



# Universidad Nacional Autónoma de México

## Facultad de Ciencias

Laboratorio de Física Contemporánea

### Práctica 2

## Punta de Langmuir.

Oscar Hurtado González  
oscar\_hg@ciencias.unam.mx

En colaboración con Peter Nava  
nk\_peter@yahoo.com.mx

México, D.F., a Martes 6 de Octubre 2015

## Objetivos

Los objetivos principales de esta práctica consisten en caracterizar un plasma de descarga de gas de argón [Ar] generado en un triodo 0A4G, midiendo su temperatura y desidad electrónica a través del análisis se su curva característica  $I$  vs.  $V$ . Tal curva es obtenida a partir de la punta (ó también llamada sonda) de Langmuir

## Resumen

En esta práctica se logró caracterizar un plasma de Argon[Ar] en un bulbo triodo de gas de descarga del tipo 0A4G. Se construyenron las curvas características encontradas en la lietaratura para la toería de Langmuir, y utilizando un programa escrito en Julia. Se hizo el análisis correspondiente de datos. Se encontraron temperaturas cercanas a los 7000 K(0.6 eV aprox.) y densidades electrónicas del orden de  $10^{12}$  electrones/ $cm^3$ .

## Índice

1. Introducción y marco teórico	3
2. Desarrollo experimental	12
3. Resultados	14
4. Discusión	17
5. Conclusiones y recomendaciones	19
6. Anexo 1	21

# 1. Introducción y marco teórico

El concepto más común que se tiene de un plasma es que éste es un gas caliente ionizado. Tal concepto fue introducido por Irving Langmuir. Los plasmas son conductores eléctricos al igual que los metales y por tanto, un plasma consiste de un gas con muchos electrones libres, iones y átomos sin ionizar.

Los plasmas están en casi todos lados del universo; están presentes en algunos fenómenos en la superficie de la tierra como los relámpagos y las aureoras boreales en los polos. En la primera mitad del siglo XX los ingenieros eléctricos, entre ellos Irving Langmuir, trabajaron para comprender los plasmas “industriales” que se utilizaron para tener bulbos de luz incandescentes más eficientes. Trabajando con tubos de descarga de gas para este propósito, Langmuir inventó pruebas de diagnóstico como la punta (o sonda) que lleva su nombre. Recibió en 1932 el Nobel por sus trabajos hechos sobre plasmas.

También Edward Appleton sugirió que debía haber un conductor rodeando a la tierra, al que denominó como *ionósfera* (en 1947 recibió el Nobel por este descubrimiento).

En la segunda mitad del siglo XX, la física de plasmas estaba conectada con problemas no tan placenteros como política, espionaje y turbulencia, y, a medida que las investigaciones se desarrollaban, se podía notar que los plasmas resultaron ser un tema difícil de entender.

En este siglo los plasmas “industriales ” son de nuevo de interés por sus diversas aplicaciones como la manufactura de microprocesadores, y displays de plasma para televisiones HD.

Antes de profundizar en la punta de Langmuir para medir características del plasma, se abordan conceptos acerca de la teoría de plasmas de gas de descarga.

## Plasma de gas de descarga.

Boris Smirnov define un *plasma de gas de descarga* como un estado auto consistente de un gas que es ionizado como resultado de pasar una corriente eléctrica a través del gas bajo la acción de campos eléctricos externos. Estos plasmas son un tipo de plasmas de baja temperatura. [1]

*Usualmente* un gas de descarga se confina en un tubo cilíndrico en donde el gas está a baja presión y en los extremos del tubo se colocan dos placas paralelas o electrodos que se encuentran a una diferencia de potencial  $V_s$ .

Los electrones originados en el cátodo y los iones positivos cerca del ánodo son acelerados en direcciones opuestas, chocan y transfieren energía.

La figura 1 muestra la estructura física básica de un tubo de gas de descarga y del plasma generado en su interior. No todos los componentes de la estructura se encuentran en todas las descargas, pues éstas dependen de la presión, el voltaje en los electrodos, y las dimensiones del tubo (estos parámetros se toman en cuenta en la llamada y bien

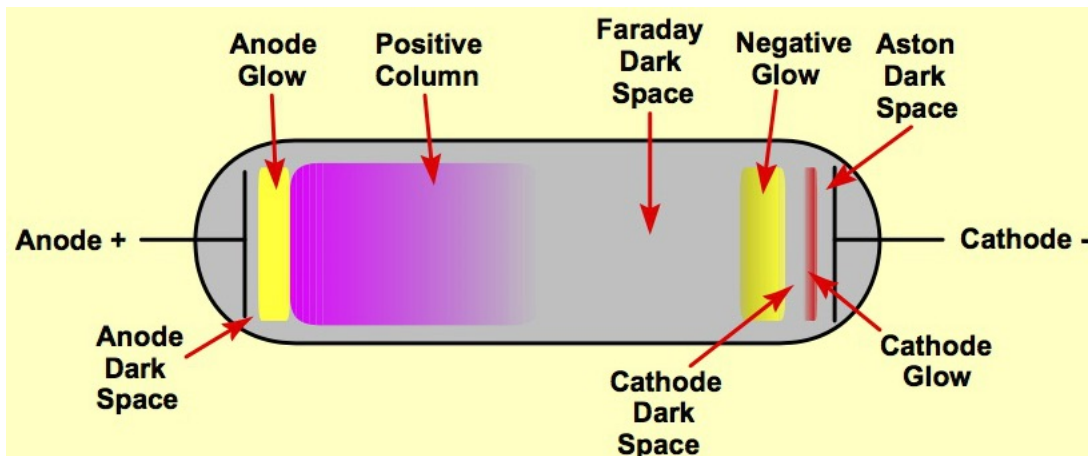


Figura 1: Estructura del tubo de gas de descarga.

conocida ley de Paschen). Cambios en estos parámetros, cambian la apariencia del plasma generado dentro del tubo.

El proceso en el cual el gas dentro del tubo se ioniza lo suficiente para que se pueda observar un plasma de gas de descarga se le conoce como *proceso ó mecanismo de rompimiento*. Estos procesos de rompimiento se producen debido principalmente a electrones libres presentes en el gas dentro del tubo. Tales electrones, bajo la acción del campo eléctrico producido por los electrodos, son acelerados desde el cátodo hacia el ánodo y adquieren una energía cinética igual a  $\frac{1}{2}m_e v^2 = e^-V_s$  (usualmente expresada en electrón-volts  $1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$ ). Estos electrones que viajan hacia el ánodo, colisionan con las moléculas del gas presentes entre los electrodos y en estas condiciones, parte de la energía cinética de los electrones se transmite a las moléculas neutras. Si éstas moléculas ganan la energía suficiente, se pueden ionizar por tales colisiones. La cantidad promedio de colisiones ionizantes producidas por un electrón por unidad de deriva a través del tubo se cuantifica con el **primer coeficiente de Townsend** (ó **coeficiente Townsend de ionización**). (Matemáticamente se denotará por la letra  $\alpha$  a tal coeficiente).

Las moléculas neutras del gas al ser ionizadas, liberan electrones que debido al campo eléctrico se aceleran, comienzan a viajar hacia el cátodo y éstos tienen la posibilidad de ionizar a otras moléculas neutras de gas y así se produce un *efecto avalancha (de electrones)*.

Tal efecto avalancha es uno de los dos *mecanismos de rompimiento mejor conocidos* (también se le conoce como *proceso de rompimiento de Townsend*). Este efecto puede ser explicado brevemente suponiendo que inicialmente existe un electrón libre en el gas. Si el campo provee al electrón libre la energía suficiente para ionizar una molécula neutra por colisión simple, entonces esto resulta en dos electrones libres (el original, más el que salió de la molécula ionizada) y un ion positivo. Estos dos electrones pueden ser capaces de causar más colisiones ionizantes para dar lugar a tener 4 electrones y 3 iones positivos y así sucesivamente. Este proceso es acumulativo y el número de electrones crece exponencialmente. En el espacio de tan solo unos cuantos milímetros se pueden llegar a producir millones de electrones. La figura 2 es una figura esquemática

del proceso de avalancha.

