Tema 3. Optimización Lineal Entera

Introducción

Investigación Operativa Grado Ingeniería del Software

Universidad Rey Juan Carlos

Antonio Alonso Ayuso
antonio.alonso@urjc.es

ontenidos

ontenidos

iversidad
y Juan Carlos

ıtroducción

ɔs modelos de programación entera son una extensión de los ıodelos lineales en los que algunas variables toman valores enteros.

on frecuencia las variables enteras sólo toman valores en 0-1, ya ue este tipo de variables permiten representar condiciones lógicas.

ste tipo de modelos permite representar sistemas mucho más ɔmplejos.

cambio, la resolución de los mismos se complica excesivamente.

roblemas con unas solas decenas de variables pueden ser casi ıposibles de resolver.

ontenidos

ontenidos

roblema de la mochila

e desea maximizar la utilidad total de la selección dentro de un onjunto de n objetos de tal modo que no se sobrepase la capacidad b isponible, conociendo tanto las utilidades v_j de cada objeto como los esos de los mismos p_j.

'ariables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el objeto } j \text{ es seleccionado,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

roblema de la mochila

Restricciones

- Límite de peso de la mochila: $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq b$
- Condición de variables binarias: $x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j = 1, \ldots, n$

unción objetivo

$$\text{máx} \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

e pueden considerar variantes en las que se incluya también el volumen, tc., o la posibilidad de que haya más de una unidad de cada objeto.

n este último caso, las variables serían x_j igual al número de unidades del bjeto j seleccionadas.

roblema de la mochila: Ejemplo

n un camión se desean cargar mercancías de 5 tipos diferentes en uanto a su peso, valor y volumen, según se especifica en la siguiente ıbla:

Mercancía Tipo		Peso	Volumen	Valor
	1	5	1	4
	2	8	8	7
	3	3	6	6
	4	2	5	5
	5	7	4	4

n el citado camión sólo se admite un peso máximo de 112 y un olumen máximo de 109.

Cuántos productos de cada tipo debe llevar para maximizar el valor e la carga?

roblema de la mochila: Ejemplo

ariables

, número de objetos del tipo j seleccionados, $j = 1, \ldots, 5$.

odelo

$$\max 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5$$

$$5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 7x_5 \le 112$$

$$1x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 \le 109$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$$

ontenidos

roblema de asignación

l modelo de asignación permite asignar eficientemente un conjunto e personas a un conjunto de trabajos, máquinas a tareas, coches de olic´ıa a sectores de una ciudad, vendedores a zonas, etc.

l objetivo es minimizar los costes, tiempos de desplazamiento, o aximizar la efectividad.

s un modelo muy frecuente como submodelo en otros más omplejos.

roblema de asignación

- e disponen de n máquinas para realizar n tareas.
- ada máquinas realiza una única tarea.
- ada tarea debe realizarse por una sola máquina.
- ea c_{ij} el coste de asignar la máquina i a la tarea j.
- l objetivo es encontrar la asignación de máquinas a tareas de mínimo oste.

'ariables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la máquina } i \text{ se asigna a la tarea } j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \forall\ i, j = 1, \ldots, n.$$

[Pr]oblema de asignación

[R]estricciones

- Cada tarea se realiza una vez: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \; \forall \; j = 1, \ldots, n.$
- Cada máquina realiza una tarea: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; \forall \; i = 1, \ldots, n.$
- Condición de variables binarias $x_{ij} \in \{0, 1\} \; \forall \; i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n$

[O]bjetivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

[E]s un caso particular del problema del transporte en el que $a_i = b_j = 1$.

roblema de asignación: Ejemplo

uan es el jefe de un bufete de jóvenes abogados y está interesado en utilización más efectiva de sus recursos de personal buscando la orma de hacer las mejores asignaciones de abogado-cliente.

l 1 de Marzo le llegan 4 nuevos clientes.

evisando a su personal encuentra que 4 abogados: Ana, Bruno, armen y Domingo.

odos pueden ser asignados a los casos.

ada uno de ellos sólo se puede hacer cargo de un caso.

roblema de asignación: Ejemplo

ara decidir la mejor asignación Juan tiene en cuenta una tasa de fectividad (de 1 a 9) construida sobre actuaciones anteriores de ichos abogados, ya que no todos son igual de buenos (especialistas) n todo tipo de procesos:

