

線性代數

Linear Algebra

TZU-CHUN HSU¹

¹vm3y3rmp40719@gmail.com

¹Department of Computer Science, Zhejiang University



2021 年 5 月 6 日
Version 4.0.1

Disclaimer

本文「線性代數」為台灣研究所考試入學的「線性代數」考科使用，內容主要參考黃子嘉先生的三本線性代數參考書 [1][2][3]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的線性代數筆記 [4]。

本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 \LaTeX 相關程式碼採用 MIT 協議，更多內容請訪問作者之 GITHUB 分頁 [Oscarshu0719](#)。

MIT License

Copyright (c) 2020 TZU-CHUN HSU

Permission is hereby granted, free of charge, to any person obtaining a copy of this software and associated documentation files (the "Software"), to deal in the Software without restriction, including without limitation the rights to use, copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell copies of the Software, and to permit persons to whom the Software is furnished to do so, subject to the following conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be included in all copies or substantial portions of the Software.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

1 Overview

1. 本文頁碼標記依照實體書 [1][2][3] 的頁碼。

2. TKB 筆記 [4] 章節頁碼：

Chapter	Page No.
1	1
2	33
3	52
4	80
5	116
6	154
7	175
8	206

3. 第 4 章最重要，4.5 超重要，6.6 重要，7.4 超重要。

4. 參考 TKB 筆記 [4] 內容，部分刪減 8.6, 8.8, 8.10, 8.11 內容。刪去 3.6, 4.7, 5.7, 8.4, 8.9 全部內容。

5. 中英轉換：

- ellipsoid 橢球
- hyperbola 雙曲線
- ellipse 橢圓
- paraboloid 拋物面
- perpendicular 垂直的
- conic 圓錐
- parallelepiped 平行六面體

6. 三角函數：

- 和角公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1a)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (1b)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1c)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1d)$$

- 和差化積：

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2a)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2b)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2c)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2d)$$

- 積化和差：

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (3a)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (3b)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (3c)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (3d)$$

7. 泰勒級數：

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in [-1, 1) \quad (4a)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \quad (4b)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \quad (4c)$$

2 Summary

1. **Theorem (1.21)** 若 A 為對稱矩陣，則 A^n 也是對稱矩陣。
2. **Theorem (2.51)** (可逆) 若 A 為可逆上三角矩陣，則 $\text{adj}(A)$ 和 A^{-1} 也是上三角矩陣。
3. **Theorem ((2-45)2.92)** (可逆，方陣) 若 $A, B \in F^{n \times n}$ 為可逆方陣，則 $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \text{adj}(A)$ 。
4. **Theorem (3.29, 3.37, 3.73)** 若 $W_1, W_2, W_3 \subseteq V$ ，則

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \\ &\quad + \dim(W_3) - \dim((W_1 \cap W_2) + W_3) \end{aligned} \quad (5)$$

- $W_1 + W_2$ is the smallest subspace containing $W_1 \cup W_2$.
- $S \subseteq V \iff \text{span}(S) = S$

5. **Theorem (4.73, 4.74)** (線性獨立) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V')$ ，則

- T 必保相依。
- T 保獨立，即若 S 為線性獨立，則 $T(S)$ 亦是線性獨立 $\iff T$ 為一對一
- T 保生成，即若 S 為 V 生成集，則 $T(S)$ 亦是 V' 生成集 $\iff T$ 為映成

6. **Theorem (4.106)**

$$\begin{aligned} A \in F^{m \times n} \text{ s.t. } \text{rank}(A) = 1 \\ \iff \exists u \neq 0 \in F^{m \times 1}, v \neq 0 \in F^{1 \times n}, \text{ s.t. } A = uv \end{aligned} \quad (6)$$

7. **Theorem ((4-129)4.237)** • 若 $A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times p}$ ，則

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B \\ A & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -B \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & -AB \end{bmatrix} = D = ABC \quad (8)$$

