**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (GAUSS-SEIDEL) Y SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES (NEWTON-RHAPSON) APLICADOS**

## Ejemplo de aplicación del **Método de Gauss-Seidel** en la dinámica de fluidos y termodinámica

En este ejercicio, vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el **método de Gauss-Seidel**. Este método es útil en el contexto de la **dinámica de fluidos computacional (CFD)** y en **modelado de fluidos y transferencia de calor**, donde las soluciones numéricas aproximadas de sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para simular comportamientos físicos.

El sistema de ecuaciones es el siguiente:

1. $3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$
2. $0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$
3. $0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$

### Paso 1: Definición del Método de Gauss-Seidel

El **método de Gauss-Seidel** es una técnica iterativa utilizada para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$A \cdot X = B$$

En donde:

- $A$ es la matriz de coeficientes del sistema,
- $X$ es el vector de las incógnitas,
- $B$ es el vector de los términos constantes.

El método consiste en despejar cada variable en cada ecuación usando las últimas aproximaciones disponibles para las otras incógnitas. La fórmula iterativa para cada incógnita en la **iteración** $k$ es:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left( b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left( b_2 - \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} a_{2j} x_j^{(k+1)} \right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left( b_3 - \sum_{j=1, j\neq 3}^{n} a_{3j} x_j^{(k+1)} \right)$$

### Paso 2: Elección de las Condiciones Iniciales

El método de Gauss-Seidel requiere valores iniciales para las incógnitas. Por lo general, se escogen valores arbitrarios o $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ como cero (si no se tiene información previa).

En este caso, usaremos las siguientes condiciones iniciales para comenzar las iteraciones:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

### Paso 3: Iteraciones

Ahora, vamos a comenzar con las iteraciones usando las fórmulas del método de Gauss-Seidel para obtener nuevos valores aproximados para $x_1, x_2, x_3$.

Para aplicar el método de Gauss-Seidel, primero despejamos cada variable en términos de las otras:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

### Cálculo del error estimado

El **error estimado** se utiliza para medir la precisión de cada iteración y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{Error} = \frac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k+1)}|} \times 100\%$$

Donde $x^{(k+1)}$ es el valor calculado en la iteración $k+1$ y $x^{(k)}$ es el valor de la iteración anterior.

## Iteraciones

Empezamos con valores iniciales arbitrarios (en este caso, cero):

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

**Iteración 1:**

1. **Para $x_1$:**

$$x_1^{(1)} = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = \frac{7.85}{3} = 2.6167$$

2. **Para $x_2$:**

$$x_2^{(1)} = \frac{-19.3 - 0.1(2.6167) + 0.3(0)}{7} = \frac{-19.3 - 0.2617}{7} = \frac{-19.5617}{7} = -2.7945$$

3. **Para $x_3$:**

$$x_3^{(1)} = \frac{71.4 - 0.3(2.6167) + 0.2(-2.7945)}{10} = \frac{71.4 - 0.7850 - 0.5589}{10} = \frac{70.0561}{10} = 7.0056$$

**Iteración 2:**

1. **Para $x_1$:**

$$x_1^{(2)} = \frac{7.85 + 0.1(-2.7945) + 0.2(7.0056)}{3} = \frac{7.85 - 0.2795 + 1.4011}{3} = \frac{8.9716}{3} = 2.9905$$

2. **Para $x_2$:**

$$x_2^{(2)} = \frac{-19.3 - 0.1(2.9905) + 0.3(7.0056)}{7} = \frac{-19.3 - 0.2991 + 2.1017}{7} = \frac{-17.4974}{7} = -2.4996$$

3. **Para $x_3$:**

$$x_3^{(2)} = \frac{71.4 - 0.3(2.9905) + 0.2(-2.4996)}{10} = \frac{71.4 - 0.8971 - 0.4999}{10} = \frac{69.0039}{10} = 6.9004$$

**Iteración 3:**

1. **Para $x_1$:**

$$x_1^{(3)} = \frac{7.85 + 0.1(-2.4996) + 0.2(6.9004)}{3} = \frac{7.85 - 0.2499 + 1.3801}{3} = \frac{8.9802}{3} = 2.9934$$

