

線性代數

Linear Algebra

TZU-CHUN HSU¹

¹vm3y3rmp40719@gmail.com

¹Department of Computer Science, Zhejiang University



2020 年 11 月 21 日
Version 2.0

Disclaimer

本文「線性代數」為台灣研究所考試入學的「線性代數」考科使用，內容主要參考黃子嘉先生的三本線性代數參考書 [1][2][3]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的線性代數筆記 [4]。

本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 \LaTeX 相關程式碼採用 MIT 協議，更多內容請訪問作者之 GITHUB 分頁 [Oscarshu0719](#)。

MIT License

Copyright (c) 2020 TZU-CHUN HSU

Permission is hereby granted, free of charge, to any person obtaining a copy of this software and associated documentation files (the "Software"), to deal in the Software without restriction, including without limitation the rights to use, copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell copies of the Software, and to permit persons to whom the Software is furnished to do so, subject to the following conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be included in all copies or substantial portions of the Software.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

1 Overview

1. 本文頁碼標記依照實體書 [1][2][3] 的頁碼。

2. TKB 筆記 [4] 章節頁碼：

Chapter	Page No.
1	1
2	33
3	52
4	80
5	116
6	154
7	175
8	206

3. 第 4 章最重要，4.5 超重要，6.6 重要，7.4 超重要。

4. 參考 TKB 筆記 [4] 內容，部分刪減 8.6, 8.8, 8.10, 8.11 內容。刪去 3.6, 4.7, 5.7, 8.4, 8.9 全部內容。

5. 證明：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

(a) 102

(b) 135

(c) 143

(d) 144

(e) 181

(f) 190

(g) 191

(h) 228

6. 必考：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

(a) 110

(b) 129

(c) 133

(d) 136

(e) 138

(f) 139

(g) 167

(h) 183

(i) 194

(j) 195

(k) 212

(l) 218

7. 中英轉換：

- ellipsoid 橢球
- hyperbola 雙曲線
- ellipse 橢圓
- paraboloid 拋物面
- perpendicular 垂直的
- conic 圓錐
- parallelepiped 平行六面體

8.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (1)$$

9. 三角函數：

- 和角公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2a)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (2b)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2c)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2d)$$

• 和差化積：

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3a)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3b)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3c)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3d)$$

• 積化和差：

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (4a)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (4b)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (4c)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \quad (4d)$$

10. 泰勒級數：

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \forall |x| < 1, \alpha \in \mathbb{C} \quad (5a)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (5b)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall |x| < 1 \quad (5c)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \quad (5d)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in [-1, 1) \quad (5e)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \quad (5f)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \quad (5g)$$

11.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad |e^{ix}| = 1 \quad (6)$$

2 Summary

1. **Theorem (1.17)** (tr) $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$, 可非方陣。

2. **Theorem (1.67, 1.92)** (可逆, 特徵, 解, 方陣) 若 \mathbf{A} 為方陣, 則以下等價

- \mathbf{A} 可逆。
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有 $\mathbf{0}$ 唯一解。
- \mathbf{A} 列等價於 \mathbf{I} 。
- $\mathbf{xA} = \mathbf{0}$ 只有 $\mathbf{0}$ 唯一解。
- \mathbf{A} 行等價於 \mathbf{I} 。
- 0 不為 \mathbf{A} 的特徵根。

3. **Theorem (3.19, 3.20, 3.22)**

- 若 W_i 為 V 的子空間, 則 $\bigcap W_i$ 也是 V 的子空間。
- 若 W_1, W_2 為 V 的子空間, 未必保證 $W_1 \cup W_2$ 為 V 的子空間。
- 若 W_1, W_2 為 V 的子空間, 則 $W_1 \cup W_2$ 為 V 的子空間 $\iff W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1$ 。
- 若 $W_i, \forall i = 1, \dots, k$ 為 V 的子空間, 則 $W_1 + W_2 + \dots + W_k$ 為 V 的子空間。

