Métodos Numéricos para el Cálculo de Raíces con el Método de Bisección

---

1. Importancia de los Métodos Numéricos

Los métodos numéricos son indispensables en la resolución de ecuaciones cuando:

- **Los métodos algebraicos no son viables**: Por ejemplo, cuando las funciones son trascendentales, no factorizables o demasiado complejas.
- **El cálculo exacto no es necesario**: Las soluciones aproximadas con precisión aceptable son suficientes para aplicaciones prácticas.

En Informática y Gráficos por Computadora:

Los polinomios cúbicos, como el que aparece en la imagen, son utilizados en:

- **Curvas Bézier cúbicas:** Para representar trayectorias suaves en gráficos 3D y 2D.
- **Interpolación y procesamiento de imágenes:** Para calcular puntos intermedios de datos y generar gráficos realistas.

Estos cálculos requieren la determinación de las raíces para modelar intersecciones, trayectorias y ajustes geométricos.

2. Comparativa: Métodos Abiertos vs. Métodos Cerrados

Aspecto	Métodos Cerrados (Bisección, Falsa Posición)	Métodos Abiertos (Newton, Newton Modificado)
Requerimientos	Intervalo $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$	Aproximación inicial cercana a la raíz
Convergencia	Garantizada si $f(a)f(b) < 0$	No garantizada; depende de la proximidad inicial
Velocidad	Convergencia lenta (lineal)	Convergencia rápida (cuadrática para Newton)
Simplicidad	Fácil de implementar, no requiere derivadas	Requiere cálculo de derivadas
Aplicaciones	Situaciones con intervalos conocidos	Cálculos más rápidos para soluciones aproximadas

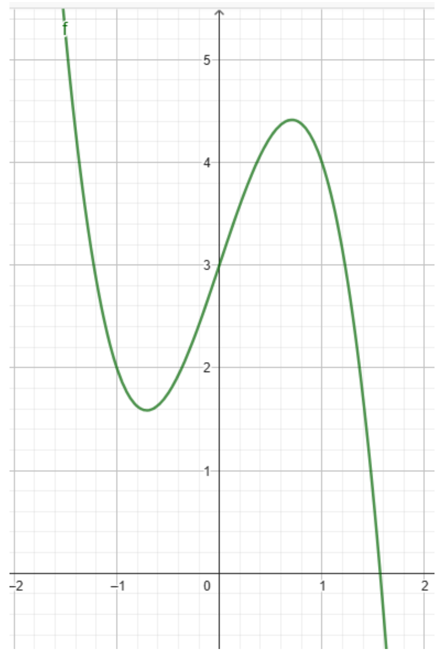
3. Problema Relacionado con Gráficos por Computadora

En informática, los polinomios cúbicos se utilizan en gráficos por computadora para generar curvas suaves y realistas, como las curvas de Bézier cúbicas y las splines cúbicas. También se emplean en algoritmos de interpolación y en el procesamiento de imágenes.

Se requiere calcular las raíces del siguiente polinomio cúbico:

$$f(x) = -2x^3 + 3x + 3$$

Dichas raíces representan los puntos donde una curva cúbica corta con el eje horizontal, importantes en modelado gráfico



4. Aplicación del Método de la Bisección para obtener las raíces del polinomio planteado

El **método de la bisección** es una técnica numérica ampliamente utilizada para encontrar raíces de funciones continuas. Este método divide iterativamente un intervalo en dos partes, reduciendo el rango donde se encuentra la raíz hasta alcanzar un nivel de precisión deseado.

Pasos del Método

1. Se toma un intervalo inicial $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos ($f(a)f(b) < 0$).
2. Se calcula el punto medio:
$$c = \frac{a+b}{2}.$$
3. Se evalúa la función en el punto medio $f(c)$.
4. Si $f(c) \approx 0$, c es la raíz.
5. Si $f(c) \neq 0$, se elige el subintervalo que contiene la raíz:
   - Si $f(a)f(c) < 0$, la raíz está en $[a, c]$.
   - Si $f(c)f(b) < 0$, la raíz está en $[c, b]$.
6. El proceso se repite hasta que el intervalo sea menor que un umbral de tolerancia.

