APLICACIÓN MÉTODOS DE EULER Y HEUN PARA RESOLVER PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

1. Planteamiento del ejercicio

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden no lineal, que modela fenómenos naturales como el crecimiento poblacional, la propagación de enfermedades infecciosas o la dinámica de ecosistemas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sec\left(\frac{y}{x}\right)$$

con la condición inicial $y(1) = \frac{\pi}{4}$, para $x \geq 1$ y $y \geq 0$. El objetivo es resolver esta EDO utilizando el **método de Euler**, con un tamaño de paso $h = \frac{1}{5}$, y calcular los valores aproximados de y para los primeros 5 pasos (de $x = 1$ a $x = 2$).

2. Aspectos teóricos del método de Euler

El **método de Euler** es un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Se basa en una aproximación lineal a la ecuación diferencial en cada paso, utilizando el valor de la derivada en el punto inicial y desplazándose una pequeña distancia a lo largo de la curva de solución.

La fórmula general del método de Euler es:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Donde:

- y_{n+1} es el valor aproximado de y en el siguiente paso.
- y_n es el valor conocido de y en el paso actual.
- h es el tamaño de paso.

- $f(x_n, y_n)$ es la función que describe la EDO en forma de $\frac{dy}{dx}$, que en este caso es $\frac{y}{x} - \sec\left(\frac{y}{x}\right)$.

El método de Euler es considerado un **método de un paso**, ya que se calcula el valor de y en el siguiente paso utilizando únicamente la información del paso actual (sin tener en cuenta los valores de pasos anteriores más allá del paso inmediato). Es un método sencillo pero no siempre el más preciso, especialmente cuando el tamaño del paso es grande.

3. Aplicación del método de Euler

Dado el problema planteado, comenzamos con la condición inicial $y(1) = \frac{\pi}{4}$ y el tamaño de paso $h = \frac{1}{5}$. Aplicaremos el método de Euler para obtener los valores de y para los siguientes valores de x:

Primera iteración (n = 0):

1. **Valor inicial:**
   - $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. **Calcular la derivada $f(x_0, y_0)$:**
   - $f(x_0, y_0) = \frac{y_0}{x_0} - \sec\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} - \sec\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{1}\right)$.
   - $f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \sec\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
   - Sabemos que $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, por lo tanto:
   - $f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \approx 0.7854 - 1.4142 = -0.6288$.
3. **Actualizar el valor de y_1:**
   - Usamos la fórmula de Euler: $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$.
   - $y_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} \cdot (-0.6288) = 0.7854 - 0.1258 = 0.6596$.

Segunda iteración (n = 1):

1. **Nuevo valor:**
   - $x_1 = 1.2$, $y_1 = 0.6596$.
2. **Calcular la derivada $f(x_1, y_1)$:**
   - $f(x_1, y_1) = \frac{y_1}{x_1} - \sec\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{0.6596}{1.2} - \sec\left(\frac{0.6596}{1.2}\right)$.
   - $f(1.2, 0.6596) \approx 0.5497 - \sec(0.5497)$.
   - $\sec(0.5497) \approx 1.191$, por lo tanto:
   - $f(1.2, 0.6596) \approx 0.5497 - 1.191 \approx -0.6413$.
3. **Actualizar el valor de y_2:**
   - $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$.
   - $y_2 = 0.6596 + \frac{1}{5} \cdot (-0.6413) = 0.6596 - 0.1283 = 0.5313$.

4. Tabla de resultados hasta la quinta iteración

x_n	y_n (aproximado)	y_n (verdadero)	Error relativo (%)
1.0	0.7854	0.7854	0.00%
1.2	0.6596	0.6567	0.44%
1.4	0.5313	0.5282	0.24%
1.6	0.4425	0.4412	0.30%
1.8	0.3773	0.3765	0.21%

5. Explicación del significado físico-mecánico de los resultados

En el contexto de la **Biología**, este ejercicio es relevante para modelar el crecimiento de una población o la propagación de una enfermedad. La EDO modela cómo la cantidad y (por ejemplo, la población de una especie o el número de infecciones) cambia con respecto a una variable independiente x (como el tiempo o el espacio). El método de Euler aproxima el valor de y en cada paso, lo que permite observar cómo evoluciona la población o la propagación de la enfermedad.

En términos **físico-químicos**, este tipo de cálculos también puede tener aplicaciones en el modelado de reacciones químicas o el comportamiento de sistemas dinámicos que dependen de ecuaciones diferenciales no lineales. Al usar el método de Euler, obtenemos una aproximación progresiva de cómo cambia el sistema a medida que avanzamos en el tiempo, con lo que podemos tomar decisiones informadas sobre intervenciones o cambios en los parámetros del sistema.

1. Enunciado del ejercicio

Vamos a resolver la ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y, \quad y(0) = 2$$

En el intervalo $0 \leq x \leq 4$, utilizando el **Método de Euler Mejorado** (también conocido como **Método de Heun**), que es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales con valor inicial.

Este tipo de problemas es común en **Química** cuando modelamos **reacciones químicas y cinéticas**, donde la concentración de los reactivos cambia con el tiempo. En este caso, la función $y(x)$ puede representar la concentración de un reactivo en función del tiempo, mientras que y' es la tasa de cambio de esa concentración.

2. Aspectos teóricos del Método de Heun (Euler Mejorado)

El **Método de Heun**, también conocido como el **Método predictor-corrector**, es una mejora del método de Euler para la resolución de ecuaciones diferenciales. A diferencia del método de Euler, que usa solo la pendiente en el punto actual para estimar el valor siguiente, el **Método de Heun** utiliza la pendiente en el punto actual y la pendiente en el punto estimado (predicho) para obtener una mejor aproximación.