4. **Theorem (3.37, 3.42)**

- S 為 V 的子空間 $\iff \text{span}(S) = S$ 。
- $\text{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2)$ 。
- $\text{span}(S_1 \cup S_2) \supseteq \text{span}(S_1) \cup \text{span}(S_2)$ 。
- 若 $S_1, S_2, \dots, S_k \subseteq V$, 且 $W_i = \text{span}(S_i), \forall i = 1, \dots, k$, 則

$$W_1 + W_2 + \dots + W_k = \text{span}(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k) \quad (7)$$

5. **Theorem (3.59)**

V	F	vector space	dim
\mathbb{C}^n	\mathbb{C}	\checkmark	n
\mathbb{R}^n	\mathbb{R}	\checkmark	n
\mathbb{C}^n	\mathbb{R}	\checkmark	$2n$
\mathbb{R}^n	\mathbb{C}	\times	\times

(8)

6. **Theorem ((3-77)3.153, 3.73)** 若 W_1, W_2, W_3 為 V 子空間，但

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \\ &\quad + \dim(W_3) - \dim((W_1 \cap W_2) + W_3) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) &\neq \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3) \\ &\quad - (\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 \cap W_3) + \dim(W_2 \cap W_3)) \\ &\quad + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \end{aligned} \quad (10)$$

7. **Theorem (4.73, 4.74)** (線性獨立) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V')$ ，則

- T 必保相依。
- T 保獨立，即若 S 為線性獨立，則 $T(S)$ 亦是線性獨立 $\iff T$ 為一對一
- T 保生成，即若 S 為 V 生成集，則 $T(S)$ 亦是 V' 生成集 $\iff T$ 為映成

8. **Theorem (4.67, 4.71, 4.93, 4.96, 4.97, 7.69, 7.70, 8.163)** (可逆，解) 若 $T(x) = Ax, T \in \mathcal{L}(V, V'), A \in F^{m \times n}$ ，則

- A 為一對一 $\iff A$ 有左反矩陣 $\iff \text{rank}(A) = \dim(V) = n \leq \dim(V') = m, N(A) = \{0\} \iff Ax = 0$ 只有 0 唯一解 $\iff A$ 行獨立，列生成 $F^{1 \times n} \iff Ax = b \leq 1$ 解 $\iff A^H A$ 可逆 $\iff A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$
- A 為映成 $\iff A$ 有右反矩陣 $\iff \text{rank}(A) = \dim(V') = m \leq \dim(V) = n \iff A$ 列獨立，行生成 $F^{m \times 1} \iff Ax = b \geq 1$ 解 $\iff AA^H$ 可逆 $\iff A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$

9. **Theorem (4.90)** (可逆)

- $CS(AB) \subseteq CS(A)$
- $RS(AB) \subseteq RS(B)$
- $N(B) \subseteq N(AB)$ 。當 A 可逆時， $N(B) = N(AB)$
- $Lker(A) \subseteq Lker(AB)$

10. **Theorem (5.5, 5.35, 5.37, 6.35, 6.51)** (相似，tr, det, 特徵，方陣) 若 A, B 為方陣且 $A \sim B$ ，則 A 與 B 的

- tr
- det

- rank
- nullity
- 特徵多項式
- 特徵根
- 喬丹型

皆相等，反之不然。但特徵向量不保證相同，且僅喬丹型為充要條件。

11. **Theorem (5.6)** (相似，方陣) 若 A, B 為方陣且 $A \sim B$ ，則

- $A^T \sim B^T$
- $A^k \sim B^k, \forall k \in \mathbb{N}$
- $\alpha A \sim \alpha B, \forall \alpha \in F$
- $A + \alpha I \sim B + \alpha I$
- $f(A) \sim f(B), \forall f(x) \in F[x]$

