演算法

Algorithm

TZU-CHUN HSU[1]

[1]vm3y3rmp40719@gmail.com

[1]Department of Computer Science, Zhejiang University

2020 年 12 月 19 日

Version 3.0

Disclaimer

本文「演算法」為台灣研究所考試入學的「演算法」考科使用，內容主要參考洪捷先生的演算法參考書 [1]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的演算法筆記 [2]。
本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 LaTeX 相關程式碼採用 **MIT 協議**，更多內容請訪問作者之 GitHub 分頁Oscarshu0719。

1 Overview

1. 本文頁碼標記依照實體書 [1] 的頁碼。

2. TKB 筆記 [2] 章節頁碼：

Chapter	Page No.	Importance
1	1	$\star\star\star\star$
2	13	$\star\star\star\star$
3	18	$\star\star\star\star\star$
4	34	$\star\star\star\star\star$
5	43	$\star\star\star$
6	48	$\star\star\star$
7	$\times$	$\star$
8	$\times$	$\star\star\star$

3. 省略第 7 章。

Dynamic Programming algorithms		
Problem	Time complexity	Space complexity
Making change	$O(kn)$	$O(n)$
Fractional Knapsack problem	$\Theta(n \log n)$	$O(n)$
0/1 Knapsack problem (DP)	$O(n2^{\log W})$	$O(n2^{\log W})$
0/1 Knapsack problem (Branch-and-Bound)	$O(2^n)$	
Longest Common Subsequence (LCS)	$O(mn)$	$O(mn)$
Longest Increasing Subsequence (LIS)	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Longest Common Substring	$O(mn)$	$O(mn)$
Minimum Edit Distance	$O(mn)$	$O(mn)$
Matrix-chain Multiplication	$O(n^3)$	$O(n^2)$
Traveling Salesperson problem	$\Theta(n^2 2^n)$	$O(n2^n)$
Optimal Binary Search Tree (OBST)	$\Theta(n^3)$	$\Theta(n^2)$

Graph algorithms		
Problem	Time complexity	Remark
Depth-First Search (DFS)	$O(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert)$	
Kosaraju's	$O(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert)$	
Kruskal's	$O(\lvert E\rvert \log \lvert V\rvert)$	
Prim's (Adjacency matrix)	$O(\lvert V\rvert^2)$	
Prim's (Adjacency list)	$O(\lvert V\rvert\lvert E\rvert)$	
Prim's (Min-Heap, Adjacency list)	$O(\lvert E\rvert \log \lvert V\rvert)$	
Prim's (Fibonacci heap, Adjacency list)	$O(\lvert E\rvert + \lvert V\rvert \log \lvert V\rvert)$	
Sollin's (Borůvka's)	$O(\lvert E\rvert \log \lvert V\rvert)$	
Dijkstra's (Min-heap)	$\Theta((\lvert E\rvert + \lvert V\rvert) \log \lvert V\rvert)$	Greedy, no negative edges or cycles
Dijkstra's (Fibonacci-heap)	$\Theta(\lvert E\rvert + \lvert V\rvert \log \lvert V\rvert)$	
Bellman-Ford	$O(\lvert V\rvert\lvert E\rvert)$	DP
Floyd-Warshall	$\Theta(\lvert V\rvert^3)$	DP, no negative cycles
Johnson's	$\Theta(\lvert V\rvert\lvert E\rvert + \lvert V\rvert^2 \log \lvert V\rvert)$	No negative cycles
Ford-Fulkerson	$O(\lvert E\rvert\lvert f^*\rvert)$	Greedy，f^* 為最大流
Edmond-Karp	$O(\lvert V\rvert\lvert E\rvert^2)$	
Push-relabel	$O(\lvert V\rvert^2\lvert E\rvert)$	

2 Summary

1. **Theorem (89)** Longest Common Subsequence (LCS)：

   - $$c[i,j] = \begin{cases} 0 & ,i=0 \vee j=0 \\ c[i-1,j-1]+1 & ,i,j>0 \wedge x_i = y_j \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & ,i,j>0 \wedge x_i \neq y_j \end{cases} \tag{1}$$
   - $c[0 \cdots \mathrm{Length}(X)][0 \cdots \mathrm{Length}(Y)]$，$c[0,0]$ 表示空字串，並初始化第一行及第一列為 0。
   - 字符不同時，標示左邊或上面較大值方向，數值相同時預設 ↑；字符相同時標示 ↖。

2. **Theorem (94)** Longest Common Substring：

   - $$c[i,j] = \begin{cases} 0 & ,i=0 \vee j=0 \vee x_i \neq y_j \\ c[i-1,j-1]+1 & ,x_i = y_j \end{cases} \tag{2}$$
   - $c[0 \cdots \mathrm{Length}(X)][0 \cdots \mathrm{Length}(Y)]$，$c[0,0]$ 表示空字串，並初始化第一行及第一列為 0。

3. **Theorem (94)** Minimum Edit Distance：

   - $$c[i,j] = \min \begin{cases} c[i-1,j]+1 & ,a_i \neq b_j \\ c[i,j-1]+1 & ,a_i \neq b_j \\ c[i-1,j-1]+1 & ,a_i \neq b_j \\ c[i-1,j-1] & ,a_i = b_j \end{cases} \tag{3}$$
   - 各情況依序表示刪除 ↑、插入 ←、替換 ↖ 以及匹配 $↖^2$。
   - $c[0 \cdots \mathrm{Length}(X)][0 \cdots \mathrm{Length}(Y)]$，$c[0,0]$ 表示空字串，並初始化第 i 行為 i 並標示 ↑，第 j 列為 j 並標示 ←。
   - 字符不同時，標示左邊（刪除）、上面（插入）與左上（替換）較小值方向；字符相同時標示 $↖^2$。

