



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea Magistrale in Data Science per l'Economia e le imprese

**Stima del premio al rischio di Indici Tematici:
Un'applicazione del modello Heston-Nandi
GARCH con approccio Tradizionale e a Fattori
Espliciti**

**Risk Premium Estimation of Thematic Indices:
An Application of the Heston-Nandi GARCH
Model with Traditional and Explicit Factor
Approaches**

Relatore: Chiar.mo
Prof. Valerio Sullo

Tesi di Laurea di:
Oscar Maria Bolletta

Anno Accademico 2023 – 2024

Sommario

La seguente tesi presenta un'analisi del premio al rischio di strumenti finanziari che replicano indici di tipo tematico. Tali indici investono in titoli azionari relativi ad aziende che sono particolarmente sensibili a tematiche sociali o ambientali. Lo scopo dell'elaborato è analizzare e confrontare il premio al rischio di diverse categorie di investimenti di tipo tematico con un indice globale (preso in considerazione come benchmark). L'obiettivo è verificare se, dal punto di vista prettamente finanziario, il premio al rischio di tali prodotti finanziari sia più alto rispetto a quello di un indice di tipo globale. I primi capitoli forniscono una presentazione delle serie storiche analizzate e del tasso privo di rischio. Successivamente si applica, a tali serie, il modello Heston-Nandi GARCH (*HN-GARCH*) e una sua variante a fattori espliciti, utile per analizzare l'evoluzione temporale del premio al rischio in funzione di un insieme predeterminato di variabili finanziarie.

Indice

Elenco Figure	5
Elenco Tabelle	7
1 Introduzione	8
1.1 Caso di studio e obiettivi	9
2 Il premio al rischio	11
2.1 Investimenti Tradizionali	12
2.2 Criteri ESG	13
2.2.1 Investimenti Tematici	14
3 Preparazione dei dati	16
3.1 Definizione del dataset	16
3.1.1 Le serie storiche	17
3.1.2 Stazionarietà	21
4 Heston-Nandi GARCH	23
4.1 Premessa	23
4.2 Il modello	27
4.2.1 I parametri	30
4.2.1 Stima tramite Massima Verosimiglianza	33
4.3 Modifiche al modello	35

4.3.1	Fattori che possono influenzare il premio al rischio . . .	37
5	Risultati	41
5.1	Modello Originale	41
5.2	Modello Modificato	45
5.3	Confronto Modelli	59
5.3.1	Le Volatilità	59
5.3.2	Correlazione Indice-Varianza	63
6	Conclusioni	67
	Appendice	69
	Bibliografia	71

Elenco Figure

3.1 Estratto di codice per verifica NA	16
3.2 Evoluzione temporale per Environment	18
3.3 Evoluzione temporale per Alternative Energy	18
3.4 Evoluzione temporale per Energy Efficiency	18
3.5 Evoluzione temporale per Green Building	18
3.6 Evoluzione temporale per Pollution Prevention	18
3.7 Evoluzione temporale per Sustainable Water	18
3.8 Evoluzione temporale per MSCI ACWI	18
3.9 Serie storica Environment differenziata	21
3.10 Serie storica Alternative Energy differenziata	21
3.11 Serie storica Energy efficiency differenziata	21
3.12 Serie storica Green Building differenziata	21
3.13 Serie storica Pollution Prevention differenziata	22
3.14 Serie storica Sustainable Water differenziata	22
3.15 Serie storica MSCI ACWI differenziata	22
4.1 Autocorrelazioni per la serie Environment	26
4.2 Autocorrelazioni per la serie Alternative Energy	26
4.3 Autocorrelazioni per la serie Energy Efficiency	26
4.4 Autocorrelazioni per la serie Green Building	26
4.5 Autocorrelazioni per la serie Pollution Prevention	26
4.6 Autocorrelazioni per la serie Sustainable Water	26
4.7 Autocorrelazioni per la serie MSCI ACWI	26
4.8 LIBOR USD 1 Month	28
4.9 Global Corporate IG Option-adjusted Spread	37
4.10 World Breakeven Inflation	38
4.11 World Real Rate	38
4.12 Dollar Index	39
5.1 Market Risk Premium per Environment	48
5.2 Market Risk Premium per Alternative Energy	48
5.3 Market Risk Premium per Energy Efficiency	48
5.4 Market Risk Premium per Green Buildings	48
5.5 Market Risk Premium per Pollution Prevention	48
5.6 Market Risk Premium per Sustainable Water	48
5.7 Market Risk Premium per MSCI ACWI	48
5.8 Matrice delle correlazioni per i fattori	49
5.9 Media dei premi al rischio di mercato nel 2024	57
5.10 Media dei premi al rischio di mercato negli ultimi tre anni	58
5.11 Volatilità per Environment	60
5.12 Volatilità per Alternative Energy	60
5.13 Volatilità per Energy Efficiency	60
5.14 Volatilità per Green Building	60
5.15 Volatilità per Pollution Prevention	60
5.16 Volatilità per Sustainable Water	60
5.17 Volatilità per MSCI ACWI	60

5.18 Volatilità del modello a fattori per Environment	61
5.19 Volatilità del modello a fattori per Alternative Energy	61
5.20 Volatilità del modello a fattori per Energy Efficiency	61
5.21 Volatilità del modello a fattori per Green Building	61
5.22 Volatilità del modello a fattori per Pollution Prevention	61
5.23 Volatilità del modello a fattori per Sustainable Water	61
5.24 Volatilità del modello a fattori per MSCI ACWI	62
5.25 Correlazione per Environment	63
5.26 Correlazione per Alternative Energy	63
5.27 Correlazione per Energy Efficiency	63
5.28 Correlazione per Green Building	63
5.29 Correlazione per Pollution Prevention	64
5.30 Correlazione per Sustainable Water	64
5.31 Correlazione per MSCI ACWI	64
5.32 Correlazione del modello a fattori per Environment	65
5.33 Correlazione del modello a fattori per Alternative Energy	65
5.34 Correlazione del modello a fattori per Energy Efficiency	65
5.35 Correlazione del modello a fattori per Green Building	65
5.36 Correlazione del modello a fattori per Pollution Prevention	65
5.37 Correlazione del modello a fattori per Sustainable Water	65
5.38 Correlazione del modello a fattori per MSCI ACWI	65

Elenco Tabelle

2.1 Rating ESG per MSCI	14
3.1 Statistiche test e p-values delle serie originali	20
3.2 Statistiche test e P-Value delle serie differenziate	22
4.1 Skewness e Curtosi per le serie differenziate	24
4.2 Sintesi delle restrizioni del modello	32
4.3 Statistiche test e P-Value per i fattori	39
4.4 Statistiche test e P-Value per i fattori differenziati	40
5.1 Parametri stimati del modello HN-GARCH(1,1) tradizionale	41
5.2 Parametri stimati del modello HN-GARCH(1,1) a fattori espliciti	46

1. Introduzione

Gli ultimi anni sono stati caratterizzati da una particolare sensibilità, nel dibattito pubblico, rispetto a tematiche ambientali e sociali. Rivendicazioni e manifestazioni in questo ambito sono state il fulcro di un cambiamento culturale che ha determinato una maggiore attenzione nei confronti delle fasce più deboli della popolazione, spesso le più colpite dagli effetti del surriscaldamento globale. A livello politico sono stati individuati degli obiettivi (come, ad esempio, il *protocollo di Kyoto* e gli *accordi di Parigi*) al fine di poter arginare i pericoli derivanti sia dal cambiamento climatico che dalle disuguaglianze sociali. Anche il mondo finanziario ne è stato fatto partecipe: i criteri ESG (*Environment, Social and Governance*), sempre più presenti nella costruzione e gestione dei prodotti finanziari, ne sono un chiaro esempio. Tali criteri costituiscono ormai un punto di riferimento per le società che si occupano di creare ad aggiornare indici dei mercati finanziari (cd. *Index Providers*) e, di conseguenza, per le istituzioni finanziarie coinvolte nel business dei prodotti passivi, il cui scopo è replicare l'andamento dei suddetti indici. A seguito di questo focus su tematiche ESG, sono dunque stati predisposti e commercializzati veicoli d'investimento focalizzati su aziende impegnate a sviluppare la propria attività in base principi legati a tematiche sociali, ambientali o di governance. Nello specifico, banche d'investimento e società di gestione del risparmio hanno cavalcato questo trend, creando prodotti finanziari, in particolare ETF¹, che replicano indici di tipo tematico. Ogni singolo investitore può decidere, di conseguenza, di tenere

¹ Gli ETF (Exchanged-Traded funds) sono un caso particolare di fondi comuni di investimento che tracciano un indice per tentare di replicarne l'andamento. Sono costituiti da un insieme di titoli che vengono acquistati da investitori istituzionali e scambiati in borsa, sotto forma di fondi, a qualsiasi ora del giorno.

attivamente in considerazione tali criteri nella sua *asset allocation* di portafoglio, in base alla propria sensibilità nei confronti di queste tematiche. Il forte interesse intorno a questa tipologia di strumenti finanziari potrebbe indurre a credere che il premio al rischio di tali titoli sia “intrinsecamente” superiore a quello di investimenti di tipo tradizionale. I grandi volumi in acquisto di ETF tematici e le imponenti campagne di marketing a loro supporto da parte degli emittenti, in effetti, ha fatto passare in secondo piano gli aspetti tipicamente finanziari che dovrebbero essere tenuti in considerazione in materia di investimenti, in primo luogo il grado di efficienza di tali prodotti sul piano rischio/rendimento rispetto ad investimenti di tipo più tradizionale. Utilizzando il modello GARCH di Heston-Nandi e una sua variante a fattori espliciti, la seguente tesi si pone l’obiettivo di confrontare il premio al rischio di investimenti tematici e di un indice globale, tentando di capire se, oltre a garantire un’esposizione diretta a elementi ESG, i prodotti tematici offrano una miglior allocazione rischio/rendimento rispetto a forme d’investimento basate su indici a capitalizzazione di mercato.

1.2 Caso di studio e obiettivi

L’elaborato si sviluppa partendo da una introduzione del database utilizzato nella tesi, commentando ogni serie storica di riferimento. Si inizia dagli indici tematici che hanno come fattore comune una specifica sensibilità al cambiamento climatico, per poi arrivare ad introdurre la serie storica dell’indice utilizzato come benchmark. Si commenta, successivamente, il tasso di interesse privo di rischio, che rappresenta una componente del modello di analisi. Nel quarto capitolo si introduce il modello Heston-Nandi Garch. Tale modello permette di stimare un parametro *lambda* che, per il modo in cui il modello

è strutturato, può essere coerentemente identificato come premio al rischio. La successiva modifica del modello permette di stimare un λ dinamico e dipendente da alcuni fattori che approssimano le principali tipologie di rischio finanziario. Nell'ultimo capitolo vengono presentati i risultati di entrambi i modelli, verificando la loro robustezza statistica e traendo delle conclusioni in merito ai risultati ottenuti.

2. Il premio al rischio

Il Capital Asset Pricing Model (CAPM) è uno strumento fondamentale per comprendere il premio al rischio e la sua funzione. Il modello definisce una relazione lineare tra il rendimento atteso di un investimento di portafoglio e il rendimento atteso del mercato:

$$E(R) = r_f + \beta[E(R_M) - r_f]$$

dove $E(R)$ e $E(R_M)$ sono rispettivamente il rendimento atteso del portafoglio e del mercato, β la sensibilità dell'investimento atteso di portafoglio rispetto a quello di mercato e r_f il tasso di interesse privo di rischio².

Il CAPM prevede due tipi di rischi: il rischio sistemico e il rischio idiosincratico. Matematicamente hanno la relazione:

$$Var(R) = \beta^2 Var(R_M) + Var(\varepsilon)$$

Dove $Var(R)$ è la varianza del rendimento di portafoglio e $Var(\varepsilon)$ è il rischio idiosincratico. Quest'ultimo si riferisce al rischio intrinseco dell'attività, che l'investitore può contenere diversificando l'intero portafoglio a disposizione.

Invece, $\beta^2 Var(R_M)$ è il rischio sistemico. Esso dipende direttamente dal rischio di mercato e influisce, di conseguenza, su tutte le attività di portafoglio, legando la varianza del rendimento del portafoglio $Var(R)$ alla varianza del rendimento del mercato $Var(R_M)$ attraverso il parametro β . Quest'ultimo è l'elemento fondamentale che

² Il tasso di interesse privo di rischio è una misura che definisce l'interesse fornito da un'attività il cui rendimento è certo.

l'investitore deve tener presente, in quanto definisce l'eccesso di rendimento atteso³ di portafoglio rispetto a quello di mercato.

Dal momento che il rischio sistemico non può essere mitigato con la diversificazione di portafoglio, l'investitore richiede un extra-rendimento atteso che viene quantificato proprio dal premio al rischio:

$$E(R) - r_f$$

La differenza esprime il rendimento atteso di un asset rischioso al netto del tasso di interesse privo di rischio. Per questa ragione, più il premio al rischio di un asset è alto, più alto è il rendimento che l'investitore richiederà per sottoscrivere il titolo finanziario di riferimento.

2.1 Investimenti Tradizionali

Un investitore decide, secondo le proprie preferenze, di allocare risorse in strumenti finanziari con il fine di ottenere un profitto. Esistono varie tipologie di investimenti adatti sia a piccoli investitori che a grandi istituti finanziari. In particolare, gli ETF permettono di diversificare in maniera efficiente il portafoglio di piccoli investitori a costi relativamente contenuti. Il piccolo investitore (anche detto *retail investor*), grazie agli ETF, ha la possibilità di investire in un intero mercato o classe di attivo, avendo così accesso a un portafoglio diversificato a costi contenuti. Dal momento che l'ETF traccia un indice per replicarne l'andamento, è opportuno specificare quale indice viene preso in considerazione per l'analisi. Il benchmark utilizzato è l'indice MSCI ACWI USD Index,

³ Poiché il rendimento atteso può essere sia positivo che negativo, il termine "eccesso" non delinea una situazione esclusivamente positiva per l'investitore.

ovvero un indice azionario emesso da Morgan Stanley Capital International che copre 23 mercati sviluppati e 24 mercati emergenti, raccogliendo l'85% di tutto l'investimento azionario globale⁴. Tale indice, dunque, replica quasi perfettamente le performance del mercato azionario mondiale.

2.2 Criteri ESG

L'acronimo ESG sintetizza un insieme di fattori, i quali fanno parte dell'universo dei modelli sostenibili. Le principali tematiche sono:

- **Environment (E)**: cambiamento climatico, riscaldamento globale, deforestazione e inquinamento;
- **Social (S)**: sicurezza sul lavoro, uguaglianza di genere e diritti umani;
- **Governance (G)**: composizione degli organi di governo di una azienda, sistemi di prevenzione e politiche di remunerazione.

Diverse aziende vengono valutate, da società di rating, per la loro capacità di far fronte ai rischi ESG attraverso programmi di prevenzione di lungo periodo. Si tiene in considerazione, dunque, l'impatto che le aziende, con la loro attività di business, hanno su contesti sociopolitici, culturali e ambientali. Tale valutazione costituisce il fondamento per l'elaborazione e assegnazione, alle aziende monitorate, di veri e propri *rating*. Le società di rating ESG forniscono una vasta gamma di punteggi diversificati, espressi attraverso indicatori numerici, giudizi descrittivi o classificazioni alfabetiche. Inoltre, le analisi effettuate si focalizzano su tematiche specifiche, creando degli *score* che riflettono

⁴ Index Factsheet: [MSCI ACWI USD Index](#)

esclusivamente la singola tematica di appartenenza. Questa natura eterogenea del rating, dunque, non permette di assegnare una valutazione omnicomprensiva alle aziende sensibili a tematiche ESG. I criteri di rating utilizzati in questo elaborato sono quelli sviluppati da Morgan Stanley Capital International, che presenta il seguente schema di valutazione:

Tabella 2.1: Rating ESG per MSCI

MSCI	CCC	B	BB	BBB	A	AA	AAA
	Laggard		Average			Leader	

La capacità di mitigazione dei rischi ESG, sintetizzata dagli score nella Tabella 2.1, è un fattore fondamentale che viene sempre più considerato dagli investitori. Il rating ESG viene, infatti, reputato come una metrica aggiuntiva alla classica valutazione del merito creditizio di un'azienda, sollevando in parallelo il tema del potenziale impatto dei criteri ESG su rischi sistemici e rischi idiosincratici. Peraltro, dal momento che non esiste, ad oggi, un unico rating, si potrebbe incontrare oggettive difficoltà nel definire quanto i criteri ESG influenzino i rischi sistemici e idiosincratici.