12. **Theorem (5.10, 5.11, 5.34, 6.7, 6.22, 6.34)** (方陣，特徵) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ， $W_i, \forall i = 1, \dots, k$ 為 V 子空間且 W_i 為 T -不變子空間， λ 為 T 的特徵根，則

- $\{0\}$
- V
- $N(T^k), k \in \mathbb{N}$
- $\text{Im}(T^k), k \in \mathbb{N}$
- $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k$
- $W_1 + W_2 + \dots + W_k$
- 特徵空間 $V(\lambda) = N(T - \lambda I)$
- T -循環子空間 $C_v(T) = \text{span}\{v, T(v), T^2(v), \dots\}$
- 廣義特徵空間 $K(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{\infty} N((T - \lambda I)^i)$

皆為 T -不變子空間。

13. **Theorem (5.38)** (特徵，方陣) 若 A, B 為方陣，則 AB 與 BA 有相同的

- 特徵根

- 特徵多項式

若 A, B 不為方陣，只能保證 AB 與 BA 有相同的非零特徵根。

14. **Theorem (5.40, 8.13)** (特徵，方陣，可逆) 若 A 為方陣，則

- A^{-1} ，若 A 可逆
- $A^m, \forall m \in \mathbb{N}$
- αA
- $A + \alpha I$
- $f(A), f(x) \in P$
- A^H ，若 A 為正規矩陣，即 $AA^H = A^H A$ 。

特徵向量不改變。

15. **Theorem (5.79)** (方陣，對角化) 若 $T, U \in \mathcal{L}(V, V)$ ，存在 V 基底 β 使得 $[T]_\beta = D_1, [U]_\beta = D_2$ ，且 D_1, D_2 為對角矩陣，則

- T, U 稱可同步對角化。
- $TU = UT$

反之不然，因為 T 或 U 未必皆能對角化。當 T 與 U 皆能對角化時，Theorem 15 的兩個敘述等價。

16. **Theorem ()** (方陣，對角化) 若 A 可對角化，則 $\text{rank}(A)$ = 不為 0 的特徵根個數。

17. **Theorem (5.97, 5.100, 5.102, 5.103)** (方陣，特徵，對角化， tr) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ，且 $T^2 = T$ ，稱 T 為 V 上的冪等 (idempotent) 算子，則

- $V = N(T) \oplus \text{Im}(T)$
- T 可能特徵根只有 0 和 1。
- $V(0) = N(T), V(1) = \text{Im}(T)$
- T 可對角化，且存在 V 基底 β 使得 $[T]_\beta = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{bmatrix}$ ，其中 $r = \text{rank}(T) = \text{tr}(T)$ 。

18. **Theorem (5.99)** (方陣) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ，以下等價

- $\text{Im}(T) = \text{Im}(T^2)$
- $\text{rank}(T) = \text{rank}(T^2)$
- $\text{nullity}(T) = \text{nullity}(T^2)$
- $N(T) = N(T^2)$

19. **Theorem (5.100)** (方陣) Sylvester 第二定理:

若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 以下等價

- $V = N(T) \oplus \text{Im}(T)$
- $V = N(T) + \text{Im}(T)$
- $N(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$

20. **Theorem (5.148, 5.150, 5.151, 5.153, 5.155)** (方陣, 特徵, 對角化) 若 $P \in F^{n \times n}$ 為方陣且 P 為正則轉移矩陣, 則

- 若 P 可對角化, 則 $\text{am}(1) = 1$ 。
- $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \begin{bmatrix} x & x & \cdots & x \end{bmatrix}$, 其中 x 為穩定狀態向量, 即 $x \in N(P - I)$ 。

21. **Theorem (6.3, 6.15, 6.17, 6.71)** (方陣, \det , 特徵, 線性獨立) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $T^k = O$, 則稱 T 為冪零 (nilpotent) 算子, 最小正整數 k 為 T 的指標, 則

