Universidad Simón Bolívar
Departamento de Física
SEGUNDO PARCIAL DE FISICA FS-1112
SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 2022
SARTENEJAS, 23 DE NOVIEMBRE DE 2022.

Nombres: ____________________

Apellidos: ____________________

Nro. de Carnet: ____________ Sección: ______

Instrucciones

- ✓ Escriba todos sus datos en los renglones indicados arriba, luego verifique que este parcial contiene 6 páginas, y coloque su número de carné en la esquina inferior derecha de cada página.
- ✓ Lea detenidamente cada pregunta y al responder sea cuidadoso(a), conciso(a), claro(a) y ordenado(a). Las respuestas deben ser debidamente detalladas y expresarse (naturalmente) en función de los datos del problema. Si usted utiliza otros símbolos deberá definirlos.
- ✓ En la parte de selección simple marque con una × la respuesta correcta y justifíquela, dentro de las opciones hay una única respuesta, por lo que debe seleccionar una sola opción. Cada respuesta debe estar justificada correctamente, de no estarlo no tendrá validez.
- ✓ Se prohíbe el uso de cualquier dispositivo electrónico, como calculadoras y celulares, estos últimos deben estar apagados durante la evaluación. NO SE CONTESTARÁN PREGUNTAS DURANTE EL EXAMEN.

Preguntas:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Puntos:	3	3	2	3	3	2	2	2	2	4	5	14	45
Acumulado:													

1. (3 puntos) Considere 4 partículas de masa m dispuestas sobre un aro de masa m y radio R como se ve en la figura. Las partículas equidistan una de otra. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

( ) $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = 2mR^2$;

( ) $I_x \neq I_y \neq I_z = 4mR^2$;

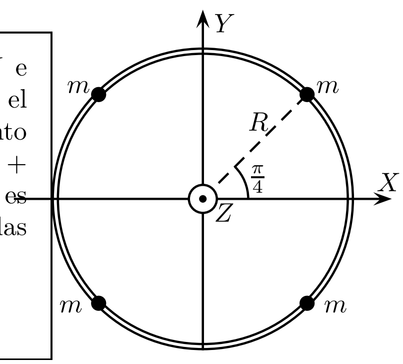
( ) $I_x = I_y = I_z = 4mR^2$;

(×) $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{5}{2}mR^2$;

( ) Ninguna de las anteriores.

Solución: El momento de inercia alrededor del eje X e Y son iguales por simetría, entonces, $I_x = I_y$. Usando el teorema de los ejes perpendiculares resulta que el momento de inercia alrededor del eje I_z viene dado por $I_z = I_x + I_y = 2I_x \Rightarrow I_x = \frac{1}{2}I_z$. Luego, el momento de inercia I_z es obtenido por la suma de los momentos de inercia de las partícula más el aro, esto es,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{2}\left(4 \cdot mR^2 + mR^2\right) = \tfrac{5}{2}mR^2$$



2. (3 puntos) Un niño (ideal) con sus dos brazos extendidos posee una mancuerna, de masa $3m$, en cada mano. La longitud inicial de separación entre ambas mancuernas es 6ℓ. El niño se encuentra sobre una plataforma, con momento de inercia $I = 6m\ell^2$, que gira con velocidad angular $\vec{\omega}_0$ tal como se indica en la figura adjunta. El niño contrae sus brazos hasta que las mancuernas se encuentran sobre el eje de rotación, suponga que se desprecia la distribución de masa del niño. La velocidad angular del niño es:

(×) $10\vec{\omega}_0$;

( ) $9\vec{\omega}_0$;

( ) $37\vec{\omega}_0$;

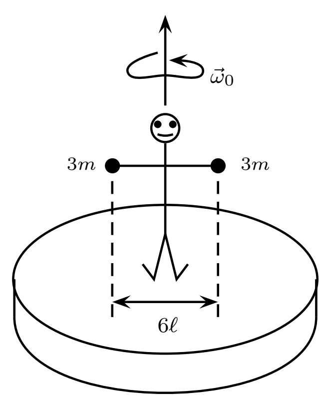
( ) $36\vec{\omega}_0$;

( ) Ningu...