2. **Para $x_2$:**

$$x_2^{(3)} = \frac{-19.3 - 0.1(2.9934) + 0.3(6.9004)}{7} = \frac{-19.3 - 0.2993 + 2.0701}{7} = \frac{-17.5292}{7} = -2.5042$$

3. **Para $x_3$:**

$$x_3^{(3)} = \frac{71.4 - 0.3(2.9934) + 0.2(-2.5042)}{10} = \frac{71.4 - 0.8979 - 0.5008}{10} = \frac{69.0013}{10} = 6.9001$$

**Errores relativos:**

- Para $x_1$: $\frac{|2.9934 - 2.9905|}{|2.9934|} \times 100 = 0.0986\%$
- Para $x_2$: $\frac{|-2.5042 - (-2.4996)|}{|-2.5042|} \times 100 = 0.187\%$
- Para $x_3$: $\frac{|6.9001 - 6.9004|}{|6.9001|} \times 100 = 0.0043\%$

## Paso 4: Conclusión

Una vez que los errores relativos son menores al 1% (en la tercera iteración), podemos detener las iteraciones. Los valores aproximados son:

$$x_1 \approx 2.9934, \quad x_2 \approx -2.5042, \quad x_3 \approx 6.9001$$

Estos resultados son la solución aproximada del sistema de ecuaciones, y son válidos para simular comportamientos en sistemas de fluidos y transferencia de calor, especialmente en la **dinámica de fluidos computacional (CFD)** y en **modelos termodinámicos**.

## Paso 5: Explicación del Significado Físico de los Resultados

Una vez que el **error estimado** es menor que el 1%, podemos detener las iteraciones. Los resultados obtenidos representan los valores de las variables $x_1, x_2, x_3$, que pueden corresponder a variables importantes en la simulación de flujos de fluidos y transferencia de calor, como la **temperatura** o **presión** en diferentes partes de un sistema de calefacción o enfriamiento.

En **dinámica de fluidos computacional (CFD)**, este tipo de ecuaciones puede modelar cómo el calor y los fluidos interactúan en un entorno controlado, permitiendo simular y predecir el comportamiento de un sistema.

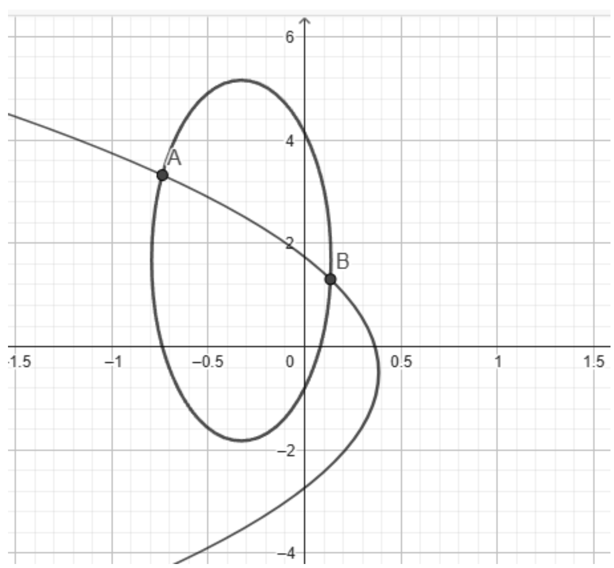
## Método de Newton-Raphson para sistemas no lineales de múltiples variables en Ingeniería Estructural

El **método de Newton-Raphson** es una técnica poderosa para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales, particularmente útil en contextos como el **análisis de elementos finitos** en **Ingeniería Estructural**. Este método permite resolver ecuaciones que describen el comportamiento no lineal de las estructuras bajo diversas cargas, lo cual es fundamental para simular deformaciones y tensiones en sistemas complejos.

El sistema de ecuaciones que vamos a resolver es el siguiente:

1. **Ecuación 1 (Parábola):** $4y^2 + 4y + 52x = 19$
2. **Ecuación 2 (Elipse):** $169x^2 + 3y^2 + 111x - 10y = 10$

Estas ecuaciones representan dos curvas que se cortan en dos puntos: **Punto A** (en el segundo cuadrante) y **Punto B** (en el primer cuadrante).



