
Proef van Millikan

Louis Servaes (samenwerking met Briek Verschaeve)
Tweede bachelor Fysica en Sterrenkunde
1 november 2023

Groep 8
Opstelling 1

Samenvatting

In deze proef werd geprobeerd de lading van het elektron te meten. Gebaseerd op de proef van Millikan, werden oliedruppels een condensatorkamer ingespoten. Geladen druppels bewogen omlaag of omhoog naargelang hun lading en het elektrisch veld. Er werden video-opnames gemaakt om de snelheden van geladen druppels te meten. Vervolgens werden er 2 bewegingsvergelijkingen opgesteld om de straal r en lading q van 30 druppels te bepalen. Uiteindelijk kwamen de ladingen niet overeen met de elementaire lading e . Dit is waarschijnlijk te wijten aan een systematische fout.

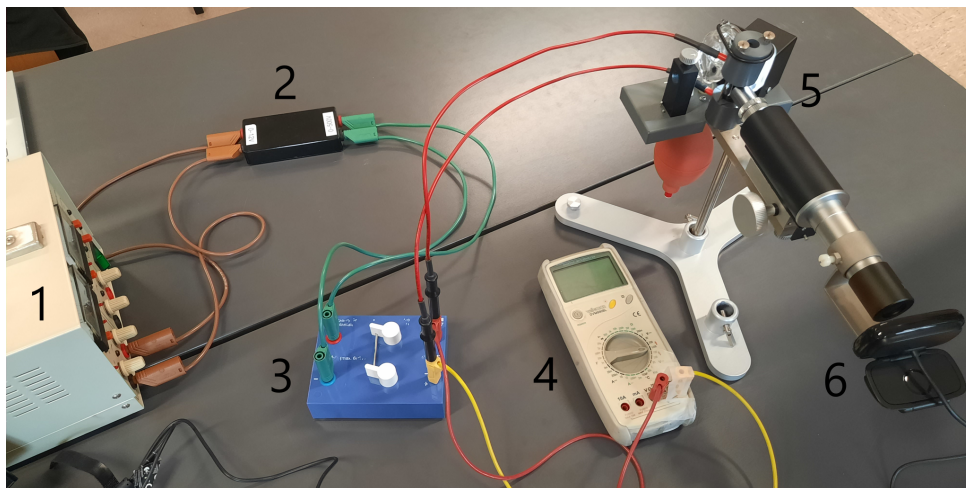
1 Inleiding

In 1909 trachtten Millikan en H. Fletcher de lading van het elektron te bepalen [1]. Dit deden ze door een potentiaalverschil over 2 horizontale metalen platen aan te brengen om op die manier een homogeen elektrisch veld te verkrijgen. Een mist van oliedruppels werd in een kamer boven de platen gespoten. Sommige druppels kregen een lading door wrijving met de sproeikop, of door in contact te komen met ioniserende straling. Door de spanning te laten variëren, bewogen de druppels omhoog en omlaag.

Dit experiment repliceerde wat Millikan en H. Fletcher in 1909 gedaan hadden. Het verliep op een iets andere manier, maar het doel bleef uiteraard hetzelfde: **de lading van het elektron bepalen**¹.