Aplicación a $f(x) = -2x^3 + 3x + 3$ en $[1, 2]$:

El objetivo es encontrar la raíz de $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ utilizando la bisección.

Iteración 1

1. Evaluamos $f(1)$ y $f(2)$:

$$f(1) = -2(1)^3 + 3(1) + 3 = 4, \quad f(2) = -2(2)^3 + 3(2) + 3 = -7.$$

Como $f(1)f(2) < 0$, hay una raíz en $[1, 2]$.

Iteración 1

1. Evaluamos $f(1)$ y $f(2)$:

$$f(1) = -2(1)^3 + 3(1) + 3 = 4, \quad f(2) = -2(2)^3 + 3(2) + 3 = -7.$$

Como $f(1)f(2) < 0$, hay una raíz en $[1, 2]$.

2. Calculamos el punto medio:

$$c_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5.$$

3. Evaluamos $f(1.5)$:

$$f(1.5) = -2(1.5)^3 + 3(1.5) + 3 = 0.75.$$

4. Determinamos el nuevo intervalo:

$$f(1.5)f(2) < 0 \implies \text{La raíz está en } [1.5, 2].$$

Iteración 2

1. Calculamos el nuevo punto medio:

$$c_2 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75.$$

2. Evaluamos $f(1.75)$:

$$f(1.75) = -2(1.75)^3 + 3(1.75) + 3 = -2.4688.$$

3. Determinamos el nuevo intervalo:

$$f(1.5)f(1.75) < 0 \implies \text{La raíz está en } [1.5, 1.75].$$

Iteración 3

1. Calculamos el nuevo punto medio:

$$c_3 = \frac{1.5 + 1.75}{2} = 1.625.$$

2. Evaluamos $f(1.625)$:

$$f(1.625) = -2(1.625)^3 + 3(1.625) + 3 = -0.7578.$$

3. Determinamos el nuevo intervalo:

$$f(1.5)f(1.625) < 0 \implies \text{La raíz está en } [1.5, 1.625].$$

Iteración 4

1. Calculamos el nuevo punto medio:

$$c_4 = \frac{1.5 + 1.625}{2} = 1.5625.$$

2. Evaluamos $f(1.5625)$:

$$f(1.5625) = -2(1.5625)^3 + 3(1.5625) + 3 \approx -0.0161.$$

3. Como $|f(1.5625)| < 0.01$, consideramos que la raíz aproximada es:

$$x \approx 1.5625.$$

Conclusión

La raíz aproximada del polinomio $f(x) = -2x^3 + 3x + 3$ en el intervalo $[1, 2]$ es $x \approx 1.5625$, con un error menor a 0.01.

Verificación: Evaluando $f(1.5625)$, obtenemos:

$$f(1.5625) \approx -0.0161.$$

El cual es un valor cuyo error es inferior al 1%

(el valor exacto es: 1.5674683748)

Ventajas y Desventajas del Método de la Bisección

- **Ventajas**:
  1. Convergencia garantizada si $f(a)f(b) < 0$.
  2. Fácil de implementar y no requiere derivadas.
- **Desventajas**:
  1. Convergencia lenta en comparación con métodos abiertos.
  2. Solo encuentra una raíz por intervalo.
- **Velocidad de Convergencia:** La reducción del intervalo es lineal, por lo que se necesitan muchas iteraciones para alta precisión.

Este método es robusto y efectivo, especialmente cuando se tiene un intervalo que contiene la raíz.

Método de la Falsa Posición:

Descripción del Método

El **método de la falsa posición** (o regula falsi) es una técnica numérica utilizada para encontrar raíces de una función continua. Combina elementos del método de la bisección y la interpolación lineal, logrando mayor velocidad de convergencia en comparación con la bisección, especialmente en funciones casi lineales.