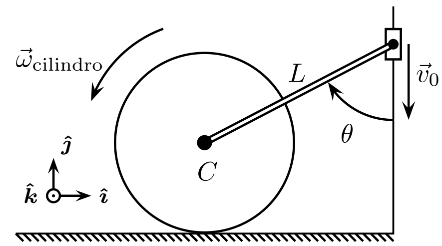
Solución: Puesto que la fuerza ejercida por el niño son internas y el movimiento se realiza simultáneamente, entonces, no se producen torques externos; con lo cual se conserva el momento angular. De esta manera, la velocidad angular cambia si se produce un cambio en distribución de masa, como las mancuernas son llevadas al eje de rotación se reduce el momento de inercia del sistema provocando un aumento de la rapidez angular. Planteando esta ley de conservación se tiene que;

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_f \Rightarrow I_0\vec{\omega}_o = I_f\vec{\omega}_f \Rightarrow \vec{\omega}_f = \frac{I_0}{I_f}\vec{\omega}_0 = \frac{2 \cdot 3m(3\ell)^2 + 6m\ell^2}{6m\ell^2}\vec{\omega}_0$$

$$\vec{\omega}_f = \frac{60m\ell^2}{6m\ell^2}\vec{\omega}_0 = 10\,\vec{\omega}_0$$



Planteamiento A: Considere un cilindro de radio R que posee en su centro de masa un pivote por el cual se sujeta a uno de los extremos de una barra de longitud L, el extremo opuesto de la barra se encuentra articulado a una corredera o collarín, el cual puede moverse verticalmente, ver figura adjunta. Para en el instante de tiempo dibujado considere que la barra forma un ángulo θ con la pared y que el collarín se mueve con velocidad $\vec{v}_0$ descendente. Además, el cilindro rueda sin deslizar en todo momento. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes preguntas:



3. (2 puntos) El vector de velocidad angular de la barra, para el momento indicado, viene dado por:

( ) $+\frac{v_0}{R}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
( ) $-\frac{v_0}{R}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
(×) $-\frac{v_0}{L\,\text{sen}(\theta)}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
( ) $+\frac{v_0}{L\cos(\theta)}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
( ) Ninguna..

Solución: Considerando que la corredera se mueve verticalmente con una coordenada $y = R + L\cos(\theta)$. Al derivar esta posición y tener en cuenta que $\dot{y} = -v_0$ se obtiene la velocidad angular, esto es,

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R + L\cos(\theta)\right) = L(-\sin(\theta))\dot{\theta} \Rightarrow \ \dot{\theta} = -\frac{\dot{y}}{L\sin(\theta)} = -\frac{-v_0}{L\sin(\theta)} = \frac{v_0}{L\sin(\theta)}$$

$$\therefore\ \omega_{\text{barra}} \equiv \dot{\theta} = \frac{v_0}{L\sin(\theta)} \circlearrowright \Rightarrow\ \vec{\omega}_{\text{barra}} = -\omega_{\text{barra}}\hat{k}$$

La posición angular de la barra θ crece a medida que el punto A desciende; por ello la barra rota en sentido horario y el vector velocidad angular apunta entrando al plano del papel.

4. (3 puntos) El vector de velocidad angular del cilindro, para el momento indicado, viene dado por:

( ) $+\frac{v_0}{R}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
( ) $-\frac{v_0}{R}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
( ) $-\frac{v_0\cos(\theta)}{R\sin(\theta)}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
(×) $+\frac{v_0\cos(\theta)}{R\sin(\theta)}\,\hat{\boldsymbol{k}}$;
( ) Ninguna..

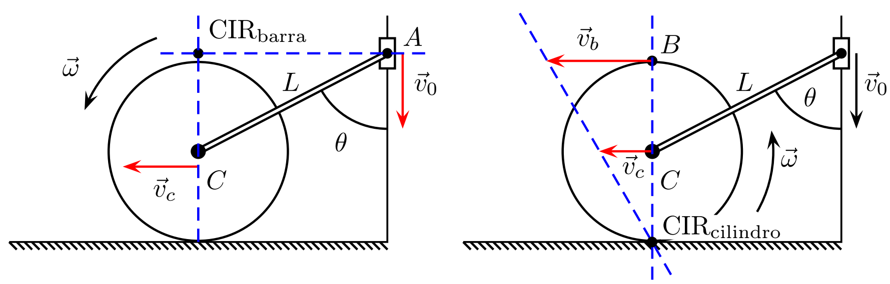
Solución: El centro C del cilindro está localizado en la coordenada $x_c = -L\sin(\theta)$, derivando respecto al tiempo esta cantidad se tiene la velocidad de dicho punto,

$$\dot{x}_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-L\sin(\theta)\right) = -L(\cos(\theta))\dot{\theta} = -L\cos(\theta)\frac{v_0}{L\sin(\theta)} \Rightarrow\ \vec{V}_c = \dot{x}_c\hat{\imath} = -v_0\cot(\theta)\hat{\imath}$$

