APLICACIÓN REGLAS DE SIMPSON 3/8 Y 1/3 PARA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Ejercicio: Resolución de Integrales Definidas usando la Regla de Simpson 3/8

En el ámbito de la **Ingeniería Química**, el cálculo numérico de integrales definidas es crucial para analizar ecuaciones de tasas de reacción, diseño de reactores y procesos que involucran la transferencia de materia y energía. En este ejercicio, utilizaremos el **Método de Simpson 3/8**, que es una variante de la regla de integración numérica adecuada para intervalos cuya partición es divisible por 3.

1. Definición del Método de Simpson 3/8

La **Regla de Simpson 3/8** es una extensión de la regla de Simpson tradicional, donde la partición del intervalo se divide en múltiplos de 3. Su fórmula para aproximar la integral de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right]$$

Donde:

- $h = \frac{b-a}{3}$ es el paso de integración,
- a y b son los límites inferior y superior del intervalo de integración,
- $f(x)$ es la función a integrar.

2. Elección de las Condiciones Iniciales

En este caso, la función a integrar es:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

El intervalo de integración es $[1, 2]$. El primer paso es dividir este intervalo en tres partes iguales, ya que la partición debe ser divisible por 3. Entonces, $h = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$.

- $x_0 = 1$,
- $x_1 = 1 + h = \frac{4}{3}$,
- $x_2 = 1 + 2h = \frac{5}{3}$,
- $x_3 = 2$.

3. Ejecución del Algoritmo (Iteraciones)

Usando la fórmula de Simpson 3/8, realizamos la integración numérica. Sustituyendo los valores de la función en los puntos correspondientes:

Por lo tanto, los puntos de evaluación son:

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 1 + \frac{1}{3} = 1.333\ldots$
- $x_2 = 1 + \frac{2}{3} = 1.666\ldots$
- $x_3 = 2$

A continuación, calculamos $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ para cada uno de estos puntos:

- $f(x_0) = \frac{e^{-1}}{1} \approx 0.367879441$
- $f(x_1) = \frac{e^{-1.333\ldots}}{1.333\ldots} \approx 0.198436454$
- $f(x_2) = \frac{e^{-1.666\ldots}}{1.666\ldots} \approx 0.113893872$
- $f(x_3) = \frac{e^{-2}}{2} \approx 0.067668595$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Simpson 3/8, tenemos:

$$\frac{2-1}{8}\left[0.367879441 + 3(0.198436454) + 3(0.113893872) + 0.067668595\right]$$

Realizamos las operaciones:

$$= 0.125\left[0.367879441 + 0.595309362 + 0.341681616 + 0.067668595\right]$$

$$= 0.125 \times 1.372539014$$

$$= 0.171567377$$

Por lo tanto, la integral aproximada es:

$$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\,dx \approx 0.171567$$

Este resultado es una aproximación obtenida mediante la **Regla de Simpson 3/8.** El error real es relativamente pequeño, ya que la función es suave en el intervalo considerado. Este tipo de aproximación es comúnmente utilizada en **Ingeniería Química** y **Procesos Industriales**, especialmente en el análisis de sistemas y procesos de transferencia de calor y materia, donde se requieren aproximaciones numéricas precisas para modelar fenómenos complejos."

1. Definición del método y sus ecuaciones (Regla de Simpson 1/3):

La **Regla de Simpson 1/3** es un método de integración numérica que se utiliza para aproximar el valor de una integral definida. Esta regla es especialmente útil cuando se requiere una alta precisión. El método se basa en aproximar la integral mediante un polinomio de segundo grado (una parábola) que pasa por los puntos de la función a integrar.

La fórmula de la Regla de Simpson 1/3 para un intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Donde:

- $h = \frac{b-a}{2}$ es el tamaño del subintervalo.
- a y b son los límites inferior y superior del intervalo de integración.
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ es el valor de la función evaluada en el punto medio del intervalo.

