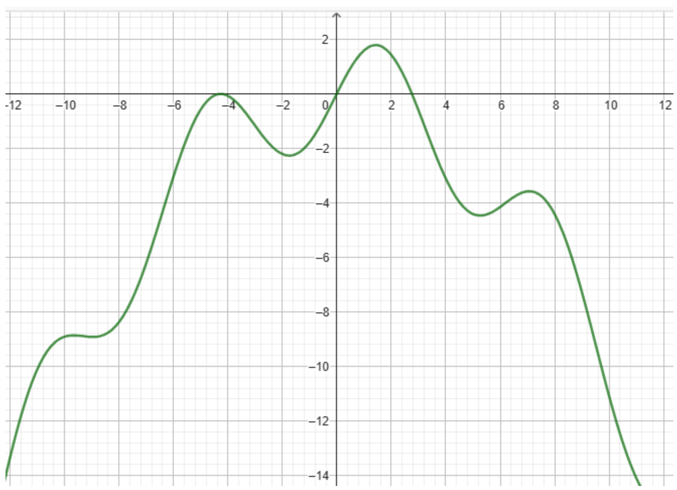
**EJEMPLO DE USO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES EN UNA VARIABLE: SECCIÓN DORADA, INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA Y NEWTON**

## Enunciado del Ejercicio: Aplicación de Métodos Numéricos en Medicina

En el ámbito médico, especialmente en el manejo de enfermedades como la diabetes, es fundamental comprender cómo las dosis de medicamentos afectan los niveles de insulina en la sangre. La insulina, una hormona clave en la regulación de los niveles de glucosa, presenta picos y valles en su concentración tras la administración de ciertos fármacos. Modelar estos cambios con funciones matemáticas permite predecir el comportamiento de la insulina y optimizar los tratamientos para cada paciente.

Consideremos la siguiente función matemática:

$$f(x) = 2\sin(x) - \frac{1}{10}x^2$$




**Interpretación de la función:**

1. $x$: Representa el tiempo transcurrido (en horas) desde la administración de un medicamento.
2. $f(x)$: Representa la concentración aproximada de insulina en la sangre (en unidades de microgramos por mililitro, $\mu g/mL$).

**Interpretación de los términos en $f(x)$:**

- El término $2\sin(x)$ modela las oscilaciones naturales en los niveles de insulina causadas por la liberación y absorción del medicamento en el organismo.
- El término $-\frac{1}{10}x^2$ describe la tendencia decreciente de la insulina en sangre debido al metabolismo y eliminación del fármaco.

**Problema a resolver:**

Se sabe que el máximo global de esta función se encuentra en el intervalo de tiempo $1 \leq x \leq 2$. Esto representa el momento en el que la concentración de insulina en la sangre alcanza su nivel más alto tras la administración del medicamento.

**Objetivo:** Usando **métodos numéricos**:

1. Determinar el valor de $x$ (en horas) que maximiza la función $f(x)$ dentro del intervalo $1 \leq x \leq 2$.
2. Estimar el valor máximo de $f(x)$ en este intervalo, el cual representa la concentración máxima de insulina en sangre.

**Importancia de este ejercicio:**

- En medicina, entender los momentos en los que los niveles de insulina alcanzan su valor máximo ayuda a ajustar las dosis de medicamentos y predecir los efectos secundarios potenciales.
- Este tipo de análisis es crucial para personalizar tratamientos en pacientes con diabetes, especialmente aquellos que dependen de insulina exógena.
- Los métodos numéricos permiten resolver problemas complejos, como la localización de máximos y mínimos en funciones no lineales, cuando no es posible obtener soluciones exactas de forma analítica.

**Instrucciones para los estudiantes:**

1. Utilizar los métodos de Sección Dorada, Interpolación Cuadrática y Newton para localizar el máximo global en el intervalo dado
2. Explica el significado biológico de los resultados obtenidos:
   - ¿Qué indica el valor de $x$ que maximiza $f(x)$?
   - ¿Cómo se interpreta el valor máximo de $f(x)$ en términos del comportamiento del medicamento en el organismo?

