



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Laboratorio de Física Contemporánea

Práctica 1

Difracción de electrones

Oscar Hurtado González
oscar_hg@ciencias.unam.mx

En colaboración con Peter Nava
nk_peter@yahoo.com.mx

México, D.F., a Jueves 3 de Septiembre 2015

Objetivos

Utilizar un tubo de rayos catódicos para medir la longitud de onda asociada a los electrones. Con ello se muestra experimentalmente la hipótesis de DeBroglie acerca de la naturaleza dual de la materia.

Para ello se utiliza la *ley de Bragg para la difracción* causada por un cristal de grafito. Con esta misma ley se pretende medir la distancia de separación entre los planos de tal red cristalina.

Resumen

Se corroboró la naturaleza dual de la materia midiendo la longitud de onda de el haz de electrones difractado por un cristal de grafito dentro de un tubo de rayos catódicos . Con ayuda de la ley de Bragg para la difracción se encontraron las distancias interplanares de la red cristalina del grafito. Estas fueron:

$$d_1 = (1.647 \pm 0.5654) \times 10^{-10} m, \quad d_2 = (1.366 \pm 0.3456) \times 10^{-10} m$$

1. Introducción y marco teórico

Un gran avance en la comprensión de la estructura atómica se inició en 1924, con una proposición de Louis De Broglie. Su razonamiento fue algo como esto: la naturaleza ama la simetría. La luz tiene naturaleza dual y si la naturaleza es simétrica, esa dualidad debería tambien ser válida para la materia. Él propuso que los electrones y demás partículas se pueden comportar también como ondas. Por tanto una partícula debería tener una longitud de onda y una frecuencia asociada. De Broglie *postuló que una partícula libre con masa en reposo m , que se mueva a rapidez no relativista, debería tener una longitud de onda relacionada con su momento $p = mv$ exactamente en la misma forma que un fotón*. Así la **la longitud de onda de DeBroglie** para una partícula es:

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{1}$$

Donde λ es la longitud de onda, h la constante de Planck, y p el momento.

Su conjetura fue confirmada por los experimentos de Clinton Davisson y Lester Germer sobre la difracción de electrones en estructuras cristalinas de Níquel en 1927. En el experimento realizado en esta práctica el carácter ondulatorio de un electrón es demostrado por su difracción en una red policristalina de grafito (Debye-Scherrer diffraction). Tal experimento está en contraste con el experimento de Davisson y Germer (similar al usado por G.P. Thompson en 1928) en donde los electrones se reflejan al chocar con la cara de un cristal de Níquel, lo que provoca un patron de difraccion que puede interpretarse como difraccion de ondas planas debido al espaciado regular de los atomos del cristal.

Los electrones emitidos por el cátodo son colimados a través de un sistema óptico de enfocamiento de electrones y salen como un pequeño rayo monocrómatico, es decir con

la misma frecuencia. Tal rayo incide sobre un pequeño cristal de grafito. Los átomos del grafito se pueden considerar como una rejilla de difracción para los electrones. El tubo que se utiliza en el experimento tiene una pantalla fluorescente en donde se observa el patrón de difracción que consiste en dos anillos concéntricos que están centrados en el rayo de electrones que no sufre difracción.

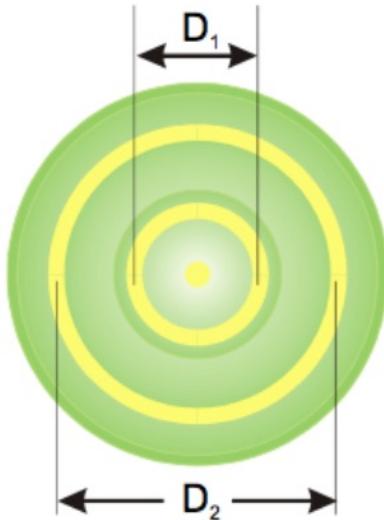


Figura 1: Representación esquemática del patrón de anillos observado debido a la difracción de los enectrones en el graficto. Dos anillos con diámetros D_1 , D_2 son observados correspondientes a los espaciamientos de planos en la red cristalina d_1 y d_2 de la figura 3

El diámetro de los anillos concéntricos cambia con la longitud de onda λ la cual se puede controlar con el voltaje suministrado como puede verse de las siguientes consideraciones:

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

Con e la carga del electrón, V el voltaje con el que se aceleran los electrones, m su masa, y v la velocidad de los electrones.

