, ω_c , definierad av $|G_0(i\omega_c)| = 1$. Påverkar snabbheten.
- Fasmarginalen, φ_m , definierad som $\arg G_0(i\omega_c) - \varphi_m = -180^\circ$. Påverkar dämpningen.
- Statiska förstärkningen, $G_0(0)$. Påverkar noggrannheten.

Genom att modifiera dessa parametrar i frekvensplanet kan vi styra systemets snabbhet, dämpning och noggrannhet.

2 Systemets specifikationer

För att skapa en regulator krävs det att man vet vad för krav som ställs på systemet. Följande specifikationer behöver positionsservot i denna laboration uppfylla:

1. Stigtiden $T_r \leq 0.9$ sekunder.
2. Överslängen, $M \leq 15\%$.
3. Statiska felet ska elimineras, $e_\infty = 0$.

Dessa krav kunde inte uppfyllas med enkel P-reglering, detta testades i Laboration 1. En mer avancerad regulator krävs.

I sektion 1.1 kan vi se vilka parametrar som styr vilken punkt. Från dessa punkter kan vi ta fram den önskade fasmarginalen och skärfrekvensen. Vi antar att kretsförstärkningen kan approximeras till standard formen för ett återkopplat system med komplexkonjugerade poler och använder Figurerna 5.11 och 5.12 i kursboken¹. I Figure 5.11 kan vi läsa av den relativa dämpningen för ett andra ordningens system då $M = 15\%$ är $\xi \approx 0.53$.

I samma figur läser vi av fasmarginalen vid den relativa dämpningen till $\varphi_m \approx 53^\circ$. Därefter vill vi ta reda på skärfrekvensen och för de utnyttjar vi den relativa dämpningen från Figur 5.11. Figur 5.12 ger oss då $\xi \approx 0.53$ är $\omega_c T_r \approx 1.3$. Detta ger oss $\omega_c \approx 1.45^\circ$.

¹Glad T., Ljung L., Reglerteknik- Grundläggande teori, uppl. 4, sid. 104, (2006)

3 Modellering

För att experimentellt mäta upp en modell av systemet används sinus in - sinus utprincipen, där sinusen är en funktion av positionen över tid. Genom att skicka in en insignal som en sinus och jämföra denna med utsignalen som även den blir en sinus kan systemets förstärkning och fasförskjutning beräknas, processen upprepas för flera olika frekvenser för att få ut punkter och skapa en skiss av ett bodediagram, som visar systemets frekvensberoende.

För att skapa en sinus som insignal används *GetSine()* som har vinkelhastighet som inparameter. Denna sinus används som inparameter i funktionen *OpenControl()* som utför en öppen styrning av systemet, på så sätt kan utsignalen sparas. Utsignalen är inte en perfekt sinus, *EstSine()* används för att estimeras den till en korrekt sinus för att enklare kunna läsa av förstärkning och fasskillnad.

Beloppet av krets förstärkningen ges av:

$$|G(i\omega)| = \frac{y(t)}{x(t)} \quad (3)$$

Där $y(t)$ är utsignalen och $x(t)$ är insignal. Fasskillnaden ges av:

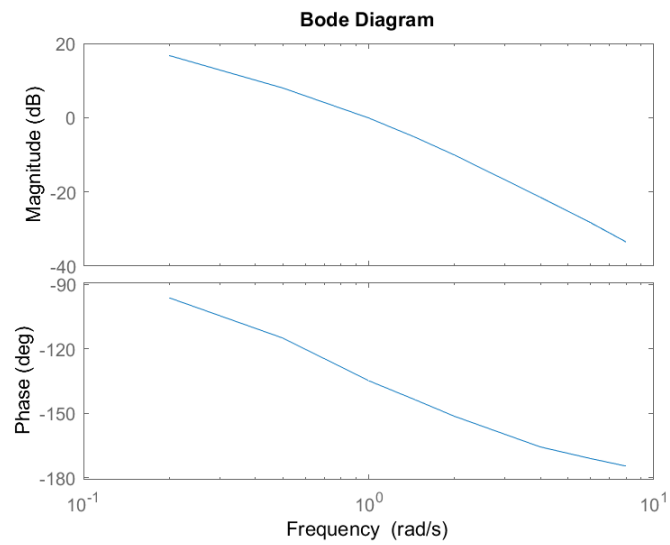
$$\arg(G(i\omega)) = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360 \quad (4)$$

Δt är skillnaden i tid mellan signalernas toppar, T är perioden.