Este ejercicio demuestra cómo las herramientas matemáticas, como los métodos numéricos, son esenciales para el análisis de problemas médicos y cómo permiten tomar decisiones informadas en el tratamiento de enfermedades crónicas como la diabetes.

## Método de la Sección Dorada

El **método de la sección dorada** es un algoritmo numérico para localizar máximos o mínimos de funciones unimodales (funciones que tienen un único máximo o mínimo en un intervalo dado). Este método se basa en la proporción áurea ($\phi$), una relación matemática que minimiza el número de evaluaciones necesarias para encontrar el óptimo dentro de un intervalo.

---

## Conceptos Clave

1. **Proporción Áurea ($\phi$):**

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

   Su inverso es:

$$\frac{1}{\phi} \approx 0.618$$

2. **Unimodalidad:** El método requiere que la función sea unimodal en el intervalo de búsqueda, es decir, que tenga un único máximo o mínimo.
3. **Reducir Evaluaciones:** En cada paso, el método reduce el tamaño del intervalo de búsqueda mientras mantiene los puntos evaluados en la proporción áurea, lo que lo hace eficiente en términos de evaluaciones de la función.

---

## Procedimiento del Método

Dado un intervalo inicial $[a, b]$ y una función $f(x)$ unimodal:

1. **Inicialización:**
   - Calcular dos puntos intermedios $x_1$ y $x_2$ dentro del intervalo utilizando la proporción áurea:

$$x_1 = b - (b-a) \cdot 0.618, \quad x_2 = a + (b-a) \cdot 0.618$$

   - Evaluar $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

2. **Actualización del Intervalo**:
   - Si $f(x_1) < f(x_2)$ (para minimizar), entonces el nuevo intervalo es $[a, x_2]$.
   - Si $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces el nuevo intervalo es $[x_1, b]$.
   - Para maximización, la comparación entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se invierte.
3. **Repetición:**
   - Recalcular los puntos $x_1$ y $x_2$ dentro del nuevo intervalo.
   - Evaluar $f(x_1)$ y $f(x_2)$.
   - Repetir hasta que el tamaño del intervalo sea menor que una tolerancia predefinida ($\varepsilon$).
4. **Convergencia**:
   - El valor óptimo se encuentra cerca del punto medio del intervalo final.

---

## Ventajas del Método

1. **Eficiencia**: El uso de la proporción áurea minimiza las evaluaciones de la función, lo que lo hace útil para funciones costosas de evaluar.
2. **Simplicidad**: El método es fácil de implementar y no requiere derivadas de la función.
3. **Aplicabilidad:** Es adecuado para funciones no diferenciables o complejas, siempre que sean unimodales.

## Desventajas del Método

1. **Unimodalidad Requerida**: El método solo funciona bien si la función tiene un único máximo o mínimo en el intervalo.
2. **Convergencia Relativamente Lenta:** Aunque eficiente, converge más lentamente que métodos que emplean derivadas (como Newton-Raphson).
3. **Dependencia del Intervalo Inicial:** Requiere que el intervalo inicial contenga el máximo o mínimo buscado.

---

## Aplicaciones

1. **Optimización Matemática:**
   - Problemas de maximización o minimización en ingeniería y ciencias.
2. **Medicina:**
   - Localización de picos de concentración de medicamentos en sangre.
3. **Economía:**
   - Análisis de curvas de beneficio o costo.
4. **Ingeniería:**
   - Optimización de diseños estructurales o procesos industriales.

### Solución al Problema

**Función:** $f(x) = 2\sin(x) - \frac{1}{10}x^2$
**Intervalo inicial:** $[1, 2]$

**Iteraciones:**

**Iteración 1:**

- $a_0 = 1, b_0 = 2$
- $x_1 = 1 + (1 - 0.618)(1) = 1.382$
- $x_2 = 1 + 0.618(1) = 1.618$
- $f(x_1) = 1.6782,\ f(x_2) = 1.6745$

- Como $f(x_1) > f(x_2)$, el nuevo intervalo es $[1, 1.618]$.

