

Case Study : Introduction de contraintes d'intensité carbone et de tracking error dans des performance-seeking-portfolios

Joséphine HACOT, Oscar LAVIOLETTE

Cours : Finance Durable, Lionel Martellini

Mars 2025

Table des matières

1	Introduction	3
2	Approche Initiale : Sélection de 50 actions	3
3	Choix de la méthodologie	4
4	Modélisation des contraintes	4
4.1	Modélisation de la contrainte carbone	4
4.2	Modélisation de la contrainte de tracking error	5
4.2.1	Modélisation d'un benchmark synthétique	5
5	La gestion des données manquantes	6
6	Modélisation des portefeuilles	6
7	Résultats	6
8	Évaluation de la performance des portefeuilles	7
8.1	Multiplication de la valeur entre 1992 et 2019	8
9	Analyse des résultats	9
10	Analyse des contraintes des portefeuilles stratégiques (PSP)	10
10.1	La contrainte carbone	10
10.2	Erreur de tracking (Tracking error)	11
10.3	Proposition de portefeuille avec gestion de la volatilité et de la rentabilité	13
10.3.1	Pour aller plus loin	13

1 Introduction

L'objectif principal de cette étude est de vous proposer une stratégie d'optimisation de votre exposition au risque et de sa rémunération.

Une première idée discutée lors du kick-off meeting fut de proposer une sélection d'un basket de 50 actions, que nous détaillerons en première partie. Nous expliquerons ensuite plus en détails la stratégie qui a finalement été retenue, à savoir de ne pas limiter l'univers de nos portefeuilles mais d'inclure des contraintes carbone et de tracking error lors du processus d'allocation des poids.

2 Approche Initiale : Sélection de 50 actions

Comme demandé initialement, nous avons sélectionné 50 actions appartenant au S&P 500 qui possèdent une faible intensité carbone tout en assurant une diversification sectorielle adéquate des portefeuilles.

Afin d'assurer une bonne diversification, nous avons effectué un tri sectoriel des actions (voir Figure 1) et identifié les actions présentant les plus faibles corrélations entre elles, dans le but de diversifier notre portefeuille.



FIGURE 1 – Répartition sectorielle des actions analysées

Dans un second temps, nous avons affiné notre sélection en calculant la matrice de covariance de chaque secteur par rapport à celle du marché, ce qui nous a permis d'obtenir les coefficients de corrélation sectoriels. Cependant, cette approche ne prend pas en compte l'intensité carbone des entreprises, nous avons donc sélectionné les 50 entreprises les moins émettrices, tout en conservant la répartition sectorielle issue de l'analyse initiale. La répartition des actions avant cette sélection est la suivante :

- 1 action du secteur Consumer Discretionary,
- 21 actions du secteur Financials,
- 10 actions du secteur Health Care,
- 15 actions du secteur Information Technology,
- 1 action du secteur Real Estate,
- 2 actions du secteur Industrials.

À partir de ces données, nous avons retenu pour chaque secteur les entreprises présentant les émissions carbone les plus faibles, ce qui nous a permis d'obtenir un basket de 50 actions sélectionnées. On peut noter la surreprésentation du secteur de la finance, healthcare et technology, des secteurs du tertiaire à faible intensité carbone.

Sector	Consumer Disc	Financial	Health Care	Technology	R-Estate	Industrial
Stocks	Hasbro	JP Morgan Chase Visa 'A' Mastercard American Express Fiserv BlackRock S&P Global Chubb Charles Schwab Marsh & McLennan Aon Class A Prudential Financial American Intl. Group Moody's Aflac Travelers Cos. T. Rowe Price Group Northern Trust Hartford Financial Services Ameriprise Financial Cincinnati Financial	UnitedHealth Group Medtronic Stryker CIG Anthem Boston Scientific Biogen Edwards Lifesciences Regeneron Pharma Hologic	Apple Adobe (S) Salesforce.com NVIDIA PayPal Holdings Intuit Autodesk Lam Research IHS Markit KLA Xilinx Nasdaq Adv Micro Devices Arista Networks Verisk Anal Class A	Prologis REIT	Invesco Lincoln National

TABLE 1 – Liste des entreprises classées par secteur

3 Choix de la méthodologie

Nous avons cependant choisi de ne pas restreindre notre stratégie par une pré-sélection des actifs. Ainsi, l'univers d'investissement de nos portefeuilles demeure l'ensemble du S&P 500. Seulement, nous intégrons les contraintes liées aux émissions carbone et à la tracking error directement dans l'étape d'allocation des poids. Cette approche permet une plus grande flexibilité, offrant ainsi la possibilité de mieux exploiter les opportunités du S&P 500 tout en évitant les pertes d'efficience qu'entraînerait une réduction excessive de l'univers d'investissement. De plus, conserver un échantillon proche du benchmark facilite le contrôle de la tracking error.

