Métodos Numéricos Abiertos para el Cálculo de Raíces

1. Importancia de los Métodos Numéricos

En la práctica, muchas ecuaciones no pueden resolverse mediante métodos algebraicos tradicionales, especialmente cuando:

- Son ecuaciones trascendentales (combinan polinomios, trigonometría, exponenciales, etc.).
- Se trata de polinomios de grado superior a 4 (donde no siempre hay fórmulas cerradas para las raíces).
- Se necesita precisión numérica en problemas aplicados.

Los **métodos numéricos abiertos** (como la Iteración Simple, la Secante y el Método de Muller) permiten aproximar raíces con rapidez y precisión. Estos métodos no requieren un intervalo inicial donde la raíz esté garantizada, pero dependen de una buena elección de los valores iniciales.

Los métodos abiertos tienen aplicaciones en ingeniería, física y ciencias computacionales, como la optimización de trayectorias, simulaciones de sistemas dinámicos y procesamiento de señales.

---

2. Comparativa: Iteración Simple, Secante y Método de Muller

Aspecto	Iteración Simple	Método de la Secante	Método de Muller
Principio	Reescribir $f(x)=0$ como $x=g(x)$.	Utiliza una aproximación lineal entre dos puntos.	Aproxima $f(x)$ con un polinomio cuadrático.
Requisitos Iniciales	Punto inicial x_0.	Dos puntos iniciales x_0, x_1.	Tres puntos iniciales x_0, x_1, x_2.
Velocidad de Convergencia	Lineal, lenta.	Superlineal, más rápida que la Iteración Simple.	Superlineal o cuadrática, muy rápida.
Garantía de Convergencia	No garantizada; depende de $g(x)$.	No garantizada; puede fallar si $f(x_1) \approx f(x_0)$.	No garantizada; requiere $f(x)$ diferenciable.
Cálculo de Derivadas	No requiere.	[illegible] requiere.	No requiere explícitamente.

Simplicidad	Fácil de implementar.	Moderadamente fácil de implementar.	Más complejo, pero robusto.
Aplicaciones Típicas	Funciones simples y bien definidas.	Funciones donde derivadas son costosas.	Funciones complicadas, raíces múltiples.

Velocidades de Convergencia:

1. **Iteración Simple:**
   - Convergencia lenta (lineal). La mejora por iteración es baja y depende de la proximidad inicial y la elección adecuada de $g(x)$.
2. **Método de la Secante:**
   - Convergencia superlineal (1.618 aproximadamente). Mejora con menos iteraciones que la Iteración Simple.
3. **Método de Muller:**
   - Convergencia cuadrática en muchos casos, similar al método de Newton-Raphson. Es el más rápido de los tres si se cumplen sus requisitos.

   - Utiliza interpolación cuadrática, lo que lo hace más robusto en muchos casos, aunque más costoso computacionalmente.

Aspectos Relevantes:

- Los métodos abiertos son rápidos y eficientes, pero no siempre garantizan convergencia.
- Una buena elección de valores iniciales es crucial para el éxito.
- Entre los tres métodos, Muller es el más general, aunque más complejo. La Secante combina simplicidad y rapidez, mientras que la Iteración Simple es la más básica y lenta.

Los métodos abiertos son herramientas fundamentales en métodos numéricos, pero siempre deben complementarse con análisis cuidadosos de las funciones y condiciones iniciales.

Contexto Económico: Oferta y Demanda en un Mercado con Comportamiento No Lineal

En un mercado de bienes esenciales, como la energía o los alimentos básicos, las relaciones entre el precio x y la cantidad demandada/ofertada pueden presentar comportamientos extremos debido a factores como:

1. **Efectos asintóticos en la demanda:** A medida que el precio disminuye, los consumidores pueden llegar a demandar cantidades excesivas, mientras que si el precio aumenta mucho, la demanda puede caer drásticamente.
2. **Puntos de discontinuidad en la oferta:** Si el precio disminuye por debajo de cierto umbral, los productores podrían retirarse completamente del mercado, reduciendo la oferta a cero.