**Iteración 2:**

- $a_1 = 1, b_1 = 1.618$
- $x_1 = 1 + (1 - 0.618)(0.618) = 1.236$
- $x_2 = 1 + 0.618(0.618) = 1.382$
- $f(x_1) = 1.6773,\ f(x_2) = 1.6782$
- Como $f(x_1) < f(x_2)$, el nuevo intervalo es $[1.236, 1.618]$.

**Iteración 3:**

- $a_2 = 1.236, b_2 = 1.618$
- $x_1 = 1.236 + (1 - 0.618)(0.382) = 1.382$
- $x_2 = 1.236 + 0.618(0.382) = 1.472$
- $f(x_1) = 1.6782,\ f(x_2) = 1.6778$
- Como $f(x_1) > f(x_2)$, el nuevo intervalo es $[1.236, 1.472]$.

**Iteración 4:**

- $a_3 = 1.236, b_3 = 1.472$
- $x_1 = 1.236 + (1 - 0.618)(0.236) = 1.326$
- $x_2 = 1.236 + 0.618(0.236) = 1.382$
- $f(x_1) = 1.6780,\ f(x_2) = 1.6782$
- Como $f(x_1) < f(x_2)$, el nuevo intervalo es $[1.326, 1.472]$.

**Resultado:**

- Después de 4 iteraciones, la raíz se aproxima a $x \approx 1.382$, con:

$$f(1.382) \approx 1.678$$

## Conclusión

El máximo global de $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ se encuentra aproximadamente en $x \approx 1.382$, con una concentración máxima de $f(1.382) \approx 1.678$.

**Velocidad de Convergencia:**

- La reducción sistemática del intervalo asegura que el método converge, aunque con velocidad lineal en lugar de cuadrática.

El método de la sección dorada es especialmente valioso en problemas de optimización práctica, como los encontrados en medicina, física e ingeniería, donde se busca equilibrio entre simplicidad, robustez y eficiencia computacional.

## Método de la Interpolación Cuadrática

El método de la interpolación cuadrática es una técnica numérica utilizada para localizar máximos, mínimos o raíces de una función $f(x)$. Se basa en aproximar la función original mediante un polinomio cuadrático ($p(x)$) que interpola la función en tres puntos conocidos. Posteriormente, el punto crítico (máximo, mínimo o raíz) del polinomio cuadrático se utiliza como una nueva aproximación al óptimo o raíz de la función.

---

## Procedimiento General

1. **Selección de tres puntos iniciales**: Se eligen tres valores de $x$, denotados como $x_0$, $x_1$, y $x_2$, con sus correspondientes valores de la función: $f(x_0)$, $f(x_1)$, y $f(x_2)$.
2. **Construcción del polinomio cuadrático**: El polinomio cuadrático que interpola los puntos es de la forma:

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + b(x - x_0)(x - x_2) + c(x - x_0)(x - x_1)$$

Donde los coeficientes $a$, $b$, y $c$ se determinan usando los valores de $f(x)$ en los tres puntos.

De manera equivalente, $p(x)$ también puede escribirse como:

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

utilizando interpolación de Lagrange o diferencias divididas.

3. **Cálculo del punto crítico del polinomio**: Para encontrar el punto crítico (máximo o mínimo) del polinomio $p(x)$, se calcula la derivada $p'(x)$ y se iguala a cero:

$$x_{\text{crítico}} = -\frac{B}{2A}$$

donde $A$ y $B$ son los coeficientes del término cuadrático y lineal, respectivamente.

4. **Actualización de los puntos**: El punto crítico $x_{\text{crítico}}$ se utiliza como uno de los nuevos puntos para la próxima iteración, reemplazando el punto más lejano o menos relevante.