Luego usando la condición de rodadura, se tiene que el centro de cilindro rota instantáneamente alrededdor del punto más bajo de la rueda, con lo cual,

$$V_c = \omega_{\text{cilindro}}R \Rightarrow\ \omega_{\text{cilindro}} = \frac{V_c}{R} = \frac{v_0\cot(\theta)}{R} \circlearrowleft \Rightarrow\ \vec{\omega}_{\text{cilindro}} = \omega_{\text{cilindro}}\hat{k}$$

<u>Otra forma de resolverse</u>



Solución: Para ubicar el centro instantáneo de rotación asociado a la barra bastará con identificar que el movimiento de los puntos A y C son no colineales; con ello se traza sendas rectas perpendiculares a los vectores velocidad y la intercepción de dicha rectas ubica el CIR$_{\text{barra}}$. Luego, para ubicar el centro instantáneo de rotación asociado al cilindro bastará con identificar que el movimiento de los puntos B y C son colineales, con ello se traza sendas rectas perpendiculares a los vectores velocidad y una recta que pase por la punta de dichos vectores; así la intercepción de dicha rectas ubica el CIR$_{\text{cilindro}}$. Finalmente, se tiene que CIR$_{\text{barra}}$ está por arriba de C a una distancia de $L\cos\theta$ y el CIR$_{\text{cilindro}}$ está por debajo de C a una distancia de R;.

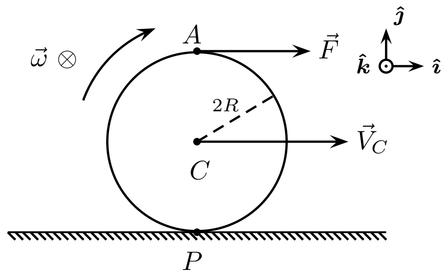
Respuesta de la pregunta 3 y 4. Usando el CIR$_{\text{barra}}$ y considerando que la velocidad del punto A es $\vec{v}_0$ se tiene que la rapidez de dicho punto viene dada por:

$$v_a = \omega_{\text{barra}}R_{\text{A/CIR}_{\text{barra}}}\ \Rightarrow\ v_0 = \omega_{\text{barra}}L\sin(\theta)\ \Rightarrow\ \omega_{\text{barra}} = \frac{v_0}{L\sin(\theta)}\ \therefore\ \vec{\omega}_{\text{barra}} = -\omega_{\text{barra}}\hat{k}$$

Tomando el punto C, tanto para la barra como para el cilindro, se tiene que,

$$V_C^{\text{cilindro}} = V_C^{\text{disco}} \Rightarrow \omega_{\text{cilindro}} R_{\text{C/CIR}_{\text{cilindro}}} = \omega_{\text{barra}} R_{\text{C/CIR}_{\text{barra}}} \Rightarrow \omega_{\text{cilindro}} R = \omega_{\text{barra}} L\cos(\theta)$$
$$\Rightarrow \omega_{\text{cilindro}} R = \omega_{\text{barra}} L\cos(\theta) \Rightarrow \omega_{\text{cilindro}} = \frac{L\cos(\theta)}{R}\omega_{\text{barra}} = \frac{L\cos(\theta)}{R}\frac{v_0}{L\sin(\theta)} = \frac{v_0\cos(\theta)}{R\sin(\theta)}$$

Planteamiento B: Un cilindro de radio $2R$ y masa M, rueda deslizando sobre una plataforma horizontal, de forma tal que la rapidez de su centro de masa V_C es menor que $2\omega R$ en todo momento; donde ω es la rapidez angular de la rueda (desconocida). Al cilindro se le aplica una fuerza horizontal constante $\vec{F}$ en el punto A cuya intensidad es el doble que la fuerza gravitacional ejercida sobre el cilindro ("peso del cilindro"), además se conocen los coeficientes de fricción dinámica y estática entre la superficie del cilindro y el suelo, los cuales vienen dados por $\mu_d = \frac{1}{2}$ y $\mu_e = \frac{1}{6}$, respectivamente. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes preguntas:



5. (3 puntos) El vector fuerza de roce que actúa sobre el cilindro viene dado por:
   - (×) $+\frac{Mg}{2}\hat{\imath}$;
   - ( ) $-\frac{Mg}{6}\hat{\imath}$;
   - ( ) $-\frac{Mg}{2}\hat{\imath}$;
   - ( ) $+\frac{Mg}{6}\hat{\imath}$;
   - ( ) Ningu..