L'intégration de contraintes lors de l'optimisation des poids d'un portefeuille peut se faire selon deux approches :

1. **Via un facteur de pénalité dans la fonction objectif** : dans ce cas, la fonction objectif doit trouver un compromis optimal entre la minimisation des paramètres de base et le paramètre pénalisé. Cette approche est particulièrement pertinente lorsque l'objectif n'est pas strictement défini et que l'on souhaite permettre à l'algorithme de trouver un compromis efficient entre plusieurs critères (par exemple, maximiser la diversification tout en maintenant un certain niveau de décarbonation).
2. **En tant que contrainte explicite dans le problème d'optimisation** : ici, la solution optimale doit impérativement respecter la contrainte imposée. Cette approche est adaptée lorsque l'on dispose d'un objectif précis et qu'il n'est pas souhaitable d'introduire un arbitrage entre différents critères.

En fonction des objectifs spécifiques de l'investisseur, l'une ou l'autre de ces méthodes peut être privilégiée afin d'optimiser la construction du portefeuille tout en intégrant efficacement les contraintes carbone et de tracking error.

4 Modélisation des contraintes

4.1 Modélisation de la contrainte carbone

Étant donné que notre objectif en matière de réduction des émissions carbone est clairement défini, nous intégrons cette contrainte directement dans le modèle d'optimisation. Pour l'ensemble de nos portefeuilles, la contrainte carbone est donc formulée comme suit :

$$\text{carbon_intensity}_{\text{benchmark}} \leq 0.5 \times \sum_{i=1}^n \text{carbon_intensity}_i \times \text{weight}_i \quad (1)$$

où :

- $\text{carbon_intensity}_{\text{benchmark}}$ est l'intensité carbone du benchmark calculée en euros/MTCO₂,
- $\text{carbon_intensity}_i$ est l'intensité carbone des actions i ,

— weight_i est le poids de l'action i dans le PSP,

4.2 Modélisation de la contrainte de tracking error

La tracking error est calculée selon la formule suivante :

$$\text{TE} = \sqrt{\sum_{t=1}^T \frac{(r_{p,t} - r_{b,t})^2}{T}} \quad (2)$$

où :

- $r_{p,t}$ est le rendement de l'actif i lors de la période t ,
- $r_{b,t}$ est le rendement du benchmark lors de la période t ,
- T est le nombre de périodes,

Un défi majeur dans le contrôle de la tracking error réside dans la difficulté à anticiper la contribution des actifs dans la variance du portefeuille entre chaque période de rebalancement. La variance d'un actif étant un indicateur peu fiable de sa variance future, nous avons choisi d'utiliser l'écart quadratique entre les poids du portefeuille stratégique de référence (PSP) et ceux du benchmark comme variable de contrôle de la tracking error.

Étant donné l'incertitude de la relation entre la déviation des poids des portefeuilles et la tracking error, nous avons intégré cette contrainte directement dans la fonction objectif. Un facteur de pénalisation, noté λ , est introduit et ajusté dynamiquement à chaque période de rebalancement. Ce paramètre peut être relâché si la tracking error du portefeuille est faible ou, au contraire, renforcé si celle-ci devient trop importante.

Le coefficient de pénalisation de la tracking error, λ , peut-être ajusté à chaque période de rebalancement si il satisfait une des deux conditions :

$$\lambda = \begin{cases} 2\lambda & \text{si tracking error} > 0.05 \\ \frac{\lambda}{2} & \text{si tracking error} < 0.03 \end{cases} \quad (3)$$

4.2.1 Modélisation d'un benchmark synthétique

Toutefois, une difficulté supplémentaire réside dans l'absence des poids exacts du benchmark à chaque période, en raison du manque de données sur la capitalisation boursière des actions en continu. Pour contourner cette limitation, nous avons reconstruit un indice S&P 500 pondéré par la capitalisation boursière (*Cap-Weighted Index*) en utilisant les données disponibles de 2019. La relation entre la capitalisation boursière des entreprises et leurs prix d'actions à cette date nous a permis d'estimer la quantité d'actions en circulation par entreprise. Sous l'hypothèse que cette quantité reste constante sur l'ensemble de la période d'analyse, nous avons ainsi pu approximer la pondération de chaque action dans l'indice à chaque période :

$$Q_i = \frac{\text{Cap}_i}{P_i} \quad (4)$$

En utilisant cette constante, on peut estimer le cap weighted :

$$w_i^{\text{cap}} = \frac{P_i \times Q_i}{\sum_{i=1}^n P_i \times Q_i} \quad (5)$$

où Q_i est la quantité d'actions pour l'actif i , Cap_i la capitalisation boursière et P_i le prix de l'action en 2019.

Il est important de noter que cette approche peut entraîner une légère surestimation des rendements (voir Figure 2). Cette surestimation s'explique par le fait que nous utilisons les quantités d'actions en circulation en 2019, ce qui conduit à surévaluer les entreprises ayant émis davantage d'actions entre 1989 et 2019. Or, cela revient à surpondérer les entreprises qui ont, en moyenne, enregistré une meilleure performance sur cette période.