5. **Repetición del proceso**: Se repite el cálculo hasta que el cambio entre las iteraciones sea menor que una tolerancia predefinida ($\epsilon$) o se alcance el número máximo de iteraciones.

Fórmulas

$$C = \frac{x_1 x_2 p_0 (x_1 - x_2) + x_0 x_2 p_1 (x_2 - x_0) + x_0 x_1 p_2 (x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$B = \frac{p_0 (x_2^2 - x_1^2) + p_1 (x_0^2 - x_2^2) + p_2 (x_1^2 - x_0^2)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$A = \frac{p_0 (x_1 - x_2) + p_1 (x_2 - x_0) + p_2 (x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$x_{crítico} = \frac{p_0 (x_1^2 - x_2^2) + p_1 (x_2^2 - x_0^2) + p_2 (x_0^2 - x_1^2)}{2p_0 (x_1 - x_2) + 2p_1 (x_2 - x_0) + 2p_2 (x_0 - x_1)}$$

Donde: $p_0 = f(x_0)$, $p_1 = f(x_1)$, $p_2 = f(x_2)$

---

## Ventajas del Método

- **Convergencia rápida**: Dado que utiliza información cuadrática, puede converger más rápido que métodos lineales como la secante o la bisección.
- **Precisión mejorada**: Aproxima la función de manera más fiel que la interpolación lineal, especialmente cuando la función tiene curvatura significativa.
- **Independencia de derivadas**: A diferencia de métodos como Newton-Raphson, no requiere calcular derivadas de la función.

---

## Desventajas del Método

- **Requiere tres puntos iniciales**: Esto puede complicar la elección inicial, ya que puntos mal seleccionados pueden llevar a divergencia o a resultados inexactos.
- **Complejidad computacional**: Comparado con métodos lineales, este método requiere más cálculos en cada iteración debido a la construcción del polinomio cuadrático.
- **Problemas con funciones discontinuas o muy oscilatorias**: La interpolación cuadrática puede fallar en representar adecuadamente la función si esta tiene discontinuidades o fluctuaciones extremas.

---

## Aplicación Práctica

El método de la interpolación cuadrática es particularmente útil en:

1. **Optimización unidimensional**: Para localizar máximos o mínimos de funciones suaves, como las relacionadas con modelos biológicos, económicos o de dinámica de sistemas.
2. **Búsqueda de raíces**: En problemas donde la función no es fácilmente derivable.
3. **Problemas de ajuste de datos**: Cuando se desea modelar el comportamiento de una función con un ajuste simple pero efectivo.

---

---

## Solución Aplicada al Problema

**Función dada:**

$$f(x) = 2\sin(x) - 0.1x^2$$

**Iteraciones:**

1. **Iteración 1**:
   - Puntos iniciales: $x_1 = 1.0$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 2.0$.
   - Valores de la función:
   $$f(x_1) = 1.7183,\ f(x_2) = 1.8991,\ f(x_3) = 1.5838.$$

- Nuevo vértice:
$$x_4 = 1.4795.$$

2. **Iteración 2**:
   - Actualización de puntos: $x_1 = 1.0$, $x_2 = 1.4795$, $x_3 = 1.5$.
   - Valores de la función:
   $$f(x_1) = 1.7183,\ f(x_2) = 1.9007,\ f(x_3) = 1.8991.$$
   - Nuevo vértice:
   $$x_4 = 1.4789.$$

3. **Iteración 3**:
   - Actualización de puntos: $x_1 = 1.4789$, $x_2 = 1.4795$, $x_3 = 1.5$.
   - Valores de la función:
   $$f(x_1) = 1.9007,\ f(x_2) = 1.9007,\ f(x_3) = 1.8991.$$
   - Nuevo vértice:
   $$x_4 = 1.4792.$$

4. **Iteración 4**:
   - Actualización de puntos: $x_1 = 1.4789$, $x_2 = 1.4792$, $x_3 = 1.4795$.
   - Valores de la función:
   $$f(x_1) = 1.9007,\ f(x_2) = 1.9007,\ f(x_3) = 1.9007.$$
   - Nuevo vértice:
   $$x_4 = 1.4792.$$

**Resultado Final:**

- El máximo global ocurre en $x \approx 1.4792$.
- El valor máximo de la función es $f(1.4792) \approx 1.9007$.