Características Principales

1. **Requisitos Iniciales:**
   - Se necesita un intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, lo que garantiza que existe al menos una raíz en dicho intervalo.

2. **Interpolación Lineal:**
   - En lugar de tomar el punto medio, el método utiliza una aproximación ponderada:

$$x_i = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

3. **Selección de Subintervalo:**
   - Tras calcular x_i, el intervalo se actualiza manteniendo el cambio de signo ($f(a)f(x_i) < 0$ o $f(x_i)f(b) < 0$).

Resolviendo el Problema

Queremos encontrar una raíz del polinomio $f(x) = -2x^3 + 3x + 3$ en el intervalo $[1, 2]$.

Iteraciones

1. **Intervalo Inicial y Verificación de Signos:**
   - $f(1) = 4$, $f(2) = -7$.
   - Como $f(1) > 0$ y $f(2) < 0$, existe una raíz en $[1, 2]$.

2. **Iteraciones:**
   - Usamos la fórmula para calcular el punto de interpolación x_i y evaluamos $f(x_i)$:

Iteración	a	b	x_i	$f(x_i)$	Intervalo Actualizado
1	1	2	1.3636	1.8475	$[1.3636, 2]$
2	1.3636	2	1.4658	0.7147	$[1.4658, 2]$
3	1.4658	2	1.5156	0.1949	$[1.5156, 2]$
4	1.5156	2	1.5352	0.0397	$[1.5352, 2]$
5	1.5352	2	1.5403	0.0016	$[1.5403, 2]$

3. **Raíz Aproximada:**
   - Después de cinco iteraciones, la raíz aproximada es:

$$x \approx 1.5403.$$

   - Con $f(1.5403) \approx 0.0016$, el error es muy pequeño, lo que valida la aproximación.

(recordemos que el valor exacto es: 1.5674683748)

Conclusiones

Ventajas del Método de la Falsa Posición

1. **Convergencia Más Rápida que la Bisección:**
   - Al utilizar interpolación lineal, el método converge más rápidamente en intervalos donde la función tiene una pendiente significativa.
2. **Garantía de Convergencia:**
   - Similar a la bisección, la raíz está garantizada si $f(a)f(b) < 0$.
3. **Facilidad de Implementación:**
   - No requiere derivadas, lo que lo hace adecuado para funciones donde no es posible calcular $f'(x)$.

Desventajas del Método de la Falsa Posición

1. **Convergencia Lenta en Funciones Desbalanceadas:**
   - Si una de las pendientes $f(a)$ o $f(b)$ es mucho menor en magnitud, el método puede "anclarse" y avanzar lentamente.
2. **Dependencia del Intervalo Inicial:**
   - La elección de un mal intervalo puede afectar la precisión o aumentar el número de iteraciones necesarias.

Velocidad de Convergencia

- La velocidad de convergencia depende de la linealidad local de la función:
  - **Funciones cercanas a lineales:** Converge rápidamente.
  - **Funciones con curvatura pronunciada:** Puede requerir más iteraciones.

Importancia del Método

El método de la falsa posición es una herramienta robusta y eficiente en situaciones donde se busca un equilibrio entre simplicidad (como la bisección) y rapidez (como los métodos abiertos). Su aplicación es ideal para problemas en ingeniería, física y otras disciplinas que requieren precisión numérica con restricciones computacionales.

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo ampliamente utilizado para encontrar raíces (o ceros) de funciones. Es conocido por su velocidad de convergencia y simplicidad matemática, especialmente cuando la función es bien comportada y se cuenta con un punto inicial cercano a la raíz.

Principio del Método:

1. **Punto inicial:** Se elige un valor inicial x_0 cercano a la raíz buscada.