2 Methode

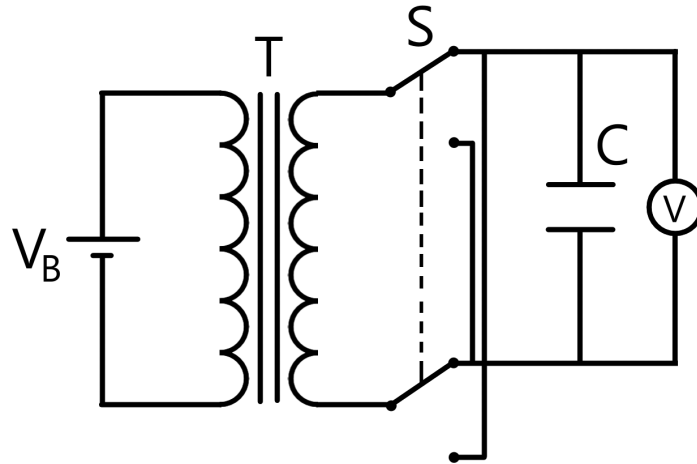
2.1 Opstelling



Figuur 1: Foto van de experimentele opstelling. Componenten: Connectiekabels, (1) Voeding (Velleman PS23003A) (2) Transformator (0V - 12V in, 0V - 500V out), (3) Omkeerschakelaar (PHYWE 06034-07), (4) Multimeter (Velleman DVM990BL), (5) Millikan apparaat (PHYWE 09070-00), (6) Webcam (Logitech, HD Webcam C525).

¹Het is belangrijk om op te merken dat de elementaire lading e ondertussen gedefinieerd is (en niet gemeten). Deze bevat dus geen fout, en wordt in deze proef verondersteld gekend te zijn. Er gebeurde enkel een meting van e .

De experimentele opstelling is in Figuur 1 weergegeven. De regelbare spanningsbron (0V - 15V) (1) werd aangesloten op een transformator (2) om de spanning te verhogen tot 0V - 500V. Deze is dan weer aangesloten op een omkeerschakelaar (3), om de polariteit om te draaien. De spanning werd aan de *output*² van de omkeerschakelaar met een multimeter (4) gemeten. Ten slotte is deze verbonden met 2 condensatorplaten in het Millikan apparaat (5). De druppels in de condensatorkamer werden met een LED fietslichtje (BTWIN) belicht en werden met een microscoop (Oculair WF10X 18mm) bekeken. Een webcam (6) werd aan het uiteinde hiervan geïnstalleerd om video-opnames te maken. Een schematische voorstelling van de schakeling is terug te vinden in Figuur 2.



Figuur 2: Schematische voorstelling van de schakeling. Componenten: (V_B) Voeding, (T) Transformator, (S) Omkeerschakelaar, (C) Condensator, (V) Multimeter.

Een olijsting van gebruikte constanten³ bij berekeningen, is terug te vinden in Tabel 1.

Tabel 1: Olijsting van gebruikte constanten.

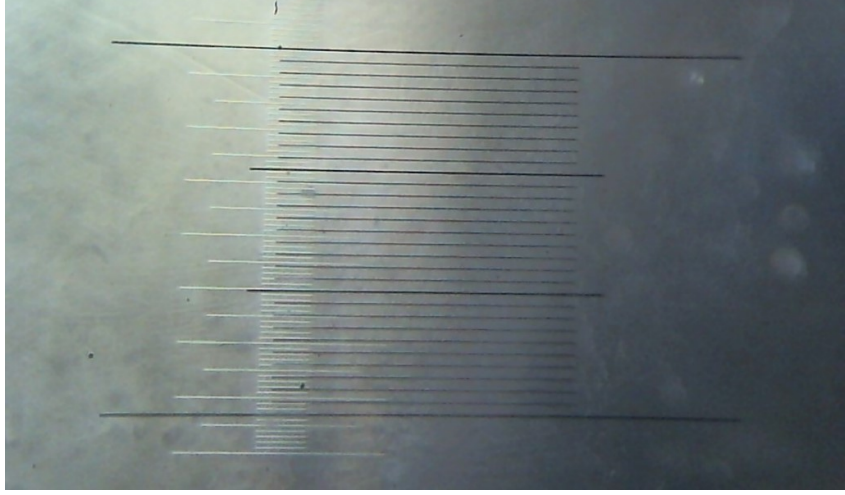
Grootheid	Symbol	Waarde
Afstand tussen de condensatorplaten	d	$(2,50 \pm 0,01)$ mm
Dichtheid van de siliconenolie	ρ_{olie}	$(1,03 \pm 0,01) \times 10^3$ kg/m ³
Dichtheid van lucht	ρ_{lucht}	$(1,293 \pm 0,001)$ kg/m ³
Viscositeit van lucht (21°C)	η	$(1,828 \pm 0,001) \times 10^{-5}$ kg/m·s
Valversnelling	g	$(9,81 \pm 0,01)$ m/s ²
Atmosferische druk	p	$(1,01325 \pm 0,00001)$ bar
	b	$(8,20 \pm 0,01) \times 10^{-3}$ Pa·m

2.2 Uitvoering

Vooraleer er iets gemeten werd, werd de schaal van de microscoop gekalibreerd. Een micrometer glaasje (met een resolutie van 10 μm) werd achter de microscoop geplaatst en met de webcam werd een foto getrokken. Hierdoor kon de weglengte l van de druppels (afstand tussen het bovenste en onderste zwarte streepje) bepaald worden. Dit is weergegeven in Figuur 3.