- $\det(T) = 0$
- $T^n = O$
- T 為冪零算子 $\iff T$ 特徵根皆 0。
- $\exists v \in V \vee v \in N(T^k) - N(T^{k-1})$ 且 $v \neq 0$, $\{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ 線性獨立。

22. **Theorem (6.9, 6.11)** (方陣) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 則

- 核集鏈定理:
 - $\{0\} \subseteq N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq \cdots \subseteq V$
 - $\exists \min k \in \mathbb{N}, N(T^k) = N(T^{k+1}) = \cdots$
 - $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} N(T^i) = N(T^k)$ 為最大冪零區。
- 像集鏈定理:
 - $V \supseteq \text{Im}(T) \supseteq \text{Im}(T^2) \supseteq \cdots \supseteq \{0\}$
 - $\exists \min k \in \mathbb{N}, \text{Im}(T^k) = \text{Im}(T^{k+1}) = \cdots$

– $W = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Im}(T^i) = \text{Im}(T^k)$ 為最大可逆區。

23. **Theorem (6.12)** (方陣) Fitting lemma:

若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 則存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $V = N(T^k) \oplus \text{Im}(T^k)$ 。

24. **Theorem (6.20, 6.22, 6.23, 6.24)** (方陣) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V), v \in V$, 稱

$C_v(T) = \text{span}\{v, T(v), T^2(v), \dots\}$ 為由 v 生成的 T -循環子空間, 且 $C_v(T)$ 為 T -不變子空間, 則:

- 若 $v \in N(T^k) - N(T^{k-1})$, 則稱 $\beta = \{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ 為循環基底, 且 β 為 $W = C_v(T)$ 的基底有 $[T_W]_{\beta} = S_k$ 為下移矩陣, $\dim(C_v(T)) = k$, $T^k(v) = 0$ 。

- 當 $\beta = \{T^{k-1}(v), T^{k-2}(v), \dots, T(v), v\}$ 時, $[T_W]_{\beta} = S_k^T$ 為上移矩陣。

- 反之, $\dim(C_v(T)) = k$ 不能保證 $v \in N(T^k) - N(T^{k-1})$ 。

- 反之, $\dim(C_v(T)) = k$ 保證 $\beta = \{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ 為 $C_v(T)$ 的基底。

- 反之, $\dim(C_v(T)) = k$ 不能保證 $T^k(v) = 0$ 。

令 $T^k(v) = -a_0 v + \sum_{i=1}^{k-1} (-a_i) T^i(v)$, 有

$$A = [T_W]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

有 $p_A(x) = (-1)^k(a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)$, 稱 A 為 $(a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)$ 的友 (companion) 矩陣。當 $T^k(0) = 0$ 時, $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, A = [T_W]_{\beta} = S_k$ 。

25. **Theorem (6.24)** (方陣) 循環分解定理 (Cyclic decomposition theorem):

若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ 為指標為 k 的幂零算子, 則存在 $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ 使得

$$V = C_{v_1}(T) \oplus C_{v_2}(T) \oplus \cdots \oplus C_{v_r}(T) \quad (12)$$

其中 $v_i \in N(T^{n_i}) - N(T^{n_i-1})$, 則

- $\dim(C_{v_i}(T)) = n_i, n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$, 稱 $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ 為不變集 (invariant set)。

- $r = \dim(N(T))$
- $k = n_1$

26. **Theorem (6.33, 6.34, 6.35, 6.36, 6.38)** (方陣, 特徵) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $\dim(V) = n$, λ 為 T 特徵根, 稱

$$K(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{\infty} N((T - \lambda I)^i) \quad (13)$$