\Rightarrow

$$p = \sqrt{2meV} \quad (3)$$

Así, utilizando la relación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \quad (4)$$

Por otro lado en 1913, H. W. y W. L. Bragg se dió cuenta de que el arreglo regular de los átomos en un cristal puede ser entendido como un arreglo de elementos de una red de elementos sobre planos paralelos reticulados. Cuando se expone tal red cristalina a rayos-X monocromáticos ó electrones monoenergéticos, y, adicionalmente asumiendo que aquellos poseen una naturaleza ondulatoria, entonces cada elemento en la red cristalina actúa como un "punto de dispersión", en el cual se forma una onda esférica.

De acuerdo al principio de Huygens, éstas ondas esféricas se superponen para crear un frente de ondas "reflejado". En este modelo, la longitud de onda λ permanece sin cambiar con respecto a la longitud de la onda incidente, y las direcciones que son perpendiculares a los dos frentes de onda satisfacen la condición "ángulo de incidencia=ángulo de reflexión".

Entonces, la interferencia entre los rayos reflejados por las redes individuales entre planos adyacentes, da cuando la diferencia de "camino óptico" $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 2ds\sin\theta$ es un múltiplo entero de la longitud de onda λ (Fig. 2), lo cual se expresa como

$$2ds\sin\theta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5)$$

A esto se le conoce como *condición de Bragg para la difracción* ó **ley de Bragg para la difracción**.

Como ya se mencionó anteriormente, en este experimento se utiliza un material polícrystalino de grafito. Esto corresponde a un número grande de cristalitos que están arreglados irregularmente en el espacio. Como resultado siempre hay algunos cristales que satisfacen la condición de Bragg dada una dirección de incidencia y una longitud de onda. Las reflexiones producidas por estos cristalitos yacen en unos conos cuyo eje común está dado por la dirección de incidencia de los electrones. Los planos de la red cristalina del grafito poseen los espaciamientos d_1 , d_2 que tienen los valores (Fig. 3):

$$d_1 = 2.13 \times 10^{-10} m \quad d_2 = 1.23 \times 10^{-10} m$$

Estos valores se tomaron del manual del "electron diffraction tube 2555" de la marca Teletron.

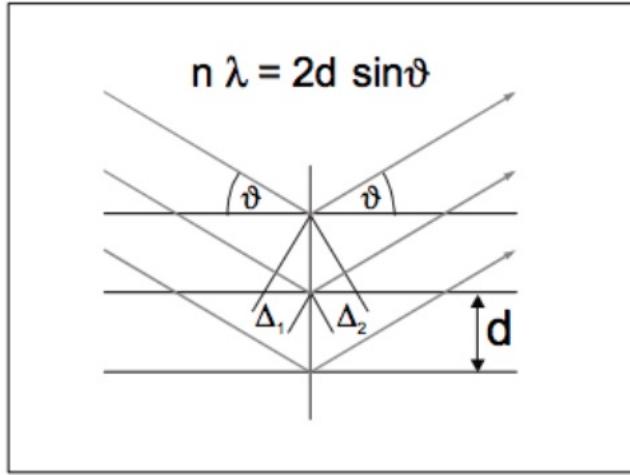


Figura 2: Representación esquemática de la *ley de Bragg*.

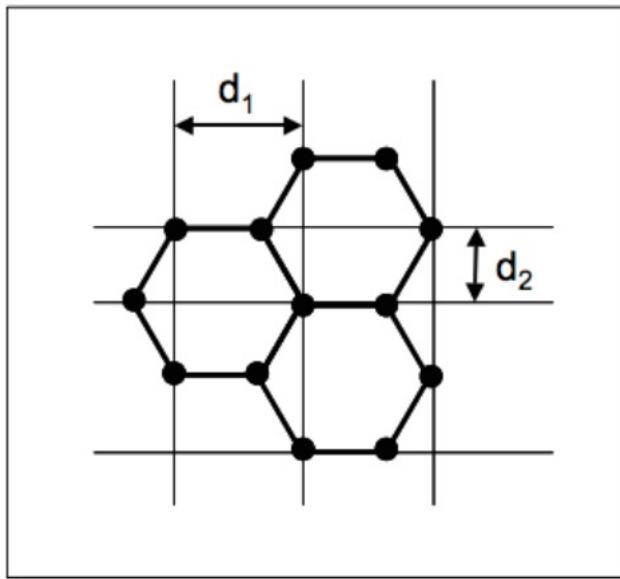


Figura 3: Espaciamientos de los planos de la red cristalina del grafito.