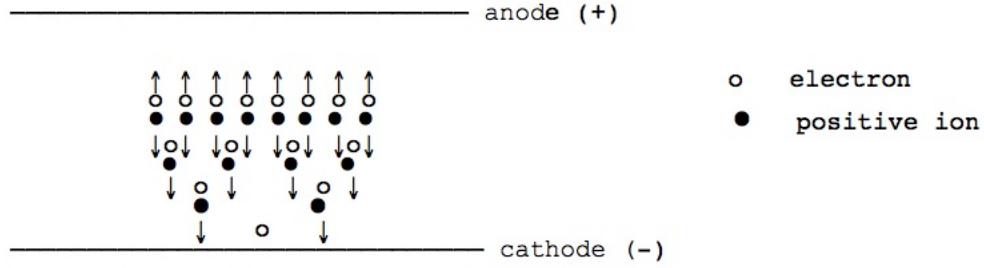


Figura 2: Efecto avalancha de electrones.

Se puede hacer un primer análisis matemático de esta situación haciendo las siguientes consideraciones.

Cuando el voltaje aplicado en los electrodos se incrementa, la corriente a través del gas se incrementa lentamente, a medida que los electrones emitidos del cátodo viajan a través del tubo. La ionización de los átomos del gas causada por estos electrones es el proceso más importante en el rompimiento de Townsend pero este proceso por si solo no es suficiente para producir el rompimiento.

Sean ahora  $n_0$  = el número de electrones por segundo emitidos del cátodo,  $n_x$  = el número de electrones por segundo moviéndose a una distancia  $x$  medida desde el cátodo,  $\alpha$  = el *número de colisiones ionizantes, en promedio, hechas por un electrón por unidad de deriva en la dirección del campo* (**primer coeficiente de Townsend**). Así  $\frac{1}{\alpha}$  será la distancia promedio recorrida por un electrón entre colisiones ionizantes.

Si ahora se considera una sección transversal al tubo con grosor  $\Delta x$  estando a una distancia  $x$  del cátodo, entonces como por cada colisión ionizante se produce un nuevo electrón, la cantidad de electrones  $n_x$  aumenta  $\Delta n_x$ . Tal cantidad es proporcional por definición al coeficiente de Townsend  $\alpha$  multiplicado por el número de electrones en el intervalo  $\Delta x$ .

Es decir que

$$\Delta n_x = \alpha n_x \Delta x$$

tomando el límite cuando el grosor de la sección transversal tiende a cero:

$$dn_x = \alpha n_x dx$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dn_x}{n_x} = \alpha dx$$

Resolviendo la ecuación diferencial integrando de  $n_0$  a  $n_x$  y de 0 a  $x$  se obtiene :

$$n_x = n_0 e^{\alpha x} \quad (1)$$

Si el ánodo está a una distancia  $d$  del cátodo, entonces el número de electrones por segundo que estarán chocando con el ánodo será  $n_d = n_0 e^{\alpha d}$ . Por tanto en promedio, cada electrón que sale del cátodo produce en promedio  $\frac{n_d - n_0}{n_0}$  electrones libres nuevos en el gas.

Ahora bien, en el estado estacionario, la corriente en el circuito que forman los electrodos, el gas y la fuente de voltaje, debe ser proporcional a la cantidad de electrones que salen del cátodo y llegan al ánodo. Por tanto se puede argüir que la corriente está dada por

$$I = I_0 e^{\alpha d} \quad (2)$$

Por otro lado, falta considerar que pasa con los iones que chocan en el ánodo, los cuales, si tienen la energía cinética suficiente, podrán liberar más electrones del cátodo. Así, sea  $\gamma =$  *el número de electrones “secundarios” producidos en promedio en el cátodo por cada colisión ionizante que se produce en el tubo*. o bien se puede argüir que esto es equivalente a *la probabilidad de que se libere un electrón secundario por cada ion que choca contra el cátodo*. A  $\gamma$  se le llama **segundo coeficiente de Townsend**.

Sean también  $n_0$  = número de electrones primarios por segundo emitidos en el cátodo por simple acción del campo electromagnético,  $n'_0$  = número de electrones secundarios por segundo producidos en el cátodo debido al impacto de los iones atraídos hacia éste por acción del campo, y  $n''_0$  = número total de electrones por segundo que salen del cátodo.

$\Rightarrow$

$$n''_0 = n_0 + n'_0$$

Luego, en promedio, cada electrón produce  $e^{\alpha d} - 1$  colisiones ionizantes en su camino entre el cátodo y el ánodo. Entonces el número total de colisiones ionizantes por segundo será  $n''_0$  multiplicado por  $e^{\alpha d} - 1$ . Así, por definición del segundo coeficiente de Townsend,  $\gamma$ , se tiene que

$$\gamma = \frac{n'_0}{n''_0(e^{\alpha d} - 1)} \quad (3)$$

Despejando  $n'_0$ , y substituyéndolo en  $n''_0 = n_0 + n'_0$  se obtiene finalmente para  $n''_0$

$$n''_0 = \frac{n_0}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)} \quad (4)$$

Entonces substituyendo en la ecuación 1 para  $x = d$ , se obtiene para el número de electrones que llegan al cátodo:

$$n_d = \frac{n_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)},$$

y por tanto la corriente será

$$I = \frac{I_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}$$

Esta ecuación describe el incremento de la corriente en el tubo antes de que el rompimiento del gas ocurra y se produzca el plasma. Físicamente el rompimiento es tener una corriente  $I \rightarrow \text{inf.}$  Así, se puede concluir que *el rompimiento de un gas se puede caracterizar a partir de los coeficientes de Townsend* y con la condición:

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1$$

A esta condición se le denomina ***criterio de Townsend para el rompimiento de gas.***

Habiendo hecho este análisis matemático del proceso de rompimiento del gas, es conveniente volver a la figura 1 para describir cualitativamente las zonas que se pueden observar en el tubo de gas de descarga. Se describirá las zonas del tubo de izquierda a derecha según la figura 1.

### **Espacio Oscuro Aston (Aston Darkspace).**

Es una delgada región junto al cátodo que contiene una capa de carga negativa. Por tanto aquí hay un campo eléctrico fuerte. Los electrones son acelerados a través de este espacio y es en esta región donde los electrones iniciales superan en número a los iones positivos. La densidad y energía cinética de los electrones no es suficiente para producir excitaciones en los electrones de los átomos del gas y por tanto no hay emisiones de fotones y por tanto esta zona se ve oscura.

### **Brillo de cátodo (Cathode glow).**

Aquí la energía de los electrones es suficiente para excitar los átomos y entonces producir un ligero brillo que generalmente es de color rojo. Esta zona tiene una relativamente alta densidad de iones. El grosor de esta capa depende del tipo de gas y la presión en el tubo. En algunas ocasiones esta zona se pega demasiado al cátodo enmascarando el espacio oscuro Aston.

### **Espacio oscuro de cátodo (Cathode dark space).**

Es una zona relativamente oscura justo después del brillo de cátodo que tiene un campo eléctrico relativamente intenso una densidad de iones realtiva grande. Debido a esto es una zona con carga positiva. y por tanto el espacio oscuro de cátodo, el brillo de cátodo y el espacio oscuro aston forman una región que neutraliza casi todo el campo eléctrico causando que el resto del plasma en el tubo esté sometido a campos eléctricos de intensidades bajas.

### **Brillo negativo (Negative glow).**

Esta es la región de mayor intensidad en el brillo del plasma. Los electrones que salen del cátodo al llegar a esta región han sido acelerados lo suficiente, adquiriendo una gran energía cinética, colisionan con los átomos del gas ionizándolos, y algunos otros

electrones que no ha sido acelerados lo suficiente, no ionizan los átomos al colisionar pero si los excitan lo suficiente como para que emitan fotones y se vea el brillo del plasma. Después de colisionar, los electrones pierden energía cinética. y por tanto dejan de poseer la energía cinética suficiente para excitar a los átomos y vuelve a haber otra región oscura llamada *espacio oscuro de Faraday*.