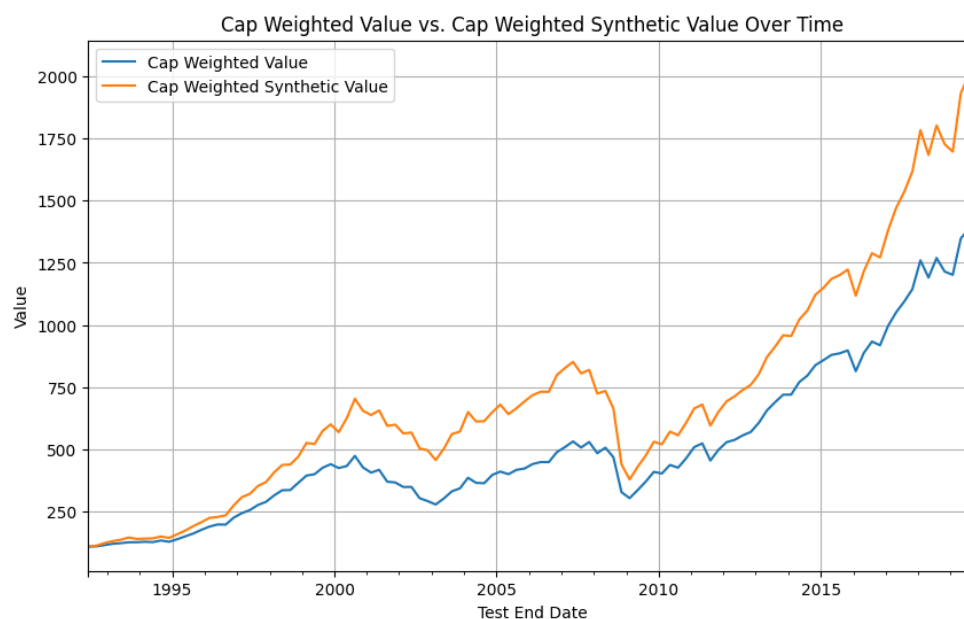


FIGURE 2 – Performance du S&P Cap Weighted vs le Cap Weighted simulé

5 La gestion des données manquantes

Certaines actions n'étant pas présentes dans le S&P 500 sur l'ensemble de la période d'analyse, nous excluons lors de chaque période de rebalancement les actions pour lesquelles plus de 3 semaines consécutives de données sont manquantes.

Pour pallier les données manquantes restantes, nous appliquons une interpolation par spline cubique pour compléter la liste de données manquantes (*ordre 3*). Cette approche permet d'estimer de manière fluide et cohérente les valeurs manquantes sans introduire de biais significatif. Ainsi, la taille de notre univers évolue au fil du temps en fonction de l'apparition et de la disparition d'actions dans le dataset.

6 Modélisation des portefeuilles

Nous considérons quatre stratégies de construction de portefeuille, chacune visant à approcher au mieux le portefeuille du Sharpe ratio maximal :

- **Minimum Variance** : optimisation visant à minimiser la variance du portefeuille.
- **Maximum Diversification** : approche cherchant à maximiser la diversification en fonction des corrélations entre actifs.
- **Maximum Décorrélation** : méthode privilégiant les actifs les moins corrélés entre eux afin de réduire le risque spécifique.
- **Maximum ENC (Effective Number of Constituents)** : stratégie optimisant la répartition équilibrée des poids entre les actifs du portefeuille.

Les formules de chaque portefeuille utilisé peuvent être trouvées à la fin du document en annexe 1.

7 Résultats

L'analyse des performances révèle des différences significatives entre les rendements cumulés des différents portefeuilles. Parmi eux, le portefeuille Max ENC affiche la meilleure performance, multipliant par 60 la valeur de l'investissement initial, contre une multiplication par 11 pour le portefeuille pondéré par la capitalisation (*cap-weighted*).

Ces résultats mettent en évidence l'impact des différentes stratégies d'optimisation sur la performance du portefeuille et soulignent l'intérêt d'une approche favorisant une répartition plus équilibrée des actifs.

8 Évaluation de la performance des portefeuilles

Afin d'évaluer la performance de nos portefeuilles, nous utilisons trois indicateurs clés : le rendement annuel, la volatilité annuelle et le ratio de Sharpe (voir tableau 2).

- **Rendement annuel** : il mesure la performance moyenne annuelle d'un portefeuille en pourcentage. Il est calculé comme suit :

$$R_{\text{annuel, p}} = \left(\prod_{t=1}^T (1 + r_{p,t}) \right)^{\frac{1}{T}} - 1 \quad (6)$$

où r_t est le rendement sur la période t et T est le nombre d'années.

- **Volatilité annuelle** : elle reflète le risque du portefeuille en mesurant l'écart-type de ses rendements. Elle est définie par :

$$\sigma_{\text{annuelle, p}} = \sigma_{p, t} \times \sqrt{252} \quad (7)$$

où σ_p est l'écart-type des rendements journaliers et 252 représente le nombre de jours de trading par an.