Este método tiene una precisión muy alta para funciones suaves, ya que la aproximación de la integral se realiza utilizando un polinomio de segundo grado.

2. Elección de las condiciones iniciales:

Para este ejercicio, la integral que queremos aproximar es:

$$I = \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, dx$$

Este es un caso interesante porque la función no está definida en $x = 0$, pero podemos tratar este caso usando un límite cuando $x \to 0$. De todas maneras, este tipo de funciones puede ser tratada con un algoritmo adecuado, y en este caso la función es continua y suficientemente suave para que Simpson 1/3 funcione bien.

Los límites de integración son:

- $a = -\sqrt{\pi}$
- $b = \sqrt{\pi}$

La integral se calculará para estos valores de a y b, utilizando la regla de Simpson 1/3.

3. Ejecución repetida del algoritmo:

Iteración 1:

Comenzamos calculando el tamaño del subintervalo h:

$$h = \frac{\sqrt{\pi} - (-\sqrt{\pi})}{2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Luego, evaluamos la función en los puntos requeridos:

- $f(a) = f(-\sqrt{\pi})$
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0)$
- $f(b) = f(\sqrt{\pi})$

Para este caso:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

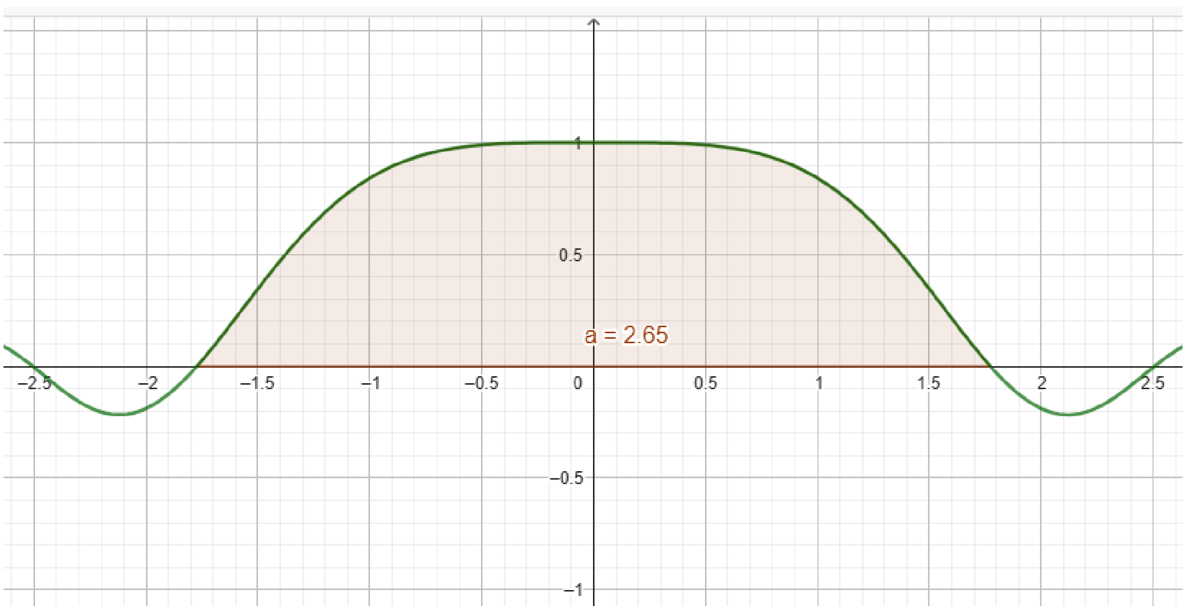
Evaluamos la función en estos puntos:

1. $f(-\sqrt{\pi}) = \frac{\sin((-\sqrt{\pi})^2)}{(-\sqrt{\pi})^2} = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$
2. $f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$ (Se puede calcular mediante la regla de L'Hopital)
3. $f(\sqrt{\pi}) = \frac{\sin((\sqrt{\pi})^2)}{(\sqrt{\pi})^2} = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$

Aplicando la fórmula de Simpson 1/3:

$$I \approx \frac{\sqrt{\pi}}{3}\left[0+4(1)+0\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{3}\times 4=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

En el contexto de la **Ingeniería Química** y el **Procesamiento de Señales**, este tipo de integrales se utilizan para calcular áreas bajo las curvas que representan señales en el dominio del tiempo o la frecuencia. Estas áreas son cruciales en el análisis de sistemas de control, diseño de reactores y otros procesos que dependen de la integración de tasas de cambio. La precisión de este tipo de cálculos es esencial, ya que errores en la integración pueden llevar a fallos en el diseño o la operación eficiente de un sistema. La capacidad de realizar estos cálculos numéricos con métodos como la Regla de Simpson 1/3 permite modelar y analizar sistemas de forma precisa, garantizando la estabilidad y eficiencia del diseño en ingeniería química y en sistemas de control.



EJERCICIOS PROPUESTOS

EXC 1

Planteamiento del ejercicio:

Objetivo:

El objetivo del ejercicio es calcular la integral definida de la función $f(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

en el intervalo [3/10,3/5]

utilizando la **Regla de Simpson 3/8**. Este ejercicio tiene aplicaciones en el cálculo del área bajo curvas, un concepto clave en economía para modelar diversas situaciones como la oferta y la demanda, o incluso para realizar evaluaciones de opciones financieras.

Instrucciones:

1. **Definición de la Regla de Simpson 3/8**: La **Regla de Simpson 3/8** es un método numérico de integración que se utiliza cuando el número de subintervalos es múltiplo de 3. Esta regla aproxima la integral de una función mediante una combinación de evaluaciones de la función en los puntos extremos del intervalo, y en puntos intermedios, de manera que se utiliza un polinomio de tercer grado.

La fórmula de la Regla de Simpson 3/8 para un intervalo $[a, b]$ y 3 subintervalos es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

Donde:

- $h = \frac{b-a}{3}$ es el tamaño de cada subintervalo.
- $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, x_3 = b.$

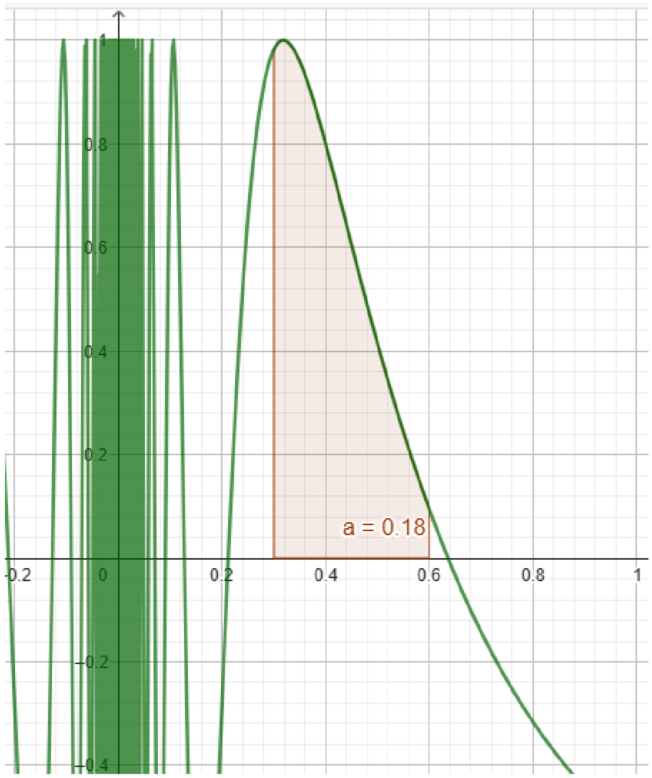
2. **Funciones a integrar:** La función que vamos a integrar es:

$$f(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Este tipo de funciones puede ser encontrada en análisis económicos donde las curvas de oferta y demanda no son lineales y requieren aproximaciones numéricas.