### **Espacio oscuro de faraday (Faraday dark space).**

La energía de los electrones es baja en esta región y el campo eléctrico también es pequeño. En esta región se presenta el fenómeno de la recombinación y difusión de los electrones en las paredes del tubo, lo cual produce que la densidad de los electrones se vea disminuida.

A partir de la región de faraday comienza la parte principal de un plasma de gas de descarga, que es la *columna positiva*.

### **Columna positiva (Positive column).**

Es la región más grande de una descarga normal y *la más importante* (inclusive algunos autores considera que sólo esta región es a lo que se debería llamar plasma), y la que se puede apreciar con mayor facilidad a simple vista. Aquí el plasma es quasi-neutral (es decir que las densidades de iones y de electrones son casi iguales  $n_e \approx n_i$ ). El campo eléctrico es débil (típicamente del orden de  $1\text{eV}/\text{cm}$ ) pero lo suficientemente grande como proveer a los electrones de la energía cinética suficiente para ionizar y excitar los átomos del gas. La columna positiva es una larga y uniforme modalidad de brillo, excepto cuando perturbaciones producen *estrías u ondas de ionización (también conocidas como ondas de Alfvén)*. Las densidades de los electrones son típicamente del orden de  $10^{15}, 10^{16}$  electrones por  $\text{m}^3$  y las temperaturas están entre  $1\text{eV} \sim 2\text{eV}$ .

### **Brillo de ánodo (Anode glow).**

Esta región es usualmente un poco más brillante que la columna positiva y no siempre se presenta en los experimentos. Esta es la frontera de lo que se conoce como envoltura del ánodo.

### **Espacio oscuro de ánodo (Anode dark space).**

El espacio entre el brillo de ánodo y el ánodo es la envoltura de ánodo. Es una delgada capa de carga eléctrica que puede ser positiva (es decir compuesta de átomos ionizados) ó negativa (compuesta de electrones). Esto depende del tamaño relativo del ánodo relativo a la magnitud de la densidad de corriente que esté conduciendo. Aquí nuevamente el campo eléctrico aumenta de magnitud.

## **Teoría de Langmuir.**

Habiendo discutido los elementos básicos de un plasma de gas de descarga se aborda ahora la teoría matemática que se utiliza para caracterizar tal plasma a partir del experimento diseñado por Langmuir (sonda de Langmuir).

Una punta de Langmuir es un pequeño alambre que se inserta dentro del plasma.



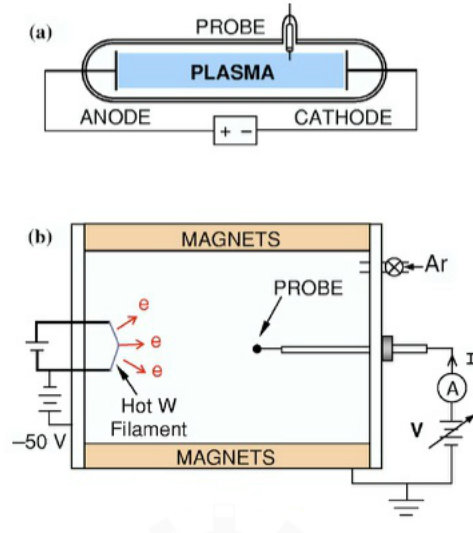


Figura 3: Esquema de un tubo de gas de descarga con una punta de Langmuir. Cfr. Merlino [3]

Si se pone un alambre dentro del plasma fig.3(a), entonces éste será bombardeado de electrones, átomos ionizados positivos y átomos neutros del gas. Si las partículas en el plasma obedecen la distribución de Maxwell-Boltzmann, entonces la velocidad promedio está dada en función de la temperatura y de la masa de las partículas ( $\langle v \rangle \approx \sqrt{\frac{T}{m}}$ ). Debido a que la masa de los electrones es mucho menor que la masa de los iones entonces  $\langle v_e \rangle \gg \langle v_i \rangle$ , y por tanto el alambre empezará a recolectar muchos mas electrones que iones y pronto empezará a tener una carga eléctrica neta negativa pero aún seguirá siendo golpeada estocásticamente por algunos iones que posean la energía cinética suficiente.

Si ahora el alambre se conecta a una fuente de voltaje como se muestra en la figura 3(b), de tal forma que la diferencia de potencial entre el alambre y el electrodo del gas de descarga pueda ser controlado, se pueden obtener algunos resultados interesantes para caracterizar al plasma de gas de descarga dentro del tubo. Además, ahora al estar conectado y formar un circuito, habrá una corriente eléctrica circulando. La diferencia de potencial entre la punta y el electrodo será ahora denotada simplemente por  $V$ .

Se puede variar la diferencia de potencial  $V$  de tal forma que para ciertos valores, la corriente en la punta sea negativa (es decir que la punta esté recolectando más iones positivos) o positiva (más electrones que iones). Una curva característica de corriente  $I$  vs.  $V$  se ve como se muestra en la figura 4 (véase [2]).

Para fines prácticos de esta práctica de laboratorio, solo interesan las regiones B, C, D de la figura 4, pues para voltajes demasiado grandes, la punta se comportara como ánodo.

Si el voltaje en la punta es negativo, entonces ésta recogerá más iones positivos que electrones y por tanto la corriente circulante será negativa (como ya se había comentado anteriormente). Esto es lo que se observa en la región D de la figura 4. Se dice que hay una corriente de saturación de iones pues ésta disminuye muy poco a medida que  $V$  se

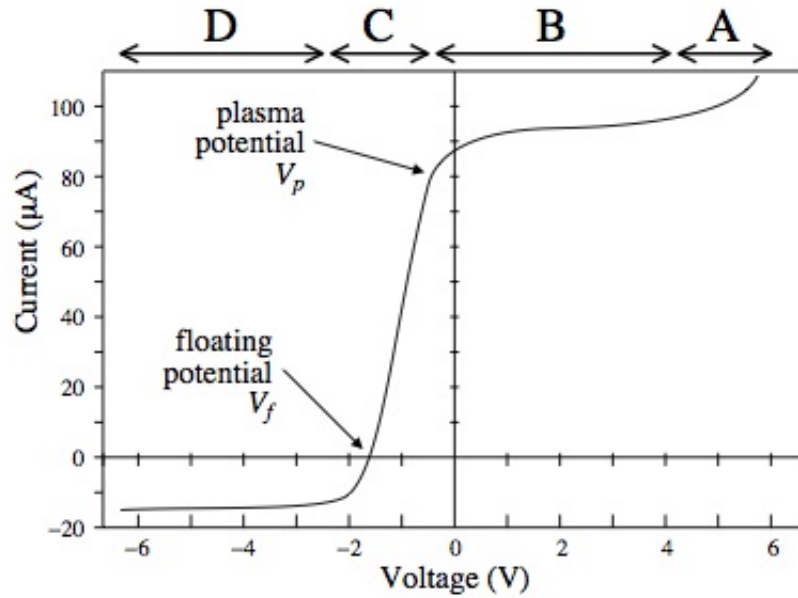


Figura 4: Crva característica de  $I$  vs.  $V$  en una punta de Langmuir.

aumenta. Sin embargo a medida que el voltaje sigue incrementándose, la cantidad de iones que recolecta la sonda comienza a disminuir y debido a que los electrones (con velocidad promedio mucho mayor que la de los iones) siguen bombardeando la sonda), entonces la corriente empieza a ser menos negativa hasta que llega un punto en el cual, en la *cantidad promedio de iones* por unidad de área por unidad de tiempo que golpean la sonda ***es igual*** a la *cantidad promedio de electrones* por unidad de área por unidad de tiempo que golpean la sonda es igual, por lo tanto la carga neta de la punta es cero y por tanto *deja de haber corriente electrica circulando a través de ella*. Al voltaje para el cual se obtiene este equilibrio, se le conoce como ***voltaje flotante***  $V_f$ .