- **Ratio de Sharpe** : il mesure la performance ajustée au risque en comparant l'excès de rendement d'un portefeuille par rapport au taux sans risque (en l'occurrence, 0 dans ce cas) à sa volatilité. Il est donné par :

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (8)$$

où R_p est le rendement du portefeuille, R_f est le taux sans risque et σ_p est la volatilité du portefeuille.

TABLE 2 – Comparaison des performances des portefeuilles

Portefeuille	Rendement Annuel (%)	Volatilité Annuelle (%)	Ratio de Sharpe
Cap Weighted Synthétique	11.03	14.5	0.76
S&P 500	9.64	13.2	0.75
Minimum Variance	13.01	11.1	1.23
Maximum Diversification	9.84	13.3	0.74
Maximum Décorrélation	13.21	14.4	0.92
Maximum ENC	15.99	14.4	1.11

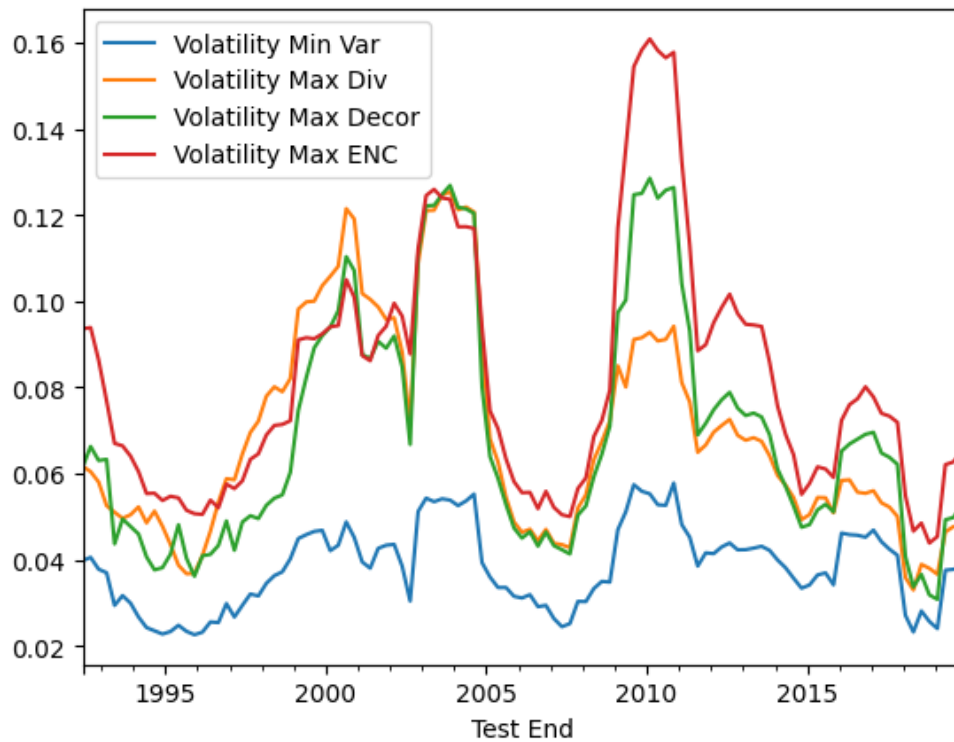


FIGURE 3 – Volatilité des différents PSP

8.1 Multiplication de la valeur entre 1992 et 2019

TABLE 3 – Évolution de la valeur des portefeuilles entre 1992 et 2019

Portefeuille	Multiplication de la Valeur
Cap Weighted Value	11.737
Cap Weighted Synthétique Value	17.316
Minimum Variance Value	26.787
Maximum Diversification Value	12.394
Maximum Décorrélacion Value	29.150
Maximum ENC Value	60.448