## Ventajas del Método

1. **Precisión:** El ajuste cuadrático permite una aproximación precisa con pocas iteraciones.
2. **Velocidad de convergencia:** Converge más rápido que métodos lineales, como el de la secante, especialmente para funciones suaves y continuas.
3. **Independencia de derivadas:** No requiere el cálculo de derivadas, a diferencia del método de Newton-Raphson.

---

### Desventajas del Método

1. **Dependencia de los puntos iniciales:** Puntos mal elegidos pueden llevar a una convergencia lenta o resultados inexactos.
2. **Complejidad numérica:** La fórmula para el vértice requiere más cálculos que métodos más simples, como el de bisección.
3. **Limitaciones en funciones oscilatorias:** Puede no converger adecuadamente en funciones con múltiples máximos o mínimos locales.

---

## Conclusión

El método de interpolación cuadrática es una herramienta poderosa para localizar máximos o mínimos de funciones suaves. En este caso, permitió identificar con alta precisión el máximo global de $f(x) = 2\sin(x) - 0.1x^2$ en el intervalo $[1, 2]$. Su rapidez y precisión lo convierten en una excelente opción para problemas de optimización. Sin embargo, su eficacia depende de la elección adecuada de los puntos iniciales, y puede ser computacionalmente más exigente que otros métodos básicos.

## Método de Optimización de Newton

El método de optimización de Newton es una técnica numérica que se utiliza para localizar máximos o mínimos de una función $f(x)$. Es una extensión directa del método clásico de Newton-Raphson, que se usa para encontrar raíces de funciones, pero adaptado para buscar puntos críticos (donde $f'(x) = 0$) y determinar si son máximos o mínimos utilizando información adicional de la segunda derivada ($f''(x)$).

---

## Fundamento del Método

El método se basa en la aproximación de la función $f(x)$ por un polinomio cuadrático mediante la expansión en serie de Taylor de segundo orden alrededor de un punto inicial $x_n$:

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x - x_n)^2$$

Para encontrar el punto crítico (donde $f'(x) = 0$), se resuelve la ecuación:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

Esta fórmula iterativa es la base del método de optimización de Newton.

---

## Algoritmo

1. **Punto inicial:** Seleccionar un valor inicial $x_0$ cercano al extremo deseado.
2. **Iteración:** Utilizar la fórmula de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

3. **Convergencia:** Repetir hasta que se cumpla un criterio de tolerancia, como $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, o hasta alcanzar un número máximo de iteraciones.

---

## Criterios para Máximos o Mínimos

- Si $f''(x_n) > 0$, el punto crítico es un **mínimo local**.
- Si $f''(x_n) < 0$, el punto crítico es un **máximo local**.
- Si $f''(x_n) = 0$, el método no puede determinar el tipo de punto crítico (puede ser un punto de inflexión).

---

## Ventajas del Método

1. **Convergencia cuadrática:** Si la función es suficientemente suave y la aproximación inicial $x_0$ está cerca del punto crítico, el método converge muy rápidamente.
2. **Precisión:** El uso de la segunda derivada permite aproximar con alta precisión la posición del extremo.
3. **Simplicidad matemática:** La fórmula es sencilla y directa.

---

## Desventajas del Método

1. **Dependencia de las derivadas:** Requiere calcular tanto la primera como la segunda derivada de $f(x)$, lo que puede ser complicado o costoso para funciones complejas.
2. **Sensibilidad al punto inicial:** Si $x_0$ está lejos del extremo o si $f''(x)$ es cercano a cero, el método puede diverger o producir resultados inexactos.
3. **Limitaciones en funciones no suaves:** El método no es adecuado para funciones con discontinuidades o puntos angulosos.