En la región D de la figura 4, pasa que al umentar el voltaje, la cantidad de electrones qe golpea la punta crece *exponencialmente* pero aún sigue siendo disminuida por la corriente negativa producida por los iones positivos.

Sin embargo, existe un punto conocido como ***voltaje de plasma***  $V_p$ , para el cual la diferencia de potencial en la punta, coincide con la diferencia de potencial que hay en el plasma de gas de descarga. Según lo explicado anteriormente acerca de las velocidades promedio de las partículas, la cantidad de electrones que golpean la sonda es mucho mayor que los iones y entonces la corriente se puede considerar que es únicamente causada por un flujo de electrones.

A partir de  $V_p$  (región B de la figura 4), si se continúa aumentando el voltaje resulta que la corriente aumenta muy poco o casi no aumenta, por lo que se dice que hay una corriente de saturación de electrones.

Los comentarios de los párrafos anteriores se pueden sintetizar en una serie de ecuaciones que dan la corriente de iones y la corriente de electrones que circulan en la punta respectivamente. (Véase Merlino [3] ).

Para los iones:

$$I_i(V) = \begin{cases} -I_{is} \exp[\beta e(V_p - V)] & \text{si } V \geq V_p \\ -I_{is} & \text{si } V \leq V_p \end{cases} \quad (5)$$

En donde  $\beta = \frac{1}{kT}$ , y  $I_{is}$  es la corriente de saturación dada por

$$I_{is} = \frac{1}{4} e n_i A \sqrt{\frac{8kT_i}{\pi M_i}}$$

con  $n_i$  la densidad de los iones,  $T_i$  la temperatura de los iones,  $M_i$  la masa de los iones,  $e$  la carga del electrón,  $k$  la constante de Boltzmann y  $A$  el área de la punta. De acuerdo a Merlino [3], en un plasma de gas de descarga se tiene típicamente que  $T_e \gg T_i$ , por lo que es mejor utilizar la velocidad de Bohm para la corriente de saturación de los iones:

$$I_{is} = I_{Bohm} = 0.6 e n_i A \sqrt{\frac{kT_e}{M_i}}$$

Para los electrones:

$$I_e(V) = \begin{cases} I_{es} \exp[-\beta e(V_p - V)] & \text{si } V \leq V_p \\ I_{es} & \text{si } V \geq V_p \end{cases} \quad (6)$$

En donde  $I_{es}$  es la corriente de saturación dada por

$$I_{es} = \frac{1}{4} e n_e A \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \quad (7)$$

con  $n_e$  la densidad de los electrones,  $T_e$  su temperatura, y  $m_e$  su masa. Una demostración matemática a partir de principios de física estadística se da en el apéndice 1 de este reporte.

A partir de el voltaje flotante se puede llegar a una ecuación muy importante que relaciona los parametros  $V_f$ ,  $V_p$  y  $T_e$  (ec. (8) del artículo de Merlino). Por definición de voltaje flotante se cumple que

$$\begin{aligned} I_i(V_f) + I_e(V_f) &= 0 \\ \Rightarrow \\ I_{es} \exp \left[ \frac{e(V_p - V_f)}{kT_e} \right] &= I_{is} \end{aligned}$$

Así,

$$V_f = V_p + \left( \frac{kT_e}{e} \right) \ln \left( 0.6 \sqrt{\frac{2\pi m_e}{M_i}} \right) \quad (8)$$

Como el **objetivo** de esta práctica es caracterizar el plasma en función de la temperatura y densidad de los electrones, es conveniente despejar de la ecuación (8), a la temperatura  $T_e$ :

$$T_e = \frac{e(V_f - V_p)}{k \ln \left( 0.6 \sqrt{\frac{2\pi m_e}{M_i}} \right)} \quad (9)$$

Otros autores en lugar de tomar 0.6 en la ecuación (9), toman el valor de 1/2 con lo que la ecuación (9) se transforma en:

$$T_e = \frac{2e(V_p - V_f)}{k \ln \left( \frac{2M_i}{\pi m} \right)} \quad (10)$$

Una vez obtenida la temperatura a partir de la ecuación (9), es posible despejar la densidad de electrones de la expresión (7):

$$n_e = \frac{4I_{es}}{eA} \sqrt{\frac{m_e \pi}{8kT_e}} \quad (11)$$

Con estos elementos no queda más que pasar al desarrollo experimental de la práctica.

## 2. Desarrollo experimental

Para este experimento, en lugar del típico tubo largo de gas de descarga, se utilizó un bulbo triodo 0A4G. La siguiente figura tomada de Kirkman [5] muestra la anatomía de tal dispositivo. Algunas especificaciones técnicas de triodo son que la corriente máxima que

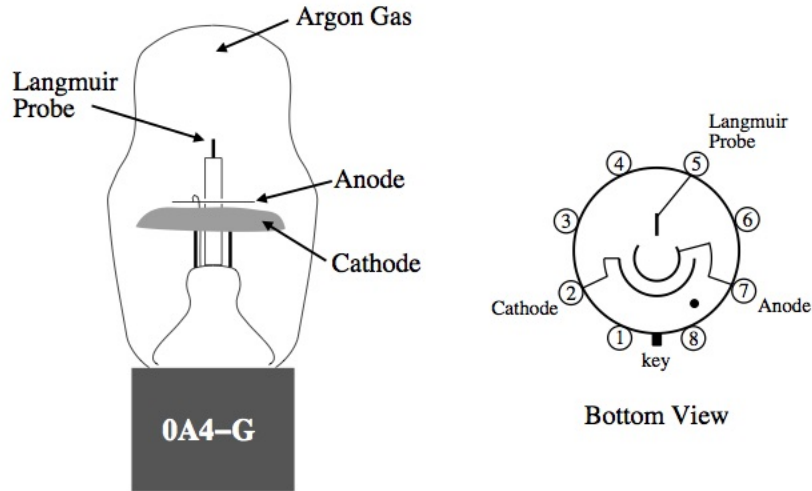


Figura 5: Triodo 0A4-G.

debe pasar por la punta es por seguridad de 100mA, y el voltaje máximo por seguridad a cual deben estar sometidos los electrodos es de 70V. También es de mencionarse

que el triodo está relleno de Argón [Ar], cuyos átomos poseen una masa del orden de  $6.7 \times 10^{-26}$ , y la presión dentro del tubo es de aproximadamente 1Pa.

Para alimentar los electrodos del tubo se utilizó una fuente de voltaje marca HP modelo "6207B DC Power Supply" para la punta de Langmuir se utilizó también una fuente de voltaje doble marca HP modelo "6235A Triple Output Power Supply"

El siguiente diagrama muestra el circuito que se conectó para realizar el experimento.