TASA DE EFECTIVIDAD SEGÚN CASO DE CLIENTE

Abogado	divorcio (1)	fusión empresarial (2)	desfalco (3)	herencias (4)
ANA (1)	6	2	8	5
BRUNO (2)	9	3	5	8
CARMEN (3)	4	8	3	4
DOMINGO (4)	6	7	6	4

Problema de asignación: Ejemplo

Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el abogado } i \text{ lleva el caso del cliente } j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Modelo

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 6x_{11} + 2x_{12} + 8x_{13} + 5x_{14} + 9x_{21} + 3x_{22} + 5x_{33} + 8x_{44} + \\ & 4x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 4x_{34} + 6x_{41} + 7x_{42} + 6x_{43} + 4x_{44} \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad \forall\, j = 1, \ldots, 4, \\ & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad \forall\, i = 1, \ldots, 4, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, 4,\ \forall j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

ontenidos

niversidad
y Juan Carlos

roblema de Asignación Generalizada

- s una generalización del modelo anterior.
- ada máquina puede hacer más de un trabajo simultáneamente, empre y cuando no supere su capacidad.
- ado un conjunto de m máquinas y n trabajos, se debe asignar cada abajo a una máquina de forma que el coste sea mínimo.
- i el trabajo j se realiza en la máquina i consume una cantidad a_{ij} de capacidad de dicha máquina con un coste de c_{ij}.
- a capacidad de cada máquina es b_j.

roblema de asignación generalizada: Modelo

Variables

$x_{ij} = 1$ si el trabajo j se asigna a la máquina i y 0 en otro caso.

Modelo

$$
\begin{aligned}
z = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & \qquad j = 1, \ldots, n \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i & \qquad i = 1, \ldots, m \\
x_{ij} \in \{0, 1\} &
\end{aligned}
$$

y Juan Carlos

ontenidos

roblema de cubrimiento y partición

- ea el conjunto $I_m = \{1, \ldots, m\}$
- ea una colección de subconjuntos de $\mathbf{I}_m$, S_j, $j = 1, \ldots, n$.
- sta colección forma un cubrimiento de $\mathbf{I}_m$ si:

$$\bigcup_{j=1}^{n} S_j = I_m$$

- i además,

$$S_i \cap S_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j$$

 colección se denomina partición.

- i a cada subconjunto S_j se le asigna un coste, el problema consiste en ncontrar el cubrimiento o la partición de mínimo coste.

roblema deCubrimiento y partición

$$\mathbf{I}_m = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L\}$$

$S_1 = \{A, B, C\}$ $S_2 = \{C, D, E, F\}$ $S_3 = \{G, H, I, J, L\}$

$S_4 = \{A, B\}$ $S_5 = \{A, C, F, G\}$ $S_6 = \{A, B, G, H, L\}$

$S_7 = \{A, B, D\}$ $S_8 = \{E, F, J, L\}$ $S_9 = \{B, C, D\}$

Partición: S_4, S_2, S_3

Cubrimiento: S_1, S_7, S_8, S_3

roblema de cubrimiento y partición: Modelo

ara construir el modelo se definen las constantes (descripción de S_j):

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in S_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i \in I_m, j = 1, \ldots, n$$

$$I_m = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L\}$$

$$S_6 = \{A, B, G, H, L\} \qquad a_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

'ariables

$$= \begin{cases} 1 & \text{si el conjunto } S_j \text{ es seleccionado,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Problema de cubrimiento y partición: Modelo

estricciones

- Problema de cubrimiento: cada objeto debe pertenecer a un conjunto, al menos:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad \forall i \in I_m$$
- Problema de partición: cada objeto debe pertenecer exactamente a un conjunto:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \qquad \forall i \in I_m$$
- Condición de variables binarias: $x_j \in \{0, 1\}, \forall i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$

bjetivo

eleccionar los conjuntos de mínimo coste: $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

roblema de cubrimiento y partición: Ejemplo

l condado de Washington incluye 6 poblaciones que necesitan ervicios de ambulancias para urgencias.

as estaciones de ambulancias pueden estar ubicadas en cualquiera e las 6 poblaciones (o en todas).

ebido a la proximidad de algunas de las poblaciones, una única stación puede dar servicio a más de una comunidad.

a estación debe estar a 15 minutos de distancia de las poblaciones a is que sirve.

roblema de cubrimiento y partición: Ejemplo

as distancias entre las poblaciones (en tiempo empleado en ir de una otra) son:

	1	2	3	4	5	6	Coste
1	0	23	14	18	10	32	100
2	23	0	24	13	22	11	120
3	14	24	0	60	19	20	90
4	18	13	60	0	55	17	60
5	10	22	19	55	0	12	80
6	32	11	20	17	12	0	95

eterminar la ubicación de las estaciones que minimiza el número de staciones de ambulancias.

roblema de cubrimiento y partición: Ejemplo

efinimos cada conjunto S_i como el conjunto de ciudades que se
uede atender desde la población i .