ω	$ G(i\omega) $	$\arg(G(i\omega))$
0.2	6.86	-96.3
0.5	2.51	-115.0
1	0.99	-134.82
1.45	0.548	-143.58
2	0.313	-151.43
4	0.085	-165.71
6	0.038	-171.43
8	0.0214	-174.19

Tabell 1: Uppmätta värden för olika vinkelhastigheter

Med värdena från tabell 1 kan dessa matas in i funktionen *frd()* som skapar ett LTI-objekt utifrån de inmatade frekvenssvarets punkter. Genom att konvertera förstärkningen till rektangulär form inkluderas faser i frekvenssvaret. Efter systemet skapats kan funktionen *Bode()* användas med det genererade systemet som inparameter och på så sätt få fram bodediagrammet.



Figur 1: Uppmätt Bodediagram för DC-motorn

Efter 8 mätningar och skissning av bodediagram syns systemets frekvensberoende i Figur 1. Systemet har en sjunkande förstärkning och fas för ökande frekvenser.

4 Regulatordesign

4.1 Servoproblemet

I denna laboration fick vi 3 specifika krav, se sektion 2, och vårt jobb var att skapa systemets regulator.

Det första steget gjordes i Laboration 1 där vi testade den enklaste modellen av en regulator. Nu ska vi börja konstruera ett Lead filter:

$$F_{lead}(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \quad (5)$$

För att bestämma parametrarna i Ekv (5) används Bodediagrammet som togs fram för systemet i sektion 3. Vi läser av beloppet och argumentet för skärfrekvensen till $|G(i\omega)| \approx 0.55$ respektive $\arg G(i\omega_c) \approx -145^\circ$. Den önskade fasmarginalen för att uppfylla kraven är 53° , men enligt bodediagrammet är fasmarginalen i självverket endast 35° . Det saknas därför 18° från fasmarginalen och denna skillnad måste lead filtret bidra med, kallas φ_{max} . Vi kan använda Figur 5.13 från kursboken² där sambandet mellan β och den fas som leadfiltret ska bidra med plotats. Genom att läsa av ploten då $\varphi_{max} = 18^\circ$ får vi $\beta \approx 0.5$.

Det är viktigt att φ_{max} sker vid skärfrekvensen och detta bestäms med τ_D :

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\beta}} = \frac{1}{1.45 \sqrt{0.5}} \approx 0.98 \quad (6)$$

Därefter bestäms K så att skärfrekvensen sker vid det önskade värdet.

$$1 = |G_0(i\omega_c)| = |G(i\omega_c)| |F_{lead}(i\omega_c)| \quad (7)$$

Från Figur 5.14, den som användes tidigare, fås följande uttryck: $|F_{lead}(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}$

Det ger följande K:

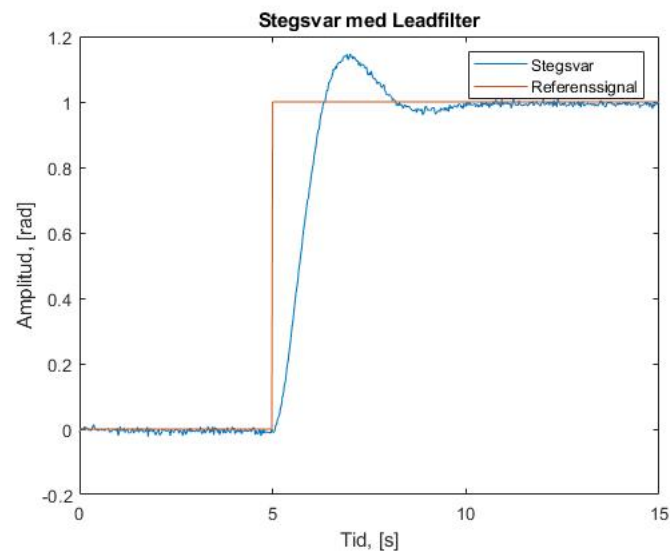
$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.5}}{0.55} \approx 1.29 \quad (8)$$