因為 A, B 可逆，則

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} I & B \\ A & O \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} I & O \\ O & -AB \end{bmatrix}\right) = n + \text{rank}(-AB) = n + \text{rank}(AB) \quad (9)$$

有 $\text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}) \leq n + \text{rank}(\mathbf{AB})$ 得證。

- 若 $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為方陣, 且 $\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k = \mathbf{O}$, 則

$$\text{rank}(\mathbf{A}_1) + \text{rank}(\mathbf{A}_2) + \cdots + \text{rank}(\mathbf{A}_k) \leq (k-1)n \quad (10)$$

8. **Theorem (4.67, 4.71, 4.93, 4.96, 4.97, 7.69, 7.70, 8.163)** (可逆, 解) 若 $T(x) = \mathbf{A}x, T \in \mathcal{L}(V, V'), \mathbf{A} \in F^{m \times n}$, 則

- \mathbf{A} 為一對一 $\iff \mathbf{A}$ 有左反矩陣 $\iff \text{rank}(\mathbf{A}) = \dim(V) = n \leq \dim(V') = m, N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \iff \mathbf{A}x = \mathbf{0}$ 只有 $\mathbf{0}$ 唯一解 $\iff \mathbf{A}$ 行獨立, 列生成 $F^{1 \times n} \iff \mathbf{A}x = \mathbf{b} \leq 1$ 解 $\iff \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 可逆 $\iff \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$
- \mathbf{A} 為映成 $\iff \mathbf{A}$ 有右反矩陣 $\iff \text{rank}(\mathbf{A}) = \dim(V') = m \leq \dim(V) = n \iff \mathbf{A}$ 列獨立, 行生成 $F^{m \times 1} \iff \mathbf{A}x = \mathbf{b} \geq 1$ 解 $\iff \mathbf{A} \mathbf{A}^H$ 可逆 $\iff \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$

9. **Theorem (5.5, 5.35, 5.37, 6.35, 6.51)** (相似, tr , \det , 特徵, 方陣) 若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 為方陣且 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 則 \mathbf{A} 與 \mathbf{B} 的

- tr
- \det
- rank
- nullity
- 特徵多項式
- 特徵根
- 喬丹型

皆相等, 反之不然。但特徵向量不保證相同, 且僅喬丹型為充要條件。

10. **Theorem (5.38)** (特徵, 方陣) 若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 為方陣, 則 \mathbf{AB} 與 \mathbf{BA} 有相同的

- 特徵根
- 特徵多項式

若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 不為方陣, 只能保證 \mathbf{AB} 與 \mathbf{BA} 有相同的非零特徵根。

Proof.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{BA} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{T} = \mathbf{PSP}^{-1} \quad (11)$$

，所以 $S \sim T$ ，有

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} -xI & O \\ A & AB - xI \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} BA - xI & O \\ A & -xI \end{bmatrix}\right) \\ &\Rightarrow \det(-xI) \det(AB - xI) = \det(BA - xI) \det(-xI) \\ &\Rightarrow \det(AB - xI) = \det(BA - xI) \end{aligned} \quad (12)$$

則 AB 與 BA 有相同特徵多項式。

11. **Theorem (5.40, 8.13)** (特徵, 方陣, 可逆) 若 A 為方陣, 則

- A^{-1} , 若 A 可逆
- A^m , $\forall m \in \mathbb{N}$
- αA
- $A + \alpha I$
- $f(A)$, $f(x) \in P$
- A^H , 若 A 為正規矩陣, 即 $AA^H = A^H A$ 。

特徵向量不改變。

12. **Theorem (5.81)** (對角化, 方陣) 若 $T, U \in \mathcal{L}(V, V)$ 皆可對角化, 則

$$T, U \text{ 可同步對角化} \iff TU = UT \quad (13)$$

V, U 有相同特徵向量。

13. **Theorem (5.100, 5.102)** (方陣, 特徵, 對角化, tr) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 且 $T^2 = T$, 稱 T 為 V 上的冪等 (idempotent) 算子, 則