	1	2	3	4	5	6	Vector a
1	0	23	14	18	10	32	(1,0,1,0,1,0)
2	23	0	24	13	22	11	(0,1,0,1,0,1)
3	14	24	0	60	19	20	(1,0,1,0,0,0)
4	18	13	60	0	55	17	(0,1,0,1,0,0)
5	10	22	19	55	0	12	(1,0,0,0,1,1)
6	32	11	20	17	12	0	(0,1,0,0,1,1)

Solución óptima: 1 y 2. Coste=220.

ontenidos

roblema del viajante

s uno de los más famosos problemas de optimización.

efinición

n agente tiene que recorrer n ciudades, saliendo de una ciudad y egresando a ella. Se conoce la distancia entre cada par de ciudades, d_{ij}. El roblema es determinar la ruta de distancia m´ınima.

as aplicaciones no se limitan al aspecto f´ısico de determinar recorridos onstrucción de circuitos electrónicos, ordenación de tareas, etc.)

efinición

na máquina tiene que realizar un conjunto de n tareas. Cada tarea tiene un empo de preparación que depende de la tarea que se ha realizado mediatamente antes. El problema consiste en determinar el orden en el ue se tienen que realizar las tareas de forma que la duración de la ecución de todas las tareas sea mínima.

ariables

$$
x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el agente va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \text{ en el tramo } k. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i, j, k = 1, \ldots, n
$$

estricciones (1/2)

- El agente debe salir de todas las ciudades:

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

- El agente debe llegar a todas las ciudades:

$$\sum_{i,k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Restricciones (2/2)

- Cada tramo debe unir dos ciudades;

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall k = 1,\ldots,n$$

- Cada tramo debe empezar donde acabó el anterior:

$$\sum_{i} x_{ijk} = \sum_{i} x_{jik+1} \qquad \forall j,k = 1,\ldots,n$$

  Nota: si $k = n$, entonces, $k + 1 = 1$. El primer sumando vale 0 si el tramo k no acaba en la ciudad j y 1 en otro caso. El segundo sumando vale 0 si el tramo $k + 1$ no empieza en la ciudad j y 0 en otro caso.

- Integralidad de las variables: $x_{ijk} \in \{0, 1\}$, $\forall i, j, k = 1, \ldots, n$

bjetivo

$$\text{m\'in} \sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ij} x_{ijk}.$$

roblema del viajante. Modelo 2

ólo se indica qué tramos se hacen, pero no qué posición ocupa cada amo en la ruta final.

or ello, se elimina el sub´ındice k de las variables y se reduce ensiblemente el número de variables.

'ariables

$$ _{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el agente va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i, j = , \ldots, n $$

)bjetivo

$$ \min \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}. $$

estricciones

- El agente debe salir de todas las ciudades:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

- El agente debe llegar a todas las ciudades:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

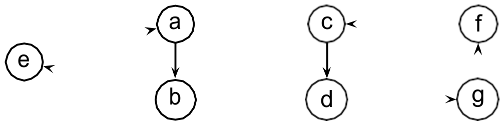
- Integralidad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

roblema del viajante: Modelo 2

as restricciones anteriores corresponden a un problema de asignación: a cada udad se le asigna una y sólo una ciudad para ser visitada justo antes y justo a ontinuación.

sto no es suficiente y se pueden formar circuitos.



e necesitan nuevas restricciones que eviten la formación de subciclos.

ay que garantizar que para cualquier conjunto de nodos el número máximo de arcos cluidos en la solución sea de uno menos que el número de nodos.

estricción de eliminación de subciclos

$$\sum_{i,j\in A} x_{ij} \le |A| - 1 \qquad \forall A \subseteq \{1,\dots,n\}$$