De acuerdo con las figuras 4, se puede deducir facilmente la relación:

$$\tan(2\theta) = \frac{D}{2L} \quad (6)$$

Donde D es el diámetro del anillo formado en el patrón de difracción y L la distancia del cristal a la pantalla, que en este caso $L = (0.13 \pm 0.00005)m$ de acuerdo al manual del fabricante.

En la aproximación de ángulos pequeños tenemos que $\tan(2\theta) \approx \sin(2\theta) = 2\sin\theta$ y con ello se obtiene:

$$2\sin\theta = \frac{D}{2L} \quad (7)$$

Substituyendo (7) en (5) lleva a primer orden de difracción (esto es $n = 1$) a:

$$\lambda = d \frac{D}{2L} \quad (8)$$

siendo d , la distancia de separación entre planos de la red. Utilizando la ecuación (4), que nos da λ en términos del voltaje, se puede combinar con la eq. (8), para observar que el diámetro de los anillos D_1 y D_2 cambian en función del voltaje:

$$D = \frac{\alpha}{\sqrt{V}} \quad (9)$$

con

$$\alpha = \frac{2Lh}{d\sqrt{2me}} \quad (10)$$

\Rightarrow

$$d = \frac{\alpha\sqrt{2me}}{2Lh} \quad (11)$$

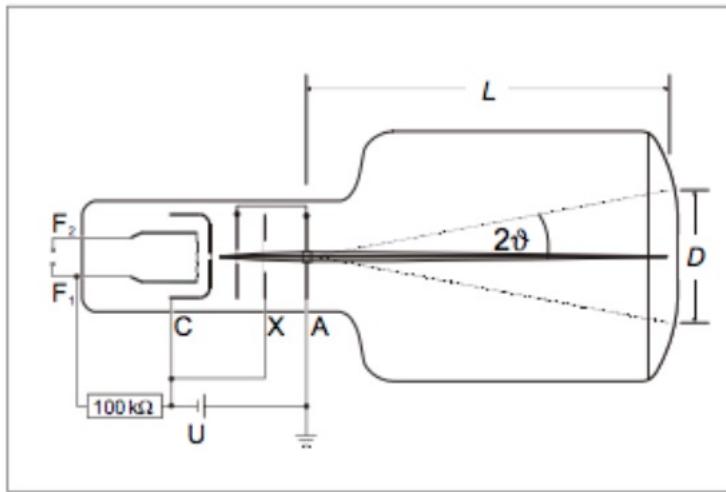


Figura 4: Dibujo esquemático del tubo de difracción .

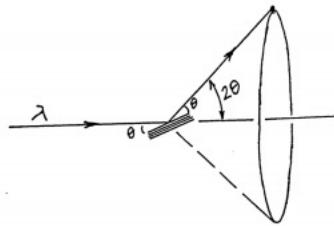


Figura 5: Angulo utilizado en la ley de Bragg

Por tanto, medir los diámetros D_1 y D_2 como función del voltaje V permite determinar el espaciamiento de los planos de la red del grafito d_1 y d_2

2. Desarrollo experimental

Se utilizó un tubo de difracción de electrones 2555 de la marca Teletron, una fuente de alto voltaje de 5kV EHT también de la marca Teletron, y 3 pares de cables BNC-BNC para realizar las conexiones correspondientes, y un amperímetro en escala de mA .