   Solución: Teniendo en cuenta que el cilindro desliza respecto a la superficie, puesto que el movimiento del punto P está orientado antiparalelamente al versor $\hat{\imath}$, resulta que la fuerza de roce es dinámica y se opone al movimiento del punto P, resulta que la orientación de dicha fuerza es paralela al versor $\hat{\imath}$. En concreto,

   $$\vec{fr}_d = \mu_d N\hat{\imath} = \frac{1}{2}Mg\hat{\imath} = \frac{Mg}{2}\hat{\imath}$$

6. (2 puntos) El vector aceleración angular del disco viene dada por:
   - ( ) $+\frac{13g}{6R}\hat{\boldsymbol{k}}$;
   - ( ) $-\frac{11g}{6R}\hat{\boldsymbol{k}}$;
   - ( ) $+\frac{5g}{2R}\hat{\boldsymbol{k}}$;
   - (×) $-\frac{3g}{2R}\hat{\boldsymbol{k}}$;
   - ( ) Ning...

   Solución: Teniendo en cuenta que la fuerza de roce se opone al movimiento del punto P, resulta que la orientación de dicha fuerza es paralelo al versor $\hat{\imath}$. Aplicando la ecuación de Euler (2da ley de Newton para rotaciones) respecto al punto C, tenemos que:

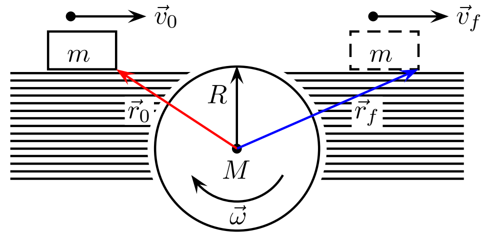
   $$\vec{\tau}_{fr_d} + \vec{\tau}_F = I_{\text{disco}}\vec{\alpha} \Rightarrow 2Rfr_d - 2RF = \tfrac{1}{2}M(2R)^2\alpha_z$$
   $$\alpha_z = \frac{2R(fr_d - F)}{2MR^2} = \frac{fr_d - F}{MR} = \frac{\mu_d N - 2Mg}{MR} = \frac{\frac{1}{2}Mg - 2Mg}{MR} = \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{g}{R} = -\frac{3g}{2R}$$

   De esta manera, la aceleración angular es $\vec{\alpha} = \alpha_z\hat{k}$, orientada de forma que entra al plano del papel mientras que la velocidad angular es antiparalela; con lo cual el movimiento angular es desacelerado o retardado.

7. (2 puntos) La aceleración del centro de masa viene dada por:
   - ( ) $-\frac{3g}{2}\hat{\imath}$;
   - ( ) $+\frac{2g}{3}\hat{\imath}$;
   - ( ) $+\frac{g}{3}\hat{\imath}$;
   - (×) $+\frac{5g}{2}\hat{\imath}$;
   - ( ) Ning...

   Solución: Basta aplicar la 2da ley de Newton en la dirección horizontal, teniendo en cuenta las orientaciones de la fuerza aplicada y la fuerza de roce dinámico, esto es,

   $$\vec{F} + \vec{fr}_d = M\vec{a}_{\text{cm}} \Rightarrow 2Mg + \frac{Mg}{2} = Ma_{\text{cm}} \therefore a_{\text{cm}} = \frac{5g}{2}$$



Planteamiento C: Un paquete de masa m y altura despreciable se mueve a la derecha sobre una superficie horizontal sin fricción, con una velocidad constante $\vec{v}_0$. El paquete pasa sobre un rodillo cilíndrico que encuentra inicialmente en reposo y está fijo sobre un eje, al comienzo el paquete desliza pero la fricción es lo suficiente para el deslizamiento cese y el bloque no deslice respecto a cilindro. El cilindro presenta radio R, masa $M = 3m$ y su eje se mantiene fijo. Sobre la base de este planteamiento, responda las siguientes preguntas:

8. (2 puntos) La rapidez angular del cilindro, después que el paquete ha pasado el cilindro, es:

( ) $\frac{v_0}{R}$;
( ) $\frac{2v_0}{3R}$;
(×) $\frac{2v_0}{5R}$;
( ) $\frac{2v_0}{R}$;
( ) Nin...