---

### Análisis del Método de Optimización de Newton Aplicado al Problema

El **método de optimización de Newton** es una técnica numérica utilizada para encontrar máximos o mínimos de funciones. En este caso, se empleó para determinar el **máximo global** de la función:

$$f(x) = 2\sin(x) - \frac{1}{10}x^2$$

en el intervalo $[1, 2]$.

---

## Aspectos Teóricos del Método

El método de optimización de Newton utiliza derivadas de primer y segundo orden para encontrar los puntos críticos de una función ($f'(x) = 0$) y clasificar si son máximos o mínimos mediante el signo de $f''(x)$. La fórmula iterativa del método es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

Para esta función:

1. La **primera derivada**:

$$f'(x) = 2\cos(x) - \frac{1}{5}x$$

2. La **segunda derivada**:

$$f''(x) = -2\sin(x) - \frac{1}{5}$$

El algoritmo requiere un punto inicial $x_0$ y actualiza el valor de $x$ en cada iteración hasta que se cumpla un criterio de convergencia, como un cambio muy pequeño entre iteraciones ($|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$).

---

## Iteraciones

**Punto inicial:** $x_0 = 1.5$

1. **Iteración 1**:

$$x_1 = 1.5 - \frac{2\cos(1.5) - 0.3}{-2\sin(1.5) - 0.2}$$

- $f'(1.5) = 0.69973$, $f''(1.5) = -2.19748$
- $x_1 = 1.5 + 0.31841 = 1.81841$

2. **Iteración 2**:

$$x_2 = 1.81841 - \frac{2\cos(1.81841) - 0.36368}{-2\sin(1.81841) - 0.2}$$

   - $f'(1.81841) = 0.23937$, $f''(1.81841) = -2.32843$
   - $x_2 = 1.81841 - (-0.10281) = 1.71560$

3. **Iteración 3**:

$$x_3 = 1.71560 - \frac{2\cos(1.71560) - 0.34312}{-2\sin(1.71560) - 0.2}$$

   - $f'(1.71560) = 0.00843$, $f''(1.71560) = -2.24671$
   - $x_3 = 1.71560 - (-0.00375) = 1.71935$

4. **Iteración 4**:

$$x_4 = 1.71935 - \frac{2\cos(1.71935) - 0.34387}{-2\sin(1.71935) - 0.2}$$

   - $f'(1.71935) = 0.00001$, $f''(1.71935) = -2.24892$
   - $x_4 = 1.71935$

### Resultados

Después de cuatro iteraciones, se alcanza la convergencia con:

- **Máximo global** en $x \approx 1.71935$.
- **Valor máximo de la función**:

$$f(1.71935) = 2\sin(1.71935) - \frac{1}{10}(1.71935)^2 \approx 1.6964$$

---

## Ventajas del Método

1. **Velocidad de convergencia**: El método converge de forma cuadrática, lo que significa que los errores disminuyen rápidamente en cada iteración, especialmente si el punto inicial está cerca del máximo.
2. **Precisión**: Utiliza información de las derivadas de primer y segundo orden, proporcionando resultados precisos.
3. **Simplicidad matemática**: La fórmula es directa y fácil de implementar.

---

## Desventajas del Método

1. **Requiere derivadas**: El cálculo de $f'(x)$ y $f''(x)$ puede ser complicado para funciones más complejas.
2. **Sensibilidad al punto inicial**: Si el punto inicial está lejos del extremo deseado, el método puede diverger o converger a un extremo no deseado.
3. **Problemas con $f''(x) = 0$**: Si la segunda derivada es cercana a cero, la fórmula puede generar errores o inestabilidad numérica.