Una función que modela este tipo de relación en el equilibrio entre oferta y demanda es:

$$f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1,$$

donde:

- $f(x)$ representa la diferencia entre la cantidad ofertada y la cantidad demandada en función del precio x.
- El objetivo es encontrar el **precio de equilibrio** (x^*), es decir, el precio donde la oferta iguala a la demanda ($f(x^*) = 0$).

Problema Propuesto

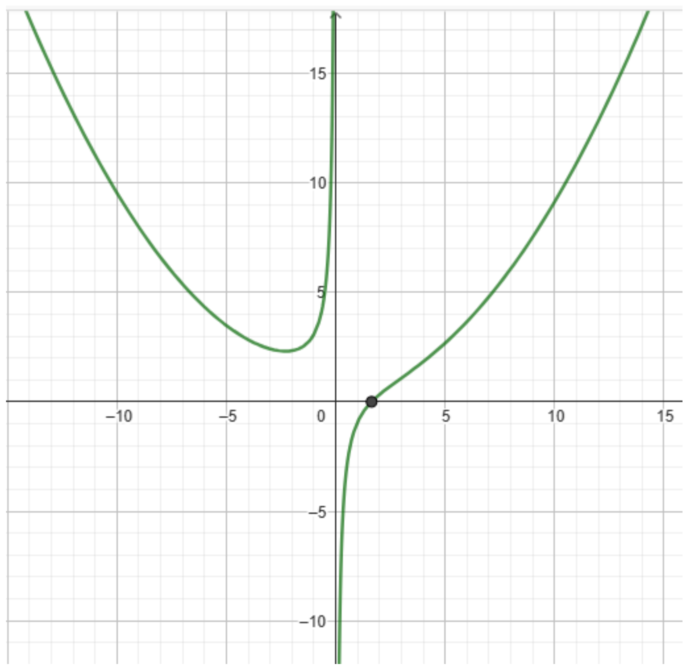
En un mercado de bienes esenciales, se sabe que la relación entre oferta y demanda está dada por:

$$f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1.$$

Enunciado del Problema

1. **Contexto:** Este modelo refleja un mercado donde:

   - Para precios muy bajos ($x \to 0$), la cantidad demandada crece indefinidamente ($-\frac{2}{x}$), y la cantidad ofertada cae por falta de incentivos.
   - Para precios muy altos ($x \to \infty$), la cantidad ofertada domina ($\frac{x^2}{12}$) mientras que la demanda se desploma.



2. **Tarea Principal:** Determine el **precio de equilibrio** x^* (es decir, el precio donde $f(x) = 0$) utilizando un método numérico de su elección (e.g., Iteración Simple, Newton-Raphson o el Método de la Secante).
3. **Verificación:** Compruebe que el valor obtenido satisface $f(x^*) \approx 0$.
4. **Análisis Económico:** Interprete los resultados:

   - ¿Qué significa este precio de equilibrio en términos de comportamiento del mercado?
   - ¿Qué ocurriría si el precio se encuentra por debajo o por encima de este valor?

Detalles Relevantes para el Problema

Propiedades de la Función $f(x)$:

1. **Discontinuidad:** Existe una discontinuidad en $x = 0$ debido al término $-\frac{2}{x}$. Esto significa que el modelo no es aplicable a precios iguales a cero.
2. **Asintótico:**
   - Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$.
   - Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$.

Aplicación Económica del Precio de Equilibrio:

1. Si $x < x^*$:
   - $f(x) < 0$, lo que implica que la demanda supera a la oferta. Esto puede llevar a un aumento de precios en el mercado.
2. Si $x > x^*$:
   - $f(x) > 0$, lo que implica que la oferta supera a la demanda. Esto puede llevar a una caída en los precios.

Importancia del Cálculo Numérico:

El cálculo exacto del precio de equilibrio x^* no es posible algebraicamente debido a la complejidad de la función. Por lo tanto, los métodos numéricos son indispensables para obtener una solución aproximada con precisión deseada.