為 T 相對於 λ 的廣義特徵空間, 且 $\dim(K(\lambda)) = m$, 則

- $K(\lambda) = \{v \in V | (T - \lambda I)^p(v) = 0, \exists p \in \mathbb{N}\} = N((T - \lambda I)^n) \supseteq V(\lambda)$
- $K(\lambda) \subseteq V$, 為 T -不變子空間。
- λ 為 $p_T(x) = 0$ 的 m 重根, 則 $\text{am}(\lambda) = m$ 。
- $(T - \lambda I)_{K(\lambda)}$ 為冪零算子。
- 存在 $v_1, v_2, \dots, v_k \in K(\lambda)$ 使得

$$K(\lambda) = C_{v_1}(T - \lambda I) \oplus C_{v_2}(T - \lambda I) \oplus \dots \oplus C_{v_k}(T - \lambda I) \quad (14)$$

- 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 為 T 相異特徵根, 且 $p_T(x)$ 在 F 可分解, 則

$$V = K(\lambda_1) \oplus K(\lambda_2) \oplus \dots \oplus K(\lambda_r) \quad (15)$$

27. **Theorem (6.69, 6.115, 6.116)** (方陣, 特徵, 對角化) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, W 為 T -不變子空間, 則

- T_W 的特徵多項式整除 T 的特徵多項式。
- T_W 的極小多項式整除 T 的極小多項式。
- 若 T 可對角化, 則 T_W 也可對角化。

28. **Theorem ((6-55)6.88)** (方陣, 特徵) 若 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 當 $AB = BA$ 時,

$$e^A e^B = e^{A+B} \quad (16)$$

可通過泰勒展開式證明。

29. **Theorem (7.64, 7.65, 7.66)** (正交) 若 W 為 V 子空間, 且 P 為正交投影向量, 則

- $\text{Im}(P) = W$

- $P^2 = P$

-

$$\|P(\mathbf{v})\|^2 = \sum_{i=1}^k \frac{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle|^2}{\|\mathbf{v}_i\|^2}, \forall \mathbf{v} \in V \quad (17)$$

- Bessel's Inequality:

$$\|P(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in V \quad (18)$$

- Parseval's equality:

$$\|P(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in W \quad (19)$$

-

$$\|\mathbf{v} - P(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|, \forall \mathbf{w} \in W, \mathbf{v} \in V \quad (20)$$

30. **Theorem (7.68)** (正交)

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx \right\} \quad (21)$$

為單範正交集。

31. **Theorem (7.68, 7.69, 7.70, (7-97)7.174)** (實數, 可逆)

- $N(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = N(\mathbf{A})$
- $\text{rank}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})$
- $\text{Lker}(\mathbf{A} \mathbf{A}^H) = \text{Lker}(\mathbf{A})$
- 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)$
- $\text{CS}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \text{CS}(\mathbf{A}^T)$
- \mathbf{A} 行獨立 $\iff \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 可逆
- \mathbf{A} 列獨立 $\iff \mathbf{A} \mathbf{A}^H$ 可逆

32. **Theorem (7.73, 7.79)** (正交) 若 $\mathbf{A} \in F^{m \times n}$, $W = \text{CS}(\mathbf{A})$, $\mathbf{b} \in F^{m \times 1}$, 則

- $\mathbf{x} \in F^{n \times 1}$ 使得 $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ 最小 $\iff \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$ 稱正規方程式 (normal equation), 正規方程式必有解, 則
 - 若 \mathbf{A} 不為行獨立, 正規方程式有無限多解, 但 $\text{proj}_W \mathbf{b}$ 必定唯一。
 - 若 \mathbf{A} 為行獨立, $\text{proj}_W \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{b}$ 。

- 若 $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, 且 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ 為 \mathbf{A} 的 QR 分解, 則 $\mathbf{x} \in F^{n \times 1}$ 使得 $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ 最小 $\iff \mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^H \mathbf{b}$ 。
- 若 $\text{CS}(\mathbf{A})$ 為單範正交集, 則 $\mathbf{x} \in F^{n \times 1}$ 使得 $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ 最小 $\iff \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$ 。

33. **Theorem (7.80, 7.81)** (正交) 若 $\mathbf{A} \in F^{m \times n}$ 行獨立, $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ 為正交投影矩陣, 則