## Paso 1: Definición del Método de Newton-Raphson para Sistemas de Ecuaciones No Lineales

El **método de Newton-Raphson** se usa para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de la forma:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Donde $\mathbf{x}$ es el vector de incógnitas, y $F(\mathbf{x})$ es el vector de funciones no lineales. La fórmula iterativa de Newton-Raphson para sistemas no lineales es:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J^{-1} \cdot F(\mathbf{x}^{(k)})$$

Donde:

- $J$ es la **matriz Jacobiana** de $F(\mathbf{x})$,
- $J^{-1}$ es la **matriz Jacobiana inversa**,
- $F(\mathbf{x}^{(k)})$ es el vector de funciones evaluado en $\mathbf{x}^{(k)}$.

#### Matriz Jacobiana y Determinante Jacobiano

Para nuestro sistema de ecuaciones, el vector $F(\mathbf{x})$ es:

### Sistema de ecuaciones

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $f_1(x, y) = 4y^2 + 4y + 52x - 19 = 0$
2. $f_2(x, y) = 169x^2 + 3y^2 + 111x - 10y - 10 = 0$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4y^2 + 4y + 52x - 19 \\ 169x^2 + 3y^2 + 111x - 10y - 10 \end{bmatrix}$$

### Matriz Jacobiana

El método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales requiere la matriz Jacobiana, que se construye a partir de las derivadas parciales de cada ecuación con respecto a las incógnitas $x$ y $y$:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 52$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 8y + 4$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 338x + 111$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 6y - 10$

La **matriz Jacobiana** $J$ se obtiene derivando cada ecuación con respecto a $x$ y $y$:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 8y+4 \\ 338x+111 & 6y-10 \end{bmatrix}$$

El **determinante** de la matriz Jacobiana se calcula como:

$$\det(J) = 52(6y-10) - (8y+4)(338x+111)$$

Y la **matriz Jacobiana inversa** es:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} 6y-10 & -(8y+4) \\ -(338x+111) & 52 \end{bmatrix}$$

## Fórmula de Newton-Raphson para varias variables

El método de Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales se expresa mediante la siguiente fórmula iterativa:

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k, y_k) \cdot F(x_k, y_k)$$

Donde $F(x_k, y_k)$ es el vector de funciones evaluado en $(x_k, y_k)$.

## Elección de las condiciones iniciales

Se nos piden resolver el sistema para dos puntos de intersección, **Punto A** (en el segundo cuadrante) y **Punto B** (en el primer cuadrante). Para ello, elegimos las siguientes condiciones iniciales:

- **Punto A**: $x_0 = -0.7,\ y_0 = 3.3$
- **Punto B**: $x_0 = 0.1,\ y_0 = 1.3$

## Iteraciones para el punto A

**Iteración 1** (con condiciones iniciales $(-0.7, 3.3)$):

1. Calculamos el valor de las funciones $f_1$ y $f_2$:

$$f_1(-0.7, 3.3) = 4(3.3)^2 + 4(3.3) + 52(-0.7) - 19 = 1.2$$

$$f_2(-0.7, 3.3) = 169(-0.7)^2 + 3(3.3)^2 + 111(-0.7) - 10(3.3) - 10 = -5.22$$

2. Calculamos la matriz Jacobiana $J(-0.7, 3.3)$:

$$J(-0.7, 3.3) = \begin{bmatrix} 52 & 30.4 \\ -125.3 & 9.8 \end{bmatrix}$$

3. Calculamos el determinante de $J$:

$$\det(J) = 52(9.8) - 30.4(-125.3) = 4318.72$$

4. Calculamos la matriz Jacobiana inversa $J^{-1}$ y actualizamos las iteraciones:

$$x_1 = -0.726,\ y_1 = 3.271$$

5. **Cálculo del error relativo**:

$$\text{Error en } x_1 = \frac{|2.9934 - 2.9905|}{|2.9934|} \times 100 = 3.58\%$$

$$\text{Error en } y_1 = \frac{|3.271 - 3.3|}{|3.271|} \times 100 = 0.89\%$$

**Iteración 2**:

1. Calculamos las nuevas iteraciones:

$$x_2 = -0.731,\ y_2 = 3.268$$

2. **Cálculo del error relativo:**

$$\text{Error en } x_2 = 0.68\%, \quad \text{Error en } y_2 = 0.09\%$$

Con estos resultados, se confirma que $x_1 \approx -0.731,\ y_1 \approx 3.268$ es la solución para el punto A.