---

## Conclusión

El método de optimización de Newton es una herramienta poderosa para encontrar máximos y mínimos de funciones suaves y bien definidas. En este caso, permitió localizar con rapidez y precisión el máximo global de $f(x) = 2\sin(x) - \frac{1}{10}x^2$. Este método destaca por su velocidad de convergencia, aunque su efectividad depende de una buena elección del punto inicial y de la disponibilidad de las derivadas de la función. Es especialmente útil en problemas donde la precisión es crucial y las derivadas están bien definidas.

(Valor Verdadero: x = 1.427551779; imagen: f(1.4275) = 1.77572)

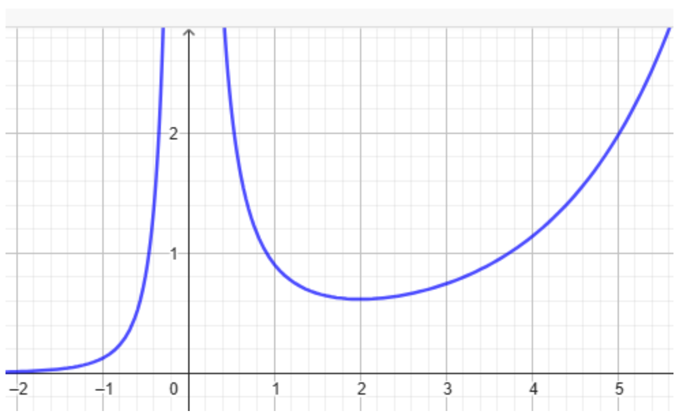
EJERCICIO PROPUESTO

## Enunciado del Ejercicio: Aplicación de Métodos Numéricos en Medicina

En el manejo de enfermedades crónicas como la diabetes, el análisis matemático resulta fundamental para modelar el comportamiento de los niveles de insulina en sangre tras la administración de medicamentos. Los picos y valles en la concentración de insulina están directamente relacionados con las dosis administradas, el tiempo transcurrido y la respuesta fisiológica del paciente.

La siguiente función matemática modela de manera simplificada cómo los niveles de insulina varían tras la administración de un medicamento:

$$f(x) = \frac{e^x}{3x^2}$$




1. **Variable independiente $x$:**
   - Representa el tiempo transcurrido (en horas) después de la administración del medicamento.
2. **Variable dependiente $f(x)$:**
   - Representa la concentración de insulina en la sangre (en unidades de microgramos por mililitro, $\mu g/mL$) en función del tiempo.

### Significado de los términos en la función:

- El término $e^x$ refleja la tendencia de incremento exponencial que puede experimentar la concentración de insulina debido a la absorción inicial del medicamento.
- El término $3x^2$ modela el efecto de dispersión y eliminación del medicamento en el organismo, que aumenta con el tiempo.

- En conjunto, la función captura un comportamiento típico donde la insulina tiene un pico inicial y luego disminuye conforme el medicamento es metabolizado.

**Problema a Resolver**

Se sabe que la función tiene un **mínimo global** en el intervalo $1 \leq x \leq 3$, que corresponde al tiempo en el cual la concentración de insulina alcanza su nivel más bajo dentro de este rango. Esto es importante porque identifica un momento crítico en el que los niveles de insulina podrían ser insuficientes para regular adecuadamente la glucosa en sangre.

**Objetivo**: Usando **métodos numéricos**, determinar:

1. El valor de $x$ (en horas) en el intervalo $[1, 3]$ que minimiza la función $f(x)$.
2. El valor mínimo de $f(x)$, que representa la concentración más baja de insulina en este periodo.

**Importancia del ejercicio**

Este análisis tiene implicaciones directas en la práctica médica, ya que:

1. Identificar el momento en el que la insulina está en su nivel más bajo permite anticipar el posible riesgo de hiperglucemia (niveles altos de glucosa) y ajustar las dosis de los medicamentos o insulina.
2. Modelar funciones como $f(x)$ ayuda a entender los efectos de medicamentos en diferentes pacientes, considerando variaciones individuales.
3. Los métodos numéricos permiten resolver problemas complejos como este, en los cuales no es posible encontrar soluciones exactas de manera analítica.