- $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ 且 $\mathbf{P}^H = \mathbf{P}$
- $\text{CS}(\mathbf{P}) = \text{CS}(\mathbf{A})$
- $\text{rank}(\mathbf{P}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = n$

反之, 若 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ 且 $\mathbf{P}^H = \mathbf{P}$, 則 \mathbf{P} 為投影在 $\text{CS}(\mathbf{P})$ 上的正交投影矩陣。

34. **Theorem (7.81)** (正交) 若 \mathbf{Q} 的行向量為單範正交集, $\mathbf{W} = \text{CS}(\mathbf{Q})$, 則

$$\text{proj}_{\mathbf{W}} \mathbf{b} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H \mathbf{b} \quad (22)$$

即投影在 \mathbf{Q} 的正交投影矩陣為 $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H$ 。

35. **Theorem (7.100, 7.103, 7.104)** (正交) 若 $\mathbf{W} \subseteq V$, \mathbf{P} 為 V 在 \mathbf{W} 上的投影算子, 則 $\text{N}(\mathbf{P}) = \mathbf{W}^\perp$ 。

36. **Theorem (7.112)** (解, 實數)

- 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, 則 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解 $\iff \forall \mathbf{y}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 則 $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = 0$ 。
- 若 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解, 則
 - 唯一 $\exists \mathbf{s} \in \text{CS}(\mathbf{A}^H)$ 為 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 之極小解, 即 $\|\mathbf{x}\|_2$ 為所有解中最小。
 - 若 \mathbf{u} 滿足 $(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)\mathbf{u} = \mathbf{b}$, 則 $\mathbf{s} = \mathbf{A}^H \mathbf{u}$ 。

37. **Theorem (8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.8)** (方陣, 可逆, 特徵) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 且 T^* 為 T 的伴隨算子, 則

- $(\alpha T + \beta U)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} U^*$
- $(TU)^* = U^* T^*$

38. **Theorem (8.13)** (方陣, 特徵) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ 為正規算子, 則

- $\|T(\mathbf{v})\| = \|T^*(\mathbf{v})\|, \forall \mathbf{v} \in V$
- $T - c\mathbf{I}, \forall c \in V$ 仍是正規算子。

- 若 v 為 T 相對於 λ 的特徵向量，則 v 為 T^* 相對於 $\bar{\lambda}$ 的特徵向量。
- 若 v_1, v_2 分別是 T 相對於 λ_1, λ_2 相異特徵根的特徵向量，則 $v_1 \perp v_2$ 。

39. **Theorem (8.14, 8.15, 8.17, 8.18, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23, 8.54, 8.55, 8.56)** (方陣, 正交, 特徵, tr , \det , 可逆, 實數, 複數) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 則

定義	λ	a_{ii}	\det
self-adjoint $T^* = T$ Hermitian (over \mathbb{C}) $A^H = A$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$
symmetric (over \mathbb{R}) $A^T = A$			
skew self-adjoint $T^* = -T$ skew Hermitian (over \mathbb{C}) $A^H = -A$	0 或純虛數	0 或純虛數	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0 \text{ 或純虛數}, & \text{if } n \in 2k + 1 \end{cases}$
skew symmetric (over \mathbb{R}) $A^T = -A$	0	0	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0, & \text{if } n \in 2k + 1 \end{cases}$
positive definite $\langle T(x), x \rangle > 0, \forall x \neq 0$ $\langle Ax, x \rangle = x^H Ax > 0, \forall x \neq 0$	> 0	> 0	> 0
positive semi-definite $\langle T(x), x \rangle \geq 0, \forall x$ $\langle Ax, x \rangle = x^H Ax \geq 0, \forall x$	≥ 0	≥ 0	≥ 0
unitary (over \mathbb{C}) $T^* T = I$ $A^H A = I$	$ \lambda = 1$	\times	$ \det(A) = 1$
orthogonal (over \mathbb{R}) $T^* T = I$ $A^T A = I$	$ \lambda = 1$	\times	± 1