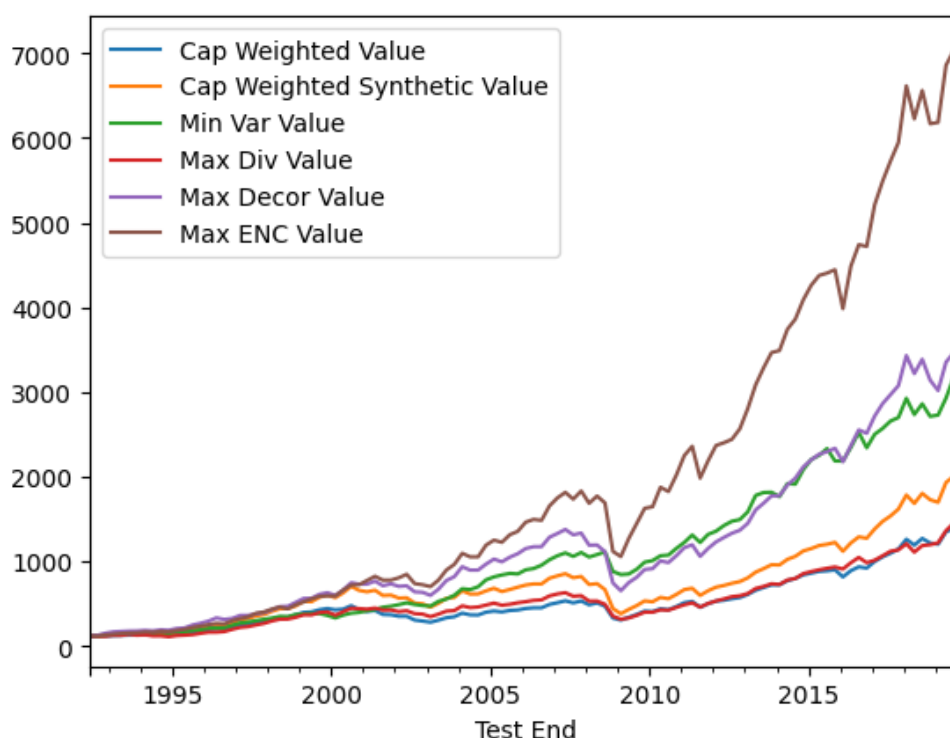


FIGURE 4 – Valeur cumulée des différents PSP

9 Analyse des résultats

Les performances du portefeuille **Cap Weighted Synthétique** et du **S&P 500** sont très similaires, avec des indicateurs de performance proches et un ratio de Sharpe presque identique. Cela valide l'utilisation du **Cap Weighted Synthétique** comme un proxy fiable permettant de calibrer les poids des portefeuilles pour contrôler la tracking error.

La majorité de nos portefeuilles surperforment le benchmark, avec des ratios de Sharpe supérieurs de 30 à 75 % à celui du S&P 500. Autrement dit, nos portefeuilles stratégiques offrent une rémunération du risque significativement meilleure. Toutefois, le portefeuille **Maximum Diversification** est le seul à sous-performer le benchmark, avec un ratio de Sharpe de 0.74.

L'une des explications de la tendance générale de nos portefeuilles réside dans leur biais en faveur des actions décarbonées, introduits par la contrainte carbone. Nous pouvons modéliser l'impact de ce biais en étudiant l'évolution des performances des portefeuilles tout en augmentant progressivement la contrainte carbone. Comme le montre graph 5, jusqu'à une contrainte carbone de 70%, les performances du portefeuille Max Div augmentent de manière notable.

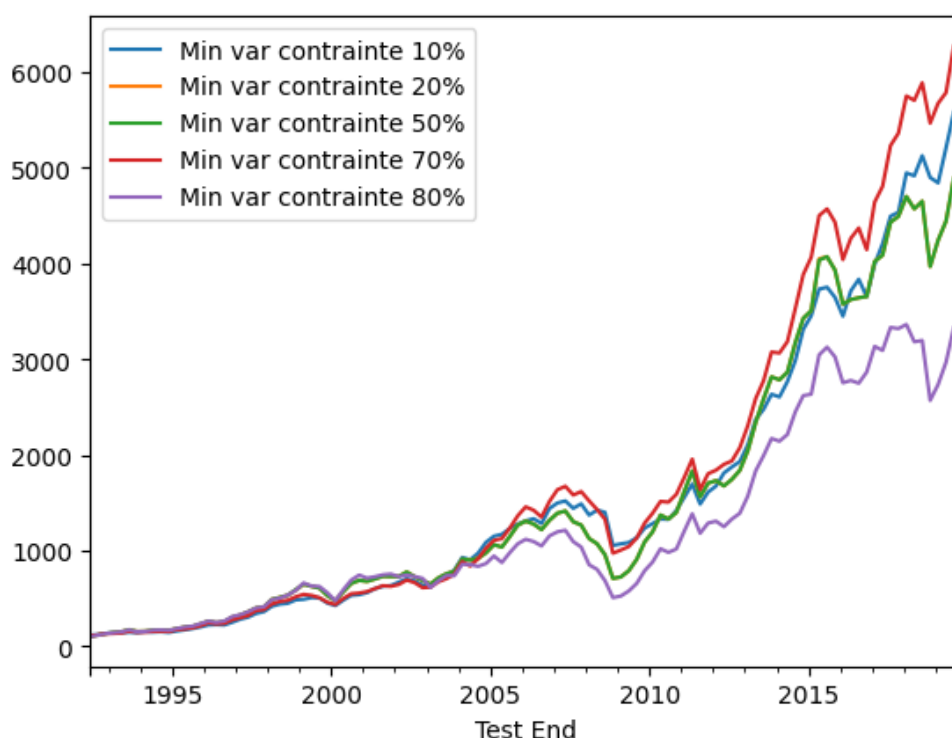


FIGURE 5 – Performance du Min Var en fonction de différentes contraintes carbone

Ainsi, on peut identifier une certaine relation positive entre intensité carbone et rendement, qui pourrait être en grande partie due au récent engouement du marché pour les actions à faible intensité carbone, ce qui aurait artificiellement gonflé leurs rendements. Néanmoins, rien ne garantit que cette dynamique se poursuivra à l'avenir. Nous recommandons donc d'adopter une approche prudente : fixer un objectif clair en matière de décarbonation, étudier en amont le niveau de réduction des émissions souhaité et privilégier une contrainte stricte sur l'intensité carbone plutôt qu'une simple pénalisation flexible.