## Métodos a utilizar

1. **Método de la Sección Dorada:**
    - Este método es adecuado para localizar extremos en un intervalo cerrado, dividiendo el intervalo en proporciones basadas en el número áureo.
    - Realice **cuatro iteraciones** siguiendo el procedimiento del método.
2. **Método de Interpolación Cuadrática:**
    - Emplee tres puntos iniciales ($x_1, x_2, x_3$) en el intervalo $[1, 3]$ y ajuste una parábola para aproximar el mínimo.
    - Realice **cuatro iteraciones** actualizando los puntos.

3. **Método de Optimización de Newton:**
   - Calcule las primeras dos derivadas de la función $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(3x-2)}{3x^3}, \quad f''(x) = \frac{e^x(3x^2-6x+6)}{3x^4}$$

   - Use $x_0 = 2.0$ como punto inicial y realice **cuatro iteraciones**.

**Comparación de métodos:**

- Compare las soluciones obtenidas ($x$ y $f(x)$) para los tres métodos.

**RESUMEN**

| Método | Fórmulas Principales | Requerimientos | Ventajas | Desventajas | Convergencia | Robustez |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sección Dorada** | - División del intervalo en proporción áurea: $x_1 = a + (1-\phi)(b-a)$, $x_2 = a + \phi(b-a)$, $\quad \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ | - Intervalo inicial $[a, b]$.<br>- La función $f(x)$ debe ser unimodal en el intervalo.<br>- No requiere derivadas. | - No requiere derivadas.<br>- Siempre converge si la función es unimodal.<br>- Fácil de implementar.<br>- Ideal para funciones continuas en intervalos cerrados. | - Convergencia lineal (lenta).<br>- Menos eficiente para funciones suaves comparado con métodos que usan derivadas. | **Lineal** | Muy robusto: adecuado para funciones no derivables, discontinuas o ruidosas. |
| **Interpolación Cuadrática** | - Ajuste de parábola usando tres puntos: $x_4 = x_2 - \frac{(x_2-x_1)^2(f(x_2)-f(x_3))-(x_2-x_3)^2(f(x_2)-f(x_1))}{2[(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_3))-(x_2-x_3)(f(x_2)-f(x_1))]}$ | - Tres puntos iniciales ($x_1, x_2, x_3$).<br>- La función $f(x)$ debe ser suave y continua.<br>- No requiere derivadas explícitas. | - Convergencia más rápida que la Sección Dorada.<br>- Aproximación precisa con funciones suaves.<br>- No requiere derivadas explícitas.<br>- Útil para funciones cuadráticas o suaves. | - Puede fallar si los puntos iniciales están mal elegidos.<br>- La fórmula puede volverse inestable si los denominadores son muy pequeños.<br>- Sensible al ruido. | **Superlineal** | Moderadamente robusto: adecuado para funciones suaves pero menos eficaz con funciones no continuas o ruidosas. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Optimización de Newton** | - Fórmula iterativa: $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$ | - Punto inicial $x_0$.<br>- Cálculo de la primera y segunda derivadas ( $f'(x)$ y $f''(x)$).<br>- La función debe ser dos veces derivable y suave. | - Convergencia cuadrática si el punto inicial está cerca del extremo.<br>- Muy preciso en funciones suaves.<br>- Ideal para problemas donde se pueden calcular derivadas. | - Requiere derivadas, lo cual puede ser complejo o costoso.<br>- Puede diverger si $f''(x_n) \approx 0$.<br>- Sensible a puntos iniciales alejados del extremo deseado. | **Cuadrática (rápida)** | Poco robusto: problemas en funciones no suaves, con derivadas complicadas, o cuando el punto inicial está lejos del extremo deseado. |

Esta comparación ayuda a elegir el método más adecuado según las características de la función y las condiciones del problema.