²De omkeerschakelaar kan interne weerstand bevatten. Vandaar dat de *output* een betere meting geeft van de spanning over de condensatorplaten.

³Als fout op deze constanten, werd telkens 1 *digit* genomen (deze werd namelijk niet meegegeven).



Figuur 3: Foto van de microscoop met het micrometer glaasje (getrokken met de webcam). De weglengte l van de druppels is de afstand tussen het bovenste en onderste zwarte streepje.

Met behulp van een perspeer werd een mist van oliedruppels in de condensatorkamer gespoten. Een geschikte⁴ (geladen) druppel werd gekozen door de polariteit enkele keren om te draaien. Eens zo'n druppel gevonden was, werd een video-opname gestart, waarbij de druppel eenmaal omhoog en eenmaal omlaag bewoog over een afstand l . Door de video *frame by frame*[2] te analyseren, werd de tijd om naar boven t_u en naar beneden t_d te gaan bepaald en dan ook de snelheden v_u en v_d , door l te delen door de tijd. Er werden in totaal 30 video's gemaakt, waarbij telkens 5 druppels geobserveerd werden bij 6 verschillende spanningen⁵ V .

Uit de stijg- en daalsnelheden v_u en v_d konden de straal r en (de absolute waarde van) de lading q van de druppels berekend worden. De druppels bewogen namelijk aan een constante snelheid, waardoor $F = ma = 0$. Dit toegepast op de krachten die inwerken op een dalende (1) en stijgende (2) druppel:

$$q \frac{V}{d} + \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_{\text{olie}} - \rho_{\text{lucht}}) g = 6\pi r \eta_{\text{eff}} v_d \quad (1)$$

$$q \frac{V}{d} - \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_{\text{olie}} - \rho_{\text{lucht}}) g = 6\pi r \eta_{\text{eff}} v_u \quad (2)$$

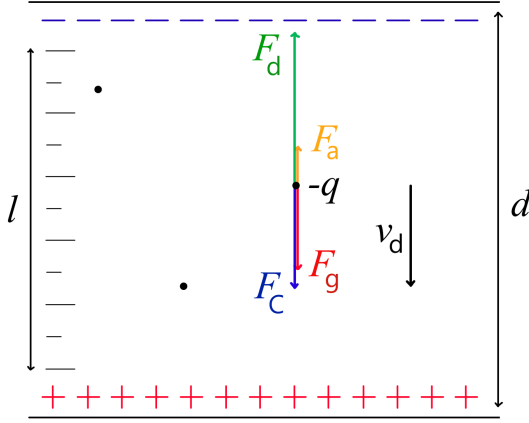
waarbij r de straal van de druppel, de coulombkracht $F_C = q \frac{V}{d}$, de zwaartekracht $F_g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{olie}} g$, de archimedeskracht $F_a = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{lucht}} g$ en de weerstandskracht $F_d = 6\pi r \eta_{\text{eff}} v_d$. Aangezien de druppels trager bewogen dan 0,1 cm/s, werd de viscositeit vermenigvuldigd met een correctiefactor. Dit is de effectieve viscositeit:

$$\eta_{\text{eff}} = \eta \left(1 + \frac{b}{pr} \right)^{-1} \quad (3)$$

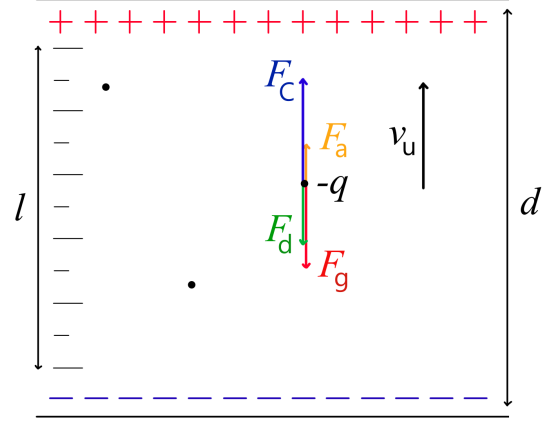
De krachten die inwerken op een negatief geladen druppel zijn weergegeven in Figuren 4 en 5. Een druppel kon uiteraard ook positief geladen zijn, hoewel de krachtendiagrammen in deze figuren de enige mogelijke zijn. Het onderscheid tussen positief en negatief geladen druppels kon als volgt gemaakt worden. Op het begin van elke video was de bovenste condensatorplaat positief geladen. Een negatief geladen druppel startte dus met stijgen, waarna de polariteit omdraaide en de druppel terug daalde.

⁴Er waren ook geladen druppels die niet veranderden van richting bij het omkeren van de polariteit, maar gewoon vertraagden. Deze druppels waren te zwaar, of te weinig geladen, waardoor de zwaartekracht overheerste.

⁵Dit is de spanning over de condensator, gemeten met de multimeter.



Figuur 4: Condensatorkamer met de krachten aangeduid op een dalende, negatief geladen druppel.



Figuur 5: Condensatorkamer met de krachten aangeduid op een stijgende, negatief geladen druppel.

Uit vergelijkingen 1 en 2 volgt (na enig rekenwerk):

$$r(v') = \frac{1}{2}\beta\xi(v') = \frac{1}{2}\beta(\sqrt{\alpha v' + 1} - 1) \quad (4)$$

$$q(v_d, v_u) = \frac{3\pi d\eta}{V} \left(\frac{r^2}{r + \beta} \right) (v_d + v_u) \quad (5)$$

waarbij:

$$v' \equiv v_d - v_u$$

$$\xi(v') = \sqrt{\alpha v' + 1} - 1$$

$$\alpha = \frac{9\eta}{\beta^2(\rho_{\text{olie}} - \rho_{\text{lucht}})g} = (2,489 \pm 0,035) \times 10^6 \text{ s/m}$$

$$\beta = \frac{b}{p} = (8,093 \pm 0,010) \times 10^{-8} \text{ m}$$

3 Resultaten

De weglengte l van de druppels werd bepaald en bedraagt:

$$l = (680 \pm 10) \mu\text{m}$$

De gemeten tijd t_d en t_u en berekende snelheden v_d en v_u van de 30 druppels is weergegeven in Tabel 2. Als fout op de tijd werden 2 *frames* genomen, wat overeenkomt met 0,14 s.

Tabel 2: Daal- en stijgtijden t_d en t_u van de 30 druppels, alsook de daal- en stijgsnelheden v_d en v_u . De absolute fout op de tijd bedraagt 0,14 s.