Utan någon störning i systemet krävs inget lag filter för att möta kraven. Därför blir nästa steg att plota stegsvaret för systemet där Regulatorn består av följande leadfilter:

$$F_{lead}(s) = 1.29 \cdot \frac{0.98s + 1}{0.5s + 1} \quad (9)$$

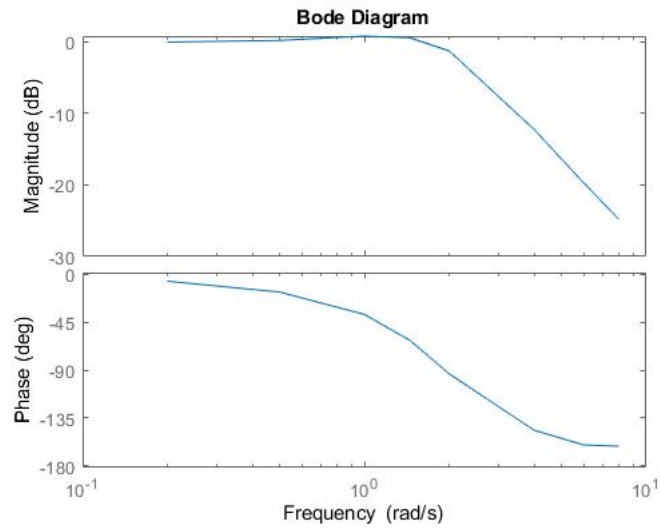
²Glad T., Ljung L., Reglerteknik- Grundläggande teori, uppl. 4, sid. 106, (2006)

I Figur 2 visar vi stegsvaret för systemet med Lead-filtret i Ekv (9). Vi använder *FeedbackControl()* med Lead-filtret som input och en stegfunktion som referenssignal, framtagen med *GetStep()*. Stegsvaret har stigtiden $T_r = 0.9$ samt överslängen $M = 14.4\%$



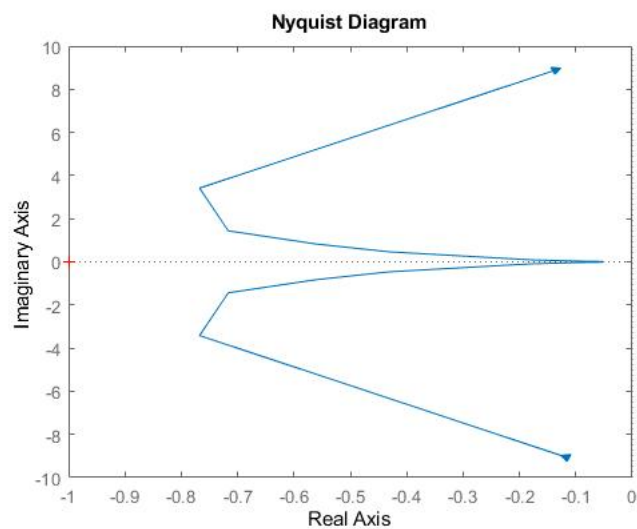
Figur 2: Stegsvaret för systemet med ett Lead-filter samt referenssignalen.

För att undersöka systemets kretsförstärkning och Nyquistkurva används MATLAB funktionen *frd()* med värden från Tabell 1 i rektngulär form för att ta fram systemets överföringsfunktion. Bodediagrammet för det slutna systemet presenteras i Figur 3.