10 Analyse des contraintes des portefeuilles stratégiques (PSP)

10.1 La contrainte carbone

L'analyse des portefeuilles montre que les portefeuilles maximisent presque constamment la contrainte d'intensité carbone (voir figure 6). Ceci montre que l'empreinte carbone reste un véritable coût à l'optimisation des portefeuilles, au détriment de la maximisation d'autres facteurs potentiellement plus bénéfiques en terme de sharpe ratio (malgré la dynamique positive entre rendements et intensité carbone discutée plus haut).

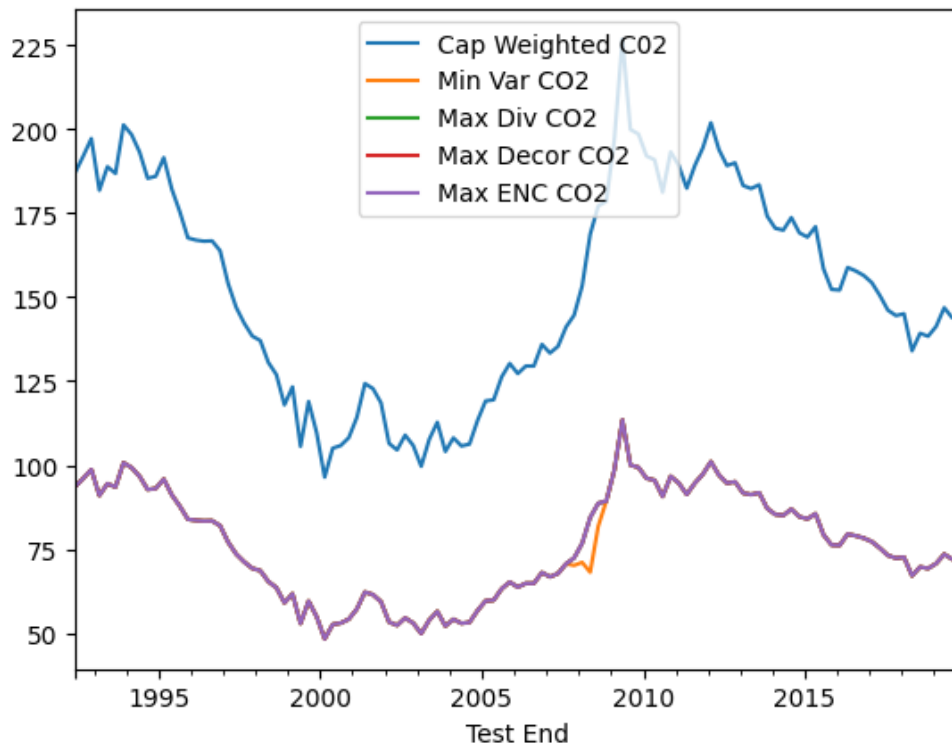


FIGURE 6 – Intensité carbone des différents PSP

10.2 Erreur de tracking (Tracking error)

Le graphique 7 présente l'erreur de tracking pour chaque portefeuille, permettant ainsi de comparer la capacité de chaque portefeuille à rester en dessous du seuil maximal de 5% de déviation vis-à-vis du benchmark.