2.2.1 Investimenti Tematici

I profondi cambiamenti degli ultimi anni hanno portato un maggior interesse nei confronti di tematiche legate a fattori ambientali e sociali. La sensibilità sempre più forte a tali temi induce i singoli investitori a costruire il proprio portafoglio di asset finanziari tenendo esplicitamente in considerazione i criteri ESG. Anche in questa circostanza, ogni singolo investimento, che sia legato ad un fondo o meno, deve essere confrontato con l'indice di

riferimento, in modo tale da verificarne le performance. La costituzione di un indice ESG avviene attraverso la selezione delle aziende più virtuose in riferimento al tema che l'indice vuole trattare, oppure attraverso l'esclusione delle società non compatibili con specifici temi e vincoli definiti dall'indice stesso. Nella seguente analisi vengono utilizzati sei indici, emessi da MSCI, legati prevalentemente al tema ambientale.

Il primo è l'indice MSCI Global Environment Index, costituito da titoli finanziari di aziende che hanno almeno il 50% dei ricavi derivanti da beni e servizi sostenibili per l'ambiente. La selezione dei titoli viene effettuata tra le aziende esposte ai seguenti cinque temi: Alternative Energy, Sustainable Water, Green Building, Pollution Prevention o Clean Technology.

Gli altri indici considerati nell'analisi sono le sub-componenti di MSCI Global Environment Index, cioè

- MSCI Global Alternative Energy Index,
- MSCI Global Energy Efficiency Index,
- MSCI Global Green Building Index,
- MSCI Global Pollution Prevention Index
- MSCI Global Sustainable Water Index.

Questi ultimi includono titoli di aziende, in mercati emergenti e sviluppati, i cui ricavi provengono almeno per il 50% da prodotti e servizi legati, rispettivamente, a energie rinnovabili, efficienza energetica, edifici progettati e gestiti in maniera sostenibile per l'ambiente, prevenzione dell'inquinamento e gestione sostenibile delle risorse idriche⁵.

⁵ Si presentano gli Index Factsheet di riferimento: [MSCI Global Environment Index](#), [MSCI Global Alternative Energy Index](#), [MSCI Global Energy Efficiency Index](#), [MSCI Global Green Building Index](#), [MSCI Global Pollution Prevention Index](#), [MSCI Global Sustainable Water Index](#)

3. Preparazione dei dati

3.1 Definizione del dataset

Il dataset presenta sette serie storiche di cui una presa in considerazione come benchmark, un tasso di interesse privo di rischio (Libor USD 1 Month) e un totale di cinque fattori, utilizzati, successivamente, nelle analisi con il modello modificato. In tutto il dataset, le serie storiche hanno un orizzonte temporale di quasi 14 anni, in particolare: dal 31/12/2010 al 22/07/2024. Si contano 3537 osservazioni prendendo in considerazione, invece dell'anno solare di 365 giorni, l'anno lavorativo, non contando festività e fine settimana, di 252 giorni. Tutte le serie sono espresse in dollari, valuta di denominazione degli indici MSCI esaminati. Prima di presentare le caratteristiche empiriche delle serie, è opportuno evidenziare che l'intero dataset non presenta valori "Not Available" (NA).

```
#VERIFICO NA
print(db.isnull().sum().sort_values(ascending=False))

Environment                                0
Alternative_energy                        0
Energy_efficiency                         0
Green_building                           0
Pollution_prevention                     0
Sustainable_water                         0
Total                                    0
Global Corporate IG Option-adjusted Spread 0
Global Corporate HY Option-adjusted Spread 0
World Breakeven Inflation                  0
World Real Rate                           0
Dollar Index                              0
Libor USD 1 Month                          0
dtype: int64
```

Figura 3.1: estratto di codice Python per la verifica di valori NA, dove "db" è il dataset di riferimento.

3.1.1 Le serie storiche

Il concetto stesso di serie storica pone dei problemi che devono essere affrontati prima di dedicarsi all'analisi. Diversamente da dati *cross-section*, le serie storiche possono presentare una correlazione tra un elemento e uno o più valori antecedenti. In altre parole, l'evento al tempo t , è ipotizzato dipendere dagli eventi passati⁶. Concettualmente, in econometria la serie storica osservata è considerata la realizzazione empirica di un processo aleatorio, oggetto d'inferenza. Una sua proprietà fondamentale che le serie storiche possono presentare è la stazionarietà. Nello specifico, una serie storica stazionaria è un processo aleatorio la cui media e varianza rimangono costanti al variare nel tempo, cosicché, come diretta conseguenza, anche le autocovarianze⁷ tra tutti gli elementi della serie non dipendono dal tempo. Indicando con γ_k l'autocovarianza di ordine k , tale concetto viene riassunto dalla seguente formula:

$$\gamma_k = E[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)]$$

Dove μ è il valore atteso costante del processo e x_t rappresenta un elemento della serie al tempo t . Nella formula precedente, è importante notare come l'autocovarianza γ_k non dipenda da t ma è espressa in funzione di k , ovvero la differenza temporale tra due elementi distinti del processo. La stazionarietà è importante perché agevola e rende statisticamente più robusta l'inferenza su una serie storica.

⁶ Se presente, questa caratteristica viene talvolta definita con il termine "persistenza".

⁷ L'autocovarianza esprime il grado di dipendenza di elementi di una stessa serie storica in diversi istanti di tempo.

Nei diagrammi seguenti, vengono rappresentati gli andamenti delle serie storiche oggetto di studio:

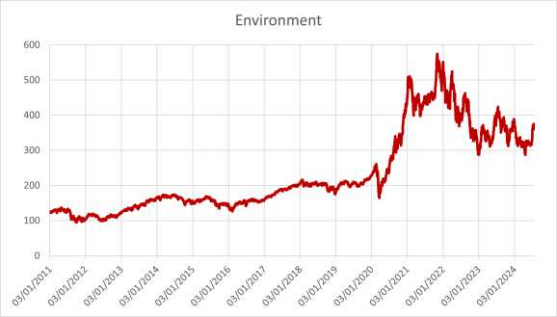


Figura 3.2: Evoluzione temporale per Environment

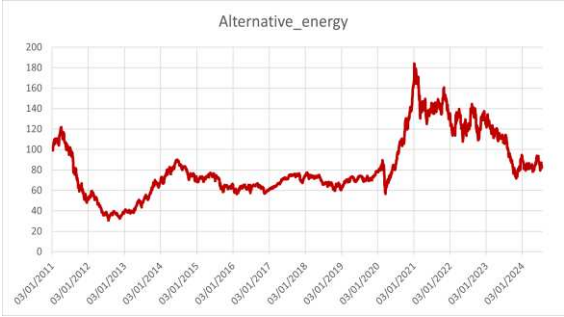


Figura 3.3: Evoluzione temporale per Alternative Energy



Figura 3.4: Evoluzione temporale per Energy Efficiency

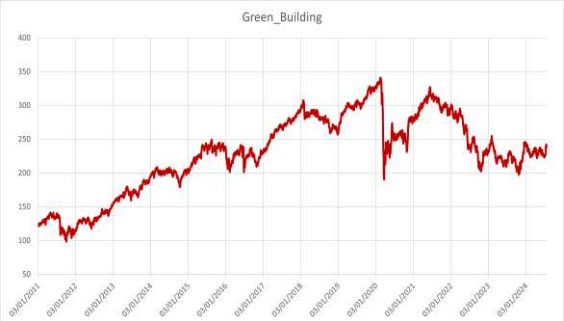


Figura 3.5: Evoluzione temporale per Green Building

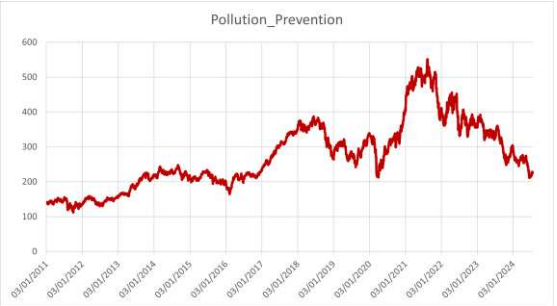


Figura 3.6: Evoluzione temporale per Pollution Prevention

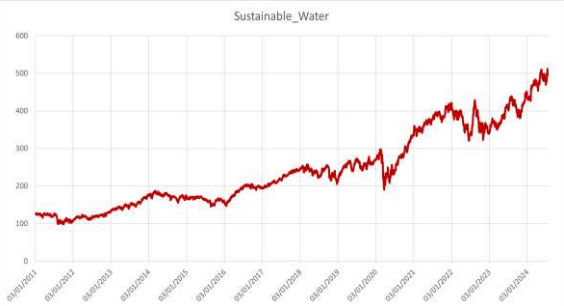


Figura 3.7: Evoluzione temporale per Sustainable Water

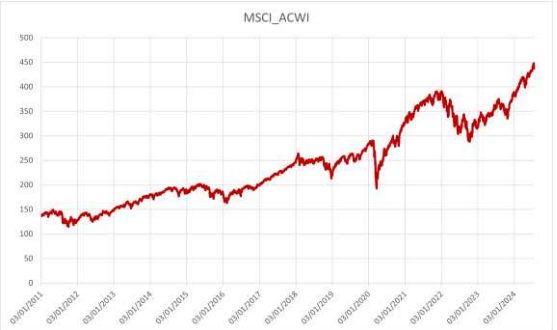


Figura 3.8: Evoluzione temporale per MSCI ACWI

La serie che si riferisce all'indice globale (Figura 3.8) potrebbe presentare un trend lineare. Dopo una lunga e lenta ripresa dalla crisi dei subprime, si nota, nel 2020, una precipitosa battuta d'arresto nella crescita dei mercati, causata dal lockdown. Tra il 2022 e il 2023 l'indice subisce un ulteriore ribasso, probabilmente dovuto all'invasione dell'Ucraina da parte della Russia. Una possibile spiegazione potrebbe essere rappresentata dal fatto che per anni le nazioni europee si sono rifornite di materie prime, in particolare il gas naturale, dalla Russia, alimentando un sistema di scambi commerciali che, nel febbraio 2022, è andato completamente in crisi; di conseguenza, anche l'indice MSCI ACWI, con la sua elevata sensibilità all'andamento del mercato globale, ne ha risentito, registrando una flessione durata fino alla fine del 2022. Un aspetto interessante è che gli indici tematici presentano, in alcuni casi, andamenti del tutto differenti. In particolare, indici che si riferiscono a Environment (Figura 3.2), Alternative Energy (Figura 3.3), Energy Efficiency (Figura 3.4) e Pollution Prevention (Figura 3.6) presentano, seppur con scale differenti, un'impennata significativa del valore dell'indice, preceduta dal crollo del 2020. Non vi è una spiegazione certa per tale evento. Possiamo solo formulare alcune ipotesi, ad esempio la progressiva notorietà che gli investimenti ESG hanno acquisito, dopo il lockdown, e il grande impatto mediatico del Green Deal europeo, varato nel dicembre del 2019, che ha portato molte aziende ad emettere veicoli d'investimento ispirati ai fattori ESG. Anche l'indice Green Building (Figura 3.5) ha avuto una leggera crescita dopo il 2020, ma il crollo a causa della pandemia non gli ha più permesso di raggiungere i livelli che aveva pre-COVID19. Diversamente dall'indice globale, tutti gli indici nominati hanno subito un forte ribasso dal 2022. L'indice Sustainable Water (Figura 3.7) potrebbe essere quasi del tutto paragonato a quello globale, poiché presenta un andamento in costante crescita dal 2011 e si nota anche un

continuo aumento dopo il 2022, in ripresa dopo l'invasione dell'Ucraina da parte della Russia.

È stata inoltre verificata l'ipotesi di stazionarietà delle serie storiche attraverso il test di radice unitaria di Dickey e Fuller (test ADF)⁸. Il test verifica, sotto ipotesi nulla (H_0), che le serie non siano stazionarie. Il *p-value*⁹ della statistica test ADF è un'ottima misura per confermare o meno la stazionarietà e, molto spesso, la soglia critica di probabilità che si tiene in considerazione è 0.05. Se il valore risulta maggiore di 0.05 il test non viene rifiutato; al contrario, se inferiore, l'ipotesi viene rifiutata e la serie può essere considerata, con ragionevole grado di confidenza, stazionaria¹⁰.

Le statistiche test e i rispettivi p-value sono:

Tabella 3.1: Statistiche test e p-values delle serie originali

Indici	Statistica test	P-Value
MSCI Global Environment Index	-1,06	0,72
MSCI Global Alternative Energy Index	-1,64	0,45
MSCI Global Energy Efficiency Index	-1,07	0,72
MSCI Global Green Building Index	-1,95	0,3
MSCI Global Pollution Prevention Index	-1,62	0,47
MSCI Global Sustainable Water Index	0,75	0,99
MSCI ACWI USD Index	0,55	0,98

Come verificato principalmente dai p-value, si può asserire che, con buona probabilità, nessuna delle serie sia stazionaria in media.

⁸ADF (*Augmented Dickey-Fuller*)

⁹ Il p-value è una metrica che definisce la significatività di un risultato in un test statistico

¹⁰ Un altro importante fenomeno è l'eteroschedasticità, ossia la variabilità nel tempo del momento secondo di una serie storica. Nel prossimo capitolo verranno presentate verifiche della stazionarietà nel momento secondo della serie. In questa sezione si verifica semplicemente la stazionarietà in media delle serie storiche finanziarie.

3.1.2 Stazionarietà

Verificata la non stazionarietà in media delle serie, è possibile applicare una trasformazione largamente utilizzata nell'econometria applicata: la differenziazione. Questo strumento consiste nel calcolare la differenza tra elementi consecutivi della serie:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Se infatti la serie originaria era non stazionaria del prim'ordine¹¹, quest'operazione induce stazionarietà in media.

Il grafico delle serie differenziate è riportato di seguito:

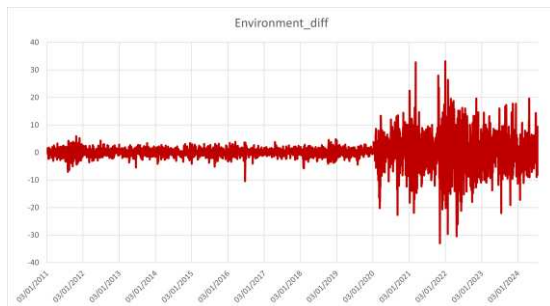


Figura 3.9: Serie storica Environment differenziata

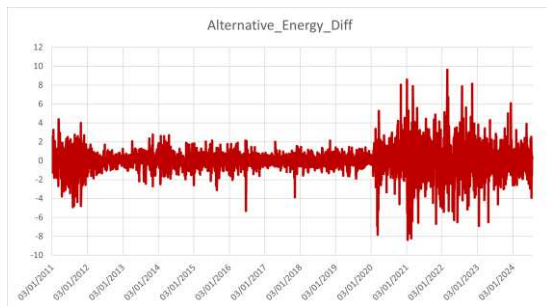


Figura 3.10: Serie storica Alternative Energy differenziata

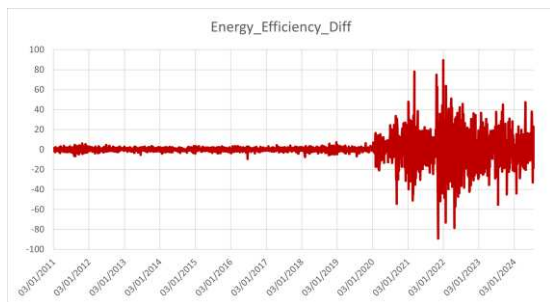


Figura 3.11: Serie storica Energy Efficiency differenziata

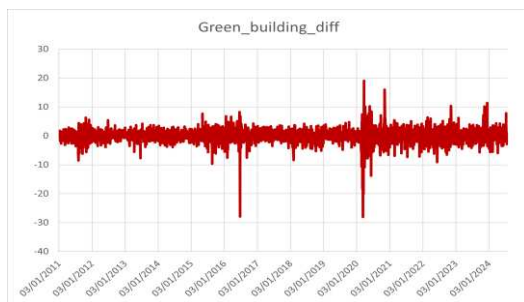


Figura 3.12: Serie storica Green Building differenziata

¹¹ In questo caso la serie viene definita *integrabile di ordine 1* e definita $I(1)$.