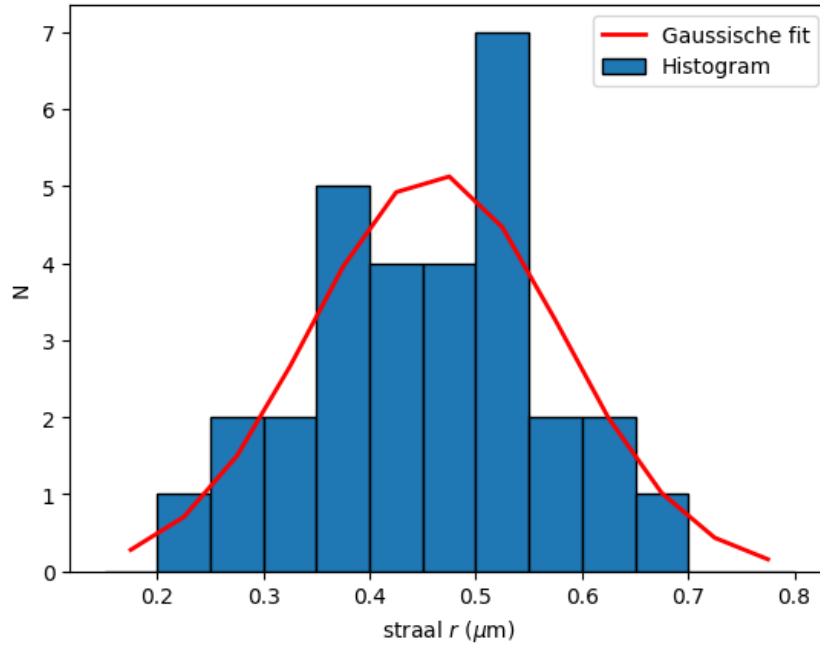
Druppel	t_d (s)	t_u (s)	v_d ($\mu\text{m/s}$)	AF(v_d) ($\mu\text{m/s}$)	v_u ($\mu\text{m/s}$)	AF(v_u) ($\mu\text{m/s}$)
1	4,45	14,00	152,9	6,9	48,6	1,2
2	5,04	11,81	134,9	5,6	57,6	1,5
3	5,52	7,30	123,2	4,8	93,2	3,1
4	3,98	6,05	170,7	8,2	112,4	4,2
5	5,84	12,14	116,4	4,4	56,0	1,5
6	4,58	5,78	148,6	6,5	117,7	4,5
7	7,82	18,91	86,9	2,8	35,96	0,79
8	6,43	10,96	105,7	3,8	62,0	1,7
9	4,78	7,78	142,1	6,1	87,4	2,8
10	7,90	16,66	86,0	2,8	40,83	0,93
11	5,57	23,17	122,1	4,8	29,35	0,60
12	6,18	8,29	110,1	4,0	82,0	2,6
13	4,85	9,04	140,3	6,0	75,2	2,3
14	4,38	19,98	155,1	7,0	34,03	0,73
15	6,98	8,16	97,5	3,3	83,3	2,6
16	5,06	10,10	134,5	5,6	67,4	1,9
17	5,04	12,14	134,9	5,6	56,0	1,5
18	4,98	14,34	136,7	5,7	47,4	1,2
19	5,46	13,41	124,6	4,9	50,7	1,3
20	6,30	22,91	107,9	3,9	29,68	0,61
21	5,71	7,17	119,0	4,6	94,9	3,2
22	7,04	13,73	96,6	3,3	49,5	1,3
23	6,38	26,94	106,5	3,8	25,24	0,50
24	6,10	19,65	111,5	4,1	34,61	0,75
25	3,46	8,03	196,8	10,5	84,7	2,7
26	4,85	8,22	140,3	6,0	82,7	2,6
27	5,58	8,75	121,8	4,7	77,7	2,4
28	4,19	8,56	162,2	7,6	79,4	2,5
29	6,24	17,79	109,0	4,0	38,22	0,85
30	4,70	6,58	144,6	6,3	103,4	3,7

Via vergelijking 4 werd de factor $\xi(v')$ en daaruit de straal r van de druppels berekend. Dit is weergegeven in Tabel 3. De verdeling⁶ van de (gebinde) stralen is weergegeven in Figuur 6. In het rood is een Gauss gefit, en op het zicht lijkt deze goed met de data overeen te komen. Er geldt dat het gemiddelde $\bar{r} = 0,46 \mu\text{m}$ en de (geschatte) standaardafwijking $\sigma_r = 0,11 \mu\text{m}$.

⁶Voor de figuren is gebruik gemaakt van ChatGPT[3] en de matplotlib package in Python[4].

Tabel 3: Relatieve snelheden v' , factor ξ en stralen r van de 30 druppels.