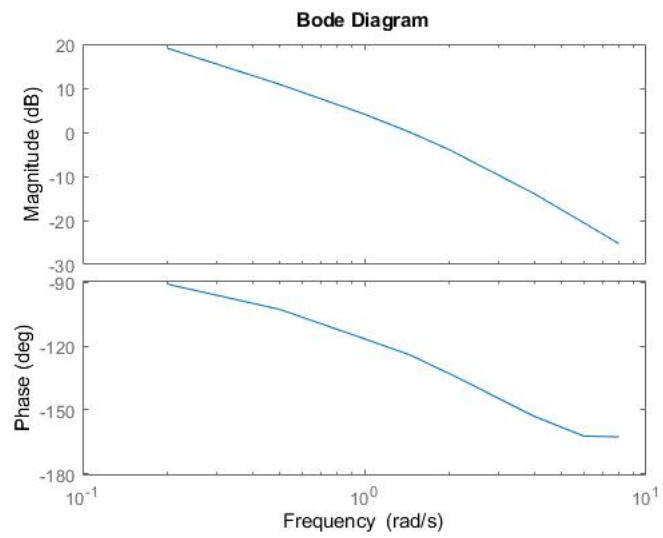


Figur 3: Bodediagram för G_c .

Nyquistkurvan och bodediagrammet för kretsförstärkningen presenteras i Figur 4 och 5. Framtagen med Matlabs funktion $nyquist(G0)$ där $G0$ är $F_{lead}G$ samt funktionen $bode(G0)$.



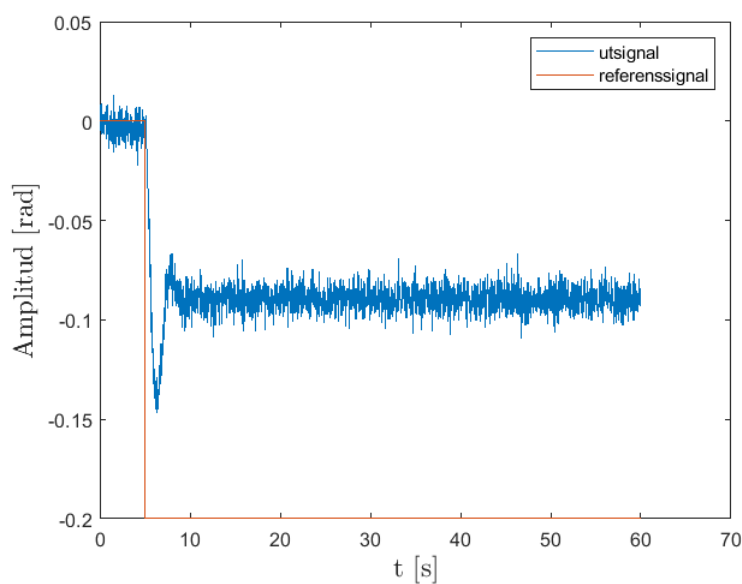
Figur 4: Nyquistkurvan för G_0 .



Figur 5: Bodediagram för G_0 .

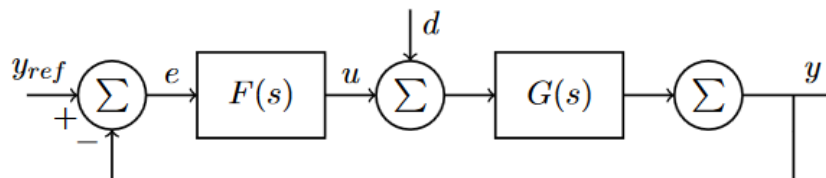
4.2 Störningseleminering

Vi introducerar nu en laststörning d i form av ett externt vridmoment på DC-motorn, i detta fall i form av ett gummiband som fästs på DC-motorns roterande skiva, alltså ett externt vridmoment som är proportionellt mot skivans vinkelutslag. Även med denna typ av störningssignal ska vi uppfylla kriterium 3 i avsnitt 2, nämligen $e_{\infty} = 0$. Ett test med en referenssignal i form av ett steg på -0.2 radianer visar att filtret från föregående avsnitt inte uppfyller detta kriterium, se figur 6.



Figur 6: Stegsvär med lead-filter som regulator. $e_{\infty} = 0$ uppfylls inte.