Solución: El momento angular del sistema cilindro+bloque se conserva cuando se toma como origen en el centro del cilindro, ya que desde dicho punto ninguna fuerza aplicada sobre el bloque y sobre el cilindro (normal, peso y roce) ejercen torque. Además, como el bloque no desliza respecto al cilindro tendremos la condición de rodadura $v_f = \omega R$, si aplicamos la conservación del momento angular tenemos,

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_f \Rightarrow \vec{r}_0 \times (m\vec{v}_0) = \vec{r}_0 \times (m\vec{v}_0) + I_{\text{cilindro}}\vec{\omega} \Rightarrow Rmv_0 = \tfrac{1}{2}MR^2\omega + Rmv_f$$

$$\Rightarrow mv_0 = \tfrac{1}{2}(3m)R\omega + m\omega R \Rightarrow v_0 = \tfrac{5}{2}R\omega \Rightarrow \omega = \frac{2v_0}{5R}$$

9. (2 puntos) Si $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ es la energía cinética inicial del sistema paquete más cilindro, entonces, la energía cinética final del sistema será:

(×) $\frac{2}{5}K_0$;
( ) $\frac{10}{9}K_0$;
( ) $\frac{5}{2}K_0$;
( ) $10K_0$;
( ) Nini...

Solución: La energía cinética final del sistema cilindro+bloque es,

$$K_f = \frac{1}{2}I_{\text{cilindro}}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(3m)R^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{5}{4}m\omega^2R^2$$

Puesto que la rapidez angular es $\frac{2v_0}{5R}$

$$K_f = \frac{5}{4}m\left(\frac{2v_0}{5R}\right)^2R^2 = \frac{1}{5}mv_0^2 = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = \frac{2}{5}K_0$$

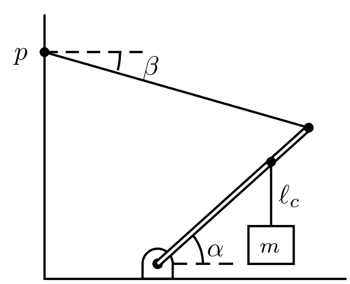
10. (4 puntos) Un satélite de masa m describe una orbita elíptica de excentricidad $\varepsilon = 1/2$, en torno a la tierra, ésta última se considera estacionaria en uno de los focos de la elipse descrita por el satélite. Considere que M es la masa de la tierra y G es la constante de gravitación universal. Si se le ha suministrado una energía $E < 0\,\text{J}$, entonces la magnitud del momento angular del satélite es:

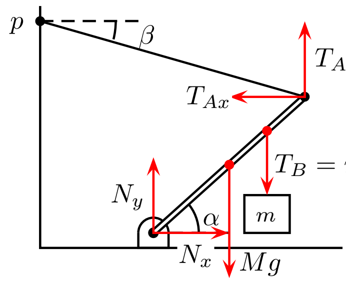
( ) $\frac{GMm}{4}\sqrt{\frac{3m}{|E|}}$;
( ) $\frac{GMm}{2}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$;
(×) $\frac{GMm}{2}\sqrt{\frac{3m}{2|E|}}$;
( ) $\frac{GMm}{2}\sqrt{\frac{3m}{|E|}}$;
( ) Ninguna de

Solución: La energía mecánica del satélite está relacionada con la excentricidad y el momento angular por medio de la relación,

$$|E| = \frac{G^2M^2}{2L_0^2}(1-\varepsilon^2) \Rightarrow L_0 = \sqrt{\frac{G^2M^2}{2|E|}(1-\varepsilon^2)} = \sqrt{\frac{G^2M^2m^3}{8|E|}} = \frac{GMm}{2}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

11. (5 puntos) Una viga de masa M y longitud L se encuentra apoyada sobre una visagra formando un ángulo $\alpha = 45^{\text{o}}$, mientras que el extremo superior está sujeto por medio de una guaya conectada a la pared en el punto p. La guaya, considerada ideal, se encuentra tensa y forma un ángulo $\beta = 30^{\text{o}}$ con la horizontal, tal como se muestra en la figura. A una distancia $\frac{1}{3}L$ del extremo superior de la viga cuelga por medio de una cuerda ideal de longitud ℓ_c un bloque de masa $m = \frac{M}{4}$. El sistema se mantiene en equilibrio estático. Calcule la magnitud de la tensión en la cuerda.





