離散數學

Discrete Mathematics

TZU-CHUN HSU[1]

[1]vm3y3rmp40719@gmail.com

[1]Department of Computer Science, Zhejiang University

2021 年 1 月 28 日

Version 4.0

Disclaimer

本文「離散數學」為台灣研究所考試入學的「離散數學」考科使用，內容主要參考黃子嘉先生的三本離散數學參考書 [1][2][3]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的離散數學筆記 [4]。

本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 LaTeX 相關程式碼採用 **MIT 協議**，更多內容請訪問作者之 GitHub 分頁Oscarshu0719。

1 Overview

1. 本文頁碼標記依照實體書 [1][2][3] 的頁碼。
2. TKB 筆記 [4] 章節頁碼：

Chapter	Page No.
1	1
2	26
3	60
4	78
5	92
6	118
7	152
8	168
9	176
10	207
11	223
12	×
13	227

3. 1.2 考很重，2.5 少考，4.2 考不多，4.3 不是很重要。前 7 章佔 70%，第 9, 10, 13 章各 10%。
4. 第 9, 10, 11, 13 章暫時略過。

2 Summary

1. **Theorem ((1-42)1.92)** $2^{mn} \pmod{2^m - 1} = 1$。
2. **Theorem (1.60)**（質數）若 p 為質數，$a \in \mathbb{Z}$，則 $a^{-1} \equiv a \pmod{p}$ 即 $a^2 \equiv 1 \pmod{p} \iff a \equiv \pm 1 \pmod{p}$。
3. **Theorem (1.61, 1.62)**（質數）
   - Wilson's theorem：若 p 為質數，則
   $$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \tag{1}$$
   - Fermat's little theorem：若 p 為質數，$m \in Z$，且 $\gcd(m, p) = 1$，則
   $$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{2}$$
4. **Theorem (1.65, 1.66)**（質數）
   - 若 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$，且 $\gcd(m, n) = 1$，則 $m^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$。
   - 若 p 為質數，$m \in Z$，且 $\gcd(m, p) = 1$，則 $m^{-1} \equiv m^{p-2} \pmod{p}$
5. **Theorem (1.74)**（質數）If $2^n - 1$ is prime, then n is prime.
6. **Theorem (.14)** 證明 $\mathbb{Z}^+$ 中質數個數為 ∞。
   Proof. 若質數個數為有限個，令
   $$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_k \tag{3}$$
   為所有質數。取
   $$E = P_1 P_2 \cdots P_k + 1 \tag{4}$$
   所以 E 為 composite，則
   $$\exists\, P_j \quad \text{s.t. } P_j | E \tag{5}$$
   又
   $$\begin{aligned} & P_j | P_1 P_2 \cdots P_k \\ \Rightarrow & P_j | (E - P_1 P_2 \cdots P_k) \\ \Rightarrow & P_j | 1 \end{aligned} \tag{6}$$

但質數 P_j 不可能整除 1，矛盾，因此 $P_j = 1$，E 為質數。得證，$\mathbb{Z}^+$ 中質數個數為 ∞。

7. **Theorem (2.101)** 證明 $(0,1)$ 為不可數集。

   Proof. $f : \mathbb{Z}^+ \to (0,1)$ is bijective，令 $f(i) = r_i,\ \forall i = 1, 2, 3, \cdots$ 其中

$$\begin{cases} r_1 = 0.r_{11}r_{12}\cdots \\ r_2 = 0.r_{21}r_{22}\cdots \\ \quad\vdots \\ r_i = 0.r_{i1}r_{i2}\cdots \end{cases} \tag{7}$$

   取

$$s = 0.s_1s_2\cdots,\ s_i = \begin{cases} 4 & , r_{ii} \neq 4 \\ 5 & , r_{ii} = 4 \end{cases} \tag{8}$$

   $s_i \in (0,1)$ 但 $\nexists\, i \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $f(i) = s$，因此 $(0,1)$ 為不可數集。

8. **Theorem (.53)**

$$A = \{1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\} \tag{9}$$

   在 A 取 $N+1$ 個數，

$$\exists\, a, b \quad \text{s.t. } a|b \vee b|a \tag{10}$$

   Proof.

$$\forall\, x \in A,\ x = 2^k \times y,\ k \in \mathbb{Z},\ y = 2l+1,\ l \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

