離散數學
Discrete Mathematics

TZU-CHUN HSU[1]

[1]vm3y3rmp40719@gmail.com

[1]Department of Computer Science, Zhejiang University

2020 年 10 月 5 日

Version 1.2

Disclaimer

本文「離散數學」為台灣研究所考試入學的「離散數學」考科使用，內容主要參考黃子嘉先生的三本離散數學參考書 [1][2][3]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的離散數學筆記 [4]。

本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 LaTeX 相關程式碼採用 **MIT 協議**，更多內容請訪問作者之 GitHub 分頁Oscarshu0719。

1 Overview

1. TKB 筆記 [4] 章節頁碼：

Chapter	Page No.
1	1
2	26
3	60
4	78
5	92
6	118
7	152
8	168
9	176
10	207
11	223
12	×
13	227

2. 1.2 考很重，2.5 少考，4.2 考不多，4.3 不是很重要。前 7 章佔 70%，第 9, 10, 13 章各 10%。

3. 第 9, 10, 11, 13 章暫時略過。

4. 必考：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

   (a) 6

   (b) 11

   (c) 14

   (d) 31

   (e) 32

   (f) 41

   (g) 43

   (h) 53

   (i) 54

   (j) 74

   (k) 89

(l) 107

(m) 111

(n) 127

(o) 134

(p) 136

(q) 137

(r) 143

(s) 144

(t) 154

(u) 157

(v) 170

5. 證明：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

(a) 6

(b) 56

(c) 58

(d) 76

(e) 129

(f) 152

6. 三角函數：

- 和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1a}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{1b}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1c}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{1d}$$

- 和差化积：

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2a}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2b}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2c}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2d}$$

- 积化和差：

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \tag{3a}$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \tag{3b}$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \tag{3c}$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) \tag{3d}$$

2 Summary

1. **Theorem (1.6)** ϕ 為任何集合的子集。

2. **Theorem (1.16)**

$$P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B) \tag{4a}$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B) \tag{4b}$$

3. **Theorem (1.55)** 若 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$，則 $ax + by = c$ 有整數解 $\iff \gcd(a, b)|c$。

4. **Theorem (1.58, 1.60)**（質數）

   - 若 $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$，且 $\gcd(a, n) = 1$，則 $a^{-1} \pmod n$ 存在。
   - 若 p 為質數，$a \in \mathbb{Z}$，則 $a^{-1} \equiv a \pmod p$ 即 $a^2 \equiv 1 \pmod p \iff a \equiv \pm 1 \pmod p$。

5. **Theorem (1.62)** 若 $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$，若 $\gcd(c, n) = 1$，則 $ac \equiv bc \pmod n \iff a \equiv b \pmod n$。

6. **Theorem (1.61, 1.62)**（質數）

   - Wilson's theorem：若 p 為質數，則

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p \tag{5}$$

   - Fermat's little theorem：若 p 為質數，$m \in Z$，且 $\gcd(m, p) = 1$，則

$$m^{p-1} \equiv 1 \pmod p \tag{6}$$

7. **Theorem (1.64, 1.65, 1.66)**（質數）

   - 若 $n \in \mathbb{Z}^+$，則 Euler ϕ-函數 $\phi(n)$ 為 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中與 n 互質的元素個數，又稱 Euler's totient function。
   - 若 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ 為 n 的質因數分解，則 $\phi(n) = n\Pi_{j=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_j})$。
   - 若 $p \in \mathbb{Z}^+$，則 $\phi(p) = p - 1 \iff p$ 為質數。
   - 若 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$，且 $\gcd(m, n) = 1$，則 $m^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$。
   - 若 p 為質數，$m \in Z$，且 $\gcd(m, p) = 1$，則 $m^{-1} \equiv m^{p-2} \pmod p$