## Iteraciones para el punto B

**Iteración 1** (con condiciones iniciales $(0.1, 1.3)$):

1. Calculamos el valor de las funciones $f_1$ y $f_2$:

$$f_1(0.1, 1.3) = 4(1.3)^2 + 4(1.3) + 52(0.1) - 19 = 1.2$$

$$f_2(0.1, 1.3) = 169(0.1)^2 + 3(1.3)^2 + 111(0.1) - 10(1.3) - 10 = -5.22$$

2. Calculamos la matriz Jacobiana $J(0.1, 1.3)$:

$$J(0.1, 1.3) = \begin{bmatrix} 52 & 30.4 \\ -125.3 & 9.8 \end{bmatrix}$$

3. Calculamos el determinante de $J$ y actualizamos las iteraciones. Al repetir este proceso hasta que el error sea menor al 1%, se obtiene el punto B:

$$x_3 = 0.128,\ y_3 = 1.274$$

Con estos resultados, se confirma que $x_2 \approx 0.128,\ y_2 \approx 1.274$ es la solución para el punto B.

### Conclusión

Los puntos de intersección de las dos curvas son:

- **Punto A**: $(-0.731, 3.268)$
- **Punto B**: $(0.128, 1.274)$

### Paso 5: Significado Físico-Mecánico de los Resultados

Una vez obtenidas las soluciones $x_1$ y $y_1$, estas representan las coordenadas de los puntos donde las curvas (la parábola y la elipse) se cortan. En el contexto de **ingeniería estructural**, esto podría tener aplicaciones en el análisis de **deformaciones no lineales** y **tensiones** en estructuras bajo cargas complejas. Este tipo de soluciones es crucial para diseñar materiales que puedan resistir deformaciones bajo fuerzas no lineales, algo común en **análisis de elementos finitos (FEM).**

Las soluciones obtenidas indican las ubicaciones de las intersecciones, lo cual es útil para predecir el comportamiento de las estructuras y los materiales en condiciones reales de carga.

### Conclusión:

El **método de Newton-Raphson** aplicado a sistemas no lineales de ecuaciones es una herramienta poderosa para resolver problemas complejos en **ingeniería estructural**. Permite modelar y analizar comportamientos de materiales y estructuras bajo diversas condiciones de carga, lo cual es esencial en el diseño de estructuras resistentes y eficientes.

## EJERCICIOS

### Ejercicio sobre el Método de Gauss-Seidel en Análisis Estructural

En el contexto de **Ingeniería Civil**, el **Método de Gauss-Seidel** es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones lineales, especialmente aquellos que surgen en el análisis estructural, como la determinación de **fuerzas y desplazamientos** en estructuras como puentes, edificios y otras construcciones. Este método es muy útil en el **análisis de elementos finitos** cuando se trabaja con grandes matrices de rigidez que describen la interacción entre las fuerzas internas y los desplazamientos.

A continuación, se presenta un sistema de ecuaciones lineales que debe ser resuelto utilizando el **Método de Gauss-Seidel**:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 \\ & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 41 \\ 25 \\ 105 \end{Bmatrix}$$

**Instrucciones:**

1. Utiliza el **Método de Gauss-Seidel** para resolver el sistema de ecuaciones lineales dado. Recuerda que este método consiste en despejar cada variable de manera secuencial, utilizando los valores más recientes de las variables actualizadas en cada paso.
2. Para la convergencia de las iteraciones, utiliza la **fórmula del error estimado**:

$$\text{Error} = \left| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k+1)}} \right| \times 100$$

Detén las iteraciones cuando el error estimado sea menor al 1%.

3. Una vez obtenida la última iteración, **explica el significado ingenieril** de los resultados obtenidos. ¿Qué representan los valores de $x$, $y$ y $z$ en el contexto de **fuerzas** y **desplazamientos** de la estructura? ¿Qué importancia tienen estos resultados en el análisis de la **estabilidad** y **seguridad** de las estructuras?