Interpretación del Resultado

El valor de x^* obtenido representa el precio donde la cantidad ofertada iguala exactamente la cantidad demandada en este mercado, estableciendo el equilibrio económico. Si x^* es razonablemente bajo, podría interpretarse como un mercado competitivo con alta demanda, mientras que un x^* alto podría indicar escasez o costos altos de producción.

Este análisis permite prever y ajustar las políticas de precios en mercados sensibles, contribuyendo a un balance sostenible entre oferta y demanda.

Método de Iteración Simple de Punto Fijo

Descripción del Método

El método de iteración de punto fijo es una técnica numérica utilizada para encontrar las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ al reformularla en la forma $x = g(x)$. Este método requiere que la función $g(x)$ cumpla ciertas condiciones para garantizar la convergencia.

Principio del Método:

1. Reescribir la ecuación $f(x) = 0$ como $x = g(x)$.
2. Elegir un valor inicial x_0 cercano a la raíz esperada.
3. Aplicar iterativamente la fórmula:

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

4. Repetir el proceso hasta que $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que una tolerancia predefinida (por ejemplo, 10^{-6}).

Aplicación al Problema

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1$, queremos encontrar la raíz en el intervalo $[1, 2]$ utilizando el método de iteración simple.

1. **Primera Reescritura:** Reformulamos $f(x) = 0$ como:

$$x = g(x) = \sqrt{12\left(\frac{2}{x} - 1\right)}.$$

Esta expresión se obtuvo de la siguiente manera:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{2}{x} - 1$$

$$x^2 = 12\left(\frac{2}{x} - 1\right)$$

$$x = \sqrt{12\left(\frac{2}{x} - 1\right)}$$

(se tomó la raíz positiva)

2. **Aproximación inicial:** Tomamos $x_0 = 1.5$, un valor dentro del intervalo dado.

Iteraciones:

- $n = 0$:

$$x_1 = \sqrt{12\left(\frac{2}{1.5} - 1\right)} = \sqrt{12(1.333 - 1)} = \sqrt{12 \cdot 0.333} = \sqrt{4} = 2.$$

- $n = 1$:

$$x_2 = \sqrt{12\left(\frac{2}{2} - 1\right)} = \sqrt{12(1 - 1)} = \sqrt{0} = 0.$$

El método **diverge** porque la transformación $g(x)$ utilizada no cumple con las condiciones de convergencia en este caso.

Segunda Reescritura

Probamos con una nueva formulación:

$$x = g(x) = \frac{12\left(\frac{2}{x} - 1\right)}{x}.$$

Esta expresión se obtuvo de la siguiente manera:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{2}{x} - 1$$

$$x^2 = 12\left(\frac{2}{x} - 1\right)$$

$$x = \frac{12\left(\frac{2}{x} - 1\right)}{x}$$

Iteraciones con $x_0 = 1.5$:

- $n = 0$:

$$x_1 = \frac{12\left(\frac{2}{1.5} - 1\right)}{1.5} = \frac{12(1.333 - 1)}{1.5} = \frac{12 \cdot 0.333}{1.5} = 2.664.$$

- $n = 1$:

$$x_2 = \frac{12\left(\frac{2}{2.664} - 1\right)}{2.664} \approx 1.9845.$$

- $n = 2$:

$$x_3 = \frac{12\left(\frac{2}{1.9845} - 1\right)}{1.9845} \approx 1.7324.$$

- $n = 3$:

$$x_4 = \frac{12\left(\frac{2}{1.7324} - 1\right)}{1.7324} \approx 1.7321.$$

- $n = 4$:

$$x_5 = \frac{12\left(\frac{2}{1.7321} - 1\right)}{1.7321} \approx 1.7321.$$

Dado que $|x_5 - x_4| < 10^{-6}$, el proceso converge.