8. **Theorem (1.66)** 中國餘數定理（Chinese Remainder Theorem，CRT）中，模的數之間必須互質。

9. **Theorem (1.71)** RSA 公鑰密碼系統（RSA public key cryptosystem）：

   - 訊息：M。
   - 加密鑰（encryption key）：
     $$n = pq,\ e \tag{7}$$
     其中 p, q 為質數，且 $\gcd(e, \phi(n)) = 1,\ \phi(n) = (p-1)(q-1)$。
   - 加密訊息：
     $$C = M^e \pmod n \tag{8}$$
   - 解密鑰（decryption key）：
     $$d \equiv e^{-1} \pmod{\phi(n)} \tag{9}$$
   - 解密訊息：
     $$C^d \equiv M \pmod n \tag{10}$$

10. **Theorem (2.8, 2.10)** 若 R 為一關係，則 $\boldsymbol{M}_{R^{-1}} = \boldsymbol{M}_R^{\intercal}$。

11. **Theorem (2.18, 2.25)**

    - 非對稱性（asymmetric）：若 A 為集合，$R \subseteq A \times A$ 為一關係，則 $\forall a, b \in A$，$aRb \Rightarrow \neg(bRa)$，即若 $(a, b) \in R$，則 $(b, a) \notin R$。
    - 反對稱性（antisymmetric）：若 A 為集合，$R \subseteq A \times A$ 為一關係，則 $\forall a, b \in A$，$aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$，即若 $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$，則 $a = b$。
    - 非對稱性不允許對角線上元素為 1，反對稱性則允許對角線上元素為 1。
    - 若 A 為集合，$R \subseteq A \times A$ 為一關係，則 R 具遞移性 $\iff R^n \subseteq R,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$。
    - 若 A 為集合，$R, S \subseteq A \times A$ 為二關係，則
      - 若 R, S 具反身性，則 $R \cap S$ 與 $R \cup S$ 亦具反身性。
      - 若 R, S 具對稱性，則 $R \cap S$ 與 $R \cup S$ 亦具對稱性。
      - 若 R, S 具遞移性，則 $R \cap S$ 亦具遞移性。

12. **Theorem (2.42)** 若 P_i 表示 $i \geq 1$ 個元素上相異的等價關係個數，假設 $P_0 = 1$，則 $P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i$。

13. **Theorem (2.53, 2.55)**

- $t(s(r(R)))$ **未必**等於 $t(R) \cup r(R) \cup r(R)$。
- 若 R_1, R_2 為二等價關係，其分割分別為 π_1 與 π_2，則
  - $R_1 \cap R_2$ 為等價關係，且分割為 $\pi_1 \cdot \pi_2$。
  - $R_1 \cup R_2$ **未必**為等價關係，因為 $R_1 \cup R_2$ **未必**具遞移性，而 $t(R_1 \cup R_2)$ 為等價關係，且分割為 $\pi_1 + \pi_2$。

14. **Theorem (2.63, 2.66, 2.67, 2.69, 2.70, 2.71, 2.74)**

- 定義域中所有值都必須有對應到對應域的一個值。
- 若 $f: A \to B$，$A_1, A_2 \subseteq A$，則
  - 若 $A_1 \subseteq A_2$，則 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$。
  - $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$。
  - $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$。
  - f 為一對一 $\iff f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
- 若 $f: A \to B, g: B \to C$，則
  - 若 f, g 為一對一，則 $g \circ f$ 亦是一對一，反之不然。
  - 若 f, g 為映成，則 $g \circ f$ 亦是映成，反之不然。
  - 若 f, g 可逆，則 $g \circ f$ 亦可逆，反之不然。
  - 若 $g \circ f$ 為一對一，則 f 亦是一對一。
  - 若 $g \circ f$ 為映成，則 g 亦是映成。
- 若 $f: A \to B$，$B_1, B_2 \subseteq B$，則
  - 若 $B_1 \subseteq B_2$，則 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$。
  - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$。
  - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$。

15. **Theorem (2.96, 2.99, 2.100, 2.101, 2.102)**

- 若 A 為一集合，若 $A = \emptyset$ 或 $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$，則稱 A 為有限集。
- 若 A 為一集合，且 A 為有限集或 $A \sim \mathbb{Z}^+$，則稱 A 為可數集。
- 若 A, B 為可數集，則 $A \times B$ 為可數集。
- 若 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ 為可數集，則 $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i$ 為可數集。
- $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ 皆為可數集。