Därför behöver vi använda ett fullständigt lead-lag filter för detta. Det fullständiga blockschemat redovisas i figur 7.



Figur 7: Det fullständiga blockschemat för systemet.

där $F(s)$ är överföringsfunktionen för systemets regulator, och $G(s)$ är DC-

motorns överföringsfunktion. Ur blockscemat kan avläsas att

$$Y(s) = ((Y_{ref}(s) - Y(s))F(s) + D(s))G(s) \quad (10)$$

eller, om vi isolerar $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{Y_{ref}(s)F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} + \frac{D(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \quad (11)$$

Vi ansätter en lead-lag regulator på formen

$$F(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} \quad (12)$$

och $G(s)$ enligt ekvation 1. Den första termen i ekvation 11 såg vi i föregående avsnitt uppfyllde $e_\infty = 0$ då referenssignalen $y_{ref}(t)$ var en stegsignal. Matematiskt ser vi detta med slutvärdesteoremet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (13)$$

Med ekvation 11 har vi

$$Y_{ref}(s) - Y(s) = 1 - \frac{K_f K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}}{s(s + 1) + K_f K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}} \quad (14)$$

Vilket ger, med ekvation 13 samt $Y_{ref}(s) = \frac{1}{s}$, att

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} Y_{ref}(s) - Y(s) = 1 - \frac{\frac{K_f K}{\gamma}}{\frac{K_f K}{\gamma}} = 0 \quad (15)$$

Vilket också framgick ur föregående avsnitt. För att försäkra oss om att systemet även eliminerar stationära fel med en laststörning $d(t)$, ska vi nu undersöka den andra termen i ekvation 11, som vi kallar $\alpha(s)$.

$$\alpha(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K_f D(s)}{s(sT + 1) + K_f K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}} \quad (16)$$

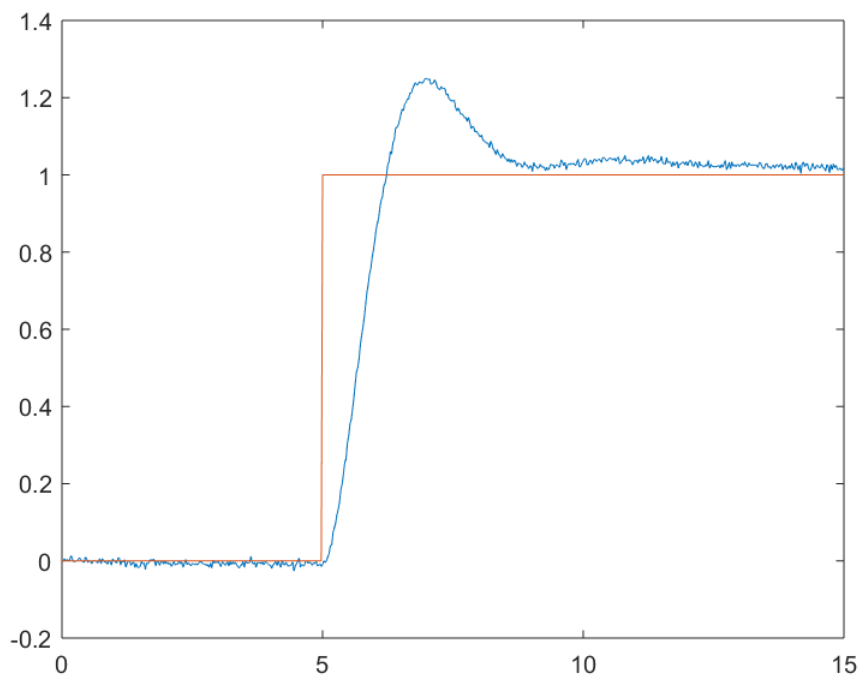
Om vi kan välja parametrarna sådana att $\lim_{s \rightarrow 0} s\alpha(s) = 0$, är fortfarande ekvation 15 uppfyllt, och därmed även kriterium 3 ur avsnitt 2. Vi kontrollerar därför detta gränsvärde:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\alpha(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_f}{s(sT + 1) + K_f K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}} sD(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma}{K} sD(s) \quad (17)$$