Druppel	v' ($\mu\text{m/s}$)	$\text{AF}(v')$ ($\mu\text{m/s}$)	ξ	$\text{AF}(\xi)$	r (μm)	$\text{AF}(r)$ (μm)
1	104,3	8,0	15,14	0,73	0,613	0,031
2	77,3	7,1	12,91	0,74	0,522	0,030
3	30,0	7,9	7,7	1,2	0,311	0,049
4	58	13	11,1	1,4	0,448	0,056
5	60,4	5,8	11,31	0,68	0,458	0,028
6	31	11	7,8	1,7	0,317	0,066
7	51,0	3,6	10,31	0,47	0,417	0,020
8	43,7	5,5	9,47	0,72	0,383	0,030
9	54,7	8,9	10,7	1,1	0,433	0,042
10	45,2	3,7	9,65	0,50	0,391	0,021
11	92,8	5,4	14,23	0,54	0,576	0,023
12	28,1	6,6	7,4	1,1	0,300	0,042
13	65,0	8,2	11,76	0,88	0,476	0,037
14	121,1	7,8	16,396	0,68	0,663	0,028
15	14,1	5,9	5,0	1,3	0,203	0,052
16	67,1	7,4	11,97	0,80	0,484	0,033
17	78,9	7,0	13,05	0,72	0,528	0,030
18	89,2	6,8	13,94	0,67	0,564	0,028
19	73,9	6,2	12,60	0,66	0,510	0,028
20	78,2	4,5	12,99	0,50	0,526	0,021
21	24,2	7,7	6,8	1,3	0,276	0,052
22	47,1	4,5	9,87	0,59	0,399	0,025
23	81,3	4,3	13,26	0,48	0,537	0,020
24	76,9	4,9	12,88	0,53	0,521	0,022
25	112	14	15,7	1,1	0,637	0,045
26	57,6	8,5	11,01	0,96	0,446	0,040
27	44,1	7,1	9,52	0,91	0,385	0,037
28	83	10	13,39	0,96	0,542	0,040
29	70,8	4,8	12,31	0,54	0,498	0,023
30	41,1	9,9	9,2	1,3	0,371	0,052



Figuur 6: Distributie van de druppelstralen r . Een Gauss is aan de gebinde data gefit en is weergegeven in het rood. $\bar{r} = 0,46 \mu\text{m}$ en $\sigma_r = 0,11 \mu\text{m}$.

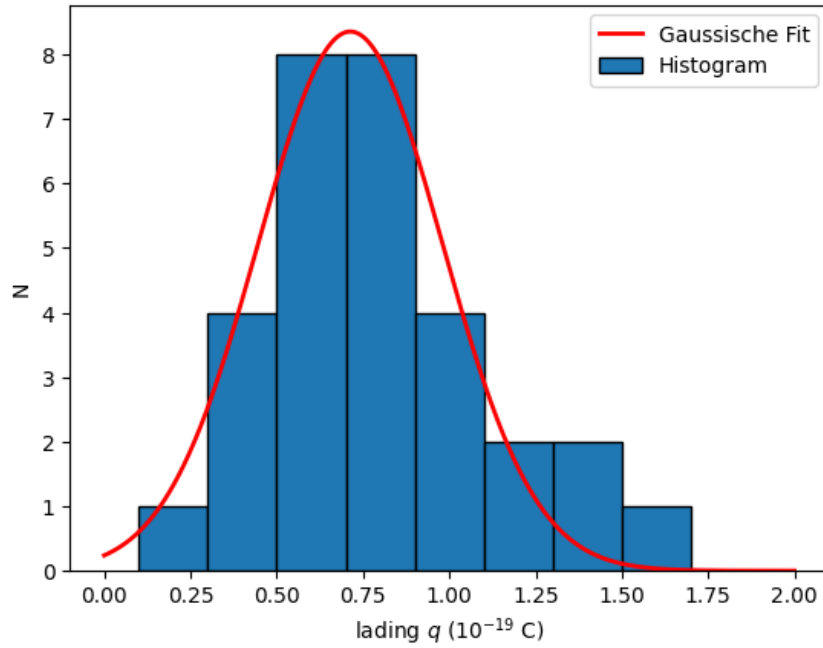
Uiteindelijk werd via Tabellen 2 en 3 en a.d.h.v. vergelijking 5 (de absolute waarde van) de lading q berekend. Dit is terug te vinden in Tabel 4. Ook de spanning is weergegeven. De absolute fout op de spanning wordt gegeven door (0,8% afl. + 3 digits) (zie handleiding multimeter [5], onder ‘3.2. ELEKTRISCHE SPECIFICATIES’ - ‘3.2.1. Gelijkspanning’).