   又 A 中只有 n 個奇數，則取 $n+1$ 個數時，

$$\begin{gathered} \exists\, a, b \quad \text{s.t. } a = 2^{k_1} \times y,\ b = 2^{k_2} \times y \\ a|b \vee b|a \end{gathered} \tag{12}$$

9. **Theorem (3.56)**

   - 若 A 為一集合，且 $|A| = m$，A 上等價關係的個數，即相異分割數。

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{S}(m,i) \tag{13}$$

- m 相異物放入 n 相同箱**可**空箱的方法。

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}(m,i) \tag{14}$$

10. **Theorem ((5-35)5.56)** Ordered sum of positive integers, where each summand is ≥ 2:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad , n \geq 2 \\ a_1 = 0, a_2 = 1 \end{cases} \tag{15}$$

11. **Theorem (6.35)** 若 G 與 $\overline{G}$ 同構，且 $|V| = n$，則 $n = 4k \vee n = 4k+1$。

12. **Theorem (6.44, 6.55)**

- 一簡單無向圖，若所有點的度數 $\geq k$，則圖上必含一個長度至少為 $k+1$ 的環路（cycle）。
- 若 A 為一鄰接矩陣，則
  - $\frac{1}{6}\operatorname{tr}(A^3)$ 為圖上三角形個數。
  - $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^2[i,j] = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)^2 \tag{16}$$

13. **Theorem ((6-30)6.48)**

- Maximum length of a **trail** of K_n is $\binom{2n}{2} - (n-1)$.
- Maximum length of a **circuit** of K_n is $\binom{2n}{2} - n$.

14. **Theorem (6.57, 6.59, 6.60, 6.62)**

- 圖中有尤拉迴路 $\iff$ 為連接圖且所有點的度數為偶數。
- K_n 有尤拉迴路 $\iff n$ 為奇數。
- $K_{m,n}$ 有尤拉迴路 $\iff m, n$ 為偶數。
- 圖中有尤拉路線 $\iff$ 為連通圖且圖中恰含 0 個或 2 個點度數為奇數。
- 圖中有尤拉迴路 $\iff$ 為強連通圖且所有點的出度數與入度數相同。
- 若圖中有尤拉迴路，則有尤拉路線。

15. **Theorem (6.68, 6.71, 6.72, 6.73, 6.74, 6.84, (6-51)6.81)**

- K_n^* 必定有有向漢米爾頓路徑。
- 若 $G=(V,E),\ |V|=n\geq 3$ 為一無迴圈無向圖，
  - 若
$$\deg(x)+\deg(y)\geq n-1,\ \forall x,y\in V, x\neq y \vee \\ \deg(v)\geq \frac{n-1}{2},\ \forall v\in V \tag{17}$$
    ，則 G 有漢米爾頓**路徑**。
  - 若
$$\deg(x)+\deg(y)\geq n,\ \forall x,y\in V, x,y \text{ 不相鄰} \vee \\ \deg(v)\geq \frac{n}{2},\ \forall v\in V \tag{18}$$
    ，則 G 有漢米爾頓**環路**。
- $K_n, n\geq 3$ 必有漢米爾頓**環路**。
- 若一圖有漢米爾頓環路，則該圖中任兩點至少有兩條路徑相連。
- 一連通雙分圖，若圖中有漢米爾頓**環路**，則兩邊的頂點數相同。
- 一連通雙分圖，若圖中有漢米爾頓**路徑**，則兩邊的頂點數相差 ≤ 1。
- K_n 有 $\frac{(n-1)!}{2}$ 個相異漢米爾頓環路。
- K_n，n 為奇數，有 $\leq \frac{n-1}{2}$ 個**不共邊**的漢米爾頓環路。
- $K_{n,n}$ 有 $\frac{1}{2}n!(n-1)!$ 個相異漢米爾頓環路。
- 若 $G=(V,E),\ |V|=n$，則
$$|E|\geq \binom{n-1}{2}+2 \tag{19}$$
  時，G 有漢米爾頓**環路**。