- $V = N(T) \oplus \text{Im}(T)$
- $V(0) = N(T), V(1) = \text{Im}(T)$

14. **Theorem (5.99, 6.13)** (方陣) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 以下等價

- $\text{Im}(T) = \text{Im}(T^2)$
- $\text{rank}(T) = \text{rank}(T^2)$
- $\text{nullity}(T) = \text{nullity}(T^2)$

- $N(T) = N(T^2) \iff V = \ker(T) \oplus \text{Im}(T)$

15. **Theorem (6.17)** (方陣, \det , 特徵, 線性獨立) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ 為冪零算子, 且最小正整數 k 為 T 的指標, 則 $\exists v \in V \setminus v \in N(T^k) - N(T^{k-1})$ 且 $v \neq 0$, $\{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ 線性獨立。

16. **Theorem (6.9, 6.11)** (方陣) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 則

- $\{0\} \subseteq N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq \dots \subseteq V$
- $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} N(T^i) = N(T^k)$ 為最大冪零區。
- $V \supseteq \text{Im}(T) \supseteq \text{Im}(T^2) \supseteq \dots \supseteq \{0\}$
- $W = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Im}(T^i) = \text{Im}(T^k)$ 為最大可逆區。

17. **Theorem (6.12)** (方陣) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 則 $\exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $V = N(T^k) \oplus \text{Im}(T^k)$ 。

18. **Theorem (6.16)** (特徵) 冪零矩陣特徵根全都是 0。

19. **Theorem (6.22, 6.23, 6.24)** (方陣) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $v \in V$, 則

- $\dim(C_v(T)) = k$ 不能保證 $v \in N(T^k) - N(T^{k-1})$ 。
- $\dim(C_v(T)) = k$ 保證 $\beta = \{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ 為 $C_v(T)$ 的基底。
- $\dim(C_v(T)) = k$ 不能保證 $T^k(v) = 0$ 。

20. **Theorem (6.69, 6.115, 6.116)** (方陣, 特徵, 對角化) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, W 為 T -不變子空間, 則

- T_W 的特徵多項式整除 T 的特徵多項式。
- T_W 的極小多項式整除 T 的極小多項式。
- 若 T 可對角化, 則 T_W 也可對角化。

21. **Theorem (6.111)** (方陣, 特徵) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 為相異特徵根, 則

$$T \text{ 可對角化} \iff m_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r) \quad (14)$$

22. **Theorem ((6-55)6.88)** (方陣, 特徵) 若 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 當 $AB = BA$ 時,

$$e^A e^B = e^{A+B} \quad (15)$$

可通過泰勒展開式證明。

23. **Theorem (7.68, 7.69, 7.70, (7-97)7.174)** (實數, 可逆)

- $N(A^H A) = N(A)$
- $\text{rank}(A^H A) = \text{rank}(A)$
- $\text{Lker}(A A^H) = \text{Lker}(A)$
- 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A A^T)$
- $\text{CS}(A^T A) = \text{CS}(A^T)$
- A 行獨立 $\iff A^H A$ 可逆
- A 列獨立 $\iff A A^H$ 可逆

24. **Theorem (7.79, 7.81)** (正交) 若 $A \in F^{m \times n}$, $W = \text{CS}(A)$, $b \in F^{m \times 1}$, 則

- 若 A 行獨立, 且 $A = QR$ 為 A 的 QR 分解, 則 $x \in F^{n \times 1}$ 使得 $\|Ax - b\|$ 最小 $\iff Rx = Q^H b$ 。
- 若 Q 的行向量為單範正交集, $W = \text{CS}(Q)$, 則

$$\text{proj}_W b = QQ^H b \quad (16)$$

25. **Theorem (7.80, 7.81)** (正交, 方陣) 若 $A \in F^{n \times n}$ 為方陣, 且 A 行獨立, 則

- $P^2 = P$ 為幂等方陣且 $P^H = P \iff P$ 為正交投影矩陣
- $\text{CS}(P) = \text{CS}(A)$
- $\text{rank}(P) = \text{rank}(A) = n$