Tabel 4: Spanning V en absolute waarde van de lading q . De absolute fout op de spanning wordt gegeven door (0,8% afl. + 3 digits).

Druppel	V (V)	AF(V) (V)	q (10^{-19} C)	AF(q) (10^{-19} C)
1	305	6	1,5	0,4
2	305	6	1,2	0,3
3	305	6	0,8	0,4
4	305	6	1,5	0,7
5	305	6	0,9	0,3
6	332	6	0,9	0,6
7	332	6	0,6	0,2
8	332	6	0,7	0,2
9	332	6	1,1	0,4
10	332	6	0,5	0,2
11	362	6	0,9	0,2
12	362	6	0,5	0,3
13	362	6	1,0	0,3
14	362	6	1,3	0,3
15	362	6	0,3	0,3
16	405	7	0,9	0,3
17	405	7	0,9	0,3
18	405	7	1,0	0,2
19	405	7	0,8	0,2
20	405	7	0,7	0,2
21	433	7	0,5	0,3
22	433	7	0,5	0,2
23	433	7	0,6	0,1
24	433	7	0,7	0,2
25	433	7	1,6	0,5
26	460	7	0,8	0,3
27	460	7	0,6	0,2
28	460	7	1,1	0,3
29	460	7	0,6	0,2
30	460	7	0,7	0,4

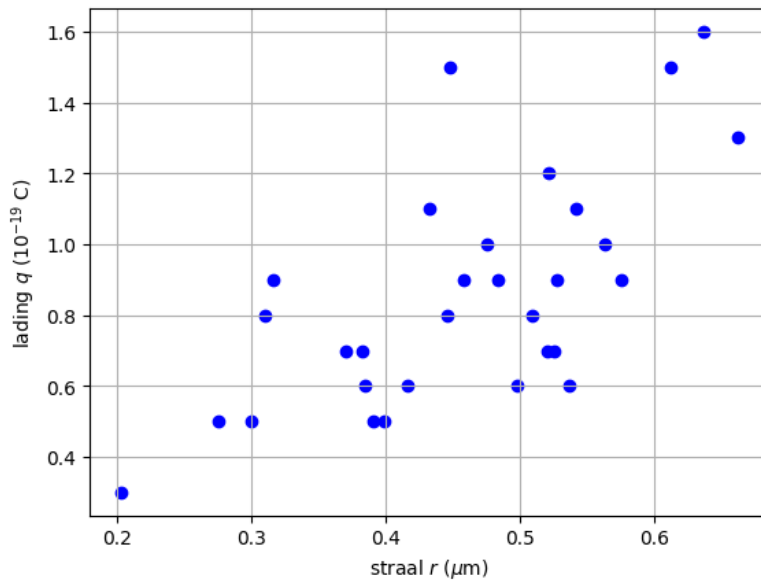
Merk op dat de ladingen ten eerste niet binnen elkaars foutenmarge liggen. Dit is mogelijk indien de lading q een arbitrair veelvoud zou zijn van de elementaire lading [6] $e = 1.60217663 \times 10^{-19}$ C. We zien echter dat elke berekende waarde voor q kleiner is dan e . De metingen zijn dus ofwel niet-reproduceerbaar (wat zou impliceren dat de fouten op q onderschat zijn), ofwel is er een systematische fout. Afgaande van de aard van de metingen, en de manier waarop de metingen zijn gebeurd (*frame by frame* analyseren, heel precieze tijdsmetingen ...) – is dit waarschijnlijk eerder te wijten aan een systematische fout. Mogelijke verklaringen zijn:

- De multimeter was defect of niet goed aangesloten. Hierdoor werd de spanning te hoog afgelezen. Dit resulteerde in te lage waarden voor q (zie vergelijking 5).
- De gekozen druppels waren ongeschikt. Ze bewogen bv. te traag of te snel voor het model van de weerstandskracht. Of ze waren te klein of niet perfect sferisch. Mogelijks waren er nog andere invloeden (van buitenaf) waar geen rekening mee gehouden werd.
- Het model voor de weerstandskracht is foutief. Bij de afleiding van de wet van Stokes werden namelijk enkele veronderstellingen gemaakt (waardoor bijvoorbeeld de viscositeit gecorrigeerd moest worden).