16. **Theorem (6.93, 6.94, 6.97, 6.98, (6-51)6.81)**

- Euler formula：若 $G=(V,E), |V|=v, |E|=e, r$為區域個數, M為分量圖數，且 G 為平面圖，則 $v-e+r=1+M$。
- 若 $G=(V,E), |V|=v, |E|=e\geq 2, r$為區域個數, M為分量圖數，且 G 為無迴圈簡單**連通**平面圖，則
  -
$$\frac{3}{2}r\leq e\leq 3v-6 \tag{20}$$

  - 若 G **不含任何三角形**，則
$$e \leq 2v - 4 \tag{21}$$
  - 若每個環路 $\geq k \geq 3$ 邊組成，則
$$e \leq \frac{k}{k-2}(v - 2M) \tag{22}$$
- 一無迴圈簡單平面圖必含一個度數 ≤ 5 的頂點。

17. **Theorem (6.115)**
- 若 $P(G, \lambda)$ 為著色多項式，則
  - $P(G, \lambda)$ 常數項為 0。
  - $P(G, \lambda)$ 係數和為 0。
  - $P(G, \lambda)$ 最高次項係數為 1。

18. **Theorem ((6-63)6.98, (6-65)6.99)** Edge-coloring:
$$\begin{aligned} \chi'(K_n) &= \begin{cases} n-1 & , n = 2k \\ n & , n = 2k+1 \end{cases} \\ \chi'(C_n) &= \begin{cases} 2 & , n = 2k \\ 3 & , n = 2k+1 \end{cases} \\ \chi'(K_{n,n}) &= n \end{aligned} \tag{23}$$

19. **Theorem (.129)** 若 $G = (V, E)$ is connected，則
$$|E| \geq |V| - 1 \tag{24}$$

Proof. 用數學歸納法證明：
當 $|V| = 1$ 時，成立。
設 $|V| < n$ 時成立。考慮 $|V| = n$ 時，$\forall\, v,\ \deg(v) = m$，則 $G - v$ 形成 k 個 components，有
$$G_1 = (V_1, E_1),\ G_2 = (V_2, E_2),\ \cdots,\ G_k = (V_k, E_k) \tag{25}$$
又 $G_i,\ 1 \leq k \leq m$ is connected，且 $|V_i| < n$。根據數學歸納法，
$$|E_i| \geq |V_i| - 1,\ \forall\, i = 1,\ \cdots, k \tag{26}$$

則

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + \cdots + |E_k| + m \\ &\geq (|V_1| - 1) + \cdots + (|V_k| - 1) + m \\ &= (|V_1| + \cdots + |V_k|) + (m - k) \\ &= |V| - 1 + (m - k) \\ &\geq |V| - 1 \end{aligned} \tag{27}$$

20. **Theorem (7.16, 7.24)**

- 若 $T = (V, E), |V| = n$ 為 m-元樹，其中 i, l 分別表示內部節點與樹葉個數，則
  - $$n \leq mi + 1 \tag{28}$$
  - $$l \leq (m - 1)i + 1 \tag{29}$$

    當 T 為**滿** m-元樹時，等號成立。
- 一滿 m-元樹，i 為內部節點個數，I, E 分別表示內部及外部路徑長，則

$$E = (m - 1)I + mi \tag{30}$$

21. **Theorem (7.33, 7.34, 7.37)**

- K_n 相異生成樹個數為 n^{n-2}。
- $K_{m,n}$ 相異生成樹個數為 $m^{n-1}n^{m-1}$。
- 若 $G = (V, E)$ 為無向圖，且 $e = \{a, b\} \in E$，$N(G)$ 為 G 的相異生成樹個數，則

$$N(G) = N(G - e) + N(G \cdot e) \tag{31}$$

- 一無向連通圖，其任意切集與環路必含**偶數**個共同邊。

22. **Theorem ()**

- $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \neq \exists x\ P(x) \wedge \exists\, xP(x)$
- ($|A| = |B|$) A: The set of all programs that terminate. B: The set of all programs that do NOT terminate.

References

[1] 黃子嘉. 離散數學（上）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 5 edition, 2010.

[2] 黃子嘉. 離散數學（下）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 5 edition, 2010.

[3] 黃子嘉. 離散數學（習題詳解）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 6 edition, 2019.

[4] wjungle@ptt. 離散數學 @tkb 筆記. https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VVXFqS3liaXpjLTQ/view?usp=sharing, 2017.