Om vi betraktar även störningen som en stegfunktion, har vi $sD(s) = \frac{s}{s} = 1$, så att valet $\gamma = 0$ ger oss ett lag-filter som uppfyller $e_\infty = 0$. Detta ger filtret en integrerande effekt (en pol i origo), ett effektivt sätt att eliminera stationära fel, och den stora fördelen med lag-filter. τ_I ges enligt tumregel för lead-lag filter³ som

$$\tau_I = \frac{10}{w_c} \approx 6.9 \quad (18)$$

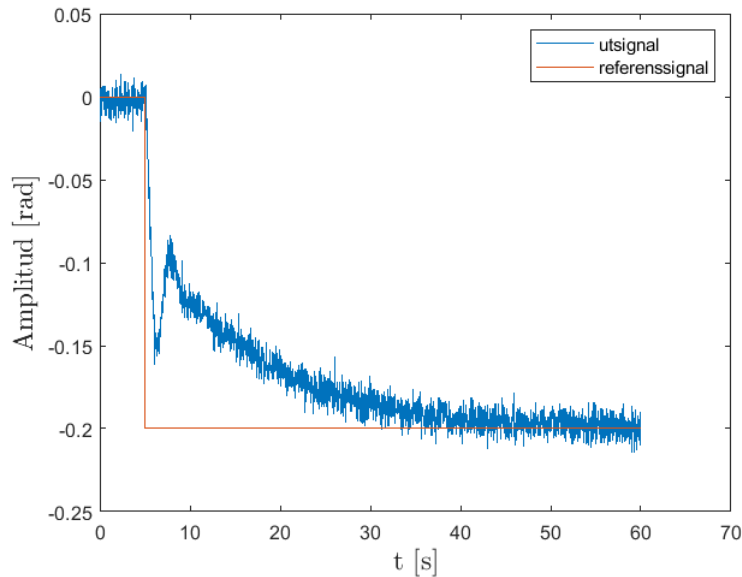
Viktigt att nämna är att filterparametrarna, förutom gamma, ej är anpassade för lead-lag kompensering. Detta kan ses i lead-lagfiltrets stegsvar i figur 8 som har stigtiden $T_r = 0.83$ s och överslängen $M = 25\%$. Med en ändring av parametrarna i leadfiltret kan även detta filter uppfylla filterspecifikationerna. Detta var dock ingen krav för utförandet av laborationen och förbigicks.



Figur 8: Stegsvär för lead-lagfilter

Stegsvaret med störning uppfyller nu kravet på eliminering av det stationära felet vilket kan ses i figur 9.

³Glad T., Ljung L., Reglerteknik- Grundläggande teori, uppl. 4, sid. 109, (2006)



Figur 9: Stegsvär med lead-lagregulator för system med en stegsignal med laststörning.

5 Resultat och diskussion

Den färdiga regulatoren är konstruerad och beskrivs av följande specifikationer:

