Learn Day ESCOM 2019

14 de noviembre de 2019

Capítulo 1

Circunferencia

Parametrización de la ecuación de la circunferencia Sea $P = \left(x, y\right)$ un punto que describa a la circunferencia,

$$sen\left(\theta\right) = \frac{CO}{H} \quad \rightarrow \quad sen\left(\theta\right) = \frac{y}{\left\|\vec{R}\right\|} \quad \rightarrow \quad y = \left\|\vec{R}\right\| sen\left(\theta\right) \tag{1.1}$$

$$cos\left(\theta\right) = \frac{CA}{H} \quad \rightarrow \quad cos\left(\theta\right) = \frac{x}{\left\|\vec{R}\right\|} \quad \rightarrow \quad x = \left\|\vec{R}\right\| cos\left(\theta\right) \tag{1.2}$$

Así $P = \left(x, y\right)$ queda expresado como

$$P = \left\|\vec{R}\right\| \left(cos\left(\theta\right), sen\left(\theta\right)\right) \tag{1.3}$$

Parametrización y polígono Usando la forma (1.3) queremos dividir a la circunferencia en n partes iguales, y dibujar un polígono recorriendo toda la circunferencia, así

$$\theta = 2\pi\left(\frac{i}{n}\right) \tag{1.4}$$

Donde n son los lados del polígono e i son los lados tomados

Obtener π Por definición sabemos

$$\pi = \frac{Perímetro}{Diámetro} \tag{1.5}$$

Para el perímetro

$$P = \int_{\theta=0}^{2\pi} r d\theta \quad \rightarrow \quad P = 2\pi r \tag{1.6}$$

Queremos que el perímetro sea igual a π, entonces

$$\begin{aligned} P = \pi \quad &\rightarrow \quad \pi = 2\pi r \\ r &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Relación factor π Sea δ el perímetro de la figura hecha con radio ρ

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho d\theta = 2\pi\rho \\ \pi &= \frac{\delta}{2\rho} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Capítulo 2

Cicloide

Parametrización Sea $P = (x, y)$ un punto que describa a la cicloide, entonces

$$x = \overline{OM} = \overline{OT} - \overline{TM} = \|\vec{R}\|\,\varphi - \|\vec{R}\|\,sen(\varphi) \quad \rightarrow \quad x = \|\vec{R}\|\,[\varphi - sen(\varphi)] \tag{2.1}$$

$$y = \overline{MP} = \overline{CT} - \overline{NC} = \|\vec{R}\| - \|\vec{R}\|\,cos(\varphi) \quad \rightarrow \quad y = \|\vec{R}\|\,[1 - cos(\varphi)] \tag{2.2}$$

Así $P = (x, y)$ queda expresado como

$$P = \|\vec{R}\|\,(\varphi - sen(\varphi), 1 - cos(\varphi)) \tag{2.3}$$

Ecuación cartesiana Despejamos φ de y se obtiene

$$\varphi = arccos\left(1 - \tfrac{y}{\|\vec{R}\|}\right)$$

Sustituimos en x

$$sen(\varphi) = sen\left(arccos\left(1 - \tfrac{y}{\|\vec{R}\|}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(1 - \tfrac{y}{\|\vec{R}\|}\right)^2}$$

Obtenemos su ecuación cartesiana

$$x = \|\vec{R}\|\,arccos\left(1 - \frac{y}{\|\vec{R}\|}\right) \pm \sqrt{y\left(2\,\|\vec{R}\| - y\right)} \tag{2.4}$$

Obtener π La longitud de la curva es $P = 8R$, queremos $P = \pi$, así

$$P = \pi \quad \rightarrow \quad \pi = 8R$$

$$R = \frac{1}{8}\pi \tag{2.5}$$

Relación factor π Sea α el radio ingresado para la cicloide, Σ el perímetro de la cicloide con α, entonces