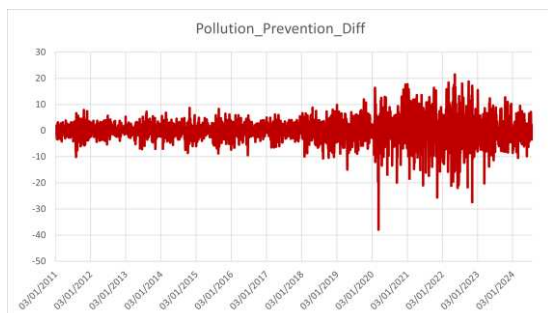


Figura 3.13: Serie storica Pollution Prevention differenziata

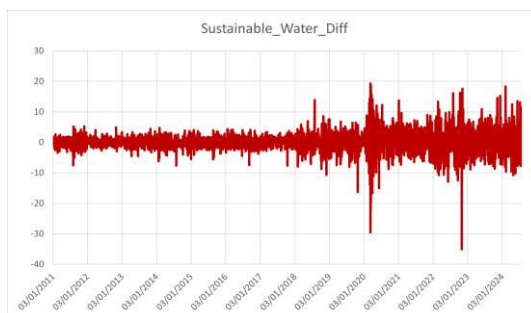


Figura 3.14: Serie storica Sustainable Water differenziata

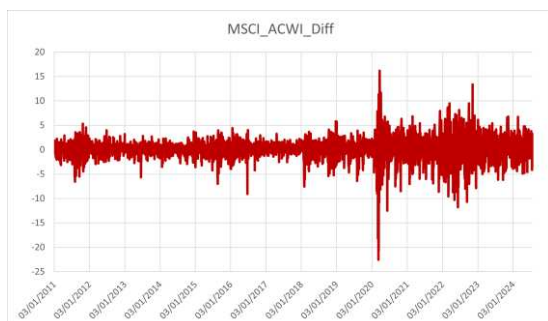


Figura 3.15: Serie storica MSCI ACWI differenziata

Per confermare la stazionarietà ottenuta tramite differenziazione, è stato applicato il test DF alle serie differenziate per verificarne la stazionarietà in media:

Tabella 3.2: statistiche test e P-Value delle serie differenziate

Indici	Statistica test	P-Value
MSCI Global Environment Index	-11,52	$3,99 \times 10^{-21}$
MSCI Global Alternative Energy Index	-20,06	0
MSCI Global Energy Efficiency Index	-11,51	$4,14 \times 10^{-21}$
MSCI Global Green Building Index	-11,61	$2,50 \times 10^{-21}$
MSCI Global Pollution Prevention Index	-11,94	$4,40 \times 10^{-22}$
MSCI Global Sustainable Water Index	-13,71	$1,22 \times 10^{-25}$
MSCI ACWI USD Index	-11,75	$1,18 \times 10^{-21}$

Dal momento che i p-value sono molto vicini allo zero, quindi al di sotto della soglia critica di 0.05, si può affermare, con buona probabilità, che le serie differenziate sono stazionarie in media.

4. Heston-Nandi GARCH

4.1 Premessa

Il modello GARCH di Heston e Nandi (2000) è parte di una più grande famiglia di modelli¹², che hanno lo scopo di descrivere il comportamento della volatilità condizionale di serie temporali finanziarie. Le caratteristiche della serie finanziarie che si osservano empiricamente sono le seguenti:

- **Skewness:** Le distribuzioni statistiche possono essere descritte attraverso i loro momenti. Come accennato, il momento primo e secondo sono rispettivamente la media e la varianza della distribuzione. Il momento terzo intercetta l'asimmetria della distribuzione (*skewness*) ed è definito dalla seguente formula:

$$Skewness = E[X - \mu]^3 / \sigma^3$$

Se la skewness è zero la distribuzione è simmetrica. Se il coefficiente non è zero, la distribuzione tende ad avere una coda più lunga da un lato e una coda più corta dall'altro, a seconda del segno dello stesso coefficiente. Un valore positivo del coefficiente indica che la distribuzione presenta una coda più lunga verso destra e una coda più corta verso sinistra. Si riscontra l'effetto contrario per un valore negativo della skewness. Tendenzialmente, la distribuzione di una serie storica finanziaria dovrebbe essere asimmetrica presentando un valore della skewness diverso da zero.

¹² Il gruppo di modelli a cui si fa riferimento è proprio la famiglia dei GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*)

- **Curtosi:** il momento quarto viene chiamato “curtosi” (*kurtosis*) ed esprime la larghezza della distribuzione degli indici:

$$Kurtosis = E[X - \mu]^4 / \sigma^4$$

Il valore della curtosi per una distribuzione normale è tre, mentre per valori maggiori di tre la distribuzione viene definita leptocurtica. Questo tipo di distribuzione presenta un picco più alto e stretto e delle code più lunghe e spesse; al contrario una distribuzione con un valore minore di tre viene definita platicurtica. Empiricamente, per serie storiche finanziarie, ci si aspetta un valore di curtosi elevato. Di seguito sono presentati tutti i valori della skewness e curtosi per le serie storiche finanziarie:

Tabella 4.1: Skewness e Curtosi per le serie differenziate

Indici	Skewness	Curtosi
MSCI Global Environment Index	−0.140	10.362
MSCI Global Alternative Energy Index	−0.020	6.826
MSCI Global Energy Efficiency Index	−0.142	14.963
MSCI Global Green Building Index	−1.613	23.904
MSCI Global Pollution Prevention Index	−0.594	6.328
MSCI Global Sustainable Water Index	−0.436	11.537
MSCI ACWI USD Index	−0.840	11.125

Come accennato, tutte le serie storiche presentano una skewness negativa, suggerendo una leggera asimmetria a sinistra delle distribuzioni. Inoltre, le serie presentano un eccesso di curtosi estremamente evidente, caratteristica tipica delle serie storiche finanziarie. In tale distribuzione, code più spesse significano maggiore probabilità di alti e bassi rendimenti estremi, riducendo la probabilità intorno alla propria media. Inoltre, se da una parte, nella costituzione di un indice, il livello di asimmetria (Skewness) potrebbe essere mitigato dalla presenza di

prodotti finanziari che hanno asimmetrie sia negative che positive, ciò non vale per l'elevata curtosi presentata nella tabella 4.1. Questo deriva dal fatto che indici di mercato, come quelli presentati nel capitolo precedente, sono un compendio di prodotti finanziari azionari che a loro volta presentano un livello di curtosi elevato.

- **Leverage effect:** il valore di un indice è strettamente legato alla sua volatilità¹³. In un contesto di serie storiche finanziarie, un forte shock negativo tende a causare un aumento di volatilità maggiore rispetto ad un equivalente shock positivo. Questa caratteristica si chiama effetto leva (*leverage effect*).
- **Volatility Cluster:** le serie differenziate potrebbero essere caratterizzate da periodi ad alta volatilità, seguiti da periodi a bassa volatilità. Questi “grappoli” di volatilità vengono chiamati *volatility clusters*. Questo induce a pensare che la volatilità non sia costante nel tempo ma che, al contrario, tenda a variare in modo dinamico. Per poter identificare la dipendenza temporale della volatilità, viene prima calcolato il quadrato delle serie temporali e successivamente vengono calcolate le corrispondenti autocorrelazioni:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

La volatilità condizionale si manifesterebbe attraverso autocorrelazioni positive, poiché i periodi di alta o bassa volatilità tendono a persistere nel tempo, creando una dipendenza tra osservazioni successive:

¹³ Per volatilità si intende la misura della variazione dei prezzi in un intervallo di tempo. Nelle serie storiche differenziate, la volatilità potrebbe essere interpretata come la variabilità intorno alla media del valore degli indici analizzati.

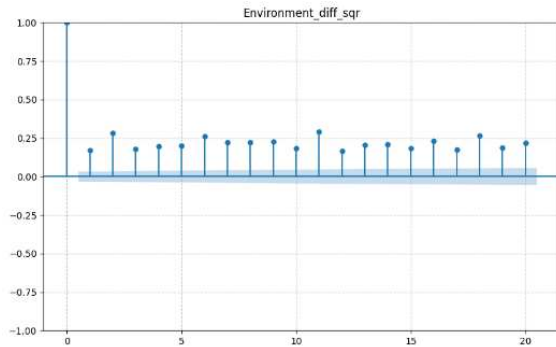


Figura 4.1: Autocorrelazioni per la serie Environment

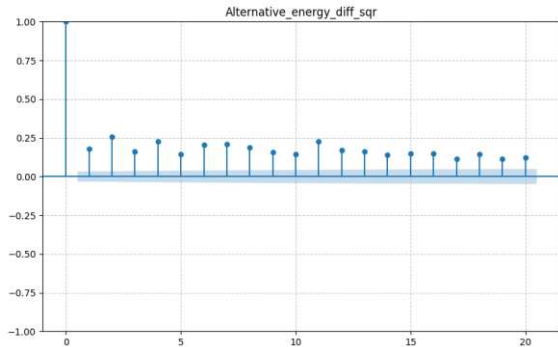


Figura 4.2: Autocorrelazioni per la serie Alternative Energy

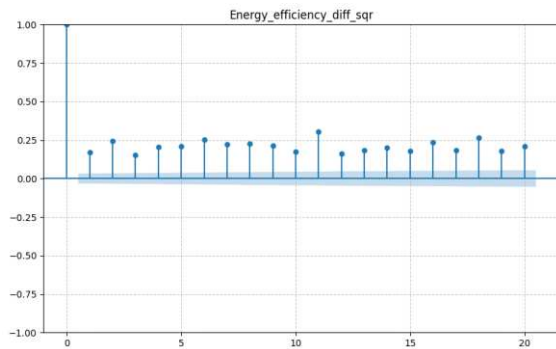


Figura 4.3: Autocorrelazioni per la serie Energy Efficiency

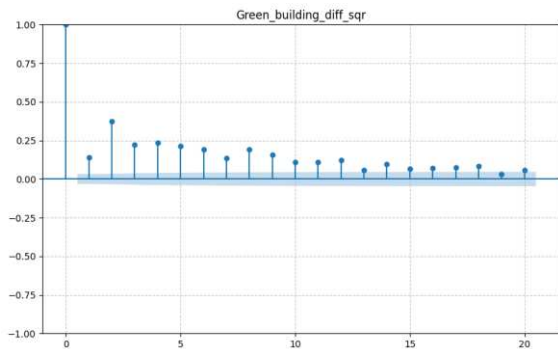


Figura 4.4: Autocorrelazioni per la serie Green Building

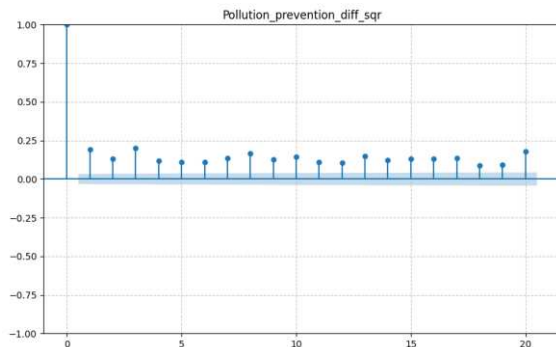


Figura 4.5: Autocorrelazioni per la serie Pollution Prevention

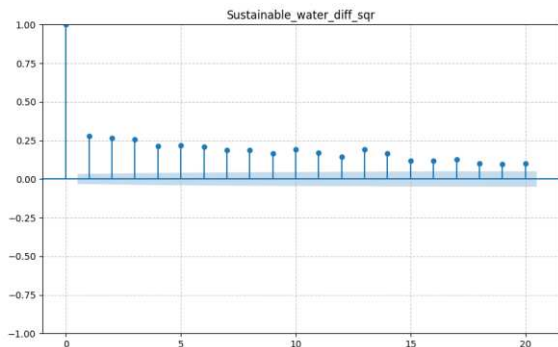


Figura 4.6: Autocorrelazioni per la serie Sustainable Water

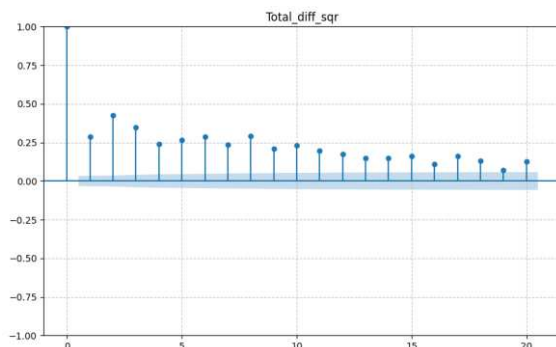


Figura 4.7: Autocorrelazioni per la serie MSCI ACWI

Nei grafici precedenti, le autocorrelazioni vengono calcolate per un valore di k uguale a 20 ritardi. Le autocorrelazioni positive, riscontrate nei grafici sopra, potrebbero essere il

sintomo della presenza di volatility cluster della variabilità temporale della volatilità, evidenziando dunque una persistenza nel momento secondo.

Nel prossimo capitolo si dimostra come il modello GARCH di Heston e Nandi sia in grado di catturare tutte le caratteristiche delle serie descritte fino ad ora, riuscendo, inoltre, a stimare l'oggetto di studio della presente tesi: il premio al rischio.

4.2 Il modello

Il modello Garch di Heston e Nandi (2000) assume la seguente forma:

$$R_t = r_{f,t} + \lambda h_t + \sqrt{h_t} z_t \quad (4.1)$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha (z_{t-1} - \gamma \sqrt{h_{t-1}})^2 \quad (4.2)$$

In particolare, l'equazione (4.1) rappresenta l'evoluzione del rendimento percentuale dell'indice al tempo t (R_t) rispetto al tasso di interesse privo di rischio ($r_{f,t}$), alla varianza condizionale giornaliera dell'indice al tempo t (h_t) e ad un rumore i.i.d.¹⁴ che segue una distribuzione normale standardizzata (z_t). I parametri ω , β , α e γ sono propri del modello HN-GARCH e vengono presentati, interpretati ed analizzati nei capitoli successivi¹⁵.

Come accennato in precedenza, il CAPM ipotizza l'esistenza di un tasso di interesse privo di rischio, il cui rendimento è dunque certo, al di sopra del quale gli investitori richiedono

¹⁴ Indipendenti e Identicamente Distribuiti.

¹⁵ In particolare, nel capitolo 4.2.1.

un premio al rischio proporzionato alla rischiosità del titolo preso in considerazione. Di conseguenza la scelta di questo tasso è un elemento fondamentale per poter analizzare proprio il premio al rischio.

A tale proposito, il Libor USD 1 Month (London Interbank Offered Rate) è un tasso di interesse interbancario medio, calcolato quotidianamente, che rappresenta il tasso di interesse con il quale un panel di banche selezionate sono disposte a prestare liquidità, in dollari statunitensi, con scadenza di un mese. Nel modello, assume la funzione di tasso di interesse privo di rischio.

L'evoluzione storica del Tasso interbancario utilizzato nel modello è illustrata nel seguente grafico:



Figura 4.8: LIBOR USD 1 Month

L'equazione (4.1) descrive il rendimento al tempo t come funzione: del tasso di interesse privo di rischio, della varianza condizionale giornaliera al tempo t , moltiplicata per un parametro λ e della componente di rumore moltiplicata per la radice quadrata della varianza. L'intuizione di base del modello, come rilevato da Xize Ye (2021), è che la

varianza condizionale, calcolata nell'equazione (4.2), influisce proprio sul rendimento percentuale dell'indice al tempo t in maniera proporzionale al parametro λ . Aggiungendo, dunque, questo effetto al tasso di interesse privo di rischio, il modello indica che i rendimenti degli asset più rischiosi in media tendono ad eccedere quelli garantiti dal tasso di interesse privo di rischio. Questa proprietà del modello permette al parametro λ di assumere la caratteristica di premio al rischio di mercato¹⁶. Questa è una caratteristica fondamentale del modello HN-GARCH(1,1) che lo rende potenzialmente adatto per l'analisi del premio al rischio delle attività finanziarie, inclusi gli ETF che replicano indici tematici. Tuttavia, è opportuno precisare che tale modello definisce solamente una delle modalità per poter catturare la dinamica del premio al rischio¹⁷.

L'equazione (4.2) esprime la caratteristica condizionale della varianza, accennata nel capitolo precedente. Proprio per questo motivo, il modello deve avere delle restrizioni che impongono la stazionarietà per il processo a varianza condizionale h_t .

Questo tipo di processo potrebbe presentare stazionarietà in covarianza solo se il valore atteso della varianza condizionale¹⁸ $E[h_t]$ sia costante e non dipenda dal tempo.

La varianza di lungo periodo del modello assume la seguente forma:

$$E[h_t] = \frac{\omega + \alpha}{1 - \beta - \alpha\gamma^2} \quad (4.3)$$

Ne deriva che il processo rimane stazionario solo se:

¹⁶ In inglese: *market risk premium*

¹⁷ Questa precisazione è doverosa in quanto, se i dati a disposizione non dovessero supportare questa modalità di stimare il premio al rischio, probabilmente ci potrebbero essere dei problemi di misspecificazione del modello.

¹⁸ Nota anche come “varianza di lungo periodo”.

$$\beta + \alpha\gamma^2 < 1 \quad (4.4)$$

Se il termine $\beta + \alpha\gamma^2$ è uguale a uno, il processo sarà non stazionario, determinando una varianza di lungo periodo $E[h_t]$ non definita. Se invece è minore di uno, la varianza di lungo periodo sarà finita, decretando la stazionarietà del processo aleatorio sottostante.

Come riportato da Sundling (2004), esiste una relazione negativa tra il rendimento R_t e varianza condizionale h_t :

$$\text{Cov}(h_t, R_t) = -2\alpha\gamma h_{t-1} \quad (4.5)$$

La relazione negativa si verifica esclusivamente quando i parametri α e γ , che saranno introdotti nel prossimo capitolo, assumono valori positivi.

4.2.1 I parametri

Nel seguente capitolo vengono presentati i parametri del modello HN-GARCH(1,1), introducendo, se necessario, anche delle restrizioni.

- **Parametro λ :** come accennato nel capitolo precedente, in base alle ipotesi del modello, il parametro in questione può essere interpretato come premio al rischio di mercato nel modello HN-GARCH(1,1). Il modello non impone alcuna restrizione sul parametro λ , in quanto quest'ultimo influenza solamente il rendimento dell'indice analizzato. Infatti, il modello contempla l'esistenza di rendimenti negativi che possono influenzare negativamente il rendimento dell'indice, il quale, comunque, rimane positivo. Un possibile premio al rischio

negativo, come viene presentato dal modello, comporterebbe un livello di rendimento medio dell'indice inferiore al tasso privo di rischio, il quale non lo renderebbe profittabile per un agente finanziario razionale.

- **Parametri β e ω :** il parametro β si riferisce alla componente autoregressiva della varianza condizionale, in quanto definisce l'impatto della varianza al tempo $t - 1$ sulla varianza al tempo t . Nella formula (4.2), è possibile notare come l'elemento della varianza condizionale h_t è strettamente legato al suo immediato antecedente h_{t-1} attraverso il parametro β . Tenzialmente, nel modello in questione, il parametro è molto vicino ad uno; ciò è sintomo dell'entità della dipendenza della varianza condizionale dagli elementi passati che la compongono. Come espresso nel capitolo precedente, l'effetto clustering dimostra proprio una dipendenza temporale della volatilità. Infatti, se il rendimento di un indice al tempo t è elevato, allora ci potrebbe essere buona probabilità che al tempo $t + 1$ i rendimenti tendano a rimanere alti, creando dei cluster di volatilità nella serie storica analizzata. Il parametro ω , invece, è una costante che si aggiunge, ad ogni incremento di t , alla varianza condizionale.
- **Parametro α :** il parametro α cattura lo spessore delle code della distribuzione. Questa caratteristica esprime proprio il valore di curtosi, presentato nei capitoli precedenti, delle serie. Se $\alpha = \beta = 0$ la varianza diventa costante e viene espressa, solamente, in funzione del parametro ω . Inoltre, affinché la varianza condizionale non assuma valori negativi, è necessario che α e β siano strettamente maggiori di zero. Al contrario, il parametro ω può anche essere pari a zero, poiché ciò non compromette né la positività della varianza condizionale né la stazionarietà del modello.

- **Parametro γ :** quest'ultimo parametro definisce l'impatto asimmetrico di uno shock sulla varianza condizionale. Dal momento che, nell'equazione (4.2), il parametro è comunque elevato al quadrato, non sono necessarie ulteriori restrizioni sulla positività o negatività di γ .

Come espresso nella equazione (4.4), i parametri α e γ (se positivi) influenzano la correlazione negativa tra il rendimento di un indice e la sua volatilità, riuscendo a rappresentare la caratteristica del *leverage effect* delle serie. Se si dovesse presentare un $\gamma = 0$, dunque, la risposta della volatilità risulterebbe simmetrica; In questo frangente, di conseguenza, sia uno shock positivo che negativo avrebbero lo stesso impatto sulla varianza condizionale.

Per concludere, si presenta una sintesi sulle restrizioni dei parametri del modello per imporre stazionarietà e positività alla varianza condizionale h_t :

Tabella 4.2: Sintesi delle restrizioni del modello

$$\beta + \alpha\gamma^2 < 1 \Rightarrow \textit{Stazionarietà del modello}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta > 0 \\ \omega \geq 0 \\ \alpha > 0 \end{array} \right\} \textit{Positività della varianza condizionale}$$

4.2.2 Stima tramite Massima Verosimiglianza

Uno dei metodi per stimare i parametri dei modelli GARCH è la Massima Verosimiglianza. Tale metodo si pone l'obiettivo di stimare un vettore ottimale di parametri, chiamato $\hat{\theta}$, partendo dal presupposto che il set informativo x_1, x_2, \dots, x_T sia stato generato con un vettore θ_0 di parametri originali. Il metodo della massima verosimiglianza, dunque, tenta di stimare quel vettore di parametri ottimale $\hat{\theta}$ che si avvicini il più possibile al vettore dei veri parametri θ_0 che, non essendo direttamente osservabili, devono essere stimati a partire dai dati a disposizione.

Il vettore dei parametri da stimare del modello HN-GARCH(1,1) è:

$$\theta = (\omega, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$$

Una volta specificate le restrizioni ai parametri, come riportato in tabella 4.2, viene definita la funzione di densità dei parametri rispetto al campione $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$:

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_T; \theta)$$

Dove $L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T)$ rappresenta la funzione di verosimiglianza e può essere riscritta come:

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T) = \prod_{i=1}^T f(x_i; \theta)$$

Allo stesso modo è possibile lavorare anche con il logaritmo naturale della funzione di verosimiglianza:

$$\ell(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T) = \ln(L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T)) = \ln\left(\prod_{i=1}^T f(x_i; \theta)\right) = \sum_{i=1}^T \ln(f(x_i; \theta))$$

Dove adesso $\ell(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T)$ è la funzione di log-verosimiglianza.

Una volta specificata la funzione di verosimiglianza, l'obiettivo consiste nel trovare quel vettore di parametri $\hat{\theta}$ che massimizzi $\ell(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T)$.

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \ell(\theta|x_1, x_2, \dots, x_T)$$

Il vettore $\hat{\theta}$ che massimizza la funzione di verosimiglianza, nello spazio parametrico θ , è chiamato stimatore di massima verosimiglianza.

Per poter applicare tale metodo al modello HN-GARCH, si assume una distribuzione normale, con funzione di densità:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dove μ è la media della distribuzione mentre σ^2 indica la sua varianza.

Prendendo in considerazione il modello HN-GARCH(1,1) la varianza del processo è per costruzione h_t , mentre $(x - \mu)$ viene sostituita dalla componente $\sqrt{h_t}z_t$ del modello. Di conseguenza la funzione di log-verosimiglianza assume la seguente forma:

$$\ln\left(\prod_{t=0}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\sqrt{h_t}z_t)^2}{2h_t}\right) \right]\right)$$

Semplificando h_t e applicando il logaritmo naturale, si ottiene:

$$\sum_{t=0}^T \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(h_t) - \frac{1}{2} z_t^2 \right]$$

La costante dentro la sommatoria è ininfluente ai fini della massimizzazione numerica della funzione di log-verosimiglianza, per cui si può scrivere:

$$-\frac{T}{2}\ln(2\pi) + \sum_{t=0}^T \left[-\frac{1}{2}\ln(h_t) - \frac{1}{2}z_t^2 \right] \quad (4.6)$$

Massimizzando la funzione di log-verosimiglianza è possibile trovare il vettore dei parametri ottimale $\hat{\theta}$. Per fare in modo che tale funzione non dipenda da z_t , è possibile ricavare la componente di rumore attraverso la (4.1):

$$z_t = \frac{R_t - r_{f,t} - \lambda h_t}{\sqrt{h_t}} \quad (4.7)$$

Per poter implementare la stima della massima verosimiglianza, è necessario assegnare un elemento iniziale h_0 al processo h_t . Xize Ye (2021) asserisce che, in virtù della proprietà di *mean-reversion*¹⁹ della varianza condizionale, è possibile assegnare al primo elemento di h_t la varianza di lungo periodo. Successivamente, grazie alla proprietà citata precedentemente, il processo tenderà a ritornare verso il suo equilibrio di lungo termine.

4.3 Modifiche al modello

Il modello HN-GARCH(1,1) fin qui descritto, presuppone che il premio al rischio di mercato sia statico e invariabile nel tempo. Questa assunzione impedisce di cogliere la

¹⁹ Per mean-reversion si intende la proprietà secondo cui un processo, che in questo caso è proprio la varianza condizionale h_t , tende a “tornare” verso il proprio valore di equilibrio nel tempo. In questo caso, la condizione di equilibrio potrebbe essere rappresentata dalla varianza di lungo periodo. V. Appendice A

sua eventuale dinamicità nel tempo, caratteristica che sembra adattarsi meglio all'evidenza di mercati molto volatili e instabili. A questo proposito, potrebbe essere interessante cercare di comprendere se la dinamica temporale del market risk premium possa dipendere da alcuni fattori.

Per rispondere a questa domanda, riformuliamo il modello HN-GARCH così come segue:

$$R_t = r_{f,t} + \lambda_t h_t + \sqrt{h_t} z_t \quad (4.8)$$

$$\lambda_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^K \delta_i Z_{i,t} \quad (4.9)$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha (z_{t-1} - \gamma \sqrt{h_{t-1}})^2$$

Dove $Z_{i,t}$ è l' i -esimo fattore al tempo t . Come è possibile notare dalla equazione (4.8) e dalla (4.9) il premio al rischio di mercato è ad essi dipendente da un predeterminato numero K di fattori.

Il metodo di stima rimane invariato. Tuttavia, in questa nuova formulazione del modello i parametri da stimare sono diversi:

$$\theta = (\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_K)$$

Analizzare, quindi, in quale misura questi fattori influenzano il premio al rischio potrebbe essere utile per comprendere meglio anche la sua evoluzione nel tempo.

4.3.1 Fattori che possono influenzare il premio al rischio

I fattori presi in esame nel seguente capitolo sono, in totale, quattro.

Il primo è il *Global Corporate IG Option-adjusted Spread*:



Figura 4.9: Global Corporate IG Option-adjusted Spread

L'*Option-adjusted spread* (OAS) esprime la differenza tra un tasso a reddito fisso di obbligazioni (*fixed-income security rate*) con opzione incorporata (*embedded option*²⁰) e un tasso di interesse privo di rischio. L'opzione incorporata viene presa in considerazione nel calcolo dello spread. Di conseguenza si considera quanto l'*embedded option* possa influenzare i futuri flussi di cassa dell'asset a reddito fisso. Gli asset che vengono presi in considerazione sono gli *Investment Grade* ("IG"), ovvero strumenti finanziari di emittenti con basso rischio di default, specie in relazione ad asset *non-Investment Grade*.

²⁰ L'*Embedded Option* è una clausola contrattuale di alcuni asset a reddito fisso che permette ad un emittente o investitore di compiere azioni nei confronti della controparte.

Il *World Breakeven Inflation*:



Figura 4.10: World Breakeven Inflation

Questo indicatore rappresenta la differenza di rendimento tra titoli indicizzati all'inflazione²¹ e titoli a tasso fisso. È possibile, dunque, interpretare tale misura come metodo per estrapolare l'inflazione che gli operatori di mercato si attendono per il futuro.

Il terzo fattore analizzato è il *World Real Rate*:

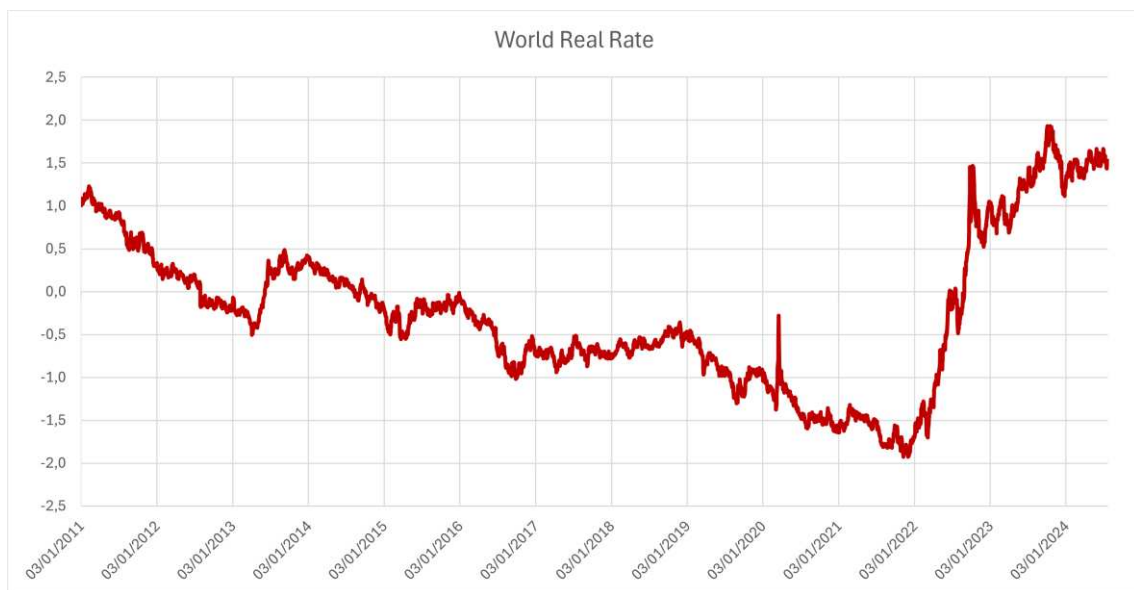


Figura 4.11: World Real Rate

²¹ Ovvero a titoli il cui valore è sensibile all'inflazione nel tempo.

Il World Real Rate esprime il tasso di interesse reale, calcolato tramite differenza tra tasso di interesse nominale²² e il tasso di inflazione.

L'ultimo fattore è il *Dollar Index*:



Figura 4.12: Dollar Index

Il Dollar Index è una misura che esprime il valore del dollaro statunitense rispetto a un paniere di altre valute. Il paniere di riferimento riguarda principalmente valute estere di paesi sviluppati²³. Più il valore dell'indice è alto e maggiore è la forza del dollaro verso le divise degli altri paesi.

Di seguito si verifica, inoltre, la stazionarietà, tramite il test ADF dei fattori presentati:

Tabella 4.3: Statistiche test e P-Value per i fattori

Fattore	Statistica test	P-Value
Global Corporate IG Option-adjusted Spread	-2.91	0.043
World Breakeven Inflation	-1.80	0.37
World Real Rate	-0.97	0.76
Dollar Index	-1.43	0.56

²² Il tasso di interesse nominale identifica il tasso di interesse dichiarato su investimenti o prestiti.

²³ Si citano le valute che hanno maggiore peso: Euro, Sterlina Britannica e Yen

È fondamentale notare che per il primo fattore il p-value si trova al di sotto della soglia limite di 0.05. Questo potrebbe essere spiegato dalla natura stessa del fattore; come anticipato, il Global Corporate IG Option-adjusted Spread viene calcolato tramite differenza tra il rendimento di un titolo a tasso fisso Investment Grade (IG) e un tasso di interesse privo di rischio e tale differenza potrebbe comportare stazionarietà in media del processo. Dal momento che il p-value del fattore in questione è vicino alla soglia critica dello 0.05, si è comunque provveduto a differenziare la serie.

Tabella 4.4: Statistiche test e P-Value per i fattori differenziati

Fattore	Statistica test	P-Value
Global Corporate IG Option-adjusted Spread	-12,3	$1,68 \times 10^{-22}$
World Breakeven Inflation	-21,1	0
World Real Rate	-12,2	$8,61 \times 10^{-23}$
Dollar Index	-25,6	0

5. Risultati

Nel seguente capitolo vengono presentati i parametri stimati per ogni serie storica utilizzata nella tesi. Successivamente, in riferimento al modello HN-GARCH(1,1) tradizionale, si commentano, confrontandoli, i premi al rischio di tutte le serie. Dopo aver illustrato gli output del modello a fattori espliciti, analizzando l'evoluzione temporale e la relativa dipendenza dai fattori dei premi al rischio di mercato, i modelli vengono confrontati sulla base della correlazione tra indice e varianza e delle volatilità delle serie.

5.1 Modello Originale

I parametri stimati del modello HN-GARCH(1,1) tradizionale, per le serie storiche finanziarie sono:

Tabella 5.1: Parametri stimati del modello HN-GARCH(1,1) tradizionale

Parametri	Environment	Alternative Energy	Energy Efficiency	Green Building	Pollution Prevention	Sustainable Water	MSCI ACWI
ω	0 (0 ; 0.99)	0 (0 ; 0.99)	0 (0; 0.99)	0 (0 ; 0.99)	0 (0 ; 0.99)	0 (0 ; 0.99)	0 (0; 0.99)
α	0.61 (5.1; 0.00)	0.098 (3.07; 0.002)	2.52 (72.9; 0.0)	0.24 (1.6; 0.097)	0.42 (4.8; 0.00)	0.38 (8.2; 0.00)	0.24 (4.0; 0.00)
β	0.92 (112.6; 0.00)	0.92 (254.2; 0.0)	0.93 (371.77; 0.00)	0.92 (109.9; 0.00)	0.95 (153.3; 0.00)	0.93 (170.3; 0.00)	0.84 (81.1; 0.00)
γ	0.16 (5.2; 0.00)	0.33 (10.42; 0.0)	0.04 (1.44; 0.14)	0.29 (5.2; 0.00)	0.20 (5.6; 0.00)	0.16 (4.05; 0.00)	0.61 (17.1; 0.00)
λ	0.0068 (2.2; 0.027)	-0.0074 (-0.5; 0.605)	0.0035 (1.44; 0.14)	0.0069 (0.8; 0.396)	0.0027 (0.6; 0.541)	0.014 (2.2; 0.027)	0.022 (2.7; 0.005)
$\beta + \alpha\gamma^2$	0.942	0.932	0.938	0.944	0.969	0.949	0.929

La tabella (5.1) presenta la stima dei parametri del modello per tutte le serie storiche introdotte nel capitolo (3.1); i valori in parentesi fanno riferimento alle statistiche del t-test di azzeramento dei parametri²⁴ (*t-ratio*) e relativi p-value per ogni singolo parametro. Il test verifica sotto ipotesi nulla (H_0) l'azzeramento del parametro di riferimento; di conseguenza, se il valore del *p-value* supera la soglia critica di probabilità (dello 0.05) il test non viene rifiutato e, dunque, non ci sono evidenze statisticamente significative per affermare che il parametro sia diverso da zero. Se, invece, il p-value è al di sotto della soglia critica di probabilità allora si rifiuta l'ipotesi nulla di azzeramento del parametro analizzato.

L'inserimento dell'elemento di persistenza $(\beta + \alpha\gamma^2)$ permette di verificare la stazionarietà in covarianza del modello per ogni serie storica. Come è possibile notare, il valore della persistenza per tutte le serie storiche è minore di uno, dimostrando la presenza di stazionarietà in covarianza del modello per tutte le serie storiche analizzate. Inoltre, è fondamentale specificare che l'interpretazione del parametro λ dovrebbe essere associata alla varianza condizionale stimata (h_t) proprio perché, come specificato nell'equazione $R_t = r_{f,t} + \lambda h_t + \sqrt{h_t} z_t$, il termine λh_t rappresenta proprio il premio al rischio stimato dell'indice di riferimento.

Il parametro ω presenta, per quasi tutte le serie, un valore uguale a zero. Dal momento che il modello prevede anche la presenza di un valore nullo per il parametro in questione, tale elemento potrebbe essere comunque accettato nell'analisi delle serie storiche.

²⁴ Il t-test per l'azzeramento dei parametri si pone l'obiettivo di verificare la significatività di ogni parametro del vettore $\hat{\theta}$, stimato tramite massima verosimiglianza. V. Appendice

Il parametro β presenta per tutte le serie storiche dei valori molto vicini ad uno. Questa proprietà, introdotta nel sottoparagrafo 4.2.1, rappresenta proprio la forte dipendenza della varianza con il suo passato, segnalando, dunque, la presenza di *volatility cluster*. Il p-value, per tutte le serie storiche, è uguale o molto vicino a zero, rifiutando, quindi, l'ipotesi nulla (H_0) di azzeramento del parametro.

Il parametro α assume valori positivi e diversi da zero per la maggior parte delle serie storiche. Un'eccezione si riscontra nell'analisi dell'indice *Energy Efficiency*, dove il parametro risulta comunque significativo ma con un valore elevato rispetto ai parametri degli altri indici. È possibile notare l'altra eccezione per il parametro α dell'indice *Green Building*, in quanto presenta un valore del p-value di 0.097, risultando, dunque, poco significativo.

Il parametro γ è significativo per quasi tutte le serie storiche. La tabella 5.1 presenta, per il parametro in questione, dei valori minori di uno, dimostrando comunque l'esistenza di una risposta asimmetrica della volatilità nel modello. Per quanto riguarda l'indice *Energy Efficiency* il valore del parametro si attesta a 0.04, con un p-value di 0.14, quindi non significativo, evidenziando una minore influenza asimmetrica della volatilità paragonata agli altri indici.

Per quanto riguarda il parametro λ , è fondamentale sottolineare che, come evidenziato da Xize Ye (2021), la sua stima risulta particolarmente complessa. Lo studio dimostra infatti che, a differenza di λ , tutti gli altri parametri hanno un impatto maggiore sulla funzione di log-verosimiglianza, rendendo così più difficile la sua stima. Possiamo notare, infatti, come i parametri λ non sono significativi per gli indici *Alternative Energy*, *Green Building*, *Pollution Prevention* ed *Energy Efficiency* con valori di p-value rispettivamente di 0.605, 0.396, 0.541 e 0.14.

I valori dei parametri λ sono tutti positivi, ad eccezione di quello relativo all'indice *Alternative Energy*, che assume un valore di -0.0074 . Di conseguenza, il rendimento medio dell'indice potrebbe essere inferiore al tasso di interesse privo di rischio, risultando, in media, non vantaggioso per un investitore razionale. È fondamentale tenere in considerazione che per il parametro in questione si riscontra un p-value al di sopra della soglia di 0.05. Il valore di λ per il benchmark di riferimento MSCI ACWI risulta essere maggiore, con un valore di 0.022, rispetto agli altri indici. Il parametro presenta, inoltre, un p-value di 0.005, rifiutando l'ipotesi nulla. Gli altri parametri evidenziano, comunque, la presenza di un premio al rischio di mercato positivo, ma la loro magnitudine, non è altrettanto rilevante come nel caso dell'indice MSCI ACWI. Il parametro λ per la serie *Sustainable Water* è significativo, con un p-value di 0.027 e un valore di 0.014; si tratta del parametro più vicino all'indice di riferimento. È possibile notare²⁵ come l'insieme dei settori sottostanti l'indice *Sustainable Water* sia meno eterogeneo rispetto all'indice globale. L'indice MSCI ACWI investe in molteplici settori come: Information Technology (IT) (25%), Finanziario (16%), Consumer Discretionary (11%), Industrial (10%), Health Care (9%). L'indice *Sustainable Water*, invece, risulta esposto principalmente a tre settori: Industrials (41%), Utility (37%)²⁶ e Information Technology (19%). Una così elevata presenza del settore delle Utility potrebbe aver reso il λ dell'indice *Sustainable Water* vicino a quello dell'indice globale, probabilmente a causa di investimenti e incentivi pubblici ad aziende che erogano servizi pubblici, sensibili a tematiche ambientali come l'utilizzo consapevole delle risorse idriche. Inoltre, anche la presenza del settore IT potrebbe aver contribuito, grazie al grande utilizzo di tecnologie

²⁵ Si tenga in considerazione gli Index Factsheet, introdotti nei capitoli 2.1 e 2.2.

²⁶ Per Utility si intende quel settore economico che raggruppa aziende, le quali si occupano di erogare e gestire servizi pubblici.

per l'analisi, archiviazione e trasmissione di dati e informazioni, che ha caratterizzato gli ultimi anni. Di conseguenza, il parametro λ potrebbe esprimere anche la fiducia degli operatori finanziari globali nei rispettivi settori di appartenenza dell'indice *Sustainable Water*.

La serie *Environment* presenta un λ di 0.0068 e un p-value di 0.027. È fondamentale tener presente che tale indice rappresenti un insieme di titoli finanziari di aziende, il cui fatturato deriva per il 50% da prodotti e servizi sostenibili; nonostante ciò, il 61% dei titoli finanziari dell'intero indice è costituito da asset di NVIDIA e il 21% da Tesla, rendendo l'indice, probabilmente, molto sensibile alla fluttuazione del rendimento degli asset finanziari dei due colossi statunitensi. Questa dipendenza potrebbe aver reso il λ della serie *Environment* relativamente basso rispetto all'indice globale. D'altro canto, dal momento che l'indice MSCI ACWI dovrebbe rappresentare la maggior parte del mercato azionario globale, presenta percentuali che non superano il 5% di asset di multinazionali come Apple, NVIDIA, Amazon, Microsoft e Tesla, rendendo la composizione dell'indice stesso più eterogenea.

Nonostante il parametro della serie *Environment* sia positivo con un p-value tale da rifiutare l'ipotesi nulla di azzeramento dei parametri, esso presenta comunque un valore di gran lunga al di sotto del λ del benchmark di riferimento.

5.2 Modello Modificato

Nel seguente capitolo vengono presentate le stime dei parametri del modello HN-GARCH a fattori espliciti. Vengono inoltre inseriti i parametri stimati dei fattori con i

relativi t-test e p-value. Tutti i parametri, i rispettivi t-ratio e p-value sono presentati nella seguente tabella:

Tabella 5.2: Parametri stimati del modello HN-GARCH(1,1) a fattori espliciti

Parametri	Environment	Alternative Energy	Energy Efficiency	Green Building	Pollution Prevention	Sustainable Water	MSCI ACWI
ω	0.0 (0.0; 0.99)	0.0 (0.0; 0.99)	0.0 (0.0; 0.99)	0.031 (1.09; 0.27)	0.0 (0.0; 0.99)	0.0 (0.0; 0.99)	0.0 (0.0; 0.99)
α	0.32 (3.8; 0.0)	0.04 (0.29; 0.76)	1.88 (26.6; 0.0)	0.064 (0.36; 0.71)	0.16 (0.99; 0.31)	0.21 (1.69; 0.09)	0.12 (2.01; 0.04)
β	0.94 (85.56; 0.0)	0.95 (102.23; 0.0)	0.94 (185.67; 0.0)	0.92 (62.36; 0.0)	0.96 (132.21; 0.0)	0.95 (150.65; 0.0)	0.83 (66.32; 0.0)
γ	0.23 (6.98; 0.0)	0.51 (7.45; 0.0)	0.05 (1.52; 0.12)	0.87 (15.17; 0.0)	0.37 (9.27; 0.0)	0.26 (6.10; 0.0)	1.02 (44.01; 0.0)
δ_0	0.01 (2.22; 0.02)	-0.002 (-0.2; 0.83)	0.005 (1.86; 0.061)	0.013 (1.05; 0.29)	0.0083 (1.8; 0.071)	0.017 (3.04; 0.002)	0.046 (5.89; 0.0)
δ_1	-3.53 (-19.4; 0.0)	-7.76 (-27.9; 0.0)	-1.44 (-86.5; 0.0)	-7.83 (-21.6; 0.0)	-3.20 (-13.1; 0.0)	-2.90 (-15.28; 0.0)	-6.66 (-87.5; 0.0)
δ_2	1.27 (8.28; 0.0)	2.42 (4.44; 0.0)	0.57 (7.12; 0.0)	1.20 (6.62; 0.0)	1.84 (9.23; 0.0)	0.70 (4.38; 0.0)	3.096 (22.82; 0.0)
δ_3	0.64 (8.88; 0.0)	0.59 (1.5; 0.12)	0.28 (4.25; 0.0)	-0.2 (-1.4; 0.14)	1.42 (13.08; 0.0)	0.5 (4.26; 0.0)	2.31 (26.15; 0.0)
δ_4	-0.182 (-14.6; 0.0)	-0.492 (-14.6; 0.0)	-0.073 (-11.5; 0.0)	-0.35 (-13.6; 0.0)	-0.19 (-15.6; 0.0)	-0.15 (-10.1; 0.0)	-0.33 (-17.6; 0.0)
$\beta + \alpha\gamma^2$	0.96	0.96	0.94	0.97	0.98	0.96	0.95

Prendendo in considerazione la formula (4.9), il parametro δ_0 si riferisce all'intercetta, δ_1 al fattore *Global Corporate IG Option-Adjusted Spread*, δ_2 alla *Breakeven Inflation*, δ_3 al *Real Rate* e δ_4 al fattore *Dollar Index*. L'elemento di persistenza ($\beta + \alpha\gamma^2$) presenta dei valori minori di uno per ogni indice. Il modello, dunque, è stazionario in covarianza per tutte le serie storiche analizzate. Prima di analizzare i parametri relativi ai fattori, è opportuno commentare i parametri propri del modello HN-GARCH.

Il parametro ω , anche in questo frangente, presenta nella maggior parte dei casi valori uguali o prossimi allo zero con un p-value molto vicino ad uno, escluso l'indice *Green Building*, il quale comunque ha un p-value superiore alla soglia dello 0.05.

Il parametro α , presenta dei valori positivi e maggiori di zero per tutte le serie storiche. Per gli indici *Alternative Energy*, *Green Building* e *Pollution Prevention*, i parametri non sono significativi, mentre per la serie *Sustainable Water* il parametro α risulta poco significativo con un p-value di solo 0.09. Tuttavia, i parametri sono tutti positivi e rispettano il vincolo imposto: $\alpha > 0$.

Il parametro β , anche in questo caso, presenta dei valori molto vicini ad uno, dimostrando la forte dipendenza della varianza condizionale dal suo passato. Inoltre, i parametri sono tutti fortemente significativi.

Il parametro γ presenta dei valori positivi e quasi tutti significativi. Per quanto riguarda il parametro della serie *Energy Efficiency*, il p-value è di 0.12, un valore di poco superiore alla soglia critica del 90% di confidenza. È importante precisare che la stima dell'indice in questione risulta essere, sia per il modello tradizionale che per il modello a fattori espliciti, particolarmente complessa, presentando delle stime non significative per alcuni parametri analizzati.

I premi al rischio di mercato dipendenti dal tempo per gli indici analizzati sono:

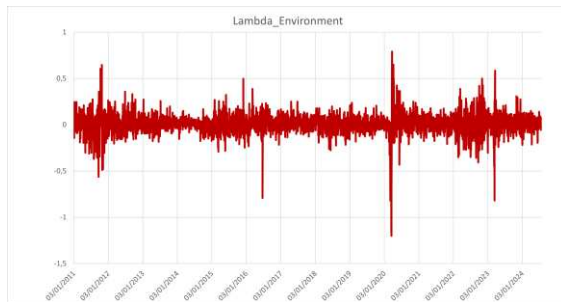


Figura 5.1: Market Risk Premium per Environment

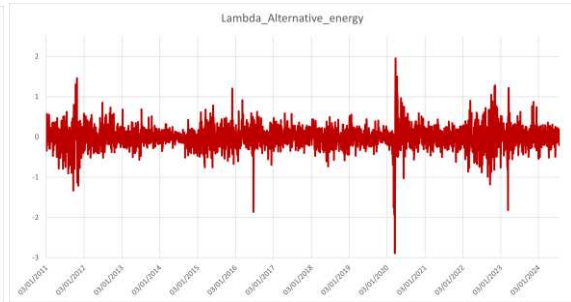


Figura 5.2: Market Risk Premium per Alternative Energy

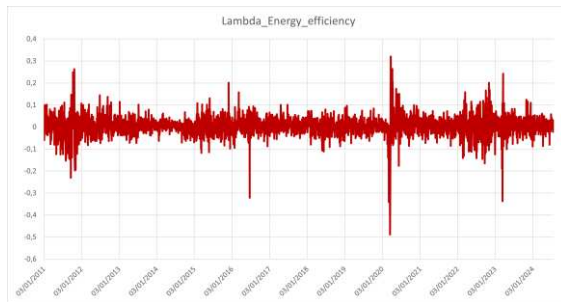


Figura 5.3: Market Risk Premium per Energy Efficiency

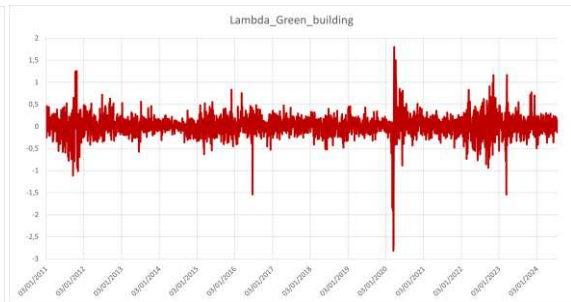


Figura 5.4: Market Risk Premium per Green Buildings

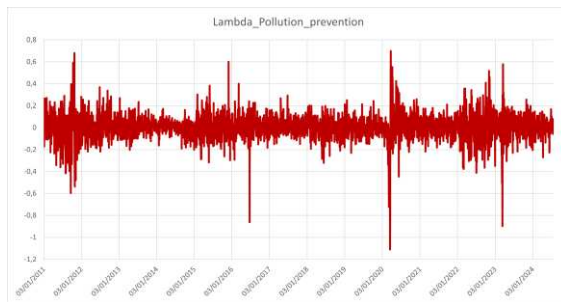


Figura 5.5: Market Risk Premium per Pollution Prevention

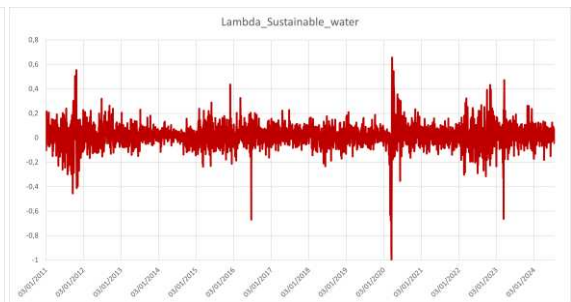


Figura 5.6: Market Risk Premium per Sustainable Water

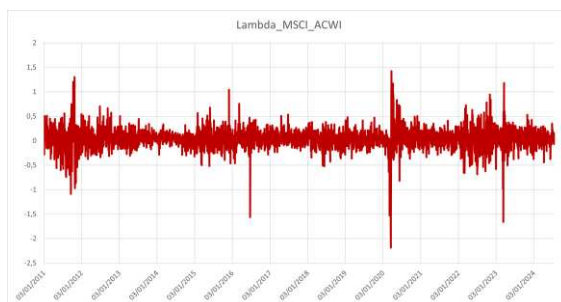


Figura 5.7: Market Risk Premium per MSCI ACWI

I grafici presentano l'evoluzione temporale del premio al rischio di mercato per tutte le serie storiche. Sono presenti dei picchi nei primi mesi del 2020 e nel 2023, probabilmente dovuti alla crisi del COVID-19 e allo scoppio della guerra in Ucraina, facendo oscillare

di molto, soprattutto in negativo, il valore di λ_t . Nonostante tali variazioni si verifichino negli stessi periodi, i valori assunti dal premio al rischio di mercato differiscono in misura significativa tra i diversi indici. Infatti, se in tutto l'arco temporale analizzato, il valore di λ_t della serie MSCI ACWI oscilla da un minimo di -2 ad un massimo di 1.5 , per l'indice Environment la scala si riduce fino ad un minimo di quasi -1.5 fino ad un massimo di poco più di 0.5 . Dal momento che, nelle analisi effettuate, λ_t risulta influenzato da specifici fattori rappresentativi di vari tipi di rischio, è opportuno comprendere in che misura e con quale direzione questi fattori incidano.

Analizzare i parametri dei fattori in questione risulta particolarmente complesso se non si tiene in considerazione sia il loro impatto sul premio al rischio di mercato che la correlazione tra i fattori stessi:

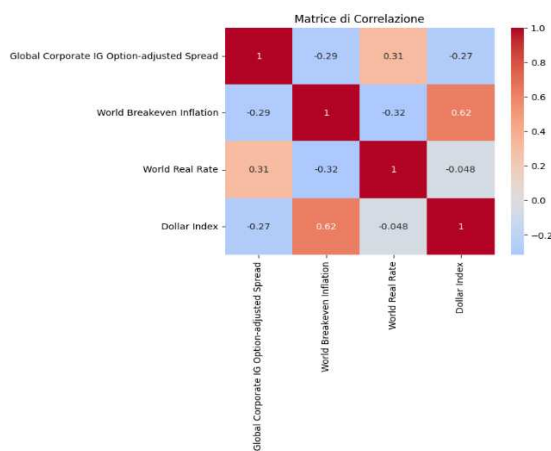


Figura 5.8: Matrice delle correlazioni per i fattori

Le correlazioni mostrate nella matrice²⁷ definiscono, quindi, una relazione negativa o positiva tra i fattori; di conseguenza, tale relazione risulta particolarmente utile quando si intende interpretare i parametri associati ai fattori stessi.

²⁷ La matrice di correlazione contiene i coefficienti che definiscono il grado di relazione lineare tra due variabili. Fornisce, quindi, informazioni su quanto e in che direzione due variabili si influenzano reciprocamente

Analizzando la serie *Environment*, il λ_t viene influenzato negativamente dai parametri δ_1 e δ_4 . Il primo fattore rappresenta il rischio di credito delle obbligazioni societarie a livello globale: pertanto, l'Option-Adjusted Spread, introdotto nel sottoparagrafo 4.3.1, risulta influenzare negativamente il premio al rischio di mercato. Nonostante ciò, l'impatto del parametro sul premio al rischio di mercato è relativamente contenuto rispetto agli altri indici, registrando probabilmente una certa tolleranza da parte di investitori razionali nei confronti di un cambiamento dello spread. Inoltre, un eventuale, contemporaneo aumento della varianza condizionale stimata potrebbe, comunque, attenuare la relazione negativa tra il premio al rischio dell'indice e il *Global Corporate IG OAS*. Il fattore *World Breakeven Inflation* condiziona positivamente il premio al rischio di mercato. Questa influenza potrebbe essere sintomo di una sensibilità dell'investitore razionale all'inflazione futura percepita. Il tasso di interesse reale (*World Real Rate*) influenza positivamente i λ_t . Se il tasso reale aumenta, le obbligazioni diventano più redditizie, rendendole un'alternativa più attraente rispetto agli investimenti azionari. Di conseguenza, per evitare che l'investitore si orienti esclusivamente verso investimenti obbligazionari (come titoli di Stato), considerandoli sia sicuri che più redditizi, si evidenzia un relativo incremento del premio al rischio di mercato. Il fattore *Dollar Index*, come accennato precedentemente, influenza negativamente il λ_t con un impatto contenuto rispetto agli altri indici. Dal momento che il mercato dell'indice *Environment* è esposto prevalentemente agli Stati Uniti (90%), il premio al rischio di mercato potrebbe essere poco sensibile al fattore di riferimento.

L'indice *Alternative Energy* opera tendenzialmente nel mercato dell'energia pulita e rinnovabile. Tra le energie rinnovabili troviamo: fotovoltaica, solare, termica, bioenergy e geotermica. I mercati di riferimento dell'indice sono: 13% per la Cina, 38% per USA,

17% per la Danimarca e un restante 20% relativo ad altri mercati sviluppati o in via di sviluppo. Il primo fattore (*Global Corporate IG OAS*) influenza negativamente λ_t e, escludendo il caso dell'indice *Green Building*, il suo impatto sul premio al rischio di mercato è in valore assoluto il più alto. Il fattore *World Breakeven Inflation*, invece, influisce positivamente su λ_t . L'impatto del fattore è, relativamente, il più alto dopo l'indice MSCI ACWI. Un valore così elevato potrebbe essere dovuto sia al mercato in cui opera l'indice che all'acquisto di materie prime per la produzione di impianti ad energia fotovoltaica o eolica, come le terre rare. Questo materiale è largamente presente in paesi come la Cina e diverse nazioni africane. Di conseguenza, un aumento dell'inflazione a livello globale potrebbe determinare un incremento del premio al rischio di mercato, a causa del contestuale aumento dei costi delle materie prime e degli investimenti sui processi produttivi per la costruzione di impianti a energia rinnovabile in paesi più sviluppati, come gli Stati Uniti, la Danimarca e la stessa Cina. È fondamentale tener presente che la correlazione negativa che intercorre tra i due fattori citati precedentemente potrebbe attenuare gli effetti dei rispettivi parametri sull'eccesso di rendimento dell'indice, nonostante l'elevato impatto che hanno sul premio al rischio di mercato. Il fattore *World Real Rate* influisce positivamente, ma con un impatto relativamente contenuto rispetto agli altri indici sul premio al rischio di mercato, presentando però un p-value di 0.12, il che indica una minor evidenza di significatività statistica. Il fattore *Dollar Index* influisce negativamente su λ_t , con un impatto relativamente più grande rispetto agli altri indici. Dal momento che il mercato in cui opera l'indice Alternative Energy è eterogeneo, con investimenti provenienti principalmente dagli Stati Uniti (39%), seguiti da Danimarca (17%), Cina (12%) e un residuo del 21% riferito a paesi sviluppati e non sviluppati, un aumento del valore del dollaro potrebbe influire in modo

significativo sul premio al rischio di mercato, a causa della perdita di valore delle altre divise rispetto al dollaro statunitense ed ai conseguenti aumenti dei costi di acquisto delle materie prime, stoccaggio di energia e gestione degli impianti produttivi. Inoltre, è fondamentale specificare che i fattori *Dollar index* e *World Breakeven Inflation* sono molto positivamente correlati. Tale correlazione potrebbe compensare gli elevati effetti dei relativi parametri, che hanno segni opposti, sul premio al rischio di mercato.

L'indice *Energy Efficiency* potrebbe essere quasi del tutto assimilabile all'indice *Environment*, in quanto i settori costitutivi sono quasi del tutto gli stessi, ovvero Information Technology e Consumer Discretionary, con una prevalenza del mercato statunitense (addirittura il 96% per l'indice *Energy Efficiency*). Anche le prime due aziende che fanno parte dei primi dieci costituenti sono le stesse per entrambi gli indici, ovvero: NVIDIA e Tesla, con percentuali del 65% e 25% rispettivamente, nella costituzione dell'indice. Dunque, i parametri che si riferiscono ai fattori dell'indice *Energy Efficiency* potrebbero essere accomunati a quelli dell'indice *Environment*. La differenza più marcata si registra per il parametro che si riferisce al fattore *Dollar Index*, il quale esprime il minore impatto rispetto agli altri indici. Questa differenza potrebbe essere dovuta proprio alla grande influenza del mercato statunitense sull'indice *Energy Efficiency*, quindi, anche in questo frangente, le variazioni del valore del dollaro americano rispetto ad altre valute potrebbero avere un impatto limitato sul premio al rischio di mercato. Nonostante ciò, un possibile livello elevato della varianza condizionale stimata di *Energy Efficiency* potrebbe rendere il premio al rischio dell'indice stesso maggiore rispetto a quello dell'indice *Environment*, dunque amplificando, in riferimento all'indice *Energy Efficiency*, gli effetti contenuti indotti dai parametri associati ai fattori.

L'indice *Green Building* opera principalmente nel settore *Real Estate* (per il 91%) e nel settore *Consumer Discretionary* (9%). Si evidenzia una predominanza significativa di operatori impegnati nella produzione di beni e servizi destinati al mercato immobiliare, partendo dalla progettazione, costruzione fino alla manutenzione di immobili eco-sostenibili. L'indice principalmente è esposto al mercato giapponese e statunitense, con più del 50% degli investimenti totali. Il parametro che si riferisce al fattore *Global Corporate IG OAS* influisce negativamente su λ_t , esprimendo anche un valore relativamente più alto rispetto agli altri indici. Probabilmente la correlazione positiva con il fattore *World Real Rate* e negativa, principalmente, con il fattore *World Breakeven Inflation* potrebbero, anche in questo caso, compensare il forte impatto negativo di *Global Corporate IG OAS* sull'eccesso di rendimento dell'indice. Inoltre, probabilmente, la negatività del parametro associato al fattore *World Real Rate*, pur non risultando quest'ultimo particolarmente significativo, potrebbe essere dovuta proprio all'influenza del fattore *Global Corporate IG OAS*. Il fattore *World Breakeven Inflation* influisce positivamente su λ_t . Sulla base di queste considerazioni, un incremento dell'inflazione attesa potrebbe aumentare il premio al rischio di mercato: tuttavia è fondamentale tenere conto dell'elevata correlazione con il parametro del fattore *Dollar Index*, che potrebbe influenzare l'impatto del *World Breakeven Inflation* sul premio al rischio di mercato e, di conseguenza, anche sull'eccesso di rendimento dell'indice. È anche probabile che un aumento del fattore *World Breakeven Inflation* venga compensato da un corrispondente incremento del *Dollar Index*, che esercita un effetto negativo sul premio al rischio di mercato. Il parametro relativo al fattore *World Real Rate* influisce negativamente sul premio al rischio di mercato. Tuttavia, questo esibisce bassa evidenza di significatività, con un p-value di 0.14. Il fattore *Dollar Index* influisce negativamente su λ_t . Il suo

parametro esprime l'impatto maggiore sul premio al rischio di mercato, escluso per l'indice *Alternative Energy*. Proprio come per *Alternative Energy*, l'indice *Green Building* opera in un mercato globale eterogeneo, con una presenza del mercato statunitense limitata al 27%. Di conseguenza, un valore relativamente elevato del parametro riferito al fattore *Dollar Index* potrebbe essere dovuto proprio dalla perdita del potere di acquisto delle altre valute rispetto al dollaro, influenzando negativamente il premio al rischio di mercato. Anche in questo caso, è fondamentale tenere presente la forte correlazione positiva con il fattore *World Breakeven Inflation* descritto precedentemente.

L'indice *Pollution Prevention* raggruppa due principali settori: Materials (51%) e Consumer Staples²⁸ (45%). L'indice opera principalmente nel mercato statunitense (47%), del Regno Unito (23%) e del Belgio (15%). Il fattore *Global Corporate IG OAS* influisce negativamente su λ_t , con un impatto relativamente contenuto rispetto ad altri indici. Inoltre, un possibile aumento della varianza condizionale nel tempo potrebbe comunque limitare l'impatto negativo del fattore *Global Corporate IG OAS*, compensando l'effetto sull'eccesso di rendimento dell'indice. I parametri *World Breakeven Inflation* e *World Real Rate* influiscono positivamente sul premio al rischio di mercato. Quest'ultimo esprime l'impatto maggiore, escluso l'indice MSCI ACWI. La correlazione negativa tra i due fattori potrebbe attenuare l'effetto sul il premio al rischio di mercato. Sebbene entrambi i fattori presentino parametri positivi, un aumento del *World Breakeven Inflation* potrebbe determinare una diminuzione del *World Real Rate*, che a sua volta può assumere valori negativi. D'altro canto, se entrambi i fattori assumono

²⁸ Per "Consumer Staples" si intende quel settore di società o aziende che si occupano della produzione o distribuzione di beni di prima necessità, come, ad esempio, beni di consumo.

valori positivi, influenzano congiuntamente in modo positivo il premio al rischio di mercato. Inoltre, l'impatto del parametro riferito a *Dollar Index* è relativamente contenuto rispetto agli altri indici. Infatti, l'indice opera principalmente nel mercato statunitense ed europeo manifestando probabilmente una minore influenza della variazione del valore del dollaro sul premio al rischio di mercato per *Pollution Prevention*.

L'indice *Sustainable Water* opera principalmente nel mercato statunitense (60%) e britannico (26%). I principali settori sottostanti l'indice sono: Industrials (41%), Utilities (38%) e Information Technologies (19%). Il parametro riferito al fattore *Global Corporate IG OAS* ha un impatto negativo ma relativamente contenuto. Il fattore *World Breakeven Inflation* influisce positivamente sul λ_t , mentre *Dollar Index* ha un effetto negativo sul premio al rischio di mercato. L'impatto di entrambi i parametri è relativamente moderato rispetto agli altri indici analizzati. Nonostante ciò, non si può escludere che, data la grande presenza del mercato statunitense (60%) e britannico (26%), l'effetto del fattore *Dollar Index* possa essere comunque minore rispetto agli altri indici, proprio grazie alla forza del dollaro statunitense rispetto alle altre valute. Il parametro del fattore *Real Rate* ha una influenza positiva su λ_t . Un aumento della varianza condizionale potrebbe amplificare, comunque, l'effetto del parametro associato al fattore, relativamente più limitato rispetto agli altri indici, aumentando in modo ulteriore il premio al rischio per l'indice *Sustainable Water*.

L'indice MSCI ACWI copre, come introdotto nei capitoli precedenti, l'85% delle opportunità investibili globali, includendo sia mercati sviluppati che in via di sviluppo. In particolare, i settori sottostanti l'indice sono: Information Technologies (24%), Financial (17%), Consumer Discretionary (11%), Industrials (10%), Health Care (9%), Communication Services (8%) e altri settori con una percentuale sotto il 5%. Il mercato

cui è prevalentemente esposto, invece, è quello statunitense per il 66%, con un residuo 20% riferibile ad altri mercati sviluppati e paesi emergenti. Le sensitività ai fattori sono tutte relativamente alte rispetto agli indici tematici, evidenziando una particolare sensibilità nei confronti delle varie tipologie di rischio considerate. Nello specifico, è possibile notare come i coefficienti relativi ai fattori *World Breakeven Inflation* e *Dollar Index* hanno un impatto particolarmente elevato sul premio al rischio di mercato. Infatti, la forte correlazione positiva tra i due fattori potrebbe permettere loro di compensare i loro effetti sul premio al rischio di mercato e quindi anche sull'eccesso di rendimento dell'indice.

Le oscillazioni dei premi al rischio di mercato riferiti agli indici tematici risultano più contenute rispetto all'indice globale, indicando un minore interesse da parte degli investitori razionali nei confronti degli indici tematici stessi. Infatti, per quasi tutti gli indici ESG, i relativi premi al rischio di mercato assumono, in media, valori che vanno da un minimo di -1 a un massimo di 0.5 . Al contrario, per l'indice globale si riscontrano dei valori di λ_t , in assoluto, più elevati. Una eccezione potrebbe essere presente per i λ_t degli indici *Green Building* e *Alternative Energy*, i quali presentano, in particolare, un picco negativo di -3 nel 2020 per entrambi gli indici, a fronte di un picco positivo del premio al rischio di mercato di 1.5 e 2 rispettivamente, nello stesso anno. Inoltre, presentano delle oscillazioni che potrebbero essere paragonate al premio al rischio di mercato dell'indice MSCI ACWI. Nonostante ciò, è opportuno tenere in considerazione anche l'andamento della varianza condizionale relativa agli indici tematici per poter analizzare compiutamente l'eccesso di rendimento.

Di seguito sono presentati due istogrammi che mostrano le medie dei premi al rischio di mercato, per il modello a fattori espliciti, stimati per l'ultimo anno (2024) e per gli ultimi tre anni (2022, 2023, 2024):

Di seguito sono presentati due istogrammi che mostrano le medie dei premi al rischio di mercato, per il modello a fattori espliciti, stimati per l'ultimo anno (2024) e per gli ultimi tre anni (2022, 2023, 2024):

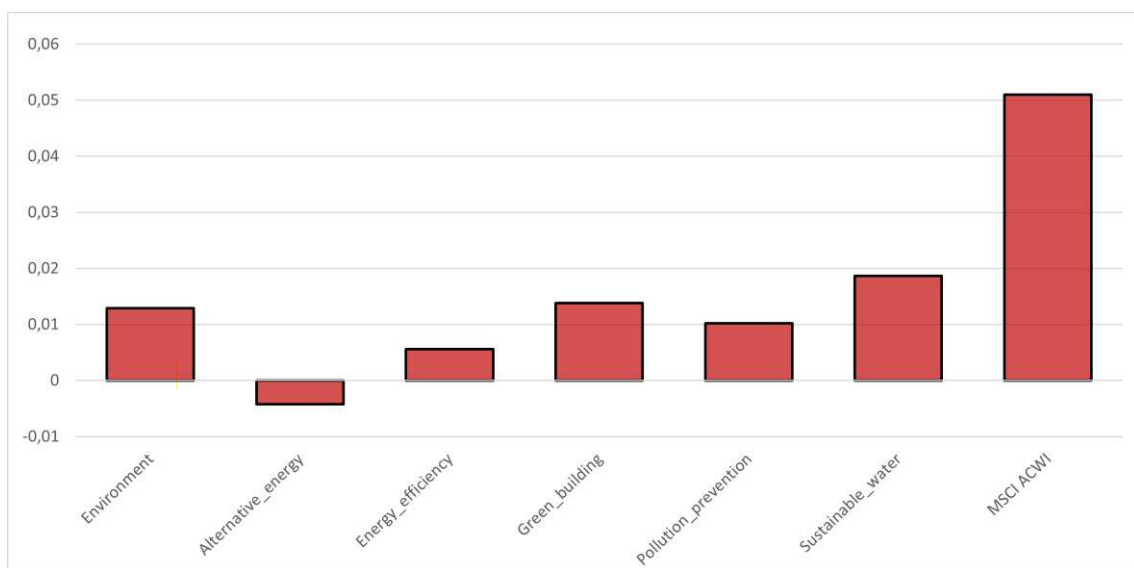


Figura 5.9: Media dei premi al rischio di mercato nel 2024

La media del premio al rischio di mercato per MSCI ACWI si distingue nettamente dagli altri indici tematici. Il valore dell'indice *Sustainable Water*, invece, è il più vicino all'indice globale. Al contrario, l'indice *Alternative Energy* mostra una media del premio al rischio di mercato negativa, risultando, dunque, poco vantaggioso per un investitore razionale. Gli altri indici tematici presentano comunque una media del premio al rischio di mercato positiva, ma significativamente inferiore a quella dell'indice globale.

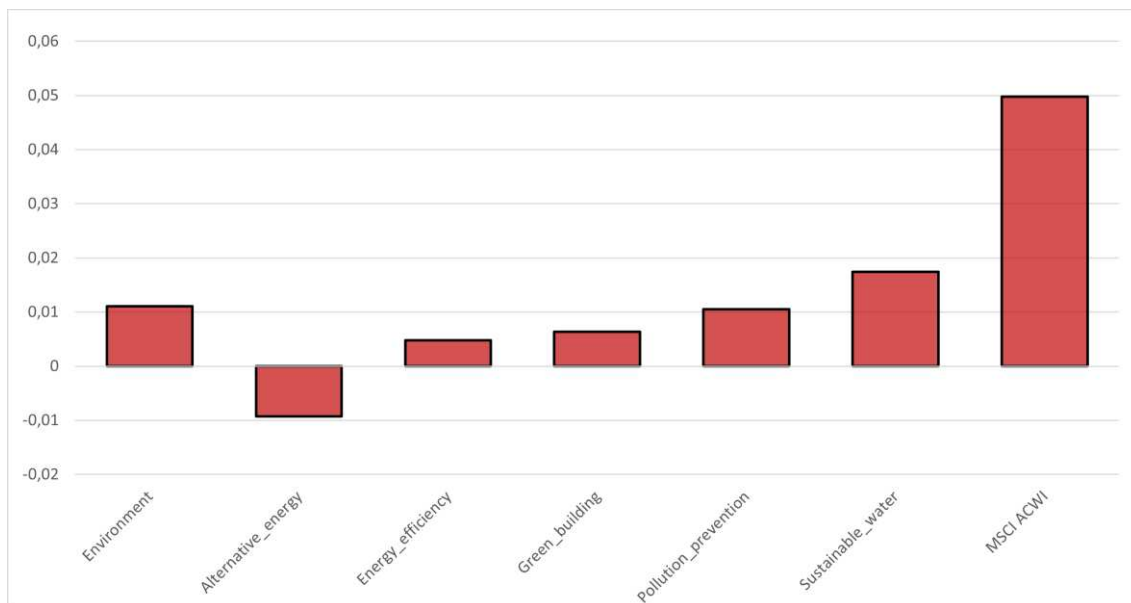


Figura 5.10: Media dei premi al rischio di mercato negli ultimi tre anni (2022, 2023, 2024)

Anche in questo caso, la media del premio al rischio di mercato dell'indice MSCI ACWI risulta essere di gran lunga superiore rispetto agli indici tematici. Per quanto riguarda i valori dei premi al rischio di mercato per gli indici *Environment*, *Energy Efficiency*, *Pollution Prevention*, *Sustainable Water* e MSCI ACWI non si riscontrano particolari differenze rispetto alle medie presentate nella figura 5.9, dimostrando una certa stabilità temporale. Per gli indici *Alternative Energy* e *Green Building*, invece, si nota una netta differenza nella media dei premi al rischio di mercato rispetto all'istogramma precedente, evidenziando così instabilità dei premi al rischio di mercato associati a questi indici.

5.3 Confronto Modelli

Nel seguente paragrafo vengono presentate le volatilità annualizzate degli indici e le rispettive correlazioni indice-varianza, sia per il modello HN-GARCH tradizionale che per il modello a fattori espliciti.

5.3.1 Le Volatilità

La volatilità è la misura della deviazione standard (σ) dei rendimenti, rappresentando, quindi, il loro grado di incertezza e variabilità. In particolare, la volatilità annualizzata rappresenta la volatilità proiettata su base annua, riflettendo, quindi, la variabilità dei rendimenti scalata su un orizzonte annuale. Si tratta di una convenzione dei mercati, che presentano e commentano valori di volatilità riferiti all'anno. La volatilità annualizzata, stimata a partire da dati giornalieri, si calcola nel seguente modo:

$$\sigma_{ann} = \sqrt{h_t \cdot 252}$$

Dove si è adottata la convenzione di considerare il *business year* composto da 252 giorni lavorativi. Le volatilità annualizzate del modello tradizionale sono:

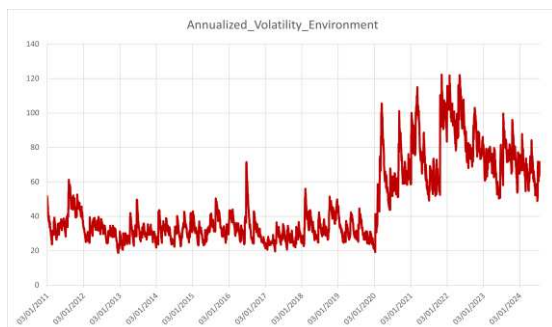


Figura 5.11: Volatilità per Environment

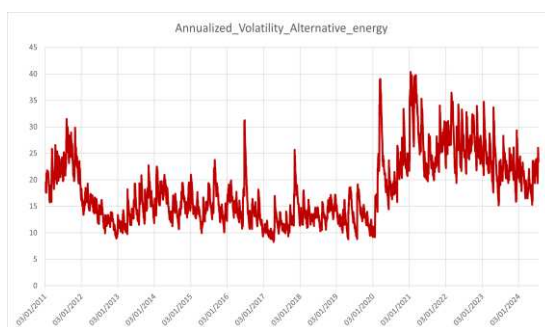


Figura 5.12: Volatilità per Alternative Energy

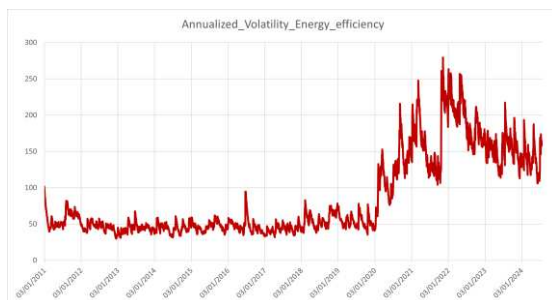


Figura 5.13: Volatilità per Energy Efficiency

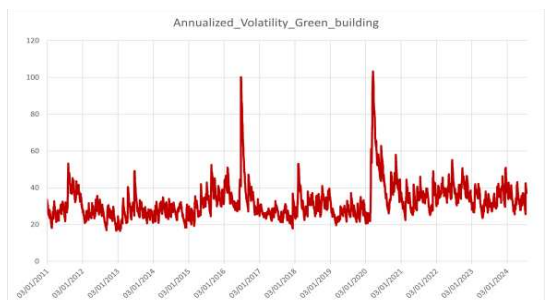


Figura 5.14: Volatilità per Green Building

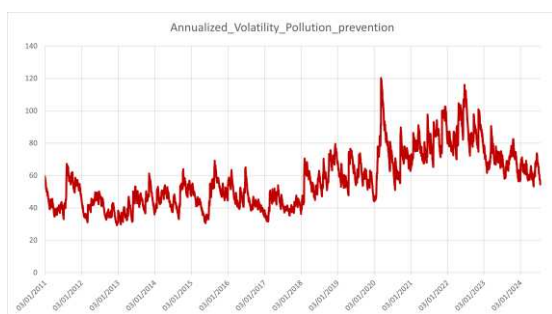


Figura 5.15: Volatilità per Pollution Prevention

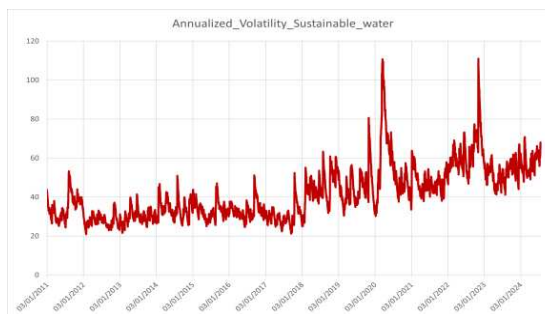


Figura 5.16: Volatilità per Sustainable Water

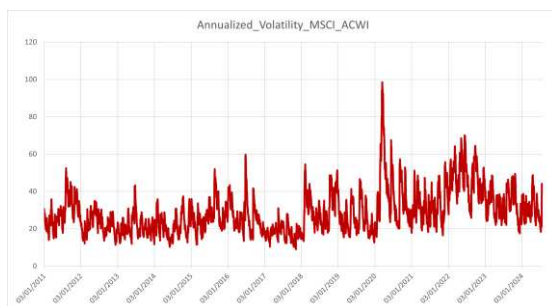


Figura 5.17: Volatilità per MSCI ACWI

Per gli indici *Environment*, *Alternative Energy*, *Energy Efficiency*, *Pollution Prevention* e *Sustainable Water* è possibile notare un evidente aumento della volatilità annualizzata dal 2020, testimoniando quindi l'aumento generale di incertezza nei confronti degli indici tematici. Solo le volatilità degli indici *Green Building* e MSCI ACWI si mantengono entro un determinato range di variabilità, nonostante lo shock registrato nel 2020. Come

detto in precedenza, l'alto grado di volatilità annualizzata raggiunto da alcuni indici tematici, dopo il periodo del lockdown, potrebbe dimostrare un alto livello di incertezza. D'altro canto, il livello di volatilità annualizzata per l'indice *Green Building* è relativamente basso rispetto al benchmark, segnalando probabilmente una bassa percezione del rischio rispetto a MSCI ACWI e traducendosi, di conseguenza, in un eccesso di rendimento dell'indice *Green Building* in media più contenuto.

Le volatilità annualizzate per il modello a fattori espliciti sono:

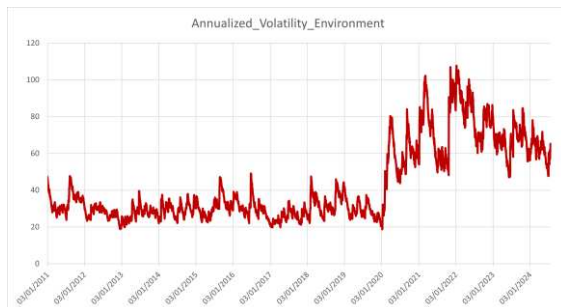


Figura 5.18: Vol. del modello a fattori per Environment

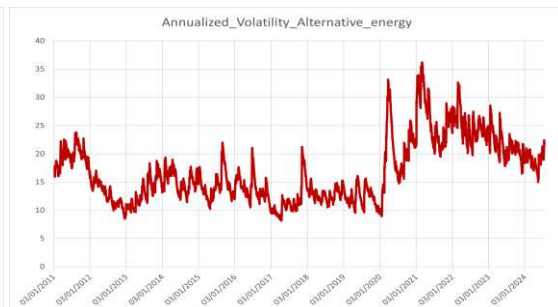


Figura 5.19: Vol. del modello a fattori per Alternative Energy

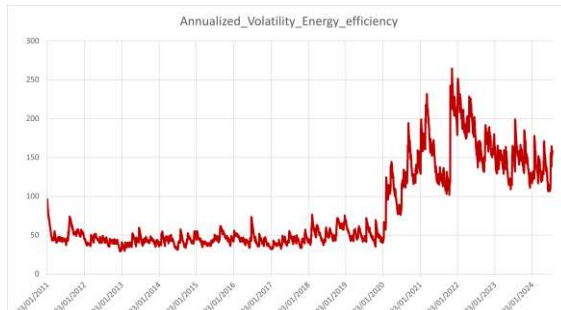


Figura 5.20: Vol. del modello a fattori per Energy Efficiency

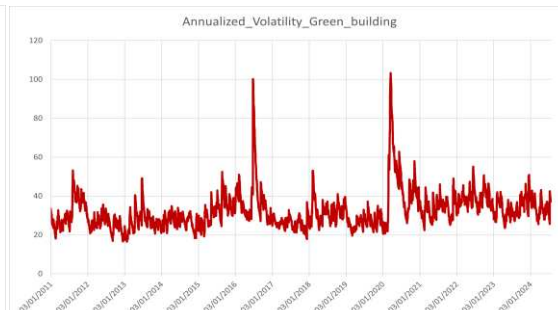


Figura 5.21: Vol. del modello a fattori per Green Building



Figura 5.22: Vol. del modello a fattori per Pollution Prev.

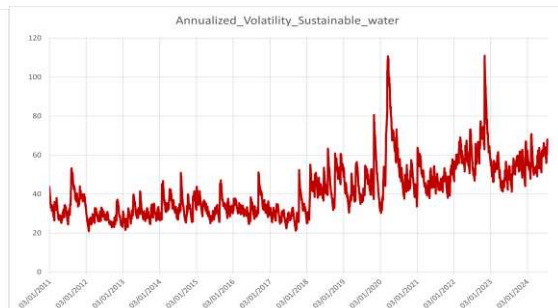


Figura 5.23: Vol. del modello a fattori per Sustainable Water

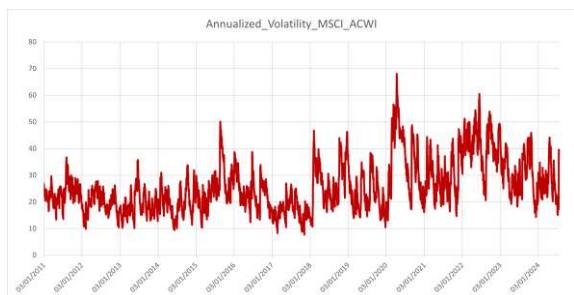


Figura 5.24: Vol. del modello a fattori per MSCI ACWI

È possibile notare come l'indice Energy Efficiency sia caratterizzato da una volatilità annualizzata per il modello a fattori espliciti ben definita. Presenta, inoltre, un aumento del livello di volatilità nel 2020, senza che però venga riassorbita. Questa caratteristica è evidente anche nelle volatilità degli indici stimate per il modello tradizionale e rilevate anche con il modello a fattori espliciti, dimostrando, dunque, un alto grado di incertezza (soprattutto dopo il 2020) rispetto all'indice MSCI ACWI. Le volatilità degli altri indici non si discostano molto da quella del modello tradizionale, ragion per cui è lecito pensare che, anche per il modello a fattori espliciti, gli indici tematici risultino essere poco stabili e probabilmente più rischiosi. Il paragone con l'indice globale è fondamentale, in quanto, quest'ultimo presenta comunque dei livelli elevati della volatilità annualizzata ma vengono quasi del tutto riassorbiti, tornando ai livelli che aveva precedentemente. Per quanto riguarda gli indici tematici, invece, un aumento della volatilità potrebbe comportare alti livelli di incertezza soprattutto dopo il 2020. Infatti, in questo caso la percezione di instabilità da parte di un investitore razionale risulterebbe maggiore per gli indici tematici rispetto all'indice MSCI ACWI.

5.3.2 Correlazione Indice-Varianza

Per analizzare la correlazione tra il rendimento di un indice e il suo processo a varianza condizionale, si può utilizzare la seguente formula:

$$\text{Corr}(h_t; R_t) = -\frac{2\gamma h_{t-1}}{\sqrt{(4\gamma^2 h_{t-1} + 2\sqrt{h_t})}}$$

La correlazione, come espresso nella formula, dovrebbe essere negativa e rappresenta in che misura le due variabili prese in considerazione si influenzano reciprocamente. Il segno negativo implica che la relazione tra h_t e R_t è inversa: un aumento della varianza condizionale tende ad essere associato a una riduzione del rendimento riferito all'indice, e viceversa. Le correlazioni, calcolate per il modello HN-GARCH, degli indici sono:

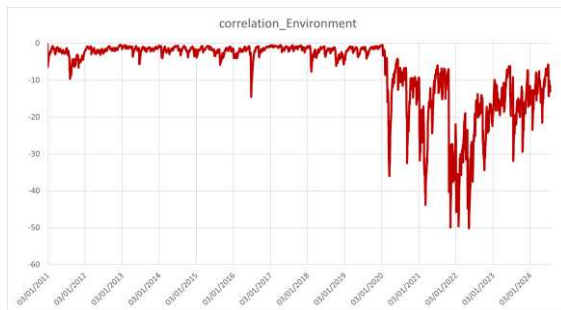


Figura 5.25: Correlazione per Environment

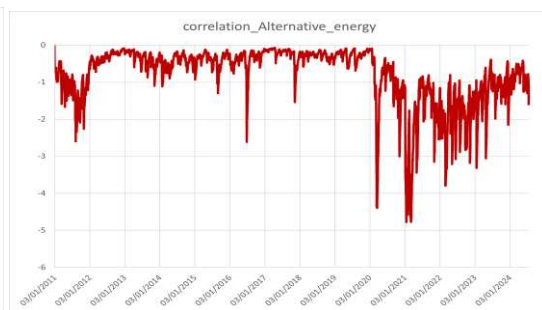


Figura 5.26: Correlazione per Alternative Energy

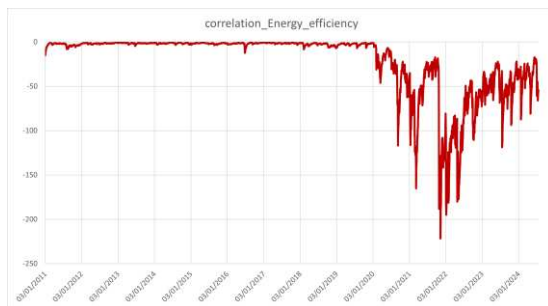


Figura 5.27: Correlazione per Energy Efficiency



Figura 5.28: Correlazione per Green Building

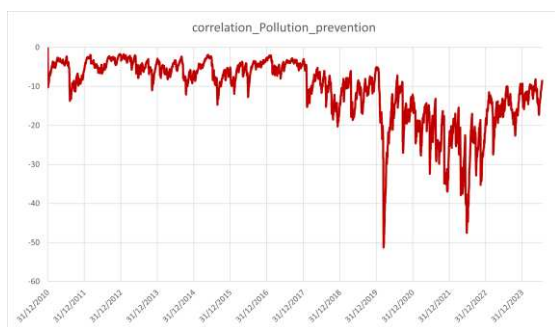


Figura 5.29: Correlazione per Pollution Prevention

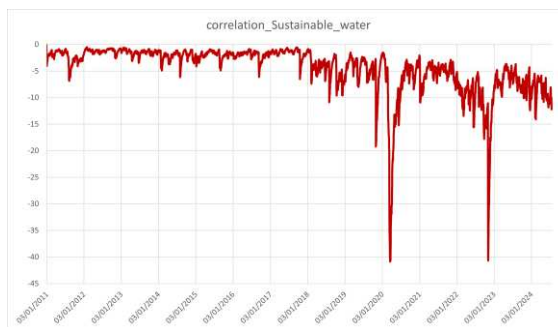


Figura 5.30: Correlazione per Sustainable Water

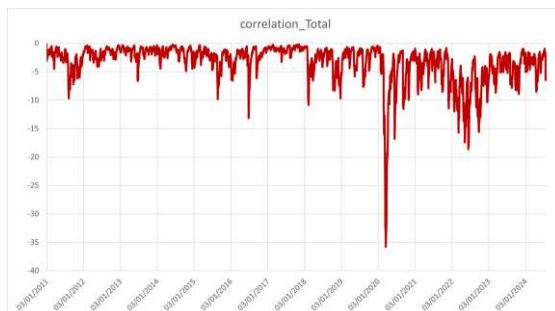


Figura 5.31: Correlazione per MSCI_ACWI

Per gli indici *Environment*, *Alternative Energy*, *Energy Efficiency*, *Pollution Prevention* e *Sustainable Water* si nota un aumento significativo della correlazione negativa dal 2020, evidenziando, dunque, una maggiore sensibilità della varianza condizionale ai cambiamenti di rendimento degli indici. Inoltre, prendendo in considerazione la correlazione relativa all'indice *Energy Efficiency*, essa raggiunge dei valori estremamente elevati rispetto sia all'indice globale che agli altri indici tematici.

Nonostante il picco presente nel 2020 sia evidente per tutti gli indici, la correlazione relativa agli indici tematici citati tende a mantenere dei livelli elevati rispetto all'indice MSCI ACWI. D'altro canto, tra gli indici tematici, solo *Green Building* mantiene un livello della correlazione pressoché stabile nonostante i picchi raggiunti nel 2016 e nel 2020. Si riscontra, però, una eccezione per l'indice *Alternative Energy*, la cui correlazione risulta essere particolarmente contenuta rispetto agli altri indici, nonostante l'evidente aumento dopo il 2020. La correlazione riferita all'indice globale raggiunge dei livelli elevati sia nel 2020 che nel periodo dell'invasione dell'Ucraina da parte della Russia.

Nonostante ciò, essa tenderebbe comunque a ritornare, soprattutto nel 2024, verso i valori che aveva pre-pandemia.

Le correlazioni, calcolate per il modello HN-GARCH a fattori espliciti, sono:

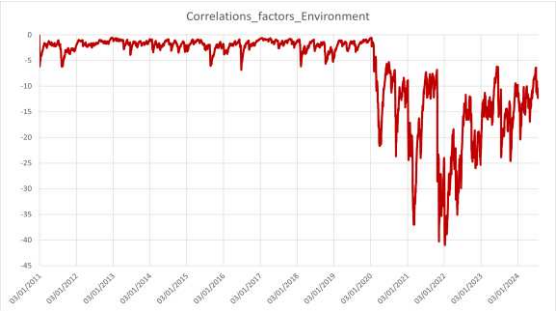


Figura 5.32: Corr. del modello a fattori per Environment

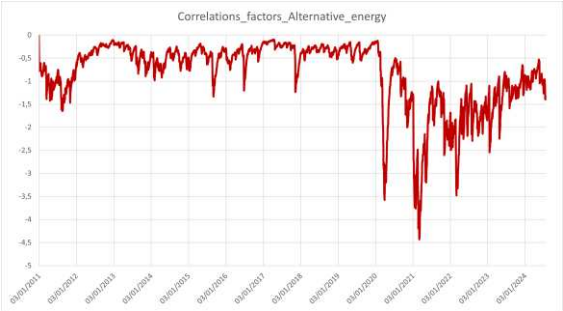


Figura 5.33: Corr. del modello a fattori per Alternative Energy



Figura 5.34: Corr. del modello a fattori per Energy Efficiency

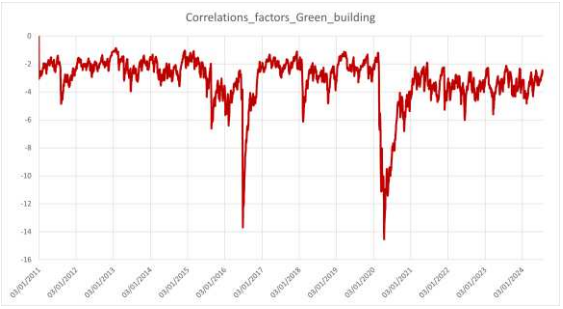


Figura 5.35: Corr. del modello a fattori per Green Building

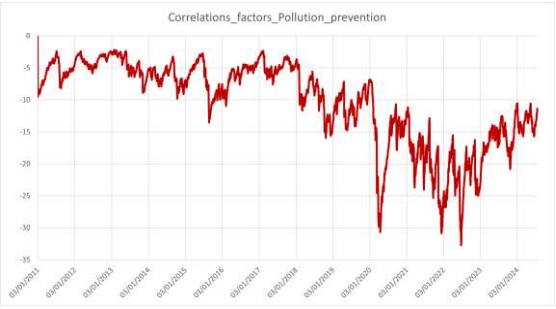


Figura 5.36: Corr. del modello a fattori per Pollution Prev.



Figura 5.37: Corr. del modello a fattori per Sustainable Water

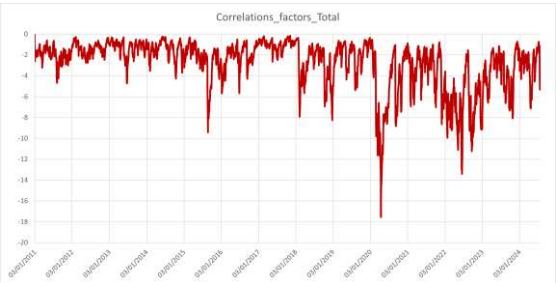


Figura 5.38: Corr. del modello a fattori per MSCI ACWI

Prendendo in considerazione le correlazioni relative al modello a fattori espliciti è possibile notare, anche in questo caso, come per l'indice *Energy Efficiency* i valori assunti

dalla correlazione aumenta vertiginosamente dal 2020. Se inizialmente si mantengono dei valori vicini allo zero, negli ultimi quattro anni la correlazione raggiunge dei valori tra -50 e -200 , discostandosi di molto sia dall'indice globale che dagli altri indici tematici. L'andamento della correlazione per tutti gli indici è estremamente simile per entrambi i modelli. Nonostante ciò, anche in questo frangente, è presente una maggiore correlazione negativa per gli indici tematici rispetto all'indice globale, confermando i risultati per il modello tradizionale.

6. Conclusioni

Attraverso il lavoro svolto è stata analizzata la rischiosità e affidabilità di indici tematici confrontandoli con un indice azionario globale, stimando un parametro (λ) che, in base alle ipotesi del modello GARCH di Heston e Nandi può essere interpretata come premio al rischio di mercato. Successivamente, attraverso una modifica del modello, si è tentato di stimare l'evoluzione temporale del premio al rischio di mercato (λ_t), condizionato da alcuni fattori rappresentativi di alcune tipologie di rischio, come il rischio di credito o il rischio di inflazione.

Entrambi i modelli presentano risultati simili per i vari indici esaminati, dimostrando una buona accuratezza nella stima sia per quanto riguarda il modello tradizionale che per il modello a fattori espliciti

I risultati ottenuti suggeriscono la conclusione secondo cui, in termini di rischio-rendimento, gli investimenti di tipo tematico risulterebbero meno attraenti rispetto agli investimenti tradizionali. Un agente razionale effettua le proprie decisioni d'investimento sulla base del trade-off tra rischio e rendimento, preferendo asset finanziari che possano offrire una compensazione adeguata al rischio assunto detenendo in portafoglio il titolo finanziario prescelto. Per questa ragione, indici tematici che presentano delle volatilità elevate senza offrire un premio per il rischio adeguato potrebbero risultare poco profittevoli rispetto ad un indice globale. La grande diversificazione geografica e settoriale dell'indice globale, infatti, potrebbe limitare l'esposizione a determinati shock di mercato, garantendo una maggiore stabilità nei rendimenti e un miglior rapporto

rischio/rendimento rispetto agli indici tematici. Infatti, gli indici tematici tendono a essere più vulnerabili agli shock di mercato, poiché sono concentrati su specifici settori (come le energie rinnovabili o gli immobili sostenibili) e su determinate aree geografiche (come gli Stati Uniti), limitando così le opportunità di diversificazione e la capacità di mitigare i rischi. Di conseguenza, l'analisi svolta suggerisce che per un investitore razionale, il quale mira alla massimizzazione del rendimento per ogni unità di rischio assunta, gli investimenti tematici potrebbero essere meno attrattivi rispetto a un portafoglio esposto soltanto ad investimenti tradizionali. Nonostante gli investimenti tematici possano risultare meno attraenti dal punto di vista finanziario rispetto a quelli tradizionali, un investitore razionale e attento alle tematiche ambientali potrebbe comunque accettare un rendimento inferiore pur di sostenere consapevolmente iniziative in linea con i propri valori. Tuttavia, è fondamentale specificare che in questa tesi ci siamo focalizzati, principalmente, in investimenti tematici ambientali, tralasciando quelli di tipo sociale e di governance.

Futuri sviluppi di ricerca potrebbero approfondire l'analisi considerando ulteriori fattori di rischio che potrebbero influenzare il premio al rischio di mercato. Inoltre, si potrebbero includere anche indici ESG focalizzati su aspetti sociali e di governance, permettendo un confronto più equilibrato tra le diverse dimensioni di sostenibilità.

Appendice A

Processo mean-reverting

Come specificato da Xize Ye (2021) la varianza condizionale al tempo $t + 1$ è in relazione lineare con la varianza condizionale al tempo t , secondo la formula:

$$E_{t-1}(h_{t+1}) = (\beta + \alpha\gamma^2) \cdot h_t + (1 - \beta - \alpha\gamma^2) \cdot E(h_t)$$

I due autori evidenziano il fatto che la varianza condizionale h_t tende a ritornare verso il suo livello non condizionale con un tasso pari a $1 - \beta - \alpha\gamma^2$.

Test di azzeramento dei parametri

La statistica test di azzeramento dei parametri assume la seguente forma:

$$T_j = \frac{\theta_j}{SE(\theta_j)}$$

Dove θ_j è il j -esimo parametro stimato, mentre $SE(\theta_j)$ è l'errore standard per il parametro in questione.

Il test di azzeramento del parametro ipotizza, sotto ipotesi nulla H_0 , che il parametro sia uguale a zero.

L'errore standard viene estratto tramite la radice quadrata della diagonale della matrice di varianza covarianza. Quest'ultima viene ricavata calcolando l'inversa della matrice Hessiana nel punto di massima verosimiglianza:

$$\Sigma = -H(\theta)^{-1}$$

Di conseguenza, gli errori standard di tutti i parametri stimati si calcolano facendo la radice quadrata della diagonale della matrice varianza covarianza:

$$SE(\theta_j) = \sqrt{\Sigma_{jj}}$$

Per un campione abbastanza grande, la statistica test per il j-esimo parametro si distribuisce secondo una Normale standardizzata: $T_j \sim N(0,1)$.

Bibliografia

- [1] Rossi, E. (2004). *Lecture Notes on GARCH Models*. Università di Pavia.
- [2] Sundling, O. (2004). *Estimation and implementation of a Heston Nandi Garch(1,1) process*. Division of Optimization, Department of Mathematics. Linköping Institute of Technology.
- [3] Ye, X. (2021). *On the Estimation of Heston-Nandi GARCH Using Returns and/or Options: A Simulation-based Approach*. The University of Western Ontario. Electronic Thesis and Dissertation [Repository](#).
- [4] Heston, S. L., & Nandi, S. (2000). [A Closed-Form GARCH Option Valuation Model](#). The Review of Financial Studies, Vol. 13, No. 3, pp. 585-625.
- [5] Hull, J. C. (2018), *Risk Management and Financial Institutions*. Quinta edizione, Wiley.
- [6] Aimar M., Chiandetti A., Gargiulo F., Grassadonia L. & Papa C., *Investimenti ESG un universo in evoluzione*. CFA Society Italy
- [7] Fumagalli G., Mastroberardino F. & Muirhead A., *Thematic Investments*. CFA Society Italy