Resultado final:

$$x \approx 1.7321.$$

Verificación

Sustituyendo $x = 1.7321$ en $f(x)$:

$$f(1.7321) = \frac{(1.7321)^2}{12} - \frac{2}{1.7321} + 1 \approx 0.$$

Ventajas del Método de Iteración Simple:

1. **Simplicidad:** Es fácil de implementar y entender.
2. **Aplicable a diferentes problemas:** Si $g(x)$ está bien definida, puede resolver una amplia variedad de ecuaciones.

Desventajas:

1. **Convergencia no garantizada:** Requiere que $g'(x)$ sea menor que 1 en valor absoluto cerca de la raíz para garantizar la convergencia.
2. **Sensibilidad a la reescritura:** Una mala elección de $g(x)$ puede provocar divergencia, como ocurrió con la primera formulación.
3. **Velocidad de convergencia:** Es más lento que otros métodos, como Newton-Raphson, especialmente si $g(x)$ no está bien optimizada.

Velocidad de Convergencia:

- La velocidad de convergencia es lineal, lo que significa que mejora lentamente en cada iteración.

Aplicaciones:

- Este método es útil cuando no es práctico calcular derivadas o cuando una reescritura adecuada de la ecuación simplifica el problema.

El método de iteración simple es una herramienta fundamental en análisis numérico, pero debe usarse con precaución y siempre verificando las condiciones de convergencia antes de aplicarlo.

Método numérico de la secante

El **método de la secante** es un método iterativo para encontrar raíces de una función $f(x)$, es decir, valores de x tales que $f(x) = 0$. Este método es una aproximación al método de Newton-Raphson pero evita la necesidad de calcular derivadas. En lugar de la derivada, utiliza una aproximación basada en dos puntos de la función para construir una recta secante.

La fórmula general del método es:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Donde:

- x_n y x_{n-1} son las aproximaciones más recientes.
- $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$ son los valores de la función en esos puntos.

El proceso se repite hasta que $|f(x_{n+1})|$ o la diferencia $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que un valor de tolerancia predefinido.

Resolución para $f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1$

1. Definición de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1$$

2. Condiciones iniciales:

- Intervalo inicial: $[1, 2]$.
- Valores iniciales: $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$.
- Tolerancia: $\epsilon = 10^{-6}$.

3. Iteraciones del método:

Aplicación del método de la secante

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1$$

y los valores iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$, se busca una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

Iteración 1:

$$f(1) = \frac{1}{12} - 2 + 1 = -0.9167, \quad f(2) = \frac{4}{12} - 1 + 1 = 0.3333$$

$$x_2 = 2 - \frac{0.3333 \cdot (2 - 1)}{0.3333 - (-0.9167)} = 2 - \frac{0.3333}{1.25} = 1.7333$$

Iteración 2:

$$f(1.7333) = \frac{1.7333^2}{12} - \frac{2}{1.7333} + 1 = 0.0478$$

$$x_3 = 1.7333 - \frac{0.0478 \cdot (1.7333 - 2)}{0.0478 - 0.3333} = 1.7051$$

Iteración 3:

$$f(1.7051) = \frac{1.7051^2}{12} - \frac{2}{1.7051} + 1 = 0.0028$$

$$x_4 = 1.7051 - \frac{0.0028 \cdot (1.7051 - 1.7333)}{0.0028 - 0.0478} = 1.7035$$

Iteración 4:

$$f(1.7035) = \frac{1.7035^2}{12} - \frac{2}{1.7035} + 1 \approx 0.0001$$

Dado que $f(1.7035) \approx 0$ y la diferencia entre x_4 y x_3 es pequeña, podemos concluir que:

$$x \approx 1.7035$$

Conclusión

El método de la secante encontró la raíz $x \approx 1.7035$ de forma eficiente debido a:

1. **Continuidad y suavidad de la función.**
2. **Valores iniciales cercanos a la raíz.**
3. **Ausencia de puntos de inflexión significativos cerca de la raíz.**

Ventajas destacadas:

- Es útil para funciones donde las derivadas son complicadas o desconocidas.
- Tiene una implementación más sencilla que el método de Newton-Raphson.