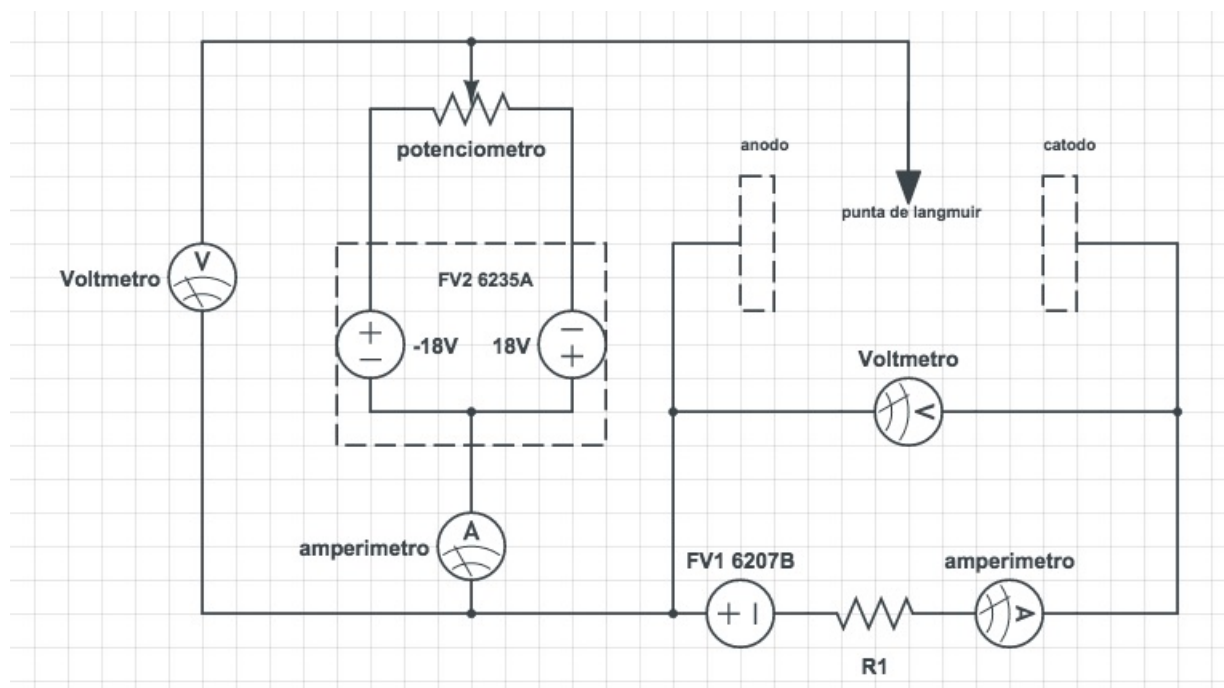


Figura 6: Diagrama de circuito.

Cabe hacer una aclaración del circuito mostrado. La fuente "Triple output supply" está representada por esa caja con línea punteada en donde se han puesto dos fuentes de voltaje conectadas inversamente a un potenciómetro o resistencia variable. Esto se hizo con la finalidad de que se pudiera variar el voltaje en la punta de una manera continua en el intervalo  $[-18V, 11V]$  sin tener que estar cambiando los cables de salida de la fuente "triple output supply". Así escogiendo un potenciómetro de valor apropiado se podía manipular el voltaje para poder construir una gráfica como la de la figura 4. Otra aclaración es respecto al triodo. Éste, viene montado sobre una pequeña cajita con tres terminales. Dos son para conectar los electrodos a la fuente FV1 y generar la descarga del plasma, y la otra terminal es la que alimenta a la punta de Langmuir. La cajita cuáles son las terminales y como deben de conectarse.

Una vez habiendo montado el experimento, se tomaron varios conjuntos de mediciones para poder construir la curva característica mostrada en la figura 4. Tales conjuntos de mediciones se tomaron con ayuda de los amperímetros y voltímetros mostrados en el circuito. Para observar el plasma generado dentro de triodo los electrodos tenían que estar a una diferencia de potencial de -60V. Una vez obtenido el plasma de gas de descarga, se siguieron los siguientes pasos:

1. Seleccionar el valor de corriente total que que circula entre el ánodo y cátodo (los cuales están a una diferencia de potencial de  $-60V$ ). Se comenzó seleccionando una corriente de  $67mA$
2. Colocar la punta de Langmuir a una diferencia de potencial de  $-18V$  y medir la corriente en la punta (para los voltajes de entre  $-18V$  y  $-6$  aproximadamente, se esperan corrientes negativas).
3. Aumentar con ayuda del potenciómetro el voltaje en la punta. Tomar mediciones de la corriente en la punta cada  $0.5V$ , es decir aumentar el voltaje por ejemplo a  $-17.5V$  y medir la corriente a ese voltaje. A medida que el voltaje aumenta se espera que la corriente medida sea cada vez un poco menos negativa hasta que para algún voltaje la corriente que se medirá debiera ser cero. Cuando esto ocurre, el voltaje medido de la punta, corresponde al **voltaje flotante**.
4. Después de haber encontrado el voltaje flotante, seguir haciendo mediciones de voltaje-corriente pero esta vez aumentando el voltaje cada  $0.2V$  en un intervalo de longitud no mayor a  $3V$ . Se espera que a partir de cierto voltaje la corriente registrada ya no aumente mucho y aparezca la corriente de saturación de electrodos.
5. Al llegar a los  $11V$  en la punta dejar de tomar mediciones.
6. Después de haber tomado estas mediciones repetir los pasos del 1 a 5 pero en el paso 1 seleccionar otra corriente. Las corrientes que se seleccionaron, en orden consecutivo, fueron  $69.1mA$  (dos veces),  $50mA$  (tres veces),  $40mA$  (tres veces) y  $60mA$  (tres veces). En total se hicieron 12 corridas.

Una observación que se debe seguir durante el experimento es que del paso 5 al 6 llega a pasar que al variar la corriente entre los electrodos, el voltaje entre ellos se ve afectado y entonces cada vez que se cambié la corriente inicial seleccionada, hay que verificar que siempre los electrodos estén a una diferencia de potencial de  $-60V$ .

Fianalmente se midieron las dimensiones de una punta de langmuir utilizando un Vernier electrónico con ayuda de otro triodo 0A4G que no tenía el bulbo de vidrio y permitía la medición de la punta. El diametro fue de  $0.078cm$  y el largo de  $0.421$  cm.

### 3. Resultados

Debido al tamaño de las tablas de los datos experimentales, éstas se anexan en el apéndice 2. Con estas tablas se construyeron gráficas que son como la figura 4. Por ejemplo, para la primera corrida utilizando  $60mA$  en los electrodos se obtuvo la siguiente gráfica:

Ahora, recordando la forma explícita de la ecuación (9),

$$T_e = \frac{e(V_f - V_p)}{k \ln \left( 0.6 \sqrt{\frac{2\pi m_e}{M_i}} \right)},$$

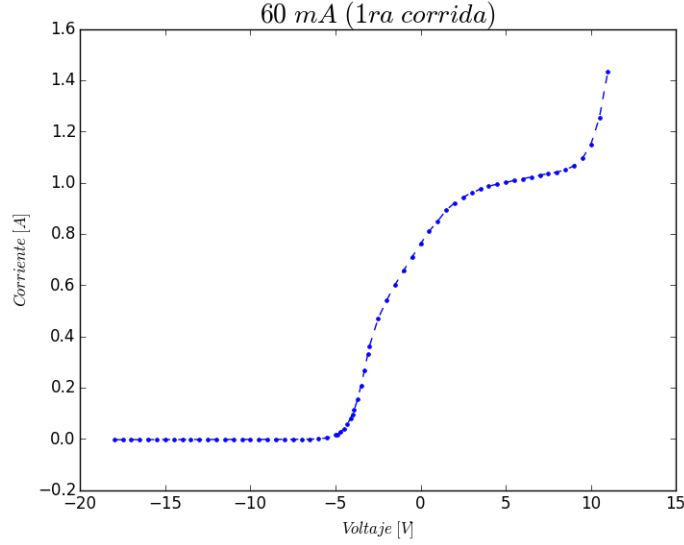


Figura 7: Curva característica  $I$  vs  $V$ .

se tiene que para poder conocer la temperatura de los electrones, necesitamos conocer  $V_f$ , y  $V_p$ . En este caso particular de la corrida de  $60mA$ , se midió que el voltaje flotante fue de  $V_f = (-6.25 \pm 0.005)V$ . Pero no se midió directamente el voltaje de plasma. Sin embargo como Merlino [3] y Williams [8] discuten en sus artículos, el método para encontrar el voltaje de plasma consiste en graficar  $\log(I)$  vs  $V$  y hacer un ajuste lineal en la región C y otro ajuste lineal en la región B de la figura 4.

Habiendo hecho tales ajustes lineales, entonces el voltaje  $V_p$  está determinado por el lugar de intersección de las rectas. La gráfica  $\log(I)$  vs  $V$  de esta corrida que mostramos es la siguiente:

Utilizando la tabla de datos se escribió un programa en el lenguaje de programación Julia (haciendo un comentario al margen, Julia es un nuevo lenguaje de programación desarrollado en MIT optimizado para cómputo científico) que hiciera los ajustes lineales requeridos (haciendo un comentario al margen, Julia es un nuevo lenguaje de programación desarrollado en MIT optimizado para cómputo científico). Una versión corta del código del programa puede verse en el apéndice 3 ó si se desea ver el código completo se puede ir a la dirección en GitHub <https://github.com/Oscarhg42/Laboratorio-de-fisica-contemporanea-1-Facultad-de-ciencias-UNAM-/tree/master/Plasmas>.