Para conectar la fuente y el amperímetro al tubo de difracción, se utilizó el siguiente diagrama provisto en el manual del fabricante:

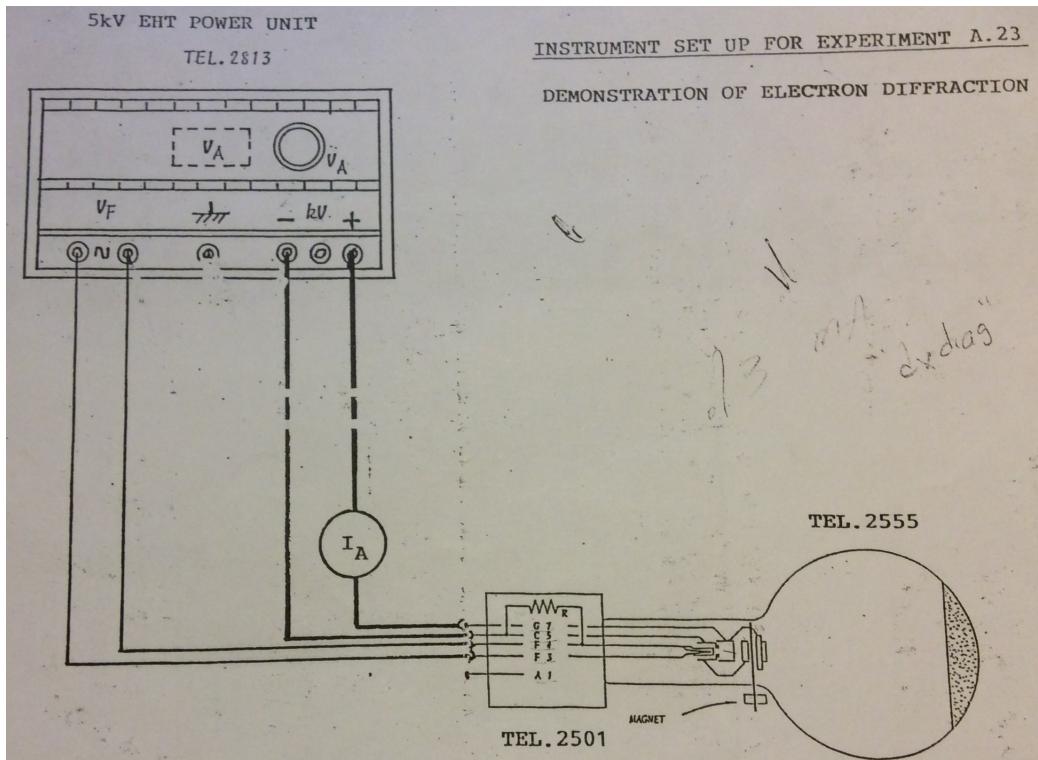


Figura 6: Diagrama de conexión.

Algunas notas de seguridad que se siguieron durante el experimento:

- Antes de encender la fuente de voltaje verificar que todos los controles de intensidad estén completamente girados a la izquierda.
- Girar los controles de intensidad lentamente.
- No pasar de 5kV pues se generan rayos X.
- Usar el amperímetro para medir la corriente de banco y corroborar que ésta no exceda los 13mA.
- Debido al alto vacío que hay dentro del tubo, se debe tener extrema precaución a la hora de manipularlo, cuidando en todo momento de no dar el mas mínimo golpe o subir el voltaje muy rápido para evitar una posible implosión. *Nota:* Esto es de entrada, una dificultad para realizar las mediciones de los diámetros de los anillos del patrón de difracción.

Una vez tomadas en cuenta estas consideraciones de seguridad, se procedió a observar el patrón de difracción formado.

Antes de realizar cualquier posible medición, lo primero que se hizo fue comprobar que el patrón de difracción observado era efectivamente producto del haz de electrones y no de un haz de luz monocromático. Para ello, una vez formado el patrón de difracción en la pantalla, se pasó un pequeño imán a unos cuantos centímetros del tubo, el indica la naturaleza del patrón: si el patrón se mueve siguiendo el movimiento del imán, en efecto se debe a la difracción de electrones, pero si no se mueve, entonces el patrón es causado por luz y habría que revisar que el tubo esté funcionando correctamente con el profesor o el laboratorista indicado.