- 皆為正規，相異特徵根對應的特徵向量皆正交。
- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣時， A 為對稱矩陣即 $A^T = A$ 時，不保證 A 為正規。
- 么正矩陣與正交矩陣的特徵值皆可能為虛數（並非 ± 1 ）。
- 正定（over $\mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ ）、么正、正交矩陣皆可逆。

- 若 A 為 Hermitian 矩陣即 $A^H = A$ 時, A 的相異特徵根對應的特徵向量必正交 (比正規更鬆的條件)。

40. **Theorem (8.27, 8.30)** (方陣, 實數, 複數) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 則

- 若 $\langle T(u), v \rangle = 0, \forall v, u \in V$ (over \mathbb{C} or \mathbb{R}), 則 $T = O$ 。
- 若 $\langle T(v), v \rangle = 0, \forall v \in V$ (over \mathbb{C}), 則 $T = O$, V (over \mathbb{R}) 時不成立。
- 若 $A, B \in F^{n \times n}$ 為方陣, 則 $A = B \iff y^H A x = y^H B x, \forall x, y \in F^{n \times 1}$
- 若 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則 $A = B \iff x^H A x = x^H B x, \forall x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ 。在 \mathbb{R} 時不成立。

41. **Theorem (8.31, 8.32, 8.34, 8.35, (8-5)8.10)** (方陣, 正交, 實數, 複數)

- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則以下等價
 - A 么正。
 - $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$
 - $\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$
 - $CS(A)$ 和 $RS(A)$ 皆單範正交。
 - 若 $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 為 $\mathbb{C}^{n \times 1}$ 單範正交基底, 則 $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$ 亦是單範正交基底。
- 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 則以下等價
 - A 正交。
 - $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
 - $\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
 - $CS(A)$ 和 $RS(A)$ 皆單範正交。
- 若不為 A 不為方陣, 則 $RS(A)$ 未必單範正交。

42. **Theorem (8.28)** (實數, 複數) Polar identity:

- 若 V over \mathbb{R} , 則

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 \quad (23)$$

- 若 V over \mathbb{C} , 則

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \|u + i^k v\|^2 \quad (24)$$

43. **Theorem ()** (方陣, tr) 若 $A, B \in F^{n \times n}$ 為方陣, 且 A 和 B unitarily equivalent, 則 $\text{tr}(A^H A) = \text{tr}(B^H B)$ 。

44. **Theorem (8.60, 8.61, 8.62, 8.63, 8.68, 8.69)** (方陣, 正交, 相似, 對角化, 實數, 複數)

- 么正或正交相似必定相似, 反之不然。
- 可么正或正交對角化, 則可對角化。
- 若 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 且 A 與 B 么正相似, 則以下 A 與 B 的性質等價
 - 正規
 - Hermitian
 - 斜 Hermitian
 - 正定
 - 半正定
 - 么正
- 若 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 且 A 與 B 正交相似, 則以下 A 與 B 的性質等價
 - 對稱
 - 斜對稱
 - 正交
- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則 A 為正規且上三角方陣 $\iff A$ 為對角方陣。
- 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 則 A 為對稱且上三角方陣 $\iff A$ 為對角方陣。
- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則 A 為正規方陣 $\iff A$ 可么正對角化。
- 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 則 A 為對稱方陣 $\iff A$ 可正交對角化。

45. **Theorem (8.83, 8.90, 8.91, 8.92, 8.93, 8.94, 8.95)** (方陣, 實數, 複數)

- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則以下等價
 - A 正定。
 - $\exists B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 為複數矩陣且 $\text{rank}(B) = n$, 使得 $A = B^H B$ 。
 - 存在 B 為正定矩陣, 使得 $A = B^2$ 。
- 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為對稱實方陣, 則以下等價
 - A 正定。
 - $\exists B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 為實矩陣且 $\text{rank}(B) = n$, 使得 $A = B^T B$ 。