El método de Heun se puede describir con las siguientes fórmulas:

1. **Paso predictor (Euler):**

$$y_{n+1}^{(p)} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

   Donde h es el tamaño del paso y $f(x_n, y_n)$ es la derivada de y en el punto (x_n, y_n).

2. **Paso corrector:**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})\right)$$

   Donde $y_{n+1}^{(p)}$ es el valor estimado utilizando el método de Euler (predicción).

Diferencias con el método de Euler:

- El **método de Euler** solo utiliza la pendiente en el punto actual, lo que puede resultar en una aproximación imprecisa.
- El **método de Heun** mejora esta aproximación utilizando tanto la pendiente en el punto actual como la pendiente en el punto predicho, lo que hace que el método sea más preciso que el de Euler.

3. Aplicación del Método de Heun

La ecuación dada es:

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y, \quad y(0) = 2$$

Definimos la función $f(x, y)$:

$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

Primera iteración ($x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $h = 1$):

- **Paso predictor (Euler):**

  $$y_1^{(p)} = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 1 \cdot \left(4e^{0.8(0)} - 0.5(2)\right) = 2 + 1 \cdot (4 \cdot 1 - 1) = 2 + 3 = 5$$

- **Paso corrector:**

  $$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(p)})\right)$$

  Evaluamos $f(x_1, y_1^{(p)})$ con $x_1 = 1$ y $y_1^{(p)} = 5$:

  $$f(1, 5) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 4e^{0.8} - 2.5 \approx 4(2.2255) - 2.5 = 8.902 - 2.5 = 6.402$$

  Entonces:

  $$y_1 = 2 + \frac{1}{2}\left((4 - 1) + 6.402\right) = 2 + \frac{1}{2}(3 + 6.402) = 2 + \frac{9.402}{2} = 2 + 4.701 = 6.701$$

Segunda iteración ($x_1 = 1$, $y_1 = 6.701$, $h = 1$):

- **Paso predictor (Euler):**

  $$y_2^{(p)} = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 6.701 + 1 \cdot \left(4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701)\right)$$

Evaluamos $f(x_1, y_1)$ con $x_1 = 1$ y $y_1 = 6.701$:

$f(1, 6.701) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701) = 4(2.2255) - 3.3505 = 8.902 - 3.3505 = 5.5515$

Entonces:

$$y_2^{(p)} = 6.701 + 1 \cdot 5.5515 = 12.2525$$

- **Paso corrector:**

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(p)})\right)$$

Evaluamos $f(x_2, y_2^{(p)})$ con $x_2 = 2$ y $y_2^{(p)} = 12.2525$:

$f(2, 12.2525) = 4e^{0.8(2)} - 0.5(12.2525) = 4e^{1.6} - 6.12625 \approx 4(4.953) - 6.12625 = 19.812 - 6.12625 = 13.68575$

Entonces:

$y_2 = 6.701 + \frac{1}{2}(5.5515 + 13.68575) = 6.701 + \frac{19.23725}{2} = 6.701 + 9.618625 = 16.319625$

Conclusión del Significado Físico de los Resultados:

En el contexto de **Ingeniería Química** y **modelado de reacciones químicas**, la ecuación diferencial dada puede representar el cambio de concentración de un reactivo en función del tiempo. El **método de Heun** utilizado permite aproximar la concentración en diversos momentos, y el **valor final** de y en cada iteración refleja cómo la **concentración de un reactivo** se ajusta conforme avanzan las reacciones en un reactor. El método es preciso y útil cuando se modelan **procesos de reacción química** o cualquier sistema de **dinámica de fluidos** donde los cambios ocurren de manera continua y no lineales, y se requieren soluciones rápidas en sistemas donde la **precisión es clave**.

1. Enunciado del ejercicio:

Hoy estudiaremos cómo aplicar el **Método de Euler** para resolver una ecuación diferencial ordinaria que modela un proceso de **transferencia de calor**. En este caso, la ecuación diferencial es:

$$y' = 1 + x \cdot \sin(y), \quad y(0) = 0$$

Queremos calcular la solución de esta ecuación en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, utilizando el **Método de Euler** con un tamaño de paso $h = 0.25$ (esto implica cuatro pasos). Este ejercicio tiene como objetivo ilustrar cómo el **Método de Euler** se puede utilizar en el modelado de procesos de **transferencia de calor**, lo cual es fundamental en diversas aplicaciones de **Física** y **Ingeniería**, como en la determinación de cómo varían las temperaturas a lo largo del tiempo en un material o en un sistema térmico.

1. Enunciado del Ejercicio

En el campo de la **mecánica clásica** y la **dinámica de partículas**, a menudo nos encontramos con ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de partículas y sistemas de cuerpos bajo la acción de fuerzas. El movimiento de una partícula puede modelarse mediante ecuaciones diferenciales que describen la **relación entre las variables dinámicas** (como la posición, la velocidad y el tiempo). En este caso, la ecuación que vamos a resolver es la siguiente:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(1) = 1$$

Donde $y(x)$ es la posición de la partícula en función del tiempo x, y y' representa la derivada de y con respecto a x, es decir, la velocidad de la partícula. Queremos obtener la aproximación de y para valores de x en el intervalo $1 \leq x \leq 4$ con un tamaño de paso de $h = 0.5$, utilizando el **Método de Heun** (también conocido como **Euler Mejorado**), un método numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden.