資料結構
Data Structure

TZU-CHUN HSU[1]

[1]vm3y3rmp40719@gmail.com

[1]Department of Computer Science, Zhejiang University

2020 年 10 月 19 日
Version 1.0

Disclaimer

本文「資料結構」為台灣研究所考試入學的「資料結構」考科使用，內容主要參考 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的資料結構筆記 [1]。
本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 LaTeX 相關程式碼採用 **MIT 協議**，更多內容請訪問作者之 GitHub 分頁Oscarshu0719。

1 Overview

1. 本文頁碼標記依照 TKB 筆記 [1] 的頁碼。

2. TKB 筆記 [1] 章節頁碼：

Chapter	Page No.	Importance
1	3	$\star\star\star$
2	259	$\star$
3	52	$\star\star\star$
4	259	$\star$
5	82	$\star\star\star\star\star$
6	228	$\star\star\star\star$
7	180	$\star\star\star\star$
8	221	$\star\star\star$
9	129	$\star\star\star\star$

Data structure	Page No.
BST	9
Heap	11
Min-max heap	13
Deap	14
SMMH	15
AVL tree	16
m-way ST	16
Red-black tree	18
Splay tree	19
Leftist heap	20
Binomial heap	21
Fibonacci heap	21

3. 缺少 Red-black tree 刪除。

4. OBST 在「演算法」中，不再贅述。

<table>
<tr><th colspan="5">Comparison between trees.</th></tr>
<tr><th>Tree</th><th>Insert x</th><th>Delete x</th><th>Search x</th><th>Remark</th></tr>
<tr><td>BST</td><td colspan="3">$O(\log n) \sim O(n)$</td><td>Create: $O(n \log n) \sim O(n^2)$</td></tr>
<tr><td>AVL tree</td><td colspan="3" rowspan="4">$O(\log_m n)$</td><td>$F_{n+2} - 1 \leq n \leq 2^h - 1$</td></tr>
<tr><td>B tree</td><td>$1 + 2\frac{\lceil \frac{m}{2} \rceil^{h-1} - 1}{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} \leq n \leq 2\lceil \frac{m}{2} \rceil^{h-1} - 1$</td></tr>
<tr><td>RBT</td><td>$h \leq 2\log(n+1)$</td></tr>
<tr><td>Splay tree</td><td>Worst: $O(n)$</td></tr>
</table>

Comparison between priority queues.					
Operations	Max (Min)	Min-max & Deap & SMMH	Leftist	Binomial	Fibonacci
Insert x	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n), O(1)^*$	$O(1)^*$
Delete max	$O(\log n)$	$O(\log n)$			
Delete min	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)^*$
Delete x				$O(\log n)$	$O(\log n)^*$
Merge	$O(n)$		$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)^*$
Decrease key				$O(\log n)$	$O(1)^*$
Search x	$O(n)$				
Find max	$O(1)$	$O(1)$			
Find min		$O(1)$		$O(\log n)$	$O(1)$
Remark			Merge faster than heap.	Find min can be down to $O(1)$.	Decrease key is faster than binomial heap

2 Summary

1. **Theorem (12)** Ackerman's function：

$$A(m,n)=\begin{cases} n+1 & ,m=0 \\ A(m-1,1) & ,n=0 \\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{, otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

2. **Theorem (17)** Permutation：

```
function PERM(list, i, n)
    if i == n then
        PRINT(list)
    else
        for j := i to n do
            SWAP(list, i, j)
            PERM(list, i + 1, n)
            SWAP(list, i, j)
        end for
    end if
end function
```

3. **Theorem (21)** Stirling's formula：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}=1 \tag{2}$$

4. **Theorem (58, 59)**

- Infix：Compiler 需 scan 多次，耗時。
- Postfix：Compiler **左到右** scan 一次即可。
- Prefix：Compiler **右到左** scan 一次即可，但效率比 Postfix 差，Infix 轉 Postfix 只需 **1** 個 stack，而 Infix 轉 Prefix 需要 **2** 個 stack。
- Infix 轉 Postfix（Prefix）：
  - 手算：
    (a) 加上完整括號。
    (b) 運算元取代最近的右（左）括號。

(c) 刪去左（右）括號。

(d) 從左至右即是 Infix。

- 演算法：

(a) 數字直接 print。

(b) 運算元依照優先級比較；若小於等於 stack 中的運算元，pop 直到大於為止；若大於或相同於 stack 中的運算元，push；若為)，pop 直到 (為止，但不 print。

Priority	
Priority	Operator
1	(out of stack
2	$\uparrow$ out of stack
3	$\uparrow$ in stack
4	$*, /$
5	$+, -$
6	empty stack, (in stack

5. **Theorem (80, 81)** Stack 與 Queue 相互製作：

- 利用 Stack 製作 Queue：
  - Enqueue：利用 Push 代替。
  - Dequeue：額外使用一個 Stack，將原本 Stack 全部 Pop 並且 Push 到另一個 Stack，最後 Pop 掉 top。
- 利用 Queue 製作 Stack：
  - Push：利用 Enqueue 代替。
  - Pop：除了 rear 皆 Dequeue 並且 Enqueue 進 Queue，最後 Dequeue 掉 front（原本的 rear）。

6. **Theorem (87)** 節點數：

$$n = (\sum_{i=1}^{\deg} i \times n_i) + 1$$
$$n_0 = n_2 + 1 \text{（二叉樹）} \tag{3}$$

7. **Theorem (89, 92)** 二叉樹種類：

- Full（完滿）：最後一層有最多的樹葉節點，不能在更多。

- Complete（完整）：最後一層全靠左，非最後一層為 Full。若對節點從左而右，從上而下編號，則對節點 i 有
  - 左子節點：$2i$，但若 $2i > n$，則無左子節點。
  - 右子節點：$2i+1$，但若 $2i+1 > n$，則無右子節點。
  - 父節點：$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$，但若 $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor < 1$，則無父節點。
- Strict（嚴格）：所有非樹葉節點皆有兩個子節點。

8. **Theorem (95, 97, 98)**

- 可以確定二叉樹，其他則否：
  - Preorder、Inorder。
  - Postorder、Inorder。
  - Level-order、Inorder。
  - Complete 和任意排序。
- Preoder = Inoder：Empty、Root、Right-skewed tree。
- Postoder = Inoder：Empty、Root、Left-skewed tree。
- Preoder = Postoder：Empty、Root。

9. **Theorem (100, 101, 102, 103, 104)**

- 複製二叉樹：

```
function Copy(Tree s)
    if s = NIL then
        t := NIL
    else
        t.data := s.data
        t.lchild := Copy(s.lchild)
        t.rchild := Copy(s.rchild)
    end if
    return t
end function
```

- 判斷二二叉樹是否相同：

```
function EQUAL(Tree s, t)
    res := False
    if s = NIL ∧ t = NIL then
        res := True
    else if s ≠ NIL ∧ t ≠ NIL then
        if s.data = t.data then
            if EQUAL(s.lchild, t.lchild) then
                res := EQUAL(s.rchild, t.rchild)
            end if
        end if
    end if
    return res
end function
```

- 計算節點個數：

```
function COUNT(Tree s)
    if s = NIL then
        return 0
    else
        return COUNT(s.lchild) + COUNT(s.rchild) + 1
    end if
end function
```

- 計算二叉樹高：

```
function HEIGHT(Tree s)
    if s = NIL then
        return 0
    else
        n_l := HEIGHT(s.lchild)
        n_r := HEIGHT(s.rchild)
        return MAX(n_l, n_r) + 1
    end if
end function
```

- 計算樹葉節點個數：

```
function LEAF(Tree s)
    if s = NIL then
        return 0
    else
        tmp := LEAF(s.lchild) + LEAF(s.rchild)
        if tmp > 0 then
            return tmp
        else
            return 1
        end if
    end if
end function
```

- 交換左右子樹：

```
function SWAPBT(Tree s)
    if s ≠ NIL then
        SWAPBT(s.lchild)
        SWAPBT(s.rchild)
        SWAP(s.lchild, s.rchild)
    end if
end function
```

10. **Theorem (107)** Binary Search Tree (BST)：

- Inoder 即是從小到大排序。
- CRUD：

–

```
function SEARCHBST(Tree s, Element x)
    if s = NIL then
        return NIL
    else if x < s.data then
        return SEARCHBST(s.lchild, x)
    else if x > s.data then
        return SEARCHBST(s.rchild, x)
    else
        return s
    end if
end function
```

-
```
function InsertBST(Tree s, Element x)
    if s = NIL then
        s.data := x
        s.lchild := NIL
        s.rchild := NIL
    else
        if x < s.data then                    ▷ Do nothing while x is already in the tree.
            s.lchild := InsertBST(s.lchild, x)
        else if x > s.data then
            s.rchild := InsertBST(s.rchild, x)
        end if
    end if
    return s
end function
```

-
```
function DeleteBST(Tree s, Element x)
    if s = NIL then
        return Error
    else if x < s.data then
        s.lchild = DeleteBST(s.lchild, x)
    else if x > s.data then
        s.rchild = DeleteBST(s.rchild, x)
    else                                                  ▷ Found x.
        if s.lchild ≠ NIL ∧ s.rchild ≠ NIL then           ▷ 2 children.
            min := SearchMin(s.rchild)
            s.data = min.data
            s.rchild = DeleteBST(s.rchild, s.data)
        else                                              ▷ 0 or 1 child.
            if s.lchild = NIL then
                s := s.rchild
            else if s.rchild = NIL then
                s := s.lchild
            end if
        end if
    end if
    return s
end function
```

<table>
<tr><th colspan="4">Operations of BST</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Operation</th><th colspan="2">Time complexity</th><th rowspan="2">Remark</th></tr>
<tr><th>Average</th><th>Worst</th></tr>
<tr><td>Insert x</td><td rowspan="3">$O(\log n)$</td><td rowspan="3">$O(n)$</td><td rowspan="4">(Based on Height)
Skewed: $O(n)$,
Full: $O(\log n)$</td></tr>
<tr><td>Delete x</td></tr>
<tr><td>Search x</td></tr>
<tr><td>Create</td><td>$O(n \log n)$</td><td>$O(n^2)$</td></tr>
</table>

11. **Theorem (112, 113, 116, 117)** Heap：

- Complete。
- 適合用 Array 保存。
- CRUD （Use Min-Heap as example）：

```
function CreateMinHeap(Tree s, size n)
    for i := n/2 to 1 do                       ▷ Start from parent of the last node.
        tmp := s[i]
        j := 2 × i                             ▷ Left child of i.
        while j ≤ n do                         ▷ There is a child.
            if j < n then                      ▷ Right child exists.
                if s[j] > s[j + 1] then        ▷ Choose the smaller child.
                    j := j + 1
                end if
            end if
            if tmp ≤ s[j] then
                Break.
            else                               ▷ Percolate one level.
                s[j/2] := s[j]
                j := j × 2
            end if
        end while
        s[j/2] := tmp
    end for
end function
```

–

```
function InsertMinHeap(PriorityQueue s, Element x)
    if isFull(s) then
        Queue is full.
        return
    end if
    s.size := s.size + 1
    i := s.size                                        ▷ Put at the last position.
    while s.data[i/2] > x do                           ▷ Check if the parent is larger.
        s.data[i] := s.data[i/2]
        i := i/2
    end while
    s.data[i] := x
end function
```

–

```
function DeleteMinMinHeap(PriorityQueue s)
    if isEmpty(s) then
        Queue is empty.
        return s.data[0]
    end if
    min := s.data[1]
    last := s.data[s.size]
    s.size := s.size − 1
    i := 1
    while i × 2 ≤ s.size do
        child := i × 2
        if child ≠ s.size ∧ s.data[child + 1] < s.data[child] then    ▷ Choose the smaller child.
            child := child + 1
        end if
        if last > s.data[child] then                   ▷ Percolate one level.
            s.data[i] := s.data[child]
        else
            Break.
        end if
        i := child
    end while
    s.data[i] := last
    return min
end function
```

Operations of Max(Min)-Heap	
Operation	Time complexity
Insert x	$O(\log n)$
Delete max (min)	$O(\log n)$
Search max (min)	$O(1)$
Create (Bottom-up)	$O(n)$

12. **Theorem (118, 119, 120)** 樹、森林和二叉樹之間轉換：

- Tree to binary tree：添加兄弟節點之間的邊；只留最左子節點與父節點的邊，其餘刪除。
- Binary tree to tree：將所有 right-skewed subtree 作為其 root 的兄弟節點，補齊所有 subtree 中父節點與子節點的邊，並且刪除兄弟節點之間的邊。
- Forest to binary tree：各個樹轉換為二叉樹，並將所有二叉樹的 root 作為兄弟節點，添加與旁邊兄弟的邊。
- Binary tree to forest：將 root 右子樹及其所有右子樹，作為 root 的兄弟節點，刪除兄弟節點之間的邊。

13. **Theorem (122, 123, 124, 125))** Disjoint set：

- $Simple - Find(x)$：從 x 往上找 root，並回傳 root。
- $Find - with - path - compression(x)$：從 x 往上找 root，並且將路徑上經過除了 root 的節點的 link 改為連到 root。

Operations of disjoint set		
Combination	Union	Find
Arbitrary Union & Simple find	$O(1)$	$O(h)$ Worst: $O(n)$
Union-by-height & Simple find	$O(1)$	$O(\log n)$
Union-by-height & Find with path compression	$O(1)$	$O(\alpha(m,n)) = O(\log^* n)$ close to $O(1)$

14. **Theorem (129, 130, 131)** Min-max heap：

- Complete。
- Root 為最小值。
- 最大值在第二層其中一個。

- 越下層 min-level 越大，越下層 max-level 越小。

```
function InsertMinMaxHeap(MinMaxHeap s, Element x)
    Put x at the last position n, which has parent p.
    if p is at min-level then
        if s[n].data < s[p].data then
            Swap(s[n], s[p])
            VerifyMin(s, p, x)
        else
            VerifyMax(s, n, x)
        end if
    else                                        ▷ p is at max-level.
        if s[n].data > s[p].data then
            Swap(s[n], s[p])
            VerifyMax(s, p, x)
        else
            VerifyMin(s, n, x)
        end if
    end if
end function
```

```
function DeleteMinMinMaxHeap(MinMaxHeap s)
    Copy the data of the last node to the root and remove the last node.
    if Root has no children then
        Exit.
    else if Root has no grandchildren then
        if Children k is smaller than the root then
            Swap(root, s[k])
        end if
    else if Min grandchildren k and its parent p then
        if root > s[k] then
            Swap(root, s[k])
            if root > s[p] then
                Swap(root, s[p])
                Recursively run the previous process.
            end if
        end if
    end if
end function
```

15. **Theorem (133, 134, 135)** Deap（Double-ended heap）：

- Complete。

- root 不存 data，root 左子樹是 min-heap，右子樹是 max-heap。
- root 左子樹中一節點必須 $<$ 右子樹中對應的節點。

```
function InsertDeap(Deap s, Element x)
    Put x at the last position n.
    if n is at min-heap then
        j is the corresponding position in the max-heap.
        if s[n].data > s[j].data then
            Swap(s[n], s[j])
            InsertMaxHeap(s, j, x)
        else
            InsertMinHeap(s, n, x)
        end if
    else                                          ▷ n is at max-heap.
        j is the corresponding position in the min-heap.
        if s[n].data < s[j].data then
            Swap(s[n], s[j])
            InsertMinHeap(s, j, x)
        else
            InsertMaxHeap(s, n, x)
        end if
    end if
end function
```

```
function DeleteMinDeap(Deap s)
    Replace the data of the left child of the root with the smaller of its children and
    recursively run the same process to its subtree, making an empty node n at the last
    level.
    Copy the data of the last node as x and remove the node.
    InsertDeap(x) to position n.
end function
```

16. **Theorem (136, 137)** SMMH（Symmetric min-max heap）：

- Complete。
- root 不存 data。
- 左兄弟節點 $\leq$ 右兄弟節點。
- 對一節點 x，祖父節點的左子節點 $\leq x$，祖父節點的右子節點 $\geq x$。
- 以一節點為 root，則該子樹最小值（不含 root）為左子節點，最大值（不含 root）為右子節點。

function InsertSMMH(SMMH s, Element x)
    Put x at the last position.
    Recursively swap those nodes which break the rules.
end function

function DeleteMinSMMH(SMMH s)
    Copy the data of the last node as x and remove the node.
    Replace the left child of the root with the smaller of the leftmost grandchild and the third grandchild of the root and replace the chosen the node with x.
    Recursively swap those nodes which break the rules.
end function

17. **Theorem ()**

Operations of Min-max heap, Deap, SMMH	
Operation	Time complexity
Insert	$O(\log n)$
Delete min/max	$O(\log n)$
Find min/max	$O(1)$

18. **Theorem (144)** Huffman's algorithm：$O(n \log n)$，採用 Greedy，但可以求出最佳解。

19. **Theorem (145, 151)** AVL tree：

- Height balanced BST.
- 平衡係數：左子樹高度減去右子樹高度。
- 左右子樹高度相差不超過 1，即平衡係數只能為 $-1, 0, 1$。
- 若不符合條件，根據父節點和祖父節點類型（LL, LR, RL, RR）調整樹。
- 高度為 h 的 AVL tree 且節點數為 n，則

$$F_{n+2} - 1 \leq n \leq 2^h - 1 \tag{4}$$

  其中 F 是費氏數列，最大值為 Full。

20. **Theorem (154, 155, 156, 158, 161)** m-way search tree：

- 節點表示 data block，從左到右為小到大，每個節點有 $m-1$ 個 key。

- 用於 external search/sort，資料量大時，需要分批載入 search，因為無法全部放 memory。
- B tree：
  - Balanced m-way search tree。
  - 所有 failure nodes 都在同一層。
  - $m = 3$，2-3 tree；$m = 4$，2-3-4 tree。
  - 若 order m、高度 h 且節點數為 n，則

$$1 + 2\frac{\lceil \frac{m}{2} \rceil^{h-1} - 1}{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} \le n \le 2\lceil \frac{m}{2} \rceil^{h-1} - 1 \tag{5}$$

  -

$$\begin{aligned} 2 \le \deg(v) \le m, v \text{ is root} \\ \lceil \frac{m}{2} \rceil \le \deg(v) \le m, v \text{ is NOT root or failure nodes} \end{aligned} \tag{6}$$

```
function InsertBTree(BTree s, Element x)
    Put x at proper position, which is at position n.
    while n overflow do
        Choose the ⌈m/2⌉-th key of n (started from 1), move it to its parent, and split n.
        n := n.parent
    end while
end function
```

```
function DeleteBTree(BTree s, Element x)
    n := SearchBTree(s, x)
    if n is leaf then
        Delete n.
        while n underflow do
            if Can be rotated then
                Rotate.
                Break.
            else
                Combine.
                n := n.parent
            end if
        end while
    else                                                            ▷ Non-leaf
        Replace n with the max key of the left subtree, which is at position m.
        while m underflow do                              ▷ Same as leaf deletion.
            if Can be rotated then
                Rotate.
                Break.
            else
                Combine.
                m := m.parent
            end if
        end while
    end if
end function
```

21. **Theorem (162)** Red-black tree：

- BST.
- root 和 NIL 皆黑色，紅色節點的兩個子節點必定是黑色。
- root 到不同樹葉節點路徑上皆有相同數量黑色節點。
- 若一 Red-black tree 高度為 h 且節點數為 n 的，則

$$h \leq 2\log(n+1) \tag{7}$$

```
function InsertRedBlackTree(RedBlackTree s, Element x)
    n := SearchRedBlackTree(s, x)    ▷ If a node has two red children during the path to n, change the node to red and two children to black.
    while Adjacent red nodes exist do
        Rotate.    ▷ Parent is black and two children are red.
    end while
    n.data := x
    n.color := red
    while Adjacent red nodes exist do
        Rotate.
    end while
    if root is red then
        Mark root black.
    end if
end function
```

22. **Theorem (170, 171)** Splay Tree：

- BST.
- 每一次 splay 運算都將 splay 起點最終變為 root。
- Rotation 和 AVL tree 不同。

```
function InsertSplayTree(SplayTree s, Element x)
    n := InsertBST(x)
    Splay(n)
end function
```

```
function SearchSplayTree(SplayTree s, Element x)
    n := SearchBST(x)
    Splay(n)
end function
```

```
function DeleteSplayTree(SplayTree s, Element x)
    n := SearchBST(x)
    Splay(n)
    Remove n and get its left and right subtrees T_L and T_R.
    max := FindMaxBST(T_L)
    Splay(max)
    max.rchild := T_R
end function
```

Comparison between AVL tree, B tree, and Splay tree		
	AVL tree and B tree	Splay tree
Worst	$O(\log n)$	$O(n)$
Amortized	$O(\log n)$	$O(\log n)$

Operations of AVL tree, B tree, Red-black tree, and Splay tree	
Operation	Time complexity
Insert x	$O(\log_m n)$
Delete x	
Search x	

23. **Theorem ()**

24. **Theorem (172, 173, 174)** Leftist heap：

   - $$shortest(x) = \begin{cases} 0 & \text{, } x \text{ is external node} \\ 1 + \min\{shortest(x.lchild), shortest(x.rchild)\} & \text{, } x \text{ is internal node} \end{cases} \tag{8}$$
   - $\forall n \in$ leftist tree，$shortest(n.lchild) \geq shortest(n.rchild)$。
   - Min(Max)-leftist heap：leftist tree and min(max)-tree.
   - 一 n 個節點的 leftist tree，root 距離 $\leq \log(n+1) - 1$。

---

function MergeLeftistHeap(LeftistHeap s, t)
  if $s.data < t.data$ **then**
    MergeLeftistHeap($s.rchild$, t)
  else
    MergeLeftistHeap($t.rchild$, s)
  end if
  Check the *shortest* value of each node, if breaking the rule, swap the node and its sibling.
end function

---

function DeltetMinLeftistHeap(LeftistHeap s)
  Remove root and get its left and right subtrees T_L and T_R.
  MergeLeftistHeap(T_L, T_R)
end function

```
function InsertLeftistHeap(LeftistHeap s, Element x)
    Let x be a tree n.
    MergeLeftistHeap(s, n)
end function
```

<table>
<tr><th colspan="3">Comparison between heap and leftist heap</th></tr>
<tr><th>Operation</th><th>Heap</th><th>Leftist heap</th></tr>
<tr><td>Insert x</td><td colspan="2" rowspan="2">$O(\log n)$</td></tr>
<tr><td>Delete min</td></tr>
<tr><td>Merge one or two heaps</td><td>$O(n)$</td><td>$O(\log n)$</td></tr>
</table>

25. **Theorem (174, 175, 176)** Binomial heap：

- root level 為 0。
- B_k 為高度為 k 的 binomial tree，由兩個高度 $k-1$ 的 B_{k-1} 組成，其中 B_0 只有 root 一個節點。
- B_k 第 $i$level 的節點數為 $\binom{k}{i}$，總共 2^k 個節點。
- Binomial heap：一組 binomial tree 且皆為 min-tree 組成的 forest。

```
function MergeBinomialHeap(BinomialHeap s, t)
    Merge all trees with same height recursively by choosing the smaller root as new root.
end function
```

```
function DeleteMinBinomialHeap(BinomialHeap s)
    Delete the smallest root from tree p and get new trees u, and the others are q.
    MergeBinomialHeap(q, u)
end function
```

```
function InsertBinomialHeap(BinomialHeap s, Element x)
    Let x be a tree n.
    MergeBinomialHeap(s, n)
end function
```

26. **Theorem (179)** Fibonacci heap：

- Binomial heap 的 superset，又稱 Extended binomial heap。

- 比 binomial heap 多 DeleteNode 和 DecreaseKey。
- 與 binomial heap 差異：
  - insert 與 delete 皆不合併。
  - 所有節點用一個 double-linked circular linked list 連結起來，同時紀錄左右兄弟、父節點。
  - DecreaseKey 若使該節點小於其父節點，則將該子樹獨立出來。

Comparison between binomial heap and Fibonacci heap		
Operation	Binomial heap	Fibonacci heap
Insert x	$O(\log n), O(1)^*$	$O(1)^*$
Delete x/min	$O(\log n)$	$O(\log n)^*$
Merge	$O(\log n)$	$O(1)^*$
Decrease key	$O(\log n)$	$O(1)^*$
Find min	$O(\log n)$	$O(1)$
Remark	Find min can be down to $O(1)$.	Decrease key is faster than binomial heap

27. **Theorem (184, 188, 190, 192, 195, 200, 203, 206, 208, 210, 213)** Sorting：

- Internal/External sorting：
  - Internal sorting：一次在 memory sorting。
  - External sorting：資料量太大，無法一次 sorting，例如 Merge sort + selection tree，m-way search tree。
- Shell sort 使用 insertion sort。
- 基於 comparison 的 sorting algorithm time complexity 上限 $\Omega(nlogn)$，因為有 $n!$ 種排序，生成 decision tree 高度 $\geq n \log n$。
- Quick sorting：

```
function QuickSort(Array A, index p, r)                ▷ Sorting from A[p] to A[r]
    if p < r then
        q := Partition(A, p, r)
        QuickSort(A, p, q − 1)
        QuickSort(A, q+, r)
    end if
end function
```

```
function Partition(Array A, index p, r)
    x := A[r]                                          ▷ Pivot.
    i := p − 1
    for j := p to r − 1 do
        if A[j] ≤ x then
            i := i + 1
            Swap(A[i], A[j])
        end if
    end for
    Swap(A[r], A[i + 1])
    return i + 1
end function
```

- Slection tree：分 Winner/Loser tree，time complexity 皆為 $O(n \log k)$，但後者比較次數較少，只需要跟父節點比較。
- Heap sort：

```
function HeapSort(Array s, length n)                   ▷ s[1 · · · n]
    for i := ⌈n/2⌉ to 1 do                              ▷ Build heap.
        AdjustHeap(s, i, n)
    end for
    for i := n − 1 to 1 do
        Swap(s[1], s[i + 1])                           ▷ Swap root and the last node.
        AdjustHeap(s, 1, i)
    end for
end function
```

- Counting sort：若位數較大，從個位開始一個個位數做 counting sort，輸出作為下一輪的輸入。

28. **Theorem ()**

<table>
<tr><th colspan="7">Comparison between sorting methods</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Method</th><th colspan="3">Time complexity</th><th rowspan="2">Space complexity</th><th rowspan="2">Stable</th></tr>
<tr><th>Best</th><th>Worst</th><th>Average</th></tr>
<tr><td>Insertion</td><td>$O(n)$</td><td colspan="2">$O(n^2)$</td><td>$O(1)$</td><td>$\surd$</td></tr>
<tr><td>Selection</td><td colspan="3">$O(n^2)$</td><td>$O(1)$</td><td>$\times$</td></tr>
<tr><td>Bubble</td><td>$O(n)$</td><td colspan="2">$O(n^2)$</td><td>$O(1)$</td><td>$\surd$</td></tr>
<tr><td>Shell</td><td>$O(n^{1.5})$</td><td colspan="2">$O(n^2)$</td><td>$O(1)$</td><td>$\times$</td></tr>
<tr><td>Quick</td><td>$O(n\log n)$</td><td>$O(n^2)$</td><td>$O(n\log n)$</td><td>$O(n\log n) \sim O(n)$</td><td>$\times$</td></tr>
<tr><td>Merge</td><td colspan="3">$O(n\log n)$</td><td>$O(n)$</td><td>$\surd$</td></tr>
<tr><td>Heap</td><td colspan="3">$O(n\log n)$</td><td>$O(1)$</td><td>$\times$</td></tr>
<tr><td>LSD Radix</td><td colspan="3">$O(n \times k)$</td><td>$O(n+k)$</td><td>$\surd$</td></tr>
<tr><td>Bucket/MSD Radix</td><td>$O(n)$</td><td>$O(n^2)$</td><td>$O(n+k)$</td><td>$O(n \times k)$</td><td>$\surd$</td></tr>
<tr><td>Counting</td><td colspan="4">$O(n+k)$</td><td>$\surd$</td></tr>
</table>

29. **Theorem (221, 223, 224, 225, 227)** Hashing：

- 若 T 為所有 identifier 個數，n 為目前使用的 identifier 個數，$B \times S$ 為 hash table size，則

$$\begin{aligned} \text{identifier density} &= \frac{n}{T} \\ \text{loading density} &= \frac{n}{B \times S} = \alpha \end{aligned} \tag{9}$$

- Perfect hashing function：保證無 collision。
- Uniform hashing function：使資料量 n 大致平均分布在所有 B 個 bucket，每個 bucket 內資料量大約 $\frac{n}{B} = \alpha$，則
  - 成功搜尋平均比較次數為 $\frac{1+2+\cdots+\alpha}{\alpha} = \frac{1+\alpha}{2} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$。
  - 失敗搜尋平均比較次數為 α。
- Hash function design：
  - Middle square：平方後取中間適當位數值。
  - Division：

$$\begin{aligned} &H(x) = x \,\%\, M \\ &\text{s.t. } M \text{ is prime} \land M \nmid (r^k \pm \alpha),\ k, a \text{ are small integers} \end{aligned} \tag{10}$$

  - Folding addition：
    - Shift：切成相同長度的片段，再將所有片段相加。
    - Boundary：切成相同長度的片段，將偶數片段反過來，再將所有片段相加。

  – Digits analysis：分析每個位數分布情況，若集中，則捨棄該位數，反之選擇該位數。

- Linear probing：易發生 primary clustering problem，即相同 hashing address 的 data 易儲存在附近，增加 searching time。
- Quadratic probing：Overflow 發生時，改變 hashing function 為

$$(H(x) \pm i^2) \,\%\, B,\ \forall i = 1, 2, \cdots, \lceil \frac{B-1}{2} \rceil \tag{11}$$

  其中 B 為 bucket 數，i 找到有空 bucket 或是所有格皆滿為止。解決 primary clustering problem，但易發生 secondary clustering problem，即相同 hashing address 的 data overflow probe 的位置距規律性，增加 searching time。

- Double hashing：Overflow 發生時，改變 hashing function 為

$$\begin{aligned} &(H(x) + i \times H'(x)) \,\%\, B,\ \forall i = 1, 2, \cdots \\ &H'(x) = R - (x \,\%\, R),\ R \text{ is prime} \end{aligned} \tag{12}$$

  其中 B 為 bucket 數，i 找到有空 bucket 或是所有格皆滿為止。解決 secondary clustering problem，但不保證 table 充分利用。

- Rehashing：提供一系列 hashing functions，一個個試，直到有空 bucket 或是所有格皆滿為止。
- 除了 chain 是 close addressing mode，其他皆是 open addressing mode。

30. **Theorem (233, 236, 240)** Graph：

- Adjacency multilists：每個節點儲存 v_i，v_j，$link\_for\_v_i$ 指向 v_i 下一個相鄰的點所在的節點，$link\_for\_v_j$ 指向 v_j 下一個相鄰的點所在的節點。
- 無向圖只有 tree edge 和 back edge。判斷無向圖 back edge（cycle）：兩個點都 gray，但是不為父子節點。

Operation	Adjacency matrix	Adjacency lists
Lots of vertices		$\surd$
# of edges or if it's connected, etc.		$\surd$ $(O(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert))$

Data structure	DFS	BFS
Adjacency matrix	$O(\lvert V\rvert^2)$	
Adjacency lists	$O(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert)$	

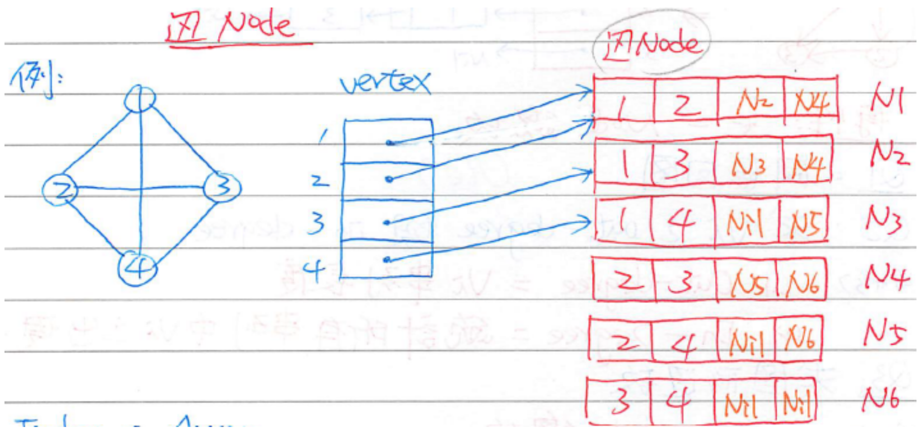

Figure 1: Example for adjacency multilists.

31. **Theorem (257)** 尋找 articulation point：

- dfn 為 DFS number。
-
$$low(v) = \begin{cases} dfn(v) \\ \min\{low(u) | u \text{ is child of } v\} \\ dfn(u), u \text{ is descendant of } v, \text{which is reachable by a back edge} \end{cases} , \forall v \in G \tag{13}$$

- 若 root 有 ≥ 2 子節點，則 root 為 articulation point；非 root 節點 u，若 $\exists v$ 為 u 子節點，且 $low(v) \geq dfn(u)$，則 u 為 articulation point。

References

[1] wjungle@ptt. Tkb 筆記. https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VeFpGejlYRk1WeFk/view?usp=sharing, 2017.