Para medir los diámetros de los anillos se tomaron fotografías con un iphone 4s montado en un soporte universal con pinzas para asegurar que las fotografías siempre se tomaran desde la misma posición y así disminuir el error de parelaje. Como referencia para medir los diámetros en las fotografías se colocó una regla enfrente del tubo de rayos como se muestra en la figura 7 . Las fotos se analizaron con el software de libre distribución *Tracker*. Una vez montado el experimento y habiendo comprobado que el patrón de di-



Figura 7: Foto de referencia.

fracción era el de los electrones se varió lentamente el voltaje de la fuente para cambiar la longitud de onda del haz de electrones y tomaron dos conjuntos de fotografías. El primer conjunto de fotografías correspondió a fotos de los patrones de difracción formados para cada valor de voltaje correspondientes a los valores 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5 kV
Nota: para cada voltaje se tomaron dos fotografías. Se tomaron dos fotografías debido a que en principio, los valores de los diámetros deberían ser medidas reproducibles.

El segundo conjunto de fotografías correspondió a las fotografías de los voltajes entre 2.5kV y 4.5kV pero esta vez se varió el voltaje cada 0.2kV. La siguiente fotografía es

un ejemplo de las fotografías tomadas.

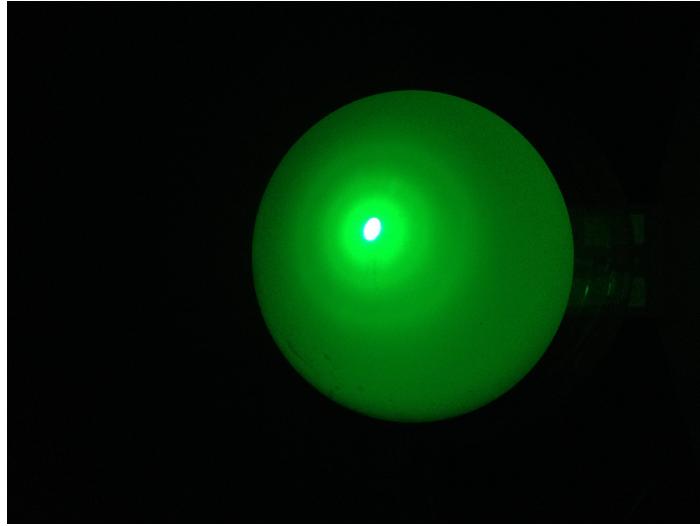


Figura 8: Ejemplo de patrón de difracción.

Los valores de todos los diámetros medidos se muestran en un dos tablas en el Anexo de este informe. La primera tabla corresponde a las primeras fotografías *de cada voltaje*, y la segunda tabla corresponde a las segundas fotografías de cada voltaje. En cada tabla una columna corresponde a la longitud de onda de los electrones, que es calculada con voltaje utilizado a partir de la ecuación (4).

3. Resultados

La siguiente tabla muestra la longitud de onda calculada a partir del voltaje sustituyendo los valores para la masa y carga del electrón así como la constante de Planck en la ecuación (4).

La incertidumbre asociada a λ , $\delta\lambda$, se calculó con la fórmula para propagación de incertidumbres:

$$\delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\delta x_i)^2} \quad (12)$$

con $f = f(x_1, \dots, x_n)$.

A partir de la ecuación 9 y con los datos de las tablas 2 y 3 del apéndice se obtuvieron las siguientes gráficas de los diámetros D_1 y D_2 y se realizó un ajuste por medio de mínimos cuadrados para conocer el valor de la pendiente α y así conocer las distancias interplanares d_1 , d_2 , respectivamente.

Tabla 1: Longitudes de onda de los haces de electrones difractados.

Voltaje [kV] $\pm 0.5kV$	L. De Onda λ $\pm 0.5nm$	$\delta\lambda[nm]$
2	0.863	0.050
2.5	0.772	0.053
2.7	0.742	0.056
2.9	0.716	0.057
3	0.704	0.058
3.1	0.693	0.061
3.3	0.672	0.064
3.5	0.652	0.067
3.7	0.634	0.069
3.9	0.618	0.071
4	0.610	0.072
4.1	0.603	0.075
4.3	0.588	0.077
4.5	0.575	0.084
5	0.546	0.083