Utilizando las paquetrías de Julia se obtuvo lo siguiente: Como puede observarse, se hizo el ajuste de las dos rectas y en el recuadro aparecen los parámetros pendiente y ordenanda al origen con sus respectivas incertidumbres, las cuales también fueron calculadas en el programa de Julia.

Con esas ecuaciones se encontró que el voltaje de plasma es

$$V_p = -2.83 \pm 0.31$$

mientras que la corriente en ese punto, es decir la corriente de saturación de electrones es:

$$I_{es} = 0.78mA \pm 0.11mA$$

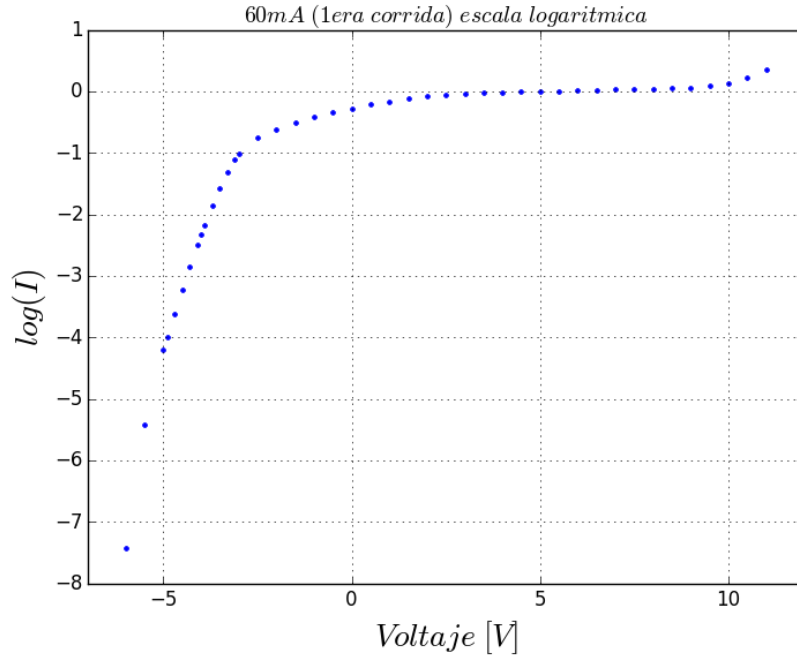


Figura 8: Curva característica  $\log(I)$  vs  $V$ .

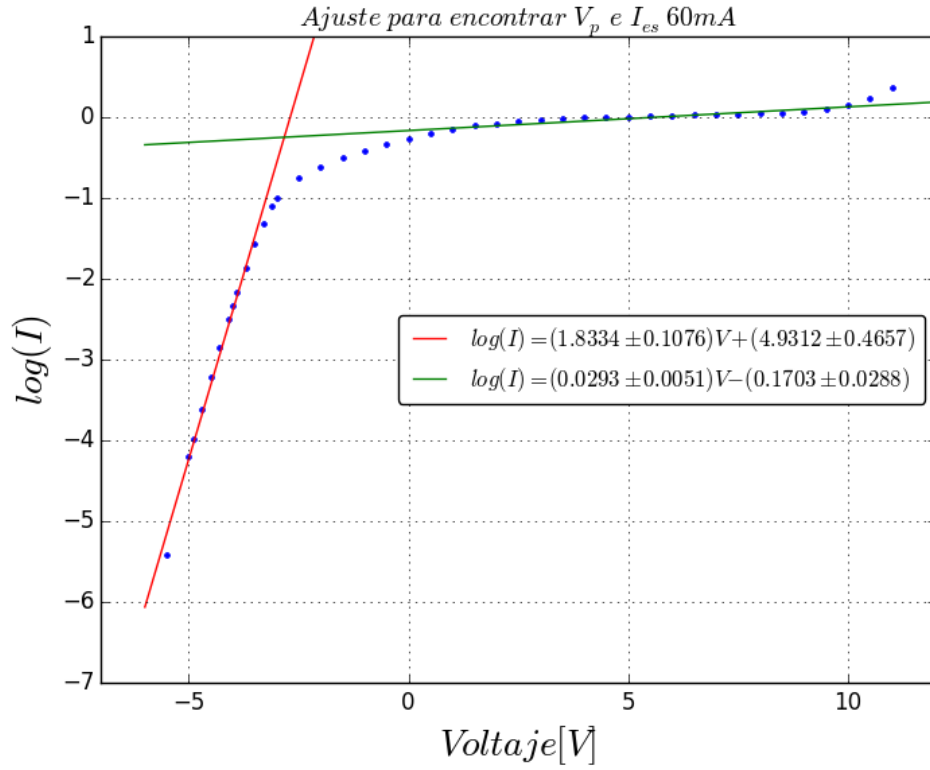


Figura 9: Curva característica  $\log(I)$  vs  $V$ .

Merlino tambien sugiere que *la temperatura también está dada por la pendiente de la primera recta ajustada* multiplicada por un factor de  $e/k$ .



Entonces utilizando las ecuaciones (9) y 10, y la pendiente de la recta ajustada resulta que las temperaturas de los electrones fueron, respectivamente:

$$T1 = 7392.378 \pm 675.880K$$

$$T2 = 7652.077 \pm 699.624K$$

$$T3 = 6329.455 \pm 1485.031K$$

El promedio de estas temperaturas es

$$(7124.637 \pm 972.773)K$$

Con el promedio y la ecuación (11), se calcula la densidad de electrones:

$$n_e = 4.5928814987126364 \times 10^{12} \frac{electrones}{cm^3}$$

en donde se ha omitido la incertidumbre pues un ligero cambio en el área de la punta cambia mucho el resultado de la corriente y en el experimento no se midió el área real de la punta utilizada, sino que se utilizó la punta de otro tubo como ya se comentó anteriormente.

La siguiente tabla presenta los resultados más generales para las temperaturas  $T_e$  y  $n_e$  para cada una de las corrientes utilizadas. *Para cada corrida* se obtiene  $T_e$  a partir de la ecuación (9), 10 y la pendiente de la recta ajustada. Luego para cada una de las corrientes se tienen tres corridas y así los datos de la siguiente tabla son el "promedio del promedio". De nuevo se omite la incertidumbre en las densidades de electrones.

Tabla 1: Resultados generales

Corriente en la punta [mA]	$T_e$ promedio [K]	$N_e$ promedio [elec/cm <sup>3</sup> ]
67	$7397.825 \pm 1594.585$	$3.711 \times 10^{12}$
69.1	$6645.743 \pm 1130.568$	$5.076 \times 10^{12}$
60	$7262.866 \pm 972.773$	$4.514 \times 10^{12}$
50	$6913.581 \pm 854.222$	$3.845 \times 10^{12}$
40	$6604.475 \pm 948.632$	$3.008 \times 10^{12}$

## 4. Discusión

De acuerdo con los resultados mostrados en la tabla 1, se puede apreciar primeramente que los resultados correspondientes a  $69.1mA$  y  $67mA$  parece que no corresponden con el comportamiento que tienen las temperaturas para  $60, 50, 40mA$  ya que en ellas se ve que la temperatura disminuye a medida que la corriente disminuye y esto no pasa

en 67, 69.1 mA. Sin embargo nótese que las incertidumbres para estos dos datos son mayores que las encontradas para los siguientes valores de la corriente. Esto se debe principalmente a que durante el análisis de las gráficas en escala semilog, en las primeras corridas, la cantidad de puntos experimentales que se utilizaron para hacer el ajuste de la recta en la región C eran muy pocos y por tanto la incertidumbre en los parámetros de pendiente y ordenada al origen eran mayores. Se nóto el el programa escrito en Julia, que la catidad de puntos utilizados para ajustar las rectas a las curvas correspondientes s 67 y 69.1 mA eran 5 ó 6 puntos, mientras que para las siguientes corrientes, la cantidad de puntos que se utilizaron para el ajuste de la recta fue mayor a 10.