- $(0,1) \sim \mathbb{R}, \mathbb{R}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{C} \sim \mathbb{R}$ 皆為不可數集。
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{Q}| < |\overline{Q}| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

16. **Theorem (3.23, 3.24)**

- $$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \tag{11}$$
- Vandermonde's convolution：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} \tag{12}$$

17. **Theorem (3.29, 3.31)** 允許重複組合：

- – n 個相異物重複取 r 次。
  – r 個相同球放入 n 個相異箱（允許空箱）。
  – $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r,\ \forall x_i \geq 0$

$$\binom{n+r-1}{r} \tag{13}$$

- – r 個相同球放入 n 個相異箱（不允許空箱）。
  – $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r,\ \forall x_i > 0$

$$\binom{r-1}{n-1} \tag{14}$$

18. **Theorem (3.50, 3.56, 3.57, 3.59, 3.60)**

- 若 A, B 為二集合，且 $|A| = m, |B| = n,\ m \geq n$，則

$$\text{onto}(m,n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m \tag{15}$$

稱由 A 到 B 的映成函數。onto(m,n) 也可視為 m 個相異物放入 n 個相異箱（不允許空箱）。

- 第二種 Stirling 數（String number of the second kind）：

$$\mathrm{S}(m,n) = \frac{\text{onto}(m,n)}{n!} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m}{n!},\ \forall m \geq n \geq 1 \in \mathbb{Z}^+ \tag{16}$$

記 $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$，其中 $\forall m < n,\ \mathrm{S}(m,n) = 0$。$\mathrm{S}(m,n)$ 也可視為 m 個相異物放入 n 個相同箱（不允許空箱）。

- - m 個相異物放入 n 個相同箱（允許空箱）。
  - 若 A 為一集合，且 $|A| = m$，則 A 上等價關係的個數，即相異分割數。

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}(m,i) \tag{17}$$

- $$\mathrm{S}(m+1,n) = \mathrm{S}(m,n-1) + n\mathrm{S}(m,n),\ \forall m \geq n \geq 2 \in \mathbb{Z}^{+} \tag{18}$$

- 第一種 Stirling 數（String number of the first kind）：記 $\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right]$，可視為 m 個相異物安排成 n 個環狀排列。
  - $\left[\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix} \right] = (m-1)!$。
  - $\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] \geq \mathrm{S}(m,n)$。
  - $$\left[\begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix} \right] + m \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right],\ \forall m \geq n \geq 2 \in \mathbb{Z}^{+} \tag{19}$$

19. **Theorem (3.69, 3.70)** n 個相異物的亂序（Derangement）個數：

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_n &= n!(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}) \\ \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathrm{D}_n &= n! e^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

20. **Theorem (4.8)**

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} &= (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \\ (1+x)^{-n} &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r \end{aligned} \tag{21}$$

21. **Theorem ()**

- 生成函數：
  - 取相異物組合。

- 相同球放相異箱。

- 指數生成函數：
  - 取相異物排列。
  - 相異物放相異箱。

22. **Theorem (5.6)** Fibonacci 數列：

$$\begin{cases} \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n-2},\ n \geq 2 \\ \mathrm{F}_0 = 1, \mathrm{F}_1 = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \tag{22}$$

23. **Theorem (5.90)** n 個節點的相異有序二元樹個數：

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{23}$$

又稱為第 n 階的 Catalan 數（nth Catalan number），記 C_n。

24. **Theorem (6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.16, 6.18)**