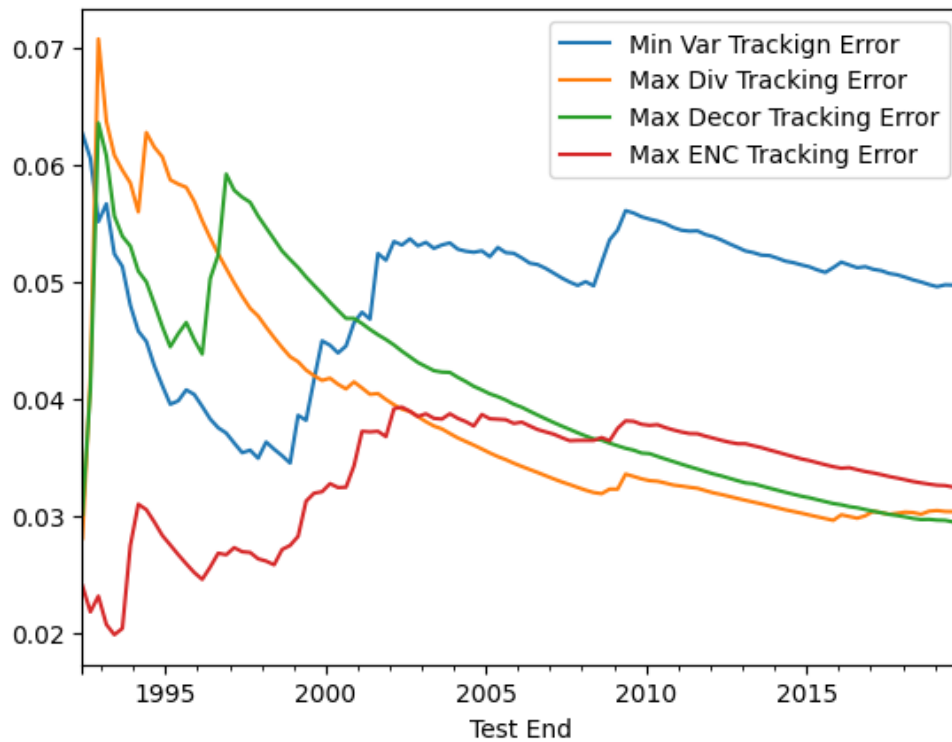


FIGURE 7 – Tracking error des différents PSP

Le graphique 8 montre comment le facteur de pénalisation s'ajuste dynamiquement afin d'assurer que la tracking error reste sous les valeurs seuils lorsque celles-ci sont dépassées.

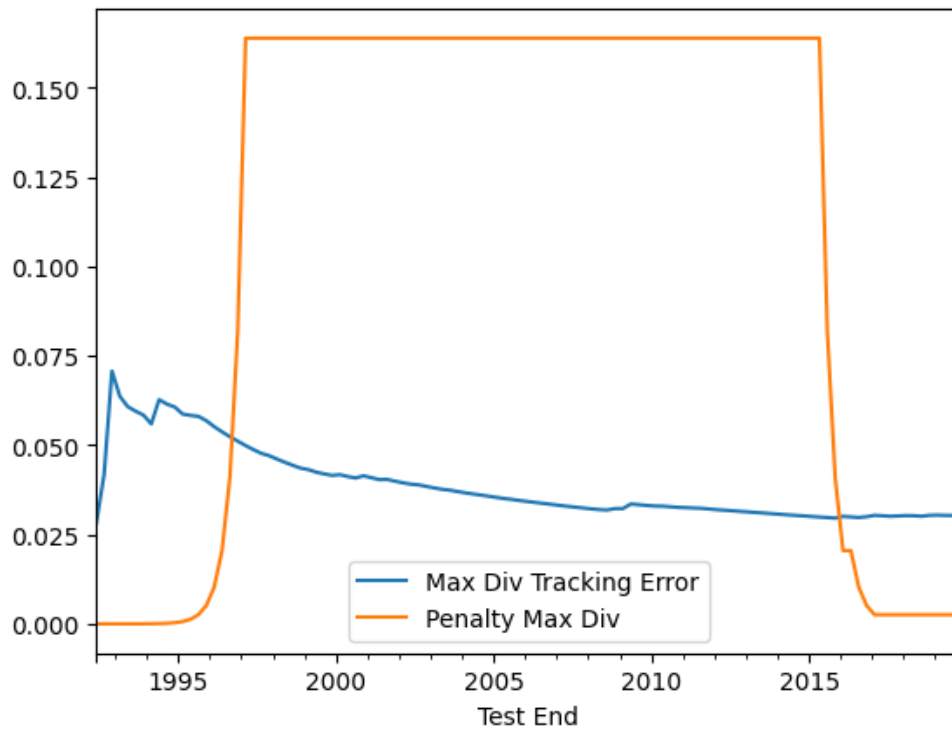


FIGURE 8 – Evolution de la tracking error et tracking penalty du PSP Max Div

10.3 Proposition de portefeuille avec gestion de la volatilité et de la rentabilité

Compte tenu du poids significatif de vos responsabilités (liabilities), nous sommes conscients de l'importance de limiter votre exposition à la volatilité, tout en maximisant la rentabilité ajustée au risque. En ce sens, nous vous recommandons le portefeuille Max ENC, qui est conçu pour combiner une volatilité maîtrisée et une performance optimisée en termes de rémunération du risque, parmi les portefeuilles échantillonnés. Ce portefeuille offre un excellent compromis entre risque et rendement, tout en intégrant la contrainte carbone.

10.3.1 Pour aller plus loin

Comme discuté plus haut, se focaliser sur la réduction de l'intensité carbone mène à une surpondération de secteurs dont l'intensité carbone est par nature faible. Bien que cela mène en effet à une réduction de l'empreinte carbone de votre portefeuille, il est pertinent de se poser la question de si cela est pertinent si l'objectif est d'inciter une décarbonation de l'économie via un placement de vos actifs. En ce sens, il est possible d'imaginer une pondération différente des actifs, en surpondérant non pas les actifs avec l'intensité carbone la plus faible, mais ceux avec le potentiel de décarbonation le plus important. Cela peut se faire via des méthodes quantitatives d'optimisation de portefeuilles (en se focalisant par exemple sur les entreprises à émissions relativement faible vis à vis de leur secteur). Néanmoins, une évaluation qualitative des politiques des entreprises afin d'évaluer leur trajectoire de décarbonation de manière plus complète est nécessaire si l'on désire avoir une politique ESG plus complète. Nous nous tenons à votre disposition si vous souhaitez continuer à développer cette réflexion.