$$\alpha = xR \quad \rightarrow \quad x = \tfrac{1}{R}\alpha$$

Sea λ un factor de π, entonces

$$\lambda = x\pi \quad \rightarrow \quad \pi = \tfrac{\lambda}{x}$$

Igualamos, usamos (2.5) y despejamos $\pi = \frac{1}{\alpha}R\lambda$

$$\pi = \frac{\pi}{8}\frac{\lambda}{\alpha} \tag{2.6}$$

Capítulo 3

Análisis asintótico

Ordenes de crecimiento Sea $f: \quad N \longrightarrow N$ se definen

1. $\O(f) = \{g: N \longrightarrow N \quad : \quad \exists c > 0, n_0 \epsilon N \quad : \quad n \geq n_0 \Rightarrow g(n) \leq cf(n)\}$
2. $\Theta(f) = \{g: N \longrightarrow N \quad : \quad g \epsilon \O(f) \quad \wedge \quad f \epsilon \O(g)\}$
3. $\Omega(f) = \{g: N \longrightarrow N \quad : \quad \exists c > 0, n_0 \epsilon N \quad : \quad n \geq n_0 \Rightarrow cg(n) \geq f(n)\}$

Medida empírica del rendimiento Sea un arreglo A de longitud n, si A tiene valores uniformemente distribuidos y p es la probabilidad que x aparezca en a, entonces $T(n) = \frac{1}{2}p(n+1) + (1-p)n$

$$T(n) = \left(1 - \frac{1}{2}p\right)n + \frac{1}{2}p \tag{3.1}$$

Algoritmo divide y vencerás Metodología recursiva para problemas computacionales

- *Dividir* el arreglo A de tamaño n en dos subarreglos de tamaño $\frac{1}{2}n$
- *Ordenar* recursivamente los subarreglos de la misma forma
- *Unir* los subarreglos

Sea $T(n)$ el número de comparaciones por la unión, así

$$T(n) = \begin{cases} 0 \quad si \quad n = 1 \\ 2T\left(\frac{1}{2}n\right) + n \quad si \quad n > 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Hacemos la iteración α veces

$$\begin{gathered} T(n) = 2T\left(\frac{1}{2}n\right) + n \\ T(n) = 2\left(2T\left(\frac{1}{2^2}n\right) + \frac{1}{2}n\right) + n \\ \vdots \\ T(n) = 2^\alpha T\left(\frac{1}{2^\alpha}n\right) + \alpha n \end{gathered}$$

Si $n = 2^k, \quad k = log_2(n) \rightarrow \alpha = k$, así

$$T(n) = 2^k T(1) + kn \quad \rightarrow \quad T(n) = 2^k(0) + kn \quad \rightarrow \quad T(n) = nlog_2(n)$$

$$T(n) = \O\left(nlog_2(n)\right) \tag{3.3}$$

Capítulo 4

Teorema integral de Fourier

Sea $f(x)$ una función definida por una ecuación diferencial con valores de frontera, $K(\alpha,x)$ función de dos variables, se define la *transformación integral de* $f(x)$ *convergente con el kernel* $K(\alpha,x)$ como

$$I_f(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} f(x)\, K(\alpha,x)\, dx \tag{4.1}$$

Transformaciones de Mellin es un tipo de transformación integral con el kernel $k(\alpha,x) = x^{\alpha-1}$

$$K(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} f(x)\, x^{\alpha-1} dx \tag{4.2}$$

Operadores y su inversa Sea $Ł\left(f\right) = I_f(\alpha)$ y $Ł^{-1}\left(f\right) = B(\alpha)$, entonces

$$Ł\left(f\right) = B(\alpha) \text{ y } f(x) = Ł^{-1}(B)$$

Queremos encontrar $Ł^{-1}$ para determinar las soluciones de

$$I_f(\alpha) = \textstyle\int_{x=0}^{\infty} f(x)\, K(\alpha,x)\, dx$$

En la forma

$$f(x) = \int_{x=0}^{\infty} I_f(\alpha)\, H(\alpha,x)\, d\alpha \tag{4.3}$$

Así, si $H(\alpha,x) = K(\alpha,x)$, entonces $K(\alpha,x)$ se llama *kernel de Fourier*

Teorema 1 $K(\alpha,x)$ es kernel de Fourier si la transformación de Mellin $K(s)$ de $k(x)$ satisface

$$K(s)\, K(1-s) = 1$$

Transformación coseno de Fourier Sea $k(x) = Acos(x)$; $A: Cte$

$$K(s) = A\int_{x=0}^{\infty} x^{s-1} cos(x)\, dx = \frac{1}{2}A\left(\int_{x=0}^{\infty} e^{x\imath} x^{s-1} dx + \int_{x=0}^{\infty} e^{-x\imath} x^{s-1} dx\right)$$