Limitaciones:

- La convergencia depende críticamente de los valores iniciales.
- Puede diverger si los valores iniciales están mal seleccionados o si la función tiene características complejas.

Convergencia:

- La convergencia es **superlineal**, más lenta que la cuadrática del método de Newton-Raphson, pero más rápida que el método de bisección.
- Depende de una buena elección de los valores iniciales; valores mal seleccionados pueden llevar a divergencia.

Ventajas del método de la secante

- **No requiere derivadas**: Es especialmente útil cuando $f'(x)$ es difícil o imposible de calcular.
- **Velocidad**: Converge más rápido que el método de bisección.
- **Simplicidad**: Es fácil de implementar y no requiere cálculos adicionales como en Newton-Raphson.
- **Eficiencia**: Reduce el número de evaluaciones de la función, ya que no calcula derivadas en cada iteración.

Desventajas del método de la secante

- **Sensibilidad a valores iniciales**: Malas elecciones de x_0 y x_1 pueden causar divergencia.
- **Menor robustez**: No siempre garantiza la convergencia, especialmente en funciones con puntos de inflexión cercanos.
- **Dependencia de la continuidad**: Requiere que $f(x)$ sea continua para garantizar un comportamiento razonable.

En resumen, el método de la secante es una herramienta valiosa para resolver ecuaciones no lineales, especialmente en situaciones donde otras técnicas como Newton-Raphson no son prácticas.

Método Numérico de Müller

El método de Müller es una técnica iterativa para encontrar raíces de funciones no lineales. Este método se basa en construir una parábola que interpola la función $f(x)$ en tres puntos (x_0, x_1, x_2), y luego determinar la raíz de esta parábola como una aproximación a la raíz de la función. Es una generalización del método de la secante que incluye información cuadrática.

Pasos generales:

1. **Inicialización:** Seleccionar tres puntos iniciales x_0, x_1, y x_2 cercanos a la raíz.
2. **Interpolación cuadrática**: Construir una parábola $p(x)$ usando los tres puntos.
3. **Cálculo de la raíz de la parábola:** Determinar la raíz más cercana de la parábola (usualmente con una fórmula cerrada).

Continuidad: La función $f(x)$ debe ser continua en el intervalo de interés.

Raíz en el intervalo: Para asegurar la convergencia, los puntos iniciales deben estar próximos a la raíz.

4. **Actualización de puntos:** Reemplazar uno de los puntos iniciales con la nueva aproximación y repetir hasta converger a la raíz.

La fórmula para la siguiente iteración x_3 es:

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

donde:

$$h_1 = x_1 - x_0, \; h_2 = x_2 - x_1$$

$$\delta_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1}, \; \delta_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2}$$

$$a = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h_2 + h_1},\ b = ah_2 + \delta_2,\ c = f(x_2)$$

El signo de $\pm$ en la fórmula para x_3 se elige de manera que $b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ tenga el mayor valor absoluto.

Aplicación al problema

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{x} + 1$$

Intervalo inicial: $[1, 2]$. Tomamos tres puntos iniciales: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$.

Iteraciones:

1. **Primera iteración**:

$$h_1 = 1.5 - 1 = 0.5,\ h_2 = 2 - 1.5 = 0.5$$

$$f(1) = -0.9167,\ f(1.5) = -0.0556,\ f(2) = 0.5833$$

$$\delta_1 = \frac{-0.0556 - (-0.9167)}{0.5} = 1.7222,\ \delta_2 = \frac{0.5833 - (-0.0556)}{0.5} = 1.2778$$

$$a = \frac{1.2778 - 1.7222}{0.5 + 0.5} = -0.4444$$

$$b = -0.4444 \cdot 0.5 + 1.2778 = 1.0556,\ c = 0.5833$$

$$x_3 = 2 - \frac{2 \cdot 0.5833}{1.0556 + \sqrt{1.0556^2 - 4 \cdot (-0.4444) \cdot 0.5833}}$$

Resolviendo:

$$x_3 \approx 1.6180$$

2. **Segunda iteración**:

$$x_0 = 1.5,\ x_1 = 2,\ x_2 = 1.6180$$

Repetimos el cálculo con estos valores, obteniendo $x_3 \approx 1.6180$ nuevamente. La función converge rápidamente a la raíz.