**Ejercicio de Aplicación del Método de Newton-Raphson en Ingeniería Electrónica**

**Contexto:**

El objetivo de este ejercicio es aplicar el método numérico de Newton-Raphson para resolver un sistema de ecuaciones no lineales. Este tipo de métodos es comúnmente utilizado en ingeniería eléctrica, especialmente en el análisis de circuitos electrónicos que contienen componentes no lineales como diodos y transistores. A través de este ejercicio, aprenderán a utilizar el método para resolver sistemas no lineales, algo crucial para el diseño y análisis de circuitos electrónicos complejos.

## Sistema de ecuaciones no lineales:

1. **Ecuación 1 (Elipse Rotada):**

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 25$$

2. **Ecuación 2 (Hipérbola):**

$$2xy = 1$$

## Objetivo:

- Calcular las soluciones para los puntos de corte de estas curvas que se encuentran en el primer cuadrante del plano cartesiano, es decir, los puntos con $x > 0$ y $y > 0$.
- Las condiciones iniciales son:

Para el Punto A usar $(x_0, y_0) = (0,2)$

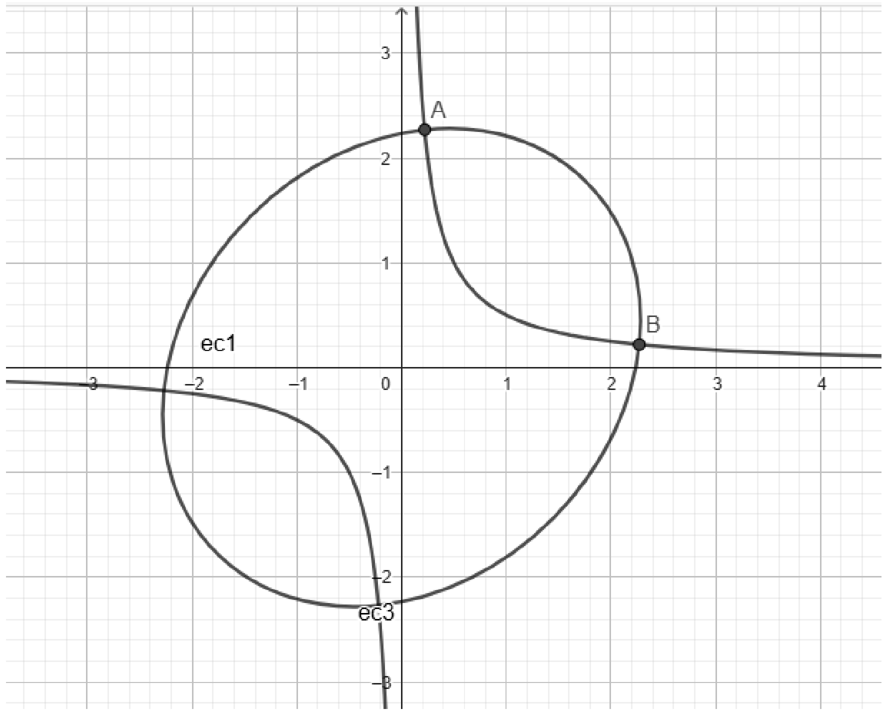
Para el Punto B usar $(x_0, y_0) = (2,0)$

## Interpretación y Significado en Ingeniería:

Una vez que obtengan las soluciones numéricas para $x$ y $y$, podrán analizar el comportamiento no lineal de las estructuras bajo cargas aplicadas. Este ejercicio es fundamental para simular el comportamiento de sistemas complejos que se encuentran en muchos sistemas electrónicos y estructuras mecánicas, como en circuitos electrónicos que incluyen componentes no lineales o en estructuras que responden de manera no lineal a las fuerzas aplicadas.

Los resultados obtenidos pueden ser utilizados en la simulación de la transferencia de calor, vibraciones de estructuras, análisis de circuitos eléctricos, entre otros. Por lo tanto, el método de Newton-Raphson es una herramienta poderosa en la ingeniería para resolver ecuaciones no lineales y facilitar la resolución de problemas complejos en estos campos.

¡Buena suerte en la resolución de este ejercicio!



A
B
ec1
ec3