Sabemos

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{\pm x\imath} x^{s-1} dx = e^{\pm\frac{1}{2}\pi s\imath}\Gamma(s)$$

Por el **Teorema 1**

$$1 = K(s)\,K(1-s) = \tfrac{1}{2}A^2 sen(s\pi)\,\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)\,; \quad \Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \pi csc(s\pi)$$

Así

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,cos(\alpha x)\,dx \quad y \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty} F_c(\alpha)\,cos(\alpha x)\,d\alpha \tag{4.4}$$

Teorema 2 Para que $I_f(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} f(x)\,K(\alpha,x)\,dx$ tenga solución $f(x) = \int_{x=0}^{\infty} I_f(\alpha)\,H(\alpha,x)\,d\alpha$ se necesita $K(s)\,H(1-s) = 1$

Teorema Integral de Fourier Por la transformación coseno de Fourier podemos escribir $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty} d\alpha \int_{\eta=0}^{\infty} f(\eta)\,cos(\alpha\eta)\,cos(\alpha x)\,d\eta \tag{4.5}$$

Capítulo 5

Transformada de Fourier

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\omega t i}\, dt \tag{5.1}$$

Demostración:

Sean las funciones

$$\delta_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-n}^{n} e^{\omega t i}\, d\omega \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{t=-n}^{n} f(t)\, \delta_n(t-x)\, dt$$

Entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{\omega=-n}^{n} e^{\omega(t-x)i}\, d\omega \right] dt$$

Intercambiando y tomando el límite

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\omega(t-x)i}\, dt$$

Reacomodando

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{-\omega x i}\, d\omega \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\omega t i}\, dt$$

Hacemos

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\omega t i}\, dt \tag{5.2}$$

$$f(x) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{-\omega t i}\, d\omega \tag{5.3}$$

Capítulo 6

FFT aplicada a polinomios

Sea un polinomio de la forma

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i x^i \right); \quad a_i \epsilon \Re \tag{6.1}$$

Nos enfocaremos en la multiplicación de polinomios, queremos obtener un orden menor a $\text{Ø}\left(n^2\right)$, analizamos. Sea $R(x)$ la multiplicación de dos polinomios $P(x)\,Q(x)$, entonces

$$R(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left[\sum_{j=0}^{k} \left(a_j b_{k-j} \right) \right] x^k \tag{6.2}$$

El cual es de complejidad $\text{Ø}\left(n^2\right)$

6.1. Representación del polinomio

Empezamos el análisis con la FFT.

Representamos al polinomio en forma matricial *¿Por qué puedo hacer eso?*.

Sea M la matriz del polinomio en un campo X *¿Qué es un campo?*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1}^1 & \cdots & x_{n-1}^n \end{pmatrix}_{nxn} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}_{nx1} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}_{nx1} \tag{6.3}$$

6.2. Divide y vencerás

Queremos saber la forma que debe tener $P(x) \quad \forall x \epsilon X$ como se analizó, el algoritmo consta de tres pasos, así

6.2.1. Divide

¿Cómo se puede dividir el polinomio? El polinomio se dividirá en entradas pares e impares
¿Por qué se puede dividir en entradas pares e impares?

Sea k el contador de la suma, tenemos que k es número natural, sabemos que en los números naturales se cumple una y sólo una de las siguientes

1. $k = 1$
2. $\exists! \quad u \epsilon N \quad : \quad k = 2u$
3. $\exists! \quad v \epsilon N \quad : \quad k = 2v + 1$

Así aseguramos que ninguna entrada se repetirá

$$P_{par}(x) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \left(a_{2k} x^k \right) \qquad P_{impar}(x) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n} \left(a_{2k+1} x^k \right) \tag{6.4}$$

6.2.2. Primer análisis

Se calculará la complejidad algoritmica para ver si nuestro método fue bueno.