2. **Derivada**: Se calcula la derivada de la función $f'(x)$.
3. **Fórmula iterativa:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. **Criterio de convergencia:** El proceso se repite hasta que $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que una tolerancia prefijada.

Aplicación al Polinomio $f(x) = -2x^3 + 3x + 3$

1. **Derivada de la función:**

$$f(x) = -2x^3 + 3x + 3, \quad f'(x) = -6x^2 + 3.$$

Cálculos Iterativos

Aproximación inicial ($x_0 = 1.5$):

1. **Primera Iteración ($n = 0$):**

- Calculamos:

$$f(1.5) = -2(1.5)^3 + 3(1.5) + 3 = -6.75 + 4.5 + 3 = 0.75,$$

$$f'(1.5) = -6(1.5)^2 + 3 = -13.5 + 3 = -10.5.$$

- Usamos la fórmula:

$$x_1 = 1.5 - \frac{0.75}{-10.5} \approx 1.5714.$$

2. **Segunda Iteración ($n = 1$):**

   - Calculamos:

$$f(1.5714) = -2(1.5714)^3 + 3(1.5714) + 3 \approx -0.007,$$

$$f'(1.5714) = -6(1.5714)^2 + 3 \approx -11.8.$$

   - Usamos la fórmula:

$$x_2 = 1.5714 - \frac{-0.007}{-11.8} \approx 1.5675.$$

3. **Tercera Iteración ($n = 2$):**

   - Calculamos:

$$f(1.5675) = -2(1.5675)^3 + 3(1.5675) + 3 \approx 0.$$

   - Como $|x_3 - x_2| < 10^{-6}$, el proceso se detiene.

Resultado Final

La raíz aproximada del polinomio $f(x) = -2x^3 + 3x + 3$ en el intervalo $[1, 2]$ es:

$$x \approx 1.5675.$$

Este método alcanzó una precisión de 4 decimales en solo 3 iteraciones, demostrando su eficiencia para este polinomio.

(recordemos que el valor exacto es: 1.5674683748)

Conclusiones

Ventajas del Método de Newton-Raphson:

1. **Velocidad de convergencia:** Este método converge rápidamente (orden cuadrático) si el punto inicial está cerca de la raíz y la derivada es bien definida.
2. **Simplicidad matemática:** Utiliza una fórmula iterativa directa.

Desventajas:

1. **Dependencia del punto inicial:** Si x_0 está lejos de la raíz, el método puede divergir o no encontrar la solución.
2. **Requiere derivadas:** Su aplicación no es práctica en funciones cuya derivada es compleja de calcular o evaluar.

3. **Raíces múltiples:** Puede no ser eficiente si la función tiene raíces múltiples o un punto crítico cerca de la raíz.

Velocidad de Convergencia:

- En este problema, el método alcanzó una precisión de 4 decimales en solo 4 iteraciones, demostrando su eficiencia.

Aplicaciones:

- Es ampliamente utilizado en áreas como gráficos por computadora, simulaciones físicas, optimización de funciones, y modelado en ingeniería y ciencias aplicadas.

El método de Newton-Raphson es una herramienta poderosa, pero debe usarse con precaución, especialmente en problemas con derivadas cercanas a cero o puntos iniciales alejados de la raíz.

Ejercicio. En ingeniería ambiental el nivel de oxígeno (en mg/L) río abajo en las aguas donde se descargan residuos líquidos, viene dado por

$$c = 10 - 20 * (e^{-0.15x} - e^{-0.5x})$$

Donde x es la distancia en km. Determine la distancia para la cual el nivel de oxígeno llega a una lectura crítica de 5 mg/L

Sugerencia. Usando $c = 5$ en la ecuación dada, la función objetivo se obtendría como

$$5 = 10 - 20 * (e^{-0.15x} - e^{-0.5x})$$
$$0 = 5 - 20 * (e^{-0.15x} - e^{-0.5x})$$
$$f(x) = 5 - 20 * (e^{-0.15x} - e^{-0.5x})$$