26. **Theorem (7.100, 7.103, 7.104)** (正交) 若 $W \subseteq V$, P 為 V 在 W 上的投影算子, 則 $N(P) = W^\perp$ 。

27. **Theorem (7.112)** (解, 實數) 若 $Ax = b$ 有解, 則

- 唯一 $\exists s \in \text{CS}(A^H)$ 為 $Ax = b$ 之極小解, 即 $\|x\|_2$ 為所有解中最小。
- 若 u 滿足 $(A A^H)u = b$, 則 $s = A^H u$ 。

28. **Theorem (.181)** 證明 Cauchy-Schwarz inequality:

$$| \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \times \|v\| \quad (17)$$

Proof. 用數學歸納法證明：

若 $v = 0$ ，成立。

若 $v \neq 0$ ，取

$$\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \quad (18)$$

則

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u - \alpha v\|^2 \\ &= \langle u, u \rangle - \bar{\alpha} \langle u, v \rangle - \alpha \langle v, u \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{\langle v, v \rangle} \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, u \rangle \\ &\quad + \frac{\langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle}}{\langle v, v \rangle \langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \\ &\Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \leq \|u\|^2 \\ &\Rightarrow |\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \times \|v\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

29. **Theorem (8.14, 8.15, 8.17, 8.18, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23, 8.54, 8.55, 8.56)** (方陣, 正交, 特徵, tr , \det , 可逆, 實數, 複數) 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 則

定義	λ	a_{ii}	\det
self-adjoint $T^* = T$ Hermitian (over \mathbb{C}) $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$
symmetric (over \mathbb{R}) $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$			
skew self-adjoint $T^* = -T$ skew Hermitian (over \mathbb{C}) $\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}$	0 或純虛數	0 或純虛數	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0 \text{ 或純虛數}, & \text{if } n \in 2k+1 \end{cases}$
skew symmetric (over \mathbb{R}) $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$	0	0	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0, & \text{if } n \in 2k+1 \end{cases}$
positive definite $\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	> 0	> 0	> 0
positive semi-definite $\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x}$ $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x}$	≥ 0	≥ 0	≥ 0
unitary (over \mathbb{C}) $T^* T = \mathbf{I}$ $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{I}$	$ \lambda = 1$	\times	$ \det(\mathbf{A}) = 1$
orthogonal (over \mathbb{R}) $T^* T = \mathbf{I}$ $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$	± 1	\times	± 1

30. **Theorem (8.31, 8.32)** (方陣, 正交, 實數, 複數) 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n} (\vee \mathbb{R}^{n \times n})$, 則以下等價

- \mathbf{A} 為么正 (正交)。
- $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, 保內積。
- $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, 保長度。

31. **Theorem (8.35, (8-5)8.10)** (方陣, 正交) 若 $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$ 為么正或是正交方陣, 則

- $\text{CS}(\mathbf{A})$ 和 $\text{RS}(\mathbf{A})$ 皆為單範正交集。
- 若 \mathbf{A} 不為方陣, 則 $\text{RS}(\mathbf{A})$ 未必為單範正交集。

32. **Theorem ()** (方陣, tr) 若 $A, B \in F^{n \times n}$ 為方陣, 且 A 和 B 么正相等, 則 $\text{tr}(A^H A) = \text{tr}(B^H B)$ 。

33. **Theorem (8.60, 8.61, 8.62, 8.63, 8.68, 8.69)** (方陣, 正交, 相似, 對角化, 實數, 複數)

- 若 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 且 A 與 B 么正相似, 則以下 A 與 B 的性質等價
 - 正規
 - Hermitian
 - 斜 Hermitian
 - 正定
 - 半正定
 - 么正
- 若 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 且 A 與 B 正交相似, 則以下 A 與 B 的性質等價
 - 對稱
 - 斜對稱
 - 正交
- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則 A 為正規且上三角方陣 $\iff A$ 為對角方陣。
- 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 為複數方陣, 則 A 為正規方陣 $\iff A$ 可么正對角化。
- 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為實方陣, 則 A 為對稱方陣 $\iff A$ 可正交對角化。