- 主子行列式 (principal minors) $\Delta_k(\mathbf{A}) > 0$ (必須為對稱實方陣)。
- 存在 \mathbf{B} 為正定矩陣, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ 。
- 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則以下等價
 - \mathbf{A} 正半定。
 - $\exists \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 為複數矩陣, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^H \mathbf{B}$ 。
 - 存在 \mathbf{B} 為正半定矩陣, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ 。
- 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 對稱實方陣, 則以下等價
 - \mathbf{A} 正半定。
 - $\exists \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 為實矩陣, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ 。
 - 存在 \mathbf{B} 為正半定矩陣, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ 。
- 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 為複數矩陣, 則 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 與 $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$ 皆正半定。
- 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 為實矩陣, 則 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 與 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 皆正半定。

46. **Theorem (8.141, 8.142, 8.145)** (實數, 方陣) 若 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \|\mathbf{u}\| = 1$, 則稱

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (25)$$

為相對於 \mathbf{u} 的 Householder 矩陣或基本鏡射算子 (elementary reflector), 則

- \mathbf{H} 為對稱且正交方陣。
- $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$, 則
 - $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{x}$
 - $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{y}$

47. **Theorem (8.154, 8.157, 8.160, 8.161, 8.163, 8.164, (8-47)8.94)** (正交, 方陣, 特徵, 可逆, 解, 實數, 複數) 若 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$ 為 \mathbf{A} 的奇異值分解, 則

- 奇異值皆 > 0 且唯一, 但 \mathbf{U}, \mathbf{V} 未必唯一。

•

$$\sum_{i=1}^r \sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \quad (26)$$

- $\text{CS}(\mathbf{V})$ 為 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 的特徵向量且為單範正交集。
- $\text{CS}(\mathbf{U})$ 為 $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$ 的特徵向量且為單範正交集。

- 若 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ 為非零奇異值個數，則
 - $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ 為 $\text{CS}(\mathbf{A}^H)$ 單範正交基底。
 - $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 $\text{N}(\mathbf{A})$ 單範正交基底。
 - $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ 為 $\text{CS}(\mathbf{A})$ 單範正交基底。
 - $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ 為 $\text{N}(\mathbf{A}^H)$ 單範正交基底。
- $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^H$ 為 \mathbf{A} 的虛反矩陣 (pseudoinverse)，則
 - $(\Sigma^+)_{ij} = 0, \forall i \neq j$ 。
 - $(\Sigma^+)_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i}, & \text{if } \sigma_i \neq 0 \\ 0, & \text{if } \sigma_i = 0 \end{cases}$
 - $\mathbf{O}^+ = \mathbf{O}$
 - 若 \mathbf{A} 可逆，則 $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$ 。
 - $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^+)$
 - $(c\mathbf{A})^+ = \frac{1}{c}\mathbf{A}^+$
 - $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$
 - $(\mathbf{A}^T)^+ = (\mathbf{A}^+)^T$
 - 若 $\mathbf{A} \in F^{m \times r}, \mathbf{B} \in F^{r \times n}, (\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+ \mathbf{A}^+$ ，其中 $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{B}) = r$ 。
 - $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$ 為使 $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ 最小的 \mathbf{x} ，即 $\|\mathbf{x}_0\|_2$ 為最小者。
 - 若 \mathbf{A} 行獨立，則 $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$
 - 若 \mathbf{A} 列獨立，則 $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$

References

- [1] 黃子嘉. 線性代數及其應用 (上). 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.
- [2] 黃子嘉. 線性代數及其應用 (下). 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.
- [3] 黃子嘉. 線性代數分類題庫. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.
- [4] wjungle@ptt. 線性代數 @tkb 筆記. <https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VaGtrdW9RVTYtM3c/view?usp=sharing>, 2017.