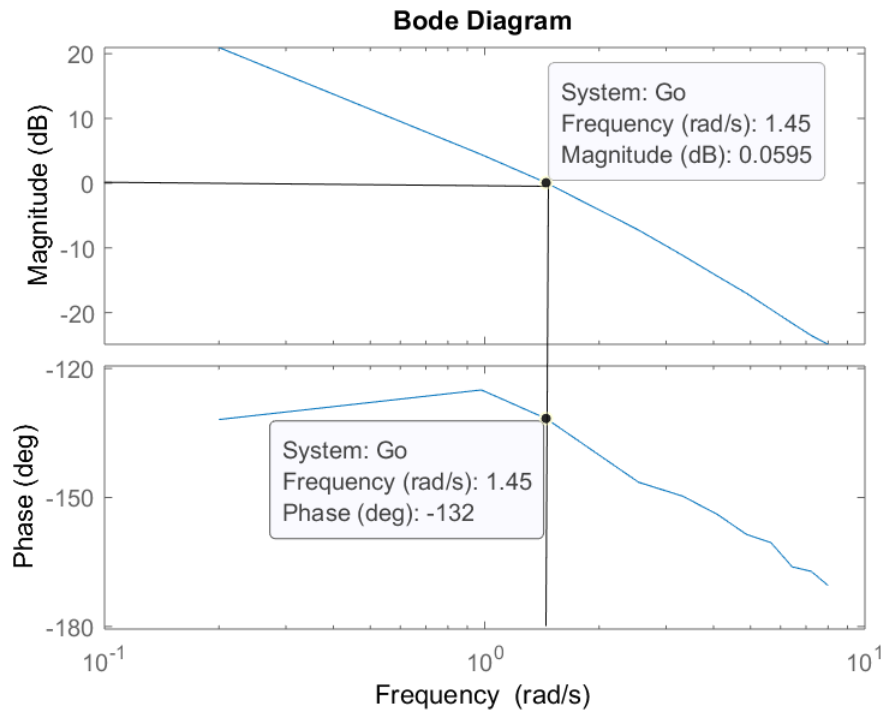
Regulatorns överföringsfunktion

$$\frac{8.719s^2 + 10.16s + 1.29}{3.379s^2 + 6.897s} \quad (19)$$

med regulatorns överföringsfunktion skapas ett system med hjälp av matlabfunktionen *tf()* som sedan multipliceras med systemet som tagits fram i sektion 3 vilken är DC-motorns överföringsfunktion och bildar systemets kretsförstärkning. Bode-diagram för kretsförstärkningen har tagits fram med matlabfunktionen *Bode()* och visas i Figur 10.

Från Figur 10 fås skärfrekvensen då amplitudkurvan korsar 0 dB. Skärfrekvensen blir då 1.45 rad/s och vid samma frekvens kan fasmarginalen läsas ut som 48°.

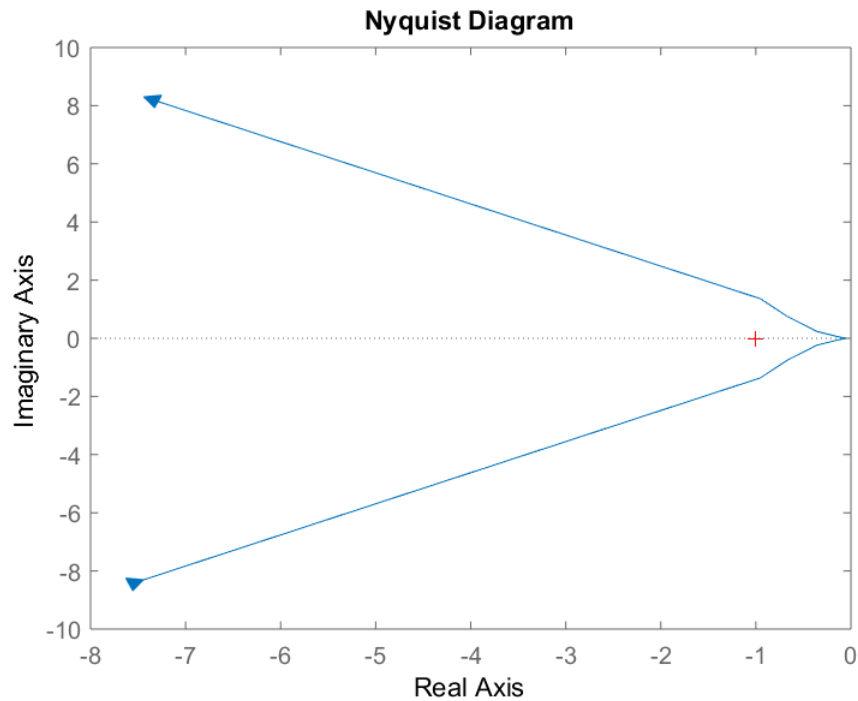
Skärfrekvensen är här densamma som den som initieellt togs fram i sektion 2 medans fasmarginalen skiljer sig fem grader från samma förutsägelse. Skillnaden i fasmarginal kan attribueras till att variablerna i regulatoren ej är anpassade för lead-lagkompensering.