Calculemos las proyecciones de la fuerza y los brazos correspondientes a dicha fuerza

$T_{Ax} = -T_A\cos(\beta) = -T_A\cos(30^{\text{o}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}T_A$

$b_{Ax} = L\sin(\alpha) = L\sin(45^{\text{o}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}L$

$T_{Ay} = T_A\sin(\beta) = T_A\sin(30^{\text{o}}) = \frac{1}{2}T_A$

$b_{Ay} = L\cos(\alpha) = L\cos(45^{\text{o}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}L$

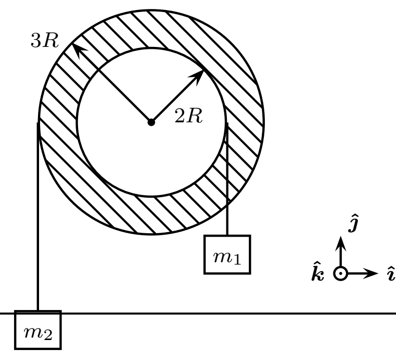
$T_B = mg = \frac{Mg}{4}$

$b_{By} = \frac{2}{3}L\cos(\alpha) = \frac{2}{3}L\cos(45^{\text{o}}) = \frac{\sqrt{2}}{3}L$

Solución: Basta aplicar la ecuación de Euler (2da ley de Newton para rotaciones) respecto a la visagra para obtener la tensión T_A, esto es,

$$\vec{\tau}_A + \vec{\tau}_B + \vec{\tau}_{Mg} = \vec{0} \Rightarrow b_{Ax}|T_{Ax}| + b_{Ay}T_{Ay} - b_{By}T_B - \tfrac{1}{2}L\cos(\alpha)Mg = 0$$
$$\Rightarrow \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}L\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}T_A\right) + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}L\right)\left(\tfrac{1}{2}T_A\right) - \left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}L\right)\left(\tfrac{1}{4}Mg\right) - \tfrac{1}{2}L\tfrac{\sqrt{2}}{2}Mg = 0$$
$$\Rightarrow \tfrac{\sqrt{3}}{4}T_A + \tfrac{1}{4}T_A - \tfrac{1}{12}Mg - \tfrac{1}{4}Mg = 0 \Rightarrow T_A = \frac{4}{3(1+\sqrt{3})}Mg$$

12. Considere una polea de masa $M = 6m$, radio interior $2R$ y radio exterior $3R$, la cual rota respecto a su centro sin fricción. En los radios exterior e interior de la polea se encuentran colgando dos bloques de masas $m_1 = 3m$ y $m_2 = 4m$, respectivamente, mediante cuerdas ideales, tal como se muestra en la figura adjunta. Sabiendo que el sistema parte del reposo y que el bloque m_1 ha ascendido una altura h, respecto de su posición inicial, responda:



(a) (4 puntos) Demuestre que el momento de inercia de la rueda, respecto al centro de masa, es $I_M = \frac{13}{2}MR^2$. Suponga que la masa se encuentra uniformemente distribuida.

Solución: La densidad de masa de la polea viene dada por $\sigma = \frac{M}{5\pi R^2}$.
Restando el momento de inercia de un cilindro de radio $3R$ con el cilindro de radio $2R$ se tiene que

$$I = \tfrac{1}{2}(\sigma\pi(3R)^2)(3R)^2 - \tfrac{1}{2}(\sigma\pi(2R)^2)(2R)^2 = \tfrac{81}{2}\sigma\pi R^2 - \tfrac{16}{2}\sigma\pi R^2 = \tfrac{65}{2}\sigma\pi R^2 = \tfrac{65}{2}\left(\tfrac{M}{5\pi R^2}\right)\pi R^2 = \tfrac{13}{2}MR^2$$

Otra forma es integrando el momento de inercia de un aro, con lo cual se obtiene el mismo resultado

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2\sigma \mathrm{d}A = \int_{2R}^{3R} r^2\sigma(2\pi r\mathrm{d}r) = 2\pi\sigma\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=2R}^{r=3R} = \tfrac{1}{2}\pi\sigma\left[81R^4 - 16R^4\right] = \tfrac{65}{2}\sigma\pi R^4 = \tfrac{13}{2}MR^2$$

(b) (5 puntos) Encuentre la rapidez angular de la polea, para el momento en que la masa m_1 ha ascendido una altura h.