Annexe 1 : Formules des portefeuilles

Min Var avec Pénalités de tracking error et contrainte carbone

Données :

- \mathbf{V} : Matrice de covariance des rendements des actifs.
- \mathbf{c} : Vecteur d'intensité de carbone.
- \mathbf{w}_{cap} : Poids de capitalisation.
- cw_{carb} : Contrainte de poids de carbone.
- track_err : Seuil d'erreur de suivi.
- λ_{cap} : Lambda de capitalisation.

Objectif

Minimiser la fonction objectif :

$$\text{Objectif} = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda_{\text{cap}} \cdot \text{tracking_penalty}$$

où \mathbf{w} est le vecteur des poids du portefeuille.

Pénalité de Suivi

La pénalité de suivi est définie comme :

$$\text{tracking_penalty} = 100 \cdot \sum_{i=1}^n (w_i - w_{\text{cap},i})^2$$

Ajustement de λ_{cap}

$$\lambda_{\text{cap}} = \begin{cases} \lambda_{\text{cap}} \cdot 2 & \text{si } \text{track_err} > 0.05 \\ \lambda_{\text{cap}}/2 & \text{si } \text{track_err} < 0.03 \end{cases}$$

Contraintes

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n w_i &= 1 \quad (\text{Somme des poids égale à 1}) \\ w_i &\geq 0 \quad \forall i \quad (\text{Pas de vente à découvert}) \\ \mathbf{c}^T \mathbf{w} &\leq 0.5 \cdot cw_{\text{carb}} \quad (\text{Contrainte de carbone})\end{aligned}$$

Max Div avec pénalité de tracking error et contrainte carbone

Given :

- \mathbf{V} : Covariance matrix of asset returns.
- \mathbf{c} : Carbon intensity vector.
- \mathbf{w}_{cap} : Capitalization weights.
- cw_{carb} : Carbon weight constraint.
- $track_err$: Tracking error threshold.
- λ_{cap} : Capitalization lambda.

Objective

Minimize the objective function :

$$\text{Objective} = \lambda_{\text{cap}} \cdot \text{tracking_penalty} + \mathbf{v}^T \mathbf{w}$$

where \mathbf{v} is the vector of asset volatilities, and \mathbf{w} is the vector of portfolio weights.

Constraints

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} &\leq 1 \quad (\text{Normalized portfolio variance}) \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \quad (\text{Weights sum to 1}) \\ w_i &\geq 0 \quad \forall i \quad (\text{No short-selling}) \\ \mathbf{c}^T \mathbf{w} &\leq 0.5 \cdot cw_{\text{carb}} \quad (\text{Carbon constraint})\end{aligned}$$

Tracking Penalty

The tracking penalty is defined as :

$$\text{tracking_penalty} = 100 \cdot \sum_{i=1}^n (w_i - w_{\text{cap},i})^2$$

Adjustment of λ_{cap}

$$\lambda_{\text{cap}} = \begin{cases} \lambda_{\text{cap}} \cdot 2 & \text{if } track_err > 0.05 \\ \lambda_{\text{cap}}/2 & \text{if } track_err < 0.03 \end{cases}$$

Max Decor avec pénalité de tracking error et contrainte carbone

Données :

- \mathbf{V} : Matrice de covariance des rendements des actifs.
- \mathbf{c} : Vecteur d'intensité de carbone.

- \mathbf{w}_{cap} : Poids de capitalisation.
- cw_{carb} : Contrainte de poids de carbone.
- track_err : Seuil d'erreur de suivi.
- λ_{cap} : Lambda de capitalisation.

Objectif

Minimiser la fonction objectif :

$$\text{Objectif} = \lambda_{\text{cap}} \cdot \text{tracking_penalty} + \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w}$$

où \mathbf{C} est la matrice de corrélation des actifs, et \mathbf{w} est le vecteur des poids du portefeuille.

Contraintes

$$\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \leq 1 \quad (\text{Variance du portefeuille normalisée})$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (\text{Somme des poids égale à 1})$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\text{Pas de vente à découvert})$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{w} \leq 0.5 \cdot cw_{\text{carb}} \quad (\text{Contrainte de carbone})$$

Pénalité de Suivi

La pénalité de suivi est définie comme :

$$\text{tracking_penalty} = 100 \cdot \sum_{i=1}^n (w_i - w_{\text{cap},i})^2$$

Ajustement de λ_{cap}

$$\lambda_{\text{cap}} = \begin{cases} \lambda_{\text{cap}} \cdot 2 & \text{si } \text{track_err} > 0.05 \\ \lambda_{\text{cap}}/2 & \text{si } \text{track_err} < 0.03 \end{cases}$$

Matrice de Corrélation

La matrice de corrélation \mathbf{C} est calculée à partir de la matrice de covariance \mathbf{V} :

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{V}}{\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur des écarts-types des actifs.