34. **Theorem (8.89)** (方陣) Cholesky 分解必須對稱且正定。

35. **Theorem (8.94)** (實數, 複數)

- 若 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 為複數矩陣, 則 $A^H A$ 與 $A A^H$ 皆正半定。
- 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 為實矩陣, 則 $A^T A$ 與 $A A^T$ 皆正半定。

36. **Theorem (8.142)** (方陣, 正交) Householder 矩陣為對稱且正交矩陣。

37. **Theorem (8.157, (8-47)8.94)** (正交, 方陣, 特徵) 若 $A = U \Sigma V^H$ 為 A 的奇異值分解, 則

•

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \quad (20)$$

- $\text{CS}(V)$ 為 $A^H A$ 的特徵向量且為單範正交集。

- $\text{CS}(\mathbf{U})$ 為 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 的特徵向量且為單範正交集。
- 若 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ 為非零奇異值個數，則
 - $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ 為 $\text{CS}(\mathbf{A}^H)$ 單範正交基底。
 - $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 $\text{N}(\mathbf{A})$ 單範正交基底。
 - $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ 為 $\text{CS}(\mathbf{A})$ 單範正交基底。
 - $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ 為 $\text{N}(\mathbf{A}^H)$ 單範正交基底。

38. **Theorem (8.162)** 若 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，則 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^+$ 有

- $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}$
- $(\mathbf{A}\mathbf{X})^T = \mathbf{A}\mathbf{X}$
- $(\mathbf{X}\mathbf{A})^T = \mathbf{X}\mathbf{A}$

\mathbf{X}^+ 為唯一滿足這四個條件的矩陣。

39. **Theorem (8.163)**

- $\text{CS}(\mathbf{A}^+) = \text{CS}(\mathbf{A}^T) = \text{RS}(\mathbf{A})$
- $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ 為 $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ 的最小平方解。

40. **Theorem ()**

- (FALSE) For any non-zero real **symmetric** matrix, its SVD can be the same as its eigenvalue decomposition.
- For any non-zero real matrix \mathbf{A} , $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$'s SVD can be the same as its eigenvalue decomposition. 因為 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 正半定， \mathbf{A} 可么正對角化， $\exists \mathbf{P}$ 為么正矩陣，使得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{P} &= \mathbf{D} \\ \Rightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T \end{aligned} \tag{21}$$

為 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 的 SVD。

- 可對角化不保證 non-singular。
- If \mathbf{A} , \mathbf{B} and $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ are non-singular square matrices, and $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ is also non-singular. Since $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$ is invertible,

$$(\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \tag{22}$$

- The transition matrix from one basis to another must be **non-singular**, but a linear transformation matrix can be singular.
- **(FALSE)** Let S be a subset of an inner product space, then $S = (S^\perp)^\perp$.
- **(FALSE)** Let S_1, S_2 be subsets of an inner product space, and $S_1^\perp = S_2^\perp$, then $S_1 = S_2$.
- **(FALSE)** If V is orthogonal to W , then V^\perp is orthogonal to W^\perp .
- SVD 中 singular value 遞減排序。
- $Ax = b$ ($b \neq 0$) is consistent, then solution set is **NOT** a subspace, since 0 is NOT included.
- If W is a subset of \mathbb{R}^n , but $W \cup W^\perp \neq \mathbb{R}^n$, since W^\perp is NOT a subset.
- If $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ does **NOT** define an inner space in V , since if $m \neq n$, $B^T A$ may **NOT** exist.
- (101NTU-10) If

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

, then

$$\lambda_A = 2 \times \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

References

- [1] 黃子嘉. 線性代數及其應用 (上). 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.
- [2] 黃子嘉. 線性代數及其應用 (下). 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.
- [3] 黃子嘉. 線性代數分類題庫. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.
- [4] wjungle@ptt. 線性代數 @tkb 筆記. <https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VaGtrdW9RVTYtM3c/view?usp=sharing>, 2017.