3. Intervalo de integración: El intervalo dado es [3/10,3/5]. El primer paso es calcular h, el tamaño del subintervalo, usando la fórmula de la Regla de Simpson 3/8

4. **Iteraciones:** Después de calcular h, se evalúa la función en los puntos x_0, x_1, x_2, x_3, y se aplica la fórmula de la Regla de Simpson 3/8.



El cálculo de la integral mediante el método de Simpson 3/8 en el contexto económico tiene aplicaciones muy relevantes. Por ejemplo, en el análisis de **curvas de demanda y oferta**, podemos calcular el área bajo la curva para encontrar el **exceso de oferta o demanda**, lo que es crucial para entender el comportamiento del mercado.

De igual manera, este tipo de cálculos se utiliza en la **evaluación de opciones financieras** y otros modelos económicos que requieren una integración numérica precisa debido a las funciones no lineales involucradas. Por ejemplo, en la valoración de opciones y otros derivados financieros, donde las variables involucradas están modeladas por funciones complicadas, el uso de métodos como la Regla de Simpson 3/8 permite obtener resultados precisos y de bajo costo computacional, facilitando la toma de decisiones en situaciones económicas.

En resumen, este ejercicio les permitirá entender cómo las herramientas numéricas, como la Regla de Simpson 3/8, pueden ser aplicadas en la economía para realizar cálculos precisos y eficientes, fundamentales para la toma de decisiones financieras y el análisis de mercado.

EXC 2

Enunciado del ejercicio:

Problema:

En Física, el cálculo de integrales es una herramienta fundamental para modelar fenómenos en áreas como la dinámica y la termodinámica, donde se deben calcular magnitudes como el trabajo, la energía o el área bajo las curvas de distribución. En este ejercicio, aplicaremos la **Regla de Simpson 1/3** para aproximar la integral definida de la siguiente función en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)}}{x+1}$$

La Regla de Simpson 1/3 es especialmente útil cuando necesitas una alta precisión en la aproximación de integrales definidas. Este método nos permitirá estimar el valor de la integral con una precisión mucho mayor que otros métodos, como el de los trapecios o el de los rectángulos.

Pasos para resolver el ejercicio:

1. **Definir el método y su ecuación:**

   La **Regla de Simpson 1/3** es un método de aproximación para integrales que utiliza los valores de la función en tres puntos dentro del intervalo de integración. La fórmula general de la Regla de Simpson 1/3 es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

2. **Elección de las condiciones iniciales:** El intervalo de integración es $[0, \frac{\pi}{2}]$. Los puntos de evaluación serán:

   - $a = 0$
   - $b = \frac{\pi}{2}$
   - El punto medio será $\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{4}$

Conclusión: Significado físico de los resultados

En el contexto de la **Física**, esta integral puede representar, por ejemplo, un cálculo de **trabajo realizado por una fuerza variable** a lo largo de un intervalo o la **energía almacenada en un sistema**. La función que estamos integrando, $\frac{\sqrt{\cos(x)}}{x+1}$, es un ejemplo de una función que podría describir la **distribución de energía** en un sistema físico no lineal, donde la relación entre las variables x y $f(x)$ no es simplemente proporcional.

El resultado de esta integral será un valor que puede interpretarse como el **trabajo total** realizado por una fuerza o la **energía total** en el intervalo de tiempo considerado. La precisión obtenida mediante la Regla de Simpson 1/3 es importante, ya que en aplicaciones de **dinámica y termodinámica**, como el análisis de máquinas térmicas, circuitos eléctricos o procesos químicos, la exactitud en el cálculo de áreas bajo las curvas de distribución o trabajo es crucial para la correcta evaluación de la eficiencia o el comportamiento del sistema.
Este tipo de integrales se utiliza frecuentemente en **simulaciones computacionales** y **modelos matemáticos** para resolver ecuaciones diferenciales que describen sistemas dinámicos, como el comportamiento de fluidos, gases, o la propagación de calor en materiales.