- 單方向（unilaterally）連通圖：$\forall x, y \in V,\ x \neq y$，在 x, y 之間存在一條由某一點到另一點的有向路徑。
  - 強連通圖必為單方向連通圖，反之不然。
  - 單方向連同圖必微弱連通圖，反之不然。
- 誘導子圖（Induced subgraph）：子圖所含原圖之點，皆保留其原有的邊。
- 雙連通圖：無迴圈的連通無向圖且**不含切點**。
- 度數為一的點稱懸吊點（pendant）。
- 迴圈的度數為 2。
- 若 $G = (V, E),\ |V| = n$，則

$$|E| \geq \binom{n-1}{2} + 1 \tag{24}$$

時，G 為連通圖。

25. **Theorem (6.44, 6.47, 6.55)**

- 一簡單無向圖，若所有點的度數至數為 k，則圖上必含一個長度至少為 $k+1$ 的環路（cycle）。
- 一無向圖，為雙分圖 $\iff$ 圖中不含奇數長度的環路。
- 若 A 為一鄰接矩陣，則 $\frac{1}{6}\operatorname{tr}(A^3)$ 為圖上三角形個數。

26. **Theorem (6.57, 6.59, 6.60, 6.62)**

- 若存在一路線經過圖中每一**邊**恰一次稱有尤拉路線（Euler trail）。
- 圖中有尤拉迴路 $\iff$ 為連接圖且所有點的度數為偶數。
- K_n 有尤拉迴路 $\iff n$ 為奇數。
- $K_{m,n}$ 有尤拉迴路 $\iff m, n$ 為偶數。
- 圖中有尤拉路線 $\iff$ 為連通圖且圖中恰含 0 個或 2 個點度數為奇數。
- 圖中有尤拉迴路 $\iff$ 為強連通圖且所有點的出度數與入度數相同。

27. **Theorem (6.64, 6.68, 6.71, 6.72, 6.73, 6.74, 6.84)**

- 若存在一路境經過圖中每一**點**恰一次稱有漢米爾頓路徑（Hamiltonian path）。
- 漢米爾頓環路必要條件：
  - 度數為 2 的點，與其相鄰的邊必在漢米爾頓環路中。
  - 度數 ≥ 2 的點，除了前一條件已知在漢米爾頓環路中的邊之外，其他的邊必不在漢米爾頓環路中。
- 有向完全圖必有有向漢米爾頓**路徑**。
- 若 $G=(V,E),\ |V|=n\geq 3$ 為一無迴圈無向圖，
  - 若
$$\begin{gathered}\deg(x)+\deg(y)\geq n-1,\ \forall x,y\in V, x\neq y\ \vee \\ \deg(v)\geq \frac{n-1}{2},\ \forall v\in V\end{gathered}\tag{25}$$
，則 G 有漢米爾頓**路徑**。
  - 若
$$\begin{gathered}\deg(x)+\deg(y)\geq n,\ \forall x,y\in V, x,y \text{ 不相鄰 } \vee \\ \deg(v)\geq \frac{n}{2},\ \forall v\in V\end{gathered}\tag{26}$$
，則 G 有漢米爾頓**環路**。
- $K_n, n\geq 3$ 必有漢米爾頓**環路**。

- 若一圖有漢米爾頓環路，則該圖中任兩點至少有兩條路徑相連。
- 一連通雙分圖，若圖中有漢米爾頓**環路**，則兩邊的頂點數相同。
- 一連通雙分圖，若圖中有漢米爾頓**路徑**，則兩邊的頂點數相差 ≤ 1。
- K_n 有 $\frac{(n-1)!}{2}$ 個相異漢米爾頓環路。
- K_n，n 為奇數，有 $\leq \frac{n-1}{2}$ 個**不共邊**的漢米爾頓環路。
- $K_{n,n}$ 有 $\frac{1}{2}n!(n-1)!$ 個相異漢米爾頓環路。
- 若 $G = (V, E)$, $|V| = n$，則