A la hora de correr el programa se vió claramente que la incertidumre en los parametros de las rectas disminuían a medida que se utilizaban más puntos para el ajuste de la recta. Por ejemplo en la figura (8) mostrada anteriormente, nótese que las incertidumbres de la recta ajustada en la zona de corriente de saturación de electrones, son pequeñas pues para el ajuste se disponían más de 20 puntos.

Ahora bien, como con las rectas se calcula el voltaje de plasma  $V_p$  entonces si las incertidumbres en los parámetros de pendiente y ordenada al rigen son grandes entonces a la hora de propagar la incertidumbre para el voltaje de plasma, ésta será grande, y análogamente, como  $T_e$  se calcula a partir de  $V_p$  entonces las incertidumbres en la temperatura son grandes.

La fórmula utilizada para calcular las incertidumbres fue la fórmula utilizada usualmente dada por

$$\delta f(x_1, x_2, \dots x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (\delta x_i)^2}$$

Otro comentario que debe hacerse es sobre la magnitud de las temperaturas del plasma dentro del tubo. Las temperaturas obtenidas son cercanas a los ¡7000K!. Según wikipedia la temperatura de la superficie del sol es de 5778K. Así que a primera vista el plasma en el triodo está mas caliente que el sol. ¿Entonces por qué no se quema el tubo?

La conclusión a la que se puede llegar tiene su explicación a nivel microscópico. Si se observan las densidades obtenidas para los electrones es mucho muy baja. Estas densidades son del orden de  $10^{12}$ . Así que si se piensa en que

$$T_e \sim \langle v_e \rangle$$

se puede ver que  $T_e$  es una medida de la cantidad de energía cinética de los electrones del plasma. Entonces a nivel microscópico, como el gas está a baja presión, y las densidades de electrones son tan bajas, esto permite que los electrones se mantengan con una energía cinética promedio muy grande, que da lugar a temperaturas de electrones también muy grandes.

El triodo permanece a salvo pues, aunque la temperatura es muy alta, las bajas densidades de electrones y su masa insignificante en comparación con la masa de los iones y de los materiales del triodo, no producen cambios significantes en la energía cinética promedio de estos iones y átomos

## 5. Conclusiones y recomendaciones

Algunas de las dificultades que se presentaron se dieron con las primeras corridas para  $67mA$  y  $69.1mA$ . Pues como se muestra en la tabla 1, hay un comportamiento raro en estas corrientes. Esto se debió que cuando se hizo por primera vez el experimento no se espero un tiempo suficientemente largo para que el triodo alcanzara su temperatura óptima de funcionamiento y por tanto cuando variamos la corriente en los electrodos, los valores de la corriente en la punta no fueron medidos con la suficiente precisión.

Además también en estas corridas, no se tomo la cantidad de datos suficientes para que la recta ajustada en la región C de la figura (4) tuviera incertidumbres menores en sus parametros de pendiente y ordenada al origen. En contraste, para las otras corrientes, se pudieron obtener mas datos experimentales en esta región, por lo que el ajuste de las rectas fue un poco mejor.

Merlino [3] y Williams [8], reportan temperaturas en electrón volts de  $4eV$  y  $0.45eV$  respectivamente. También las densidades que reportan son de  $n_e \sim 10^{10}$  electrones/ $cm^3$  y  $n_e \sim 10^9$  electrones/ $cm^3$ . Las temperaturas obtenidas en este reporte son de aproximadamente  $0.6eV$  y la densidad del orden ( $10^{12}$ ) electrones/ $cm^3$ . Vemos que los valores no son tan distintos salvo en la densidad e electrones.

Se recomendaría que en futuros experimentos primeramente al conectar el circuito, esperar un tiempo suficientemente largo para que el triodo trabaje en su temperatura óptima y que se investigara un poco más acerca del area de la punta utilizada y no solo aproximarla por otra de otro tubo.

*La parte que se podría mejor mucho sería tomar una cantidad mucho mayor de datos experimentales en la región C, que es después de  $V_f$  y  $V_p$ ; esto mejoraría considerablemente las incertidumbres calculadas de los parametros de ordenada al origen y pendiente de las rectas ajustadas computacionalmente. Si se logran disminuir las incertidumbres de éstos parámetros las incertidumbres en los voltajes de plasma y temperaturas a su vez disminuiría, y así se lograría tener mayor confianza en los valores obtenidos.*

## Referencias

- [1] Boris M. Smirnov; *Theory of gas discharge plasma*; Springer; 2015.
- [2] Kirkman, Tom; *Advanced Physics Laboratory, ch. 5 Langmuir's Probe*; College of Saint Benedict and Saint John's University; 2015
- [3] Merlino L. robert; *Understanding Langmuir probe current-voltage characteristics*; Am. J. Phys. **75**(12), December 2007.
- [4] Braithwaite N. St. J.; *Introduction to gas discharges*; Plasma Sources Sci. Technol. **9** 517-527; 2000
- [5] Scott Donald E.; *Primer on "Gas Discharges"(plasmas)*; University on Massacusetts.

- [6] Lamport, L.;  $\text{\LaTeX}$ ; Addison-Wesley. 1996.
- [7] Landau, E. M. Lifshitz; *Statistical Physics, Part 1* capítulo 3; Pergamon press; 1969
- [8] Jeremiah Williams; *Analysis of a Langmuir Probe Trace*; Physics Department, Wittenberg University; june 2014.

## 6. Anexo 1

### Desarrollo matemático de las ecuaciones utilizadas.

El primer comentario que debe hacerse es que si se introduce un pequeño alambre dentro de un plasma, la superficie del alambre será bombardeada por electrones, iones y átomos neutros. En ausencia de fuerzas eléctricas, la razón de impacto por  $m^2$  está dada por

$$J = \frac{1}{4}n\langle v \rangle = \frac{1}{4}n\sqrt{\frac{8kT}{\pi M}} \quad (12)$$

en donde  $n$  es la densidad de las partículas,  $\langle v \rangle$  su velocidad promedio.

Ahora, recurriendo a la física estadística, suponiendo que el sistema se encuentra a una temperatura  $T$ , sea  $P_E$  la densidad de probabilidad de hallar al sistema en un microestado con energía  $E$ , está dada por (Landau [7]):

$$P_E(p, q) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(p, q)}$$

con  $\beta = kT$ ,  $Z$  la función de partición del sistema y  $(p, q)$  son las coordenadas en el espacio fase del sistema (en general para un sistema de  $N$  partículas  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$  y  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ ).

La función de partición  $Z$ , es

$$Z = \int \int dp dq e^{-\beta E(p, q)}$$

en donde las integrales se extienden en todo el espacio fase  $(p, q)$  del sistema.

Para el caso particular del tubo de gas de descarga, la energía de  $N$  electrones está dada por

$$E = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_e v_i^2 - eV \right) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \right) - eNV$$

en donde se ha hecho la suposición de que  $V$  es constante a lo largo del tubo (sin esa aproximación tendríamos que hacer  $E = \sum_{i=1}^N (\frac{1}{2} m_e v_i^2 - eV_i)$  con el subíndice  $i$  denotando al  $i$ -ésimo electrón).