Figuur 7: Distributie van de ladingen q . Een Gauss is aan de gebinde data gefit en is weergegeven in het rood. $\bar{q} = 0,9 \times 10^{-19}$ C en $\sigma_q = 0,3 \times 10^{-19}$ C.

In Figuur 7 is de verdeling van de (gebinde) ladingen weergegeven. Opnieuw is in het rood een Gauss gefit, en lijkt die goed overeen te komen met de data. Er geldt dat het gemiddelde $\bar{q} = 0,9 \times 10^{-19}$ C en de (geschatte) standaardafwijking $\sigma_q = 0,3 \times 10^{-19}$ C. De data lijkt verspreid, terwijl we eerder een of twee pieken zouden verwachten⁷. Er is uiteraard wel een lichte piek, maar deze komt zoals eerder aangehaald niet overeen met de elementaire lading e (deze valt niet binnen de foutenmarges van q).



Figuur 8: Scatter plot van de straal r en lading q . De correlatiecoëfficiënt $\rho = 0,67$.

De gezamenlijke verdeling van r en q is terug te vinden in Figuur 8. De correlatiecoëfficiënt bedraagt $\rho = 0,67$. Dit wil zeggen dat een druppel met een grotere straal, over het algemeen een grotere lading had.

⁷Een bij de elementaire lading e en bijkomende pieken bij veelvouden van e .

Dit is enigszins logisch, indien de druppels geladen werden door wrijving⁸. Dit kan ook louter toeval zijn, maar hiervoor zouden meer metingen gedaan moeten worden.

4 Besluit

De bekomen waarden voor de straal r zijn van de orde $0,5\ \mu\text{m}$ en lijken realistisch. De ladingen die hieruit berekend werden, liggen echter steeds lager dan de elementaire lading $e = 1.60217663 \times 10^{-19}\ \text{C}$. De literatuurwaarde voor e ligt binnen de foutenmarge voor slechts enkele druppels. Meer nog, de ladingen van de druppels liggen niet eens binnen elkaars foutenmarge!

Dit is waarschijnlijk te wijten aan een systematische fout. Enkele mogelijke verklaringen zijn:

- De multimeter was defect of niet goed aangesloten. Hierdoor werd de spanning te hoog afgelezen.
- De gekozen druppels waren ongeschikt. Mogelijks waren er nog andere invloeden (van buitenaf) waar geen rekening mee gehouden werd.
- Het model voor de weerstandskracht is foutief.
- ...

Dit is giswerk. Om de oorzaak te achterhalen, zou het experiment herhaald moeten worden.

Bronvermelding

- [1] Wikipedia contributors. *Oil drop experiment* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; geraadpleegd op: 31 oktober 2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Oil_drop_experiment&oldid=1182326165.
- [2] Open Source Physics. *Tracker Video Analysis and Modeling Tool*. URL: <https://physlets.org/tracker/>. Geraadpleegd op: 31 oktober 2023.
- [3] OpenAI. *ChatGPT*. URL: <https://chat.openai.com/>. Geraadpleegd op: 1 november 2023.
- [4] Python. URL: <https://www.python.org/>.
- [5] Velleman Group. *DVM990BL*. URL: <https://cdn.velleman.eu/downloads/1/dvm990b1n1.pdf>. Geraadpleegd op: 1 november 2023.
- [6] Wikipedia contributors. *Elementary charge* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; geraadpleegd op: 1 november 2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Elementary_charge&oldid=1177067074.

⁸Een grotere straal impliceert een groter oppervlak, waardoor de kans op wrijving groter wordt.