  $$|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2 \tag{27}$$

  時，G 有漢米爾頓**環路**。

28. **Theorem (6.88, 6.90, 6.93, 6.94, 6.97, 6.98)**

- 一無迴圈無向圖，在圖中一邊中加上一頂點，使其變為二邊，稱基本區分（elementary subdivision）。
- 二無迴圈無向圖，若二圖同構或皆可由某個圖經由數次基本區分得到，稱二圖同胚（homeomorphic）。
- Kuratowski's theorem：平面圖 $\Longleftrightarrow$ **不**含子圖與 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚。
- 當一個邊在一個區域出現二次，該邊的度數為二。
- Euler formula：若 $G = (V, E), |V| = v, |E| = e, r$為區域個數, M為分量圖數，且 G 為平面圖，則 $v - e + r = 1 + M$。
- 若 $G = (V, E), |V| = v, |E| = e \geq 2, r$為區域個數，且 G 為無迴圈簡單**連通**平面圖，則
  -
    $$\frac{3}{2}r \leq e \leq 3v - 6 \tag{28}$$
  - 若 G **不含任何三角形**，則
    $$e \leq 2v - 4 \tag{29}$$
  - 若每個環路 $\geq k \geq 3$ 邊組成，則
    $$e \leq \frac{k}{k-2}(v-2) \tag{30}$$

- 雙分圖不含三角形。
- 一無迴圈簡單平面圖必含一個度數 ≤ 5 的頂點。

29. **Theorem (6.109, 6.110, 6.113, 6.114, 6.115, 6.116)**

- $\chi(K_n) = n$，$\chi(W_n) = 1 + \chi(C_n)$，$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 2k \\ 3, & n = 2k+1 \end{cases}$。
- 若 K_n 為一圖 G 的子圖，則 $\chi(G) \ge n$。
- 雙分圖 $\Longleftrightarrow$ 2-著色 $\Longleftrightarrow$ 圖中不含奇數長的迴圈。
- 任意平面圖皆為 4-著色，反之不然。
- 若 $G = (V, E)$ 為無向圖，λ 為顏色數，則稱 $P(G, \lambda)$ 為著色多項式，表示至多使用 λ 種顏色著色的不同方法數，且 $\chi(G) = \min\{\lambda | P(G, \lambda) > 0\}$。
  - $P(G, \lambda)$ 常數項為 0。
  - $P(G, \lambda)$ 係數和為 0。
  - $P(G, \lambda)$ 最高次項係數為 1。
- 若 $G = (V, E)$ 為連通無向圖，$e = \{a, b\} \in E$，$G \cdot e$ 為 $G - e$ 中將 a, b 二頂點黏合後的圖，則
$$P(G, \lambda) = P(G - e, \lambda) - P(G \cdot e, \lambda) \tag{31}$$
- 若 $G = (V, E)$ 為連通無向圖，$e = \{a, b\} \notin E$，$G \cdot e$ 為 $G + e$ 中將 a, b 二頂點黏合後的圖，則
$$P(G, \lambda) = P(G + e, \lambda) + P(G \cdot e, \lambda) \tag{32}$$
- 若 $G = (V, E)$ 為無向圖，且 G_1, G_2 為 G 子圖、$G = G_1 \cup G_2$、$G_1 \cap G_2 = K_n$，則
$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda) P(G_2, \lambda)}{\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - (n-1))} \tag{33}$$

30. **Theorem (7.5, 7.9, 7.15, 7.16, 7.18, 7.20, 7.22, 7.24)**

- 樹：$|E| = |V| - 1$。
- 森林：$|E| = |V| - \kappa(G)$，其中 $\kappa(G)$ 表示樹的個數。
-
  - 滿（full）二叉樹：非樹葉節點都有二個兒子。
  - 完全（complete）二叉樹：所有樹葉節點的階層皆與樹高相同。
  - 平衡（balanced）二叉樹：若樹高為 h，則所有樹葉節點的階層皆為 h 或 $h-1$。

- 若 $T=(V,E), |V|=n$ 為 m-元樹，其中 i,l 分別表示內部節點與樹葉個數，則
  -
  $$n \leq mi+1 \tag{34}$$
  -
  $$l \leq (m-1)i+1 \tag{35}$$
  -
  $$i \geq \frac{l-1}{m-1} \wedge i \geq \frac{n-1}{m} \tag{36}$$