Queremos calcular

$$P(x) \quad \forall x \epsilon X^2 = \left\{ x^2 \quad : \quad x \epsilon X \right\} \tag{6.5}$$

¿De qué valores dependerá el tiempo de computo? El tiempo será dependiente de n el tamaño del polinomio y $|X|$ la cardinalidad del conjunto X

$$T(n, |X|) \tag{6.6}$$

¿Cuál va a ser la expresión de $T(n, |X|)$? Para $T(n, |X|)$ obtuvimos dos sub problemas de tamaño $\frac{1}{2}n$ con los mismos términos en X, sumando el trabajo:
Dividir el vector es $\text{Ø}(n)$ y hay una suma arirmética para cada x, así

$$T(n, |X|) = 2T(n, |X|) + \text{Ø}(n + |X|) \tag{6.7}$$

¿Cuál es la complejidad final? Analizamos, hay n elementos al inicio ya que $n = |X|$, luego de la división hay también $n = |X|$, así

$$\begin{array}{ccc} & n & \\ n & & n \\ & \vdots & \end{array}$$

¿cuál es la longitud del arreglo? y *¿Cuántos elementos hay en la última fila?* La longitud del arreglo es $\log_2(n)$, en la última fila hay $2^{\log_2(n)} = n$ elementos

Entonces ¿cuál es el tiempo de ejecución? El tiempo de ejecución será $T(n, |X|) = 2T(n, |X|) + \text{Ø}(n + |X|)$

$$T(n, |X|) = \text{Ø}\left(n^2\right) \tag{6.8}$$

6.2.3. Segundo análisis

Debido al primer análisis podemos concluir que queremos que $|X|$ sea cada vez más pequeño

¿Cuál sería el tamaño ideal de $|X\check{r}$ *para poder reducir el tiempo de cómputo?* Queremos que n y $|X|$ cambien del mismo modo, es decir que la cardinalidad de X sea la misma que n, entonces

$$|X| \longrightarrow \frac{1}{2}|X| \tag{6.9}$$

¿Cómo cambia con esa modificación $T(n,|X|)$*?* Así $T(n,|X|) = 2T(n,|X|) + \emptyset(n+|X|)$ cambiará a $T(n) = 2T\left(\frac{1}{2}n\right) + \emptyset(n)$

$$T(n) = \emptyset\left(n\log_2(n)\right) \tag{6.10}$$

Analizamos a X, queremos convertir a X en X^2 de tal modo que cuando eleve al cuadrado sólo tenga un valor.

¿Cúales serán los valores que debe de tener X*?* $|X| = 1 \rightarrow X = \{\xi\}; \xi\epsilon\Re$, $|X| = 2 \rightarrow X = \left\{\sqrt{\xi}, -\sqrt{\xi}\right\}; \xi\epsilon\Re$ Así cuando eleve al cuadrado, X^2 se reducirá en la forma querida, así $|X| = 2^k \quad k\epsilon\Re$ proponemos $\xi = 1$, entonces

- $|X| = 1 \rightarrow X = \{1\}$
- $|X| = 2 \rightarrow X = \{-1, 1\}$
- $|X| = 4 \rightarrow X = \{-i, i, -1, 1\}$

¿Se acabarán las raices? Entonces la forma de los elementos de M sería $M_{ij} = e^{\frac{2\pi}{n}jki}$

Analisis de la FFT y la convolución

Sean

$$P'(x) = FFT[P(x)] \quad Q'(x) = FFT[Q(x)] \quad R'(x) = P'(x)Q'(x) \tag{6.11}$$

Queremos

$$M' = \frac{1}{n}\overline{M} \tag{6.12}$$

Así, sean x' los elementos de M', entonces

$$x' = e^{-2\pi ki} \tag{6.13}$$

Entonces $\left(nM'\right)P'(x) = nP(x)$. Sea $S = MM' = nI$, S_{jk} : fila j de M y columna k de $\overline{M}$, entonces:

$j = k$

$S = \sum_{m=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi}{n}mji} e^{-\frac{2\pi}{n}mki}$

$$S = \sum_{m=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi}{n}m(j-k)i} = n \tag{6.14}$$

$j \neq k$

$S = \sum_{m=0}^{n-1}\left[e^{\frac{2\pi}{n}(j-k)i}\right]^m$, lo cual es una serie geométrica, así $S = \sum z^k = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$

$$S = \frac{\left(e^{\frac{2\pi}{n}(j-k)i}\right)^n - 1}{e^{\frac{2\pi}{n}(j-k)i} - 1} = 0 \tag{6.15}$$

6.2.4. Combinamos

$$P(x) = P_{par}\left(x^2\right) + xP_{impar}\left(x^2\right) \tag{6.16}$$