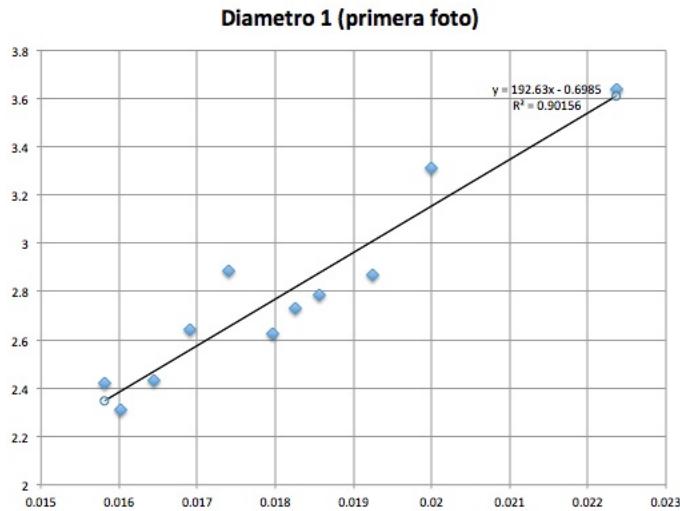


Figura 9: $D_1[cm]$ vs. $\frac{1}{\sqrt{V}}[\frac{1}{V}]$

Vale la pena hacer varios comentarios acerca de estas gráficas para poder interpretarlas.
De la ecuación

$$D = \frac{\alpha}{\sqrt{V}}$$

substituyendo todos los valores conocidos para las cosntantes que aparecen en α , obtenemos

$$D = \frac{31.7 \times 10^{-9} m}{d\sqrt{V}}$$

Por tanto si en el ajuste de mínimos cuadrados se obtiene una ecuación del tipo $y =$

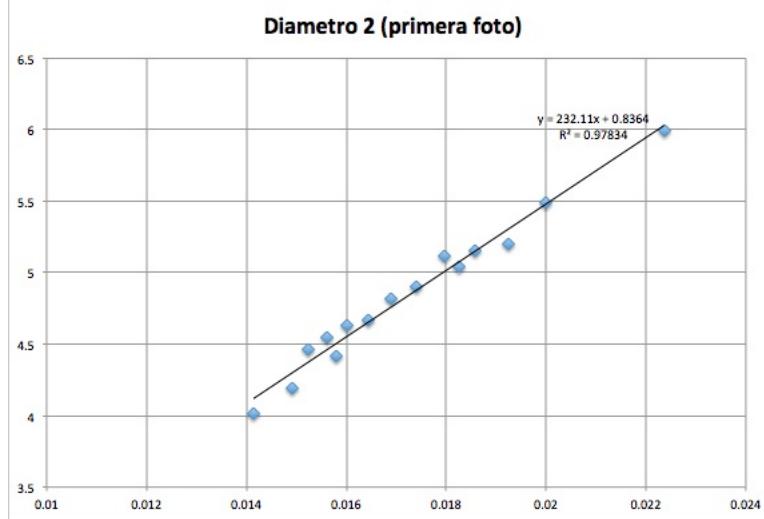


Figura 10: $D_2[\text{cm}] \text{ vs. } \frac{1}{\sqrt{v}}[\frac{1}{V}]$

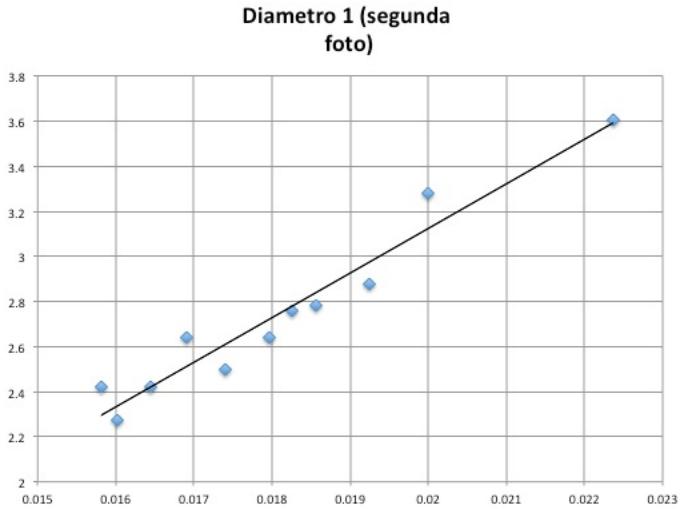


Figura 11: $D_1[\text{cm}] \text{ vs. } \frac{1}{\sqrt{v}}[\frac{1}{V}]$

$mx + b$, la manera de obtener d ya sea d_1 o d_2 (las distancias interplanares), será igualando las dos ecuaciones anteriores para así obtener:

$$d = \frac{31.7 \times 10^{-9}}{m}$$

Con estas consideraciones se hicieron los cálculos correspondientes y se obtuvo (propagando incertidumbres mediante el método de mínimos cuadrados) y utilizando la ecuación (12), los siguientes valores para las $d's$

Para la primera foto:

$$d_1 = (1.647 \pm 0.5654) \times 10^{-10} \text{ m}, \quad d_2 = (1.366 \pm 0.3456) \times 10^{-10} \text{ m}$$

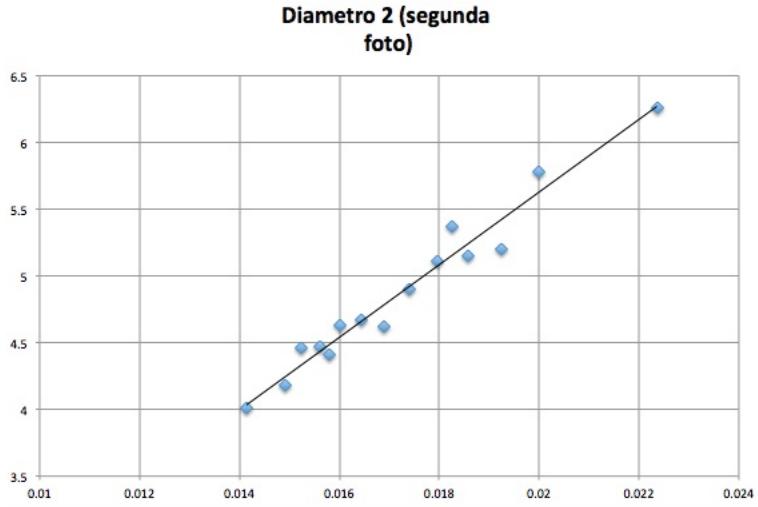


Figura 12: $D_2[cm]$ vs. $\frac{1}{\sqrt{v}}[\frac{1}{V}]$

y para la segunda foto:

$$d_1 = (1.603 \pm 0.5398) \times 10^{-10} m, \quad d_2 = (1.165 \pm 0.3983) \times 10^{-10} m$$

4. Discusión

Se encuentra una relación sencilla entre el voltaje y la longitud de onda, lo cual se puede observar en la tabla 1.

Comparando los valores de d_1 y d_2 obtenidos en el experimento con los valores “teóricos” dados al inicio del reporte $d_1 = 2.13 \times 10^{-10} m$ $d_2 = 1.23 \times 10^{-10} m$, vemos que para el anillo interior D_1 el valor experimental está mas lejos del teórico que el valor de D_2 , pero la incertidumbre propagada es ligeramente mayor para D_1 mayor.

Esto era de esperarse debido a que las mediciones del anillo D_1 fueron menos precisas en el sentido de que no era tan fácil distinguir el anillo interiror en las fotografías pues éste se perdía con un disco brillante centrado en el haz de electrones y a medida que aumentabamos el voltaje, el contraste de las fotos, y el brillo hacían cada vez más difícil distinguir a tal anillo interiror. De hecho en las tablas 2 y 3 del apéndice aparecen unas líneas con unos guiones “-” debido a que para esos voltajes ya era imposible medir con ayuda de Tracker pues el disco interiror se perdía completo.

Si vse observa el intervalo de incertidumbre propagado para D_1 vemos que el valor “real” no cae dentro del tal intervalo por lo que podemos pensar en que fue un mal experimento y habría que repetirlo de nuevo, sin embargo, para el anillo exterior $D - 2$ el valor “real” cae dentro de los dos intervalos de incertidumbre encontrados, pero esto es por que se pudieron observar con mayor claridad estos anillos en las fotografías y por tanto las mediciones en Tracker fueron un poco más precisas.