  當 T 為**滿** m-元樹時，等號成立。

- 若 $T=(V,E), |V|=n$ 為**滿** m-元樹，其中 l,h 分別表示樹葉個數與樹高，則

$$\begin{aligned}(m-1)(h-1)+m \leq l \leq m^h \\ mh+1 \leq n \leq \frac{m^{h+1}-1}{m-1}\end{aligned} \tag{37}$$

- 若 T 為高度為 h 的樹，且所有樹葉的階層皆為 h 或 $h-1$ 時，稱平衡（balanced）樹。

- 若 T 為高度為 h 的**滿** m-元樹，且 l 表示樹葉個數，則

$$\begin{aligned}l \leq m^h \\ h \geq \lceil log_m l \rceil\end{aligned} \tag{38}$$

  若 T 為**平衡樹**時，等號成立。

- 一二元樹，n_0 表示樹葉個數，n_2 表示二個兒子的節點個數，則

$$n_0 = n_2 + 1 \tag{39}$$

- 一滿 m-元樹，i 為內部節點個數，I,E 分別表示內部及外部路徑長，則

$$E=(m-1)I+mi \tag{40}$$

31. **Theorem (7.30, 7.33, 7.34, 7.35, 7.37, 7.44, 7.46, 7.49)**

- 若 G 為無向圖，則 G 為連通圖 $\iff G$ 有生成樹。
- K_n 相異生成樹個數為 n^{n-2}。

- $K_{m,n}$ 相異生成樹個數為 $m^{n-1}n^{m-1}$。
- 若 $G=(V,E)$ 為無向圖，且 $e=\{a,b\}\in E$，$N(G)$ 為 G 的相異生成樹個數，則

$$N(G)=N(G-e)+N(G\cdot e) \tag{41}$$

- 生成樹的任一邊稱分枝（branch），是原圖的邊但不為生成樹的邊稱弦（chord）。若 $G=(V,E),|V|=v,|E|=e$，則
  - 生成樹必含 $v-1$ 分支與 $e-v+1$ 弦。
  - 若將任意弦加入生成樹，則新圖必含一環路，稱該環路為基本環路（fundamental cycle）。
  - 若生成樹切除任意分支，則新圖變不連通，稱 G 中該切集為基本切集（fundamental cut set）。
- 一無向連通圖，其任意切集與環路必含**偶數**個共同邊。
- Prim's 只能找相鄰的邊，Kruskal's 則無限制。
- Kruskal's 時間複雜度為 $O(m\log m)$，其中 m 為圖的**邊**數；Prim's 時間複雜度為 $O(n^2)$，其中 n 為圖的**點**數。
- 最小生成樹**未必**唯一，只有在所有邊權重皆不同時，最小生成樹唯一。

32. **Theorem (7.68, 7.71)**

- 前序搜尋（preorder traversal）：根 → 左 → 右。
- 後序搜尋（postorder traversal）：左 → 右 → 根。
- 中序搜尋（inorder traversal）：左 → 根 → 右。

33. **Theorem (8.8, 6.15, 8.21)**

- Dijkstra's：
  - 單源。
  - 需在所有**邊非負權重**情況才能正確工作。
  - 生成的生成樹**未必**是最小生成樹。
- Floyd-Warshall：
  - 多源。
  - 可以處理負權邊，但不能處理**負權迴圈**。

34. **Theorem (8.43)**

- 若圖中含有完美配對（配對含有圖中所有點），圖中必含**偶數**頂點數。
- 若 n 為奇數時，K_n 不具完美配對；若 n 為偶數時，K_n 具完美配對。

References

[1] 黃子嘉. 離散數學（上）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 5 edition, 2010.

[2] 黃子嘉. 離散數學（下）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 5 edition, 2010.

[3] 黃子嘉. 離散數學（習題詳解）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 6 edition, 2019.

[4] wjungle@ptt. Tkb 筆記. https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VVXFqS3liaXpjLTQ/view?usp=sharing, 2017.