Como el interés está principalmente en la distribución de velocidades de los electrones que están en el plasma, se integra la densidad de probabilidad sobre la parte espacial del espacio fase  $(\mathbf{q})$ . Debido a que los electrones son estadísticamente independientes se tiene que la función de partición  $Z$ , se puede escribir como

$$Z = (z_1)^N$$

siendo  $z_1$  la función de partición de un electrón dada por:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \int \int dp^3 dq^3 e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} - eV)} \\
&= \left( \int_{\mathcal{V}} dq e^{-\beta eV} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{\beta \frac{p_x^2}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y e^{\beta \frac{p_y^2}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z e^{\beta \frac{p_z^2}{2m}} \right) \\
&\Rightarrow \\
z_1 &= \mathcal{V} e^{-\beta eV} \left( \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \right)^3
\end{aligned}$$

en donde  $\mathcal{V}$  es el volumen que ocupa el sistema y se ha utilizado la itebral Gaussiana  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Con esta función de partición  $z_1$  se puede contestar a la pregunta de cual es la probabilidad de que el momento de un electrón esté entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}^3$ .

$$\begin{aligned}
\rho_e(\mathbf{p}) d\mathbf{p}^3 &= \frac{1}{z_1} \left( \int d\mathbf{q}^3 e^{-\beta(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - eV)} \right) d\mathbf{p}^3 \\
&\Rightarrow \\
\rho_e(\mathbf{p}) d\mathbf{p}^3 &= \left( \frac{\beta}{2m\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} d\mathbf{p}^3
\end{aligned}$$

Para tener explictamente la distribución de las velocidades y no de los momentos se hace el cambio de variable  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  y como no interesan las direcciones de los electrones sino únicamente su magnitud se hace el cambio de coordenadas cartesianas  $\mathbf{v}$  a esféricas.

$$\rho_e(\mathbf{v}) d\mathbf{v}^3 = \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{m\mathbf{v}^2}{2}} d\mathbf{v}^3 \quad (13)$$

$\Rightarrow$

$$\rho_e(v) = 4\pi \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} v^2 e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} dv \quad (14)$$

en donde se ha integrado sobre los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  de las coordenadas esféricas para solo tener la dependencia en la magnitud de la velocidad. La ecuación (14) es la llamada **distribución de Maxwell** para las velocidades de los electrones dentro del tubo de gas de descarga.

Utilizando la distribución de velocidades, el número promedio de electrones por unidad de volumen (ie, densidad de electrones  $n_e$ ) que tienen una velocidad entre  $v$  y  $v + dv$  está dado simplemente multiplicando la ec. (14) por  $n_e$ :

$$f_e(v) dv = n_e 4\pi \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} v^2 e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} dv \quad (15)$$

Con estos elementos de física estadística se puede considerar ahora un poco más lo que pasa con la punta de Langmuir dentro del plasma. El objetivo es encontrar una ecuación

o modelo que nos relacione la corriente que circula a través de la punta, el voltaje de la punta, la temperatura de los electrones y la densidad de electrones.

La figura 10 es un esquema utilizado para calcular la cantidad promedio de electrones que golpean la superficie de la punta de área  $A$  en un intervalo  $\Delta t$ .

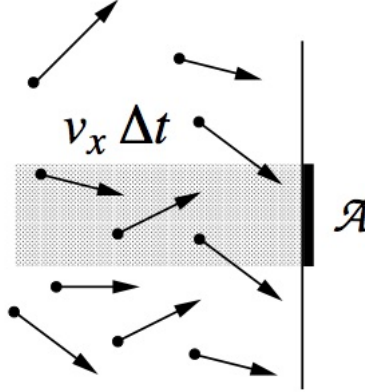


Figura 10: Electrones colisionando con la punta de Langmuir.

Observando la figura se puede notar que la cantidad promedio de golpes que recibe el área  $A$  de la punta de Langmuir debe estar en función del volumen sombreado. Este volumen es  $Av_x\Delta t$  (suponiendo que  $x$  es la dirección perpendicular a  $A$ ). Las otra dos componentes de la velocidad no contribuyen pues son paralelas al plano en el cual esta contenida el área  $A$  por lo que a partir de la distribución de velocidades en coordenadas cartesianas dada por la ecuación (13), se calcula la cantidad promedio de electrones que colisionan con el área  $A$ . Para considerar solo la componente en  $x$  de la ecuación (13), se integra la parte en  $y$  y  $z$ . Obteniendo:

$$\begin{aligned}
 n_e \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_y dv_z e^{-\frac{\beta m v_y^2 v_z^2}{2}} \right) \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\beta m v_x^2}{2}} &= n_e \left( \frac{2\pi}{\beta m} \right)^2 \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\beta m v_x^2}{2}} \\
 \Rightarrow \\
 \rho_e(v_x) &= n_e \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_x^2}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Con esta ecuación se puede calcular la cantidad promedio de electrones que golpean el área  $A$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Los electrones que lograrán colisionar son aquellos que posean almenos una velocidad mínima  $v_{min}$ , pues si su velocidad  $v$  es menor, en el intervalo  $\Delta t$  no habrán logrado recorrer la distancia suficiente como para golpear el área  $A$ . Como la ecuación (16) representa la cantidad promedio de electrones por unidad de volumen cuya componente  $x$  de la velocidad está entre  $v_x$  y  $v_x + dv_x$ , entonces el número de golpes que recibe la punta en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , está dado por la

integral:

$$\begin{aligned}
\text{numero de golpes} &= \int_{v_{min}}^{\infty} dv_x \rho_e(v_x) A v_x \Delta t \\
&= A \Delta t n_e \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{v_{min}}^{\infty} e^{1/2 \beta m v_x^2} v_x dv_x \\
&= A \Delta t n_e \left( \frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{m\beta} \int_{m v_{min}^2 \beta / 2}^{\infty} e^{-u} du \\
&\Rightarrow \\
\text{numero de golpes} &= A \Delta t n_e \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \beta m v_{min}^2} \tag{17}
\end{aligned}$$

Considerando que en la vecindad inmediata de la punta de Langmuir hay electrones que, aunque no poseen la velocidad mínima, logran colisionar con la punta, se hace la aproximación de  $v_{min} \rightarrow 0$ . se obtiene que

$$\text{numero de golpes} \rightarrow A \Delta t n_e \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2}$$

Por lo tanto la densidad e corriente  $J_e$ , definida por la cantidad de golpes por unidad de volumen por unidad de tiempo es:

$$J_e = \frac{\text{golpes}}{A \Delta t} = \frac{1}{4} \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \tag{18}$$

. cfr. ec. (12).

Cuando el voltaje en la punta es igual al voltaje de plasma  $V_p$ , la punta recoge tanto electrones como iones pero la cantidad de electrones que colecta por unidad de tiempo, es decir la corriente debida a los electrones es mucho mayor que la de los iones, por lo que se hace la aproximación de que la corriente eléctrica a través de la punta es solo debido a los electrones y por tanto, usando la ecuación (18), se obtiene que aproximadamente en el voltaje de plasma, la corriente de la punta es

$$I_p = e A \frac{1}{4} n_e \left( \frac{8kT_e}{\pi m} \right)^{1/2} \tag{19}$$

con  $e$  la carga del electrón y  $T_e$  la temperatura de los electrones.

En la región C de la curva de la figura 4 cuando el potencial en la punta es menor que  $V_p$  y aquí la sonda comienza a repeler algunos electrones y solo los que tienen la energía cinética suficiente pueden golpear la punta. La velocidad mínima  $v_{min}$  se puede aproximar con conservación de energía.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m v_{min}^2 - e V_p &= -e V \\
\frac{1}{2} m v_{min}^2 &= e (V_p - V)
\end{aligned}$$



en donde  $V$  es el voltaje que hay en la punta. Sustituyendo en la ecuación (19) se llega a la expresión más importante del modelo teórico de la punta de Langmuir:

$$I_e(V) = eA \left( \frac{kT_e}{2\pi m} \right)^{1/2} e^{\frac{e(V_p - V)}{kT_e}} \quad (20)$$

Para  $V \ll V_p$ , muy pocos electrones han adquirido la velocidad mínima. Cuando se tiene que el voltaje en la punta coincide con el voltaje flotante  $V_f$ , las corrientes de los electrones y iones son iguales y se cancelan entre sí.

Se puede hacer un desarrollo completamente análogo para la corriente de los iones  $I_i(V)$ . La única corrección que debe hacerse es la comentada en el reporte de sustituir la corriente de saturación de iones utilizando la velocidad de Bohm.