5. Conclusiones y recomendaciones

Con este experimento de difracción se demuestra la naturaleza ondulatoria de la materia, en particular de los electrones. Se corroboró la ley de Bragg para la difracción utilizando el cristal de grafito y se encontraron las distancias interplanares de tal red cristalina mostradas en la figura 3. Debido a la imprecisión de las mediciones de los diámetros, los valores obtenidos para los anillos interiores no estan completamente de acuerdo con lo dado “teóricamente”. Pero a pesar de eso los resultados fueron bastante satisfactorios en el sentido de que se lograron los objetivos de la práctica.

Por otro lado cabe aclarar que la impresión de las mediciones se debe a varios errores que no se podían controlar en el experimento, como por ejemplo el haz de electrones no estaba correctamente alineado dentro del tubo y esto provocaba que el patrón de difracción estuviera bastante fuera de foco, introduciendo un grave error de parejaje. También hay que mencionar que los patrones de difracción observados no eran muy nítidos, (cosa que puede deberse a varios factores, entre ellos la antigüedad del tubo utilizado) y costaba trabajo distinguirlos en la pantalla del tubo. Por ello las fotografías no fueron tan buenas y costaba mucho trabajo conseguir mediciones precisas con Tracker.

Se propone que para futuras prácticas se pueda medir por medio de diversos métodos (uso de un Vernier de plástico, un hilo de cañamo como regla, etc.) los diferentes diámetros de los anillos del patrón de difracción y comparar los resultados obtenidos para las diversas técnicas.

Referencias

- [1] Sears,Semansky; Fisica Universitaria; Pearson; 2009.
- [2] Lamport, L.; L^AT_EX; Addison-Wesley. 1996.
- [3] http://www.ld-didactic.de/literatur/hb/e/p6/p6151_e.pdf
- [4] <https://project-physicsteaching.web.cern.ch/project-physicsteaching/english/experiments/electron-diffraction-tube.pdf>
- [5] Manual de práctica de laboratorio de Física Contemporánea, Facultad de Ciencias

6. Apéndice.

Tabla 2: resultados para las primeras fotos

Voltaje [kV] $\pm 0.5kV$	L. De Onda λ $\pm 0.5nm$	$\delta\lambda$ [nm]	Diámetro D_1 $\pm 0.5mm$	Diámetro D_2 $\pm 0.5mm$
2	0.863	0.042	3.635	5.994
2.5	0.772	0.050	3.309	5.49
2.7	0.742	0.053	2.869	5.204
2.9	0.716	0.056	2.784	5.15
3	0.704	0.057	2.732	5.045
3.1	0.693	0.058	2.626	5.116
3.3	0.672	0.061	2.886	4.899
3.5	0.652	0.064	2.642	4.814
3.7	0.634	0.067	2.432	4.669
3.9	0.618	0.069	2.308	4.627
4	0.610	0.071	2.421	4.412
4.1	0.603	0.072	-	4.548
4.3	0.588	0.075	-	4.464
4.5	0.575	0.077	-	4.193
5	0.546	0.084	-	4.01

La incertidumbre asociada a λ , $\delta\lambda$, se calculó con la fórmula para propagación de incertidumbres:

$$\delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\delta x_i)^2}$$

con $f = f(x_1, \dots, x_n)$.

Tabla 3: Resultados para las segundas fotos.

Voltaje [kV] $\pm 0.5kV$	L. De Onda λ $\pm 0.5nm$	$\delta\lambda[nm]$	Diámetro D_1 $\pm 0.5mm$	Diámetro D_2 $pm0.5mm$
2	0.863	0.050	3.607	6.262
2.5	0.772	0.053	3.282	5.78
2.7	0.742	0.056	2.878	5.204
2.9	0.716	0.057	2.783	5.15
3	0.704	0.058	2.758	5.372
3.1	0.693	0.061	2.643	5.116
3.3	0.672	0.064	2.497	4.899
3.5	0.652	0.067	2.638	4.622
3.7	0.634	0.069	2.419	4.669
3.9	0.618	0.071	2.275	4.627
4	0.610	0.072	2.422	4.412
4.1	0.603	0.075	-	4.476
4.3	0.588	0.077	-	4.464
4.5	0.575	0.084	-	4.182
5	0.546	0.083	-	4.01