Figur 10: Bodediagram för kretsförstärkning

Vidare så togs ett nyquistdiagram, för kretsförstärkningen, fram med matlab-funktionen *Nyquist()* se figur 11. Nyquistdiagramet har alla sina poler i vänster halvplan förutom änd- och startpunkterna i origo. Enligt det förenklade nyquistkriteriet⁴ som lyder ”Om G_o inte har poler i höger halvplan, så är det slutna systemet insignal-utsignalstabil precis då punkten -1 ligger till vänster om nyquistkurvan, när denna genomlöps från $\omega = 0$ till ∞ .” är systemet stabilt.

⁴Glad T., Ljung L., Reglerteknik- Grundläggande teori, uppl. 4, sid. 78, (2006)



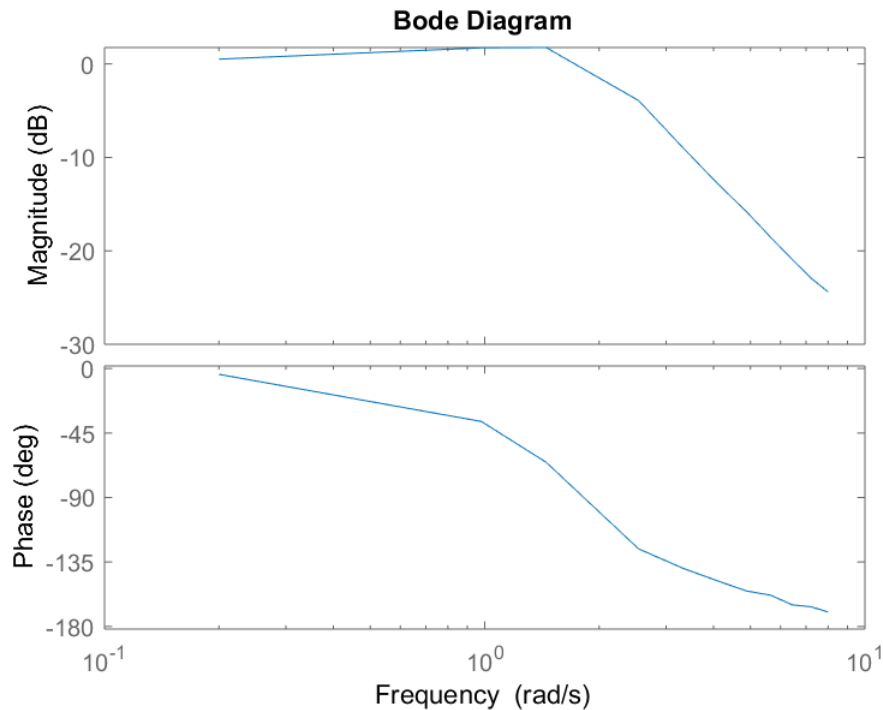
Figur 11: Nyquistdiagram för kretsförstärkningen

Slutligen togs ett bodediagram, för det slutna systemet, fram med hjälp av matlabfunktionen *Bode()* och det slutna systemet representerat som

$$G_c = \frac{G_o}{1 + G_o} \quad (20)$$

se figur 12.

Bandbredden för det slutna systemet fås då amplituden går under -3 dB och mäts upp till 2.82 rad/s.



Figur 12: Bodediagram för slutet system

Regulatorn som skapats i laborationen har uppfyllt de listade kraven. Det finns förbättringar att göra i många av stegen för att optimera prestationen av regulatorn. Detta betyder dock inte att den bakomliggande teorin för regulatorn har ignorerats.

Laborationen har givit förståelse för hur ett reglerproblem kan ställas upp. Hur en enkel startpunkt för en regulatordesign kan framställas utifrån givet problem. Hur denna design kan utvecklas till en faktisk regulator och hur denna regulator sedan kan manipuleras och optimeras beroende på olika specifikationskrav.

Laborationen har utförts på distans med hjälp av simuleringsverktyg men likväl lyckats ge insikter om en fysisk regulator och hur samma arbete skulle kunna utföras i verkligheten.