4. **Theorem (100)** Matrix-chain Multiplication：

- $$m[i,j] = \begin{cases} 0 & ,i = j \\ \min_{i \leq k \leq j-1}\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j\} & ,i < j \end{cases} \tag{4}$$
- $p[0 \cdots \text{Number}(\text{Matrices})]$，存入矩陣大小。
- $m[1 \cdots \text{Number}(\text{Matrices})][1 \cdots \text{Number}(\text{Matrices})]$，初始化對角線上元素為 0。
- $s[1 \cdots \text{Number}(\text{Matrices}) - 1][2 \cdots \text{Number}(\text{Matrices})]$，$s[i,j]$ 存入 $m[i,j]$ 中最小值對應的 k。
- 理解：$m[i,k]$ 為拆分的前部分，$m[k+1,j]$ 為拆分的後部分，$p_{i-1}p_kp_j$ 為前後部分相乘。

5. **Theorem (111)** Optimal Binary Search Tree (OBST)：

   - $$e[i,j] = \begin{cases} q_{i-1} & ,j = i-1 \\ \min_{i \leq r \leq j}\{e[i,r-1] + e[r+1,j] + w[i,j]\} & ,i \leq j \end{cases} \tag{5}$$
     $$w[i,j] = w[i,j-1] + p_j + q_j$$
     其中，p_j 為 key（內部節點）機率，q_j 為 dummy key（外部節點）機率。
   - $w[1 \cdots \text{Number}(\text{Key})+1][0 \cdots \text{Number}(\text{Key})]$，初始化對角線上元素 $w[j+1,j]$ 為 q_j。
   - $e[1 \cdots \text{Number}(\text{Key})+1][0 \cdots \text{Number}(\text{Key})]$，初始化對角線上元素 $e[j+1,j]$ 為 q_j。
   - $r[1 \cdots \text{Number}(\text{Key})][1 \cdots \text{Number}(\text{Key})]$，$r[i,j]$ 存入 $e[i,j]$ 中最小值對應的 r。
   - 理解：$e[i,r-1]$ 為左子樹，$e[r+1,j]$ 為右子樹，$w[i,j]$ 為節點權重和，因為計算 cost 時是節點階層加一。

6. **Theorem (171, 178, 183, 193, 195)** Shortest path：

   - Floyd-Warshall：sparse 時，也不能提升性能。
   - Johnson's 在 sparse 時，性能較 Floyd-Warshall 好；Reweight 後圖上所有邊權重皆 > 0，且最短路徑與原圖相同。
   - Bellman-Ford：
     $$D[v,k] = \min\{D[v,k-1], \min_{(u,v) \in E}\{D[u,k-1] + wt(u,v)\}\} \tag{6}$$

- Floyd-Warshall：

$$D^k[i,j] = \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\} \tag{7}$$

7. **Theorem ()** Minimum vertex cover (tree)：

$$\begin{aligned} V(v) = \min\{&1 + \mathrm{sum}\{V(c),\ \forall c \in v.child\}, \\ &\mathrm{Length}\{v.child\} + \mathrm{sum}\{V(g),\ \forall c \in v.child\ \forall g \in c.child\}\} \end{aligned} \tag{8}$$

8. **Theorem ()** Max-cut：

    - NPC。
    - 若所有邊權重皆負，則可乘上 -1，變為 Min-cut。
    - 若為平面圖，可轉換為 Chinese Postman Problem（若為無向圖，即 Euler circuit，若為有向圖，則為 NPC）。

9. **Theorem (363)** Maximal points：

```
function MaximalPoints(Point [] points)
    s := ∅
    Sort points by x-coordinate in ascend order.
    max_y := −∞
    for i := n to 1 do
        if points[i].y > max_y then
            Add points[i] to s.
            max_y := points[i].y
        end if
    end for
    return s
end function
```

10. **Theorem (262, 265, 285)**

    - 所有 NP 問題都能多項式時間 reduce 到 NP-Hard。
    - 證明 NPC：問題屬於 NP；已知 NPC 可以多項式時間 reduce 到該問題，即證明該問題是 NP-Hard。
    - 如果可以證明 **lower bound** of **worst case** of NPC problems is polynomial，則 $P = NP$。

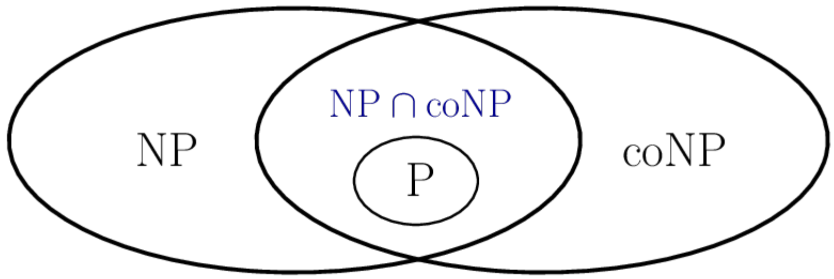

图 1: Relationship between NP and CO-NP.

References

[1] 洪捷. 演算法—名校攻略秘笈. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 9 edition, 2017.

[2] wjungle@ptt. 演算法 @tkb 筆記. https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VVmNWQk9DY3hsUm8/view?usp=sharing, 2017.