Solución: En primer lugar, busquemos los vínculos cinemático necesarios como es la relación entre la velocidades tangenciales con la rapidez angular, así como también la relación entre los desplazamientos de cada masa. En tal sentido, las velocidades verticales de cada masa en términos de la rapidez angular y la relación entre los desplazamientos de cada masa se obtienen de la siguiente forma

$$\begin{cases} v_{1y} = \omega 2R = 2\omega R \\ v_{2y} = -\omega 3R = -3\omega R \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{2y}}{v_{1y}} = \frac{-3\omega R}{2\omega R} = -\frac{3}{2} \Rightarrow v_{2y} = -\tfrac{3}{2}v_{1y} \therefore \Delta y_2 = -\tfrac{3}{2}\Delta y_1$$

Ahora, aplicando la conservación de la energía mecánica se llega a la siguiente expresión

$$E_0 = E_f$$
$$K_{\text{polea},0} + K_{1,0} + +K_{2,0} + U_{\text{polea},0} + U_{1,0} + U_{2,0} = K_{\text{polea},0} + K_{1,0} + K_{2,0} + U_{\text{polea},0} + U_{1,0} + U_{2,0}$$
$$\cancel{Mgy_p} + m_1gy_{1,0} + m_2gy_{1,0} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_1v_{1,y}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2,y}^2 + \cancel{Mgy_p} + m_1gy_1 + m_2gy_2$$
$$-m_1g(y_1 - y_{1,0}) - m_2g(y_2 - y_{1,0}) = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_1 4\omega^2R^2 + \tfrac{1}{2}m_2 9\omega R^2$$
$$-m_1g\Delta y_1 - m_2g\Delta y_2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{I}{R^2} + 4m_1 + 9m_2\right)\omega^2R^2$$
$$-m_1g\Delta y_1 - m_2g\left(-\tfrac{3}{2}\Delta y_1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{I}{R^2} + 4m_1 + 9m_2\right)\omega^2R^2$$
$$\omega^2 = \frac{(3m_2 - 2m_1)g\Delta y_1}{\left(4m_1 + 9m_2 + \frac{I}{R^2}\right)R^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{(3m_2 - 2m_1)g\Delta y_1}{\left(4m_1 + 9m_2 + \frac{I}{R^2}\right)R^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{29R^2}}$$

Donde se ha teniendo en cuenta que $m_1 = 3m$, $m_2 = 4m$, $M = 6m$, $I = \frac{13}{2}MR^2$ y $\Delta y_1 = h$.

(c) (5 puntos) Encuentre la aceleración angular de la polea.

Solución: Derivando la energía mecánica y considerando que el sistema es conservativo (potencia cero), resulta que

$$
\begin{gathered}
E = K_{\text{polea},0} + K_{1,0} + +K_{2,0} + U_{\text{polea},0} + U_{1,0} + U_{2,0} \\
E = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + Mgy_p + m_1gy_1 + m_2gy_1 \\
\cancelto{0}{\dot{E}} = I\omega\alpha + m_1v_{1,y}a_{1,y} + m_2v_{2,y}a_{2,y} + Mg\cancelto{0}{y_p} + m_1gv_{1,y} + m_2gy_{2,y} \\
0 = I\omega\alpha + m_1(2\omega R)(2\alpha R) + m_2(-3\omega R)(-3\alpha R) + m_1g(2\omega R) + m_2g(-3\omega R) \\
0 = I\omega\alpha + 4m_1\alpha R^2 + 9m_2\alpha R^2 + 2m_1gR - 3m_2gR \\
\alpha = \frac{(3m_2 - 2m_1)g}{\left(4m_1 + 9m_2 + \frac{I}{R^2}\right)R} = \frac{2g}{29R}
\end{gathered}
$$

Donde se ha teniendo en cuenta que $m_1 = 3m$, $m_2 = 4m$, $M = 6m$, $I = \frac{13}{2}MR^2$ y $\Delta y_1 = h$.