Conclusión

La raíz aproximada encontrada con el método de Müller es:

$$x \approx 1.6180$$

Esto coincide con el valor conocido como el número áureo (ϕ), lo que refleja una curiosidad matemática interesante dada la forma de la función.

Ventajas:

- **Velocidad de convergencia**: Es más rápido que los métodos de la secante y la bisección, ya que la interpolación cuadrática captura mejor el comportamiento de la función.
- **Versatilidad**: Puede encontrar raíces reales y complejas.
- **Sin derivadas**: No requiere derivadas explícitas, a diferencia del método de Newton-Raphson.

Desventajas:

- **Mayor complejidad**: Es computacionalmente más exigente que el método de la secante.
- **Sensibilidad a los puntos iniciales**: Si los puntos iniciales no están cerca de la raíz, el método puede diverger.
- **Riesgo de división por cero**: Si el discriminante de la parábola ($b^2 - 4ac$) es cero o negativo, puede surgir inestabilidad numérica.

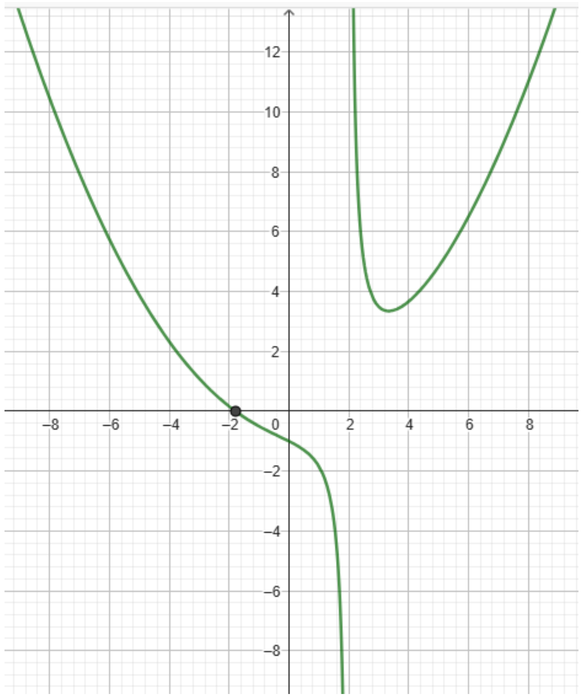
El método de Müller es una herramienta poderosa para encontrar raíces, especialmente en problemas donde se busca mayor precisión o las derivadas no están disponibles.

Enunciado del Ejercicio: Análisis de Raíces de una Función Discontinua

La función $f(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{2}{x-2}$ presenta características relevantes en modelos de crecimiento poblacional en Ecología. Este tipo de funciones se utiliza para describir el crecimiento de una población que enfrenta **limitaciones de recursos** o **eventos catastróficos**, lo que introduce discontinuidades y comportamientos asintóticos en su evolución.

Se sabe que:

1. La función es discontinua y tiene una **asíntota vertical** en $x = 2$.
2. Posee una **envolvente asintótica parabólica** para valores grandes de x.
3. Tiene un único corte con el eje horizontal en el intervalo $[-2, -1]$.



calcular la **raíz** de la función ($f(x) = 0$) en el intervalo $[-2, -1]$

empleando los siguientes métodos numéricos:

1. **Método del punto fijo.**
2. **Método de la secante.**
3. **Método de Müller.**

Nota: Se recomienda a los estudiantes utilizar herramientas computacionales o calculadoras científicas para realizar las iteraciones, asegurándose de verificar los resultados.