線性代數

Linear Algebra

TZU-CHUN HSU[1]

[1]vm3y3rmp40719@gmail.com

[1]Department of Computer Science, Zhejiang University

2021 年 1 月 17 日

Version 3.2

Disclaimer

本文「線性代數」為台灣研究所考試入學的「線性代數」考科使用，內容主要參考黃子嘉先生的三本線性代數參考書 [1][2][3]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的線性代數筆記 [4]。

本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 LaTeX 相關程式碼採用 **MIT 協議**，更多內容請訪問作者之 GitHub 分頁Oscarshu0719。

1 Overview

1. 本文頁碼標記依照實體書 [1][2][3] 的頁碼。

2. TKB 筆記 [4] 章節頁碼：

Chapter	Page No.
1	1
2	33
3	52
4	80
5	116
6	154
7	175
8	206

3. 第 4 章最重要，4.5 超重要，6.6 重要，7.4 超重要。

4. 參考 TKB 筆記 [4] 內容，部分刪減 8.6, 8.8, 8.10, 8.11 內容。刪去 3.6, 4.7, 5.7, 8.4, 8.9 全部內容。

5. 中英轉換：

   - ellipsoid 橢球
   - hyperbola 雙曲線
   - ellipse 橢圓
   - paraboloid 拋物面
   - perpendicular 垂直的
   - conic 圓錐
   - parallelepiped 平行六面體

6. 三角函數：

   - 和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1a}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{1b}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{1c}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{1d}$$

- 和差化積：

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2a}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2b}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2c}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2d}$$

- 積化和差：

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \tag{3a}$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \tag{3b}$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \tag{3c}$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \tag{3d}$$

7. 泰勒級數：

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ \forall x \in [-1, 1) \tag{4a}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ \forall x \tag{4b}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ \forall x \tag{4c}$$

2 Summary

1. **Theorem (1.17)**（tr）$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$，可非方陣。

2. **Theorem (1.21)** 若 $\boldsymbol{A}$ 為對稱矩陣，則 $\boldsymbol{A}^n$ 也是對稱矩陣。

3. **Theorem (2.51)**（可逆）若 $\boldsymbol{A}$ 為可逆上三角矩陣，則 $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是上三角矩陣。

4. **Theorem ((2-45)2.92)**（可逆，方陣）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$ 為可逆方陣，則 $\operatorname{adj}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{adj}(\boldsymbol{B})\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$。

5. **Theorem (3.29, 3.37, 3.73)** 若 $W_1, W_2, W_3 \subseteq V$，則

   - $$\begin{aligned}\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = {}& \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \\ & + \dim(W_3) - \dim((W_1 \cap W_2) + W_3)\end{aligned} \tag{5}$$
   - $W_1 + W_2$ is the smallest subspace containing $W_1 \cup W_2$.
   - $S \subseteq V \iff \operatorname{span}(S) = S$

6. **Theorem (4.73, 4.74)**（線性獨立）若 $T \in \mathcal{L}(V, V')$，則

   - T 必保相依。
   - T 保獨立，即若 S 為線性獨立，則 $T(S)$ 亦是線性獨立 $\iff$ T 為一對一
   - T 保生成，即若 S 為 V 生成集，則 $T(S)$ 亦是 V 生成集 $\iff$ T 為映成

7. **Theorem (4.106)**

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A} \in F^{m\times n} \text{ s.t. } \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 1 \\ \iff & \exists\, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \in F^{m\times 1},\ \boldsymbol{v} \neq 0 \in F^{1\times n},\ \text{s.t. } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{uv}\end{aligned} \tag{6}$$

8. **Theorem ((4-129)4.237)**（方陣）

   - 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$ 為方陣

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - n \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \tag{7}$$

   - 若 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為方陣，且 $\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{O}$，則

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_k) \leq (k-1)n \tag{8}$$

9. **Theorem (4.67, 4.71, 4.93, 4.96, 4.97, 7.69, 7.70, 8.163)**（可逆，解）若 $T(x)=\boldsymbol{Ax}, T\in\mathcal{L}(V,V'), \boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$，則

   - $\boldsymbol{A}$ 為一對一 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 有左反矩陣 $\iff$ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\dim(V)=n\le\dim(V')=m$, $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{0}\}\iff\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有 $\boldsymbol{0}$ 唯一解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 行獨立，列生成 $F^{1\times n}\iff$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\le 1$ 解 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$
   - $\boldsymbol{A}$ 為映成 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 有右反矩陣 $\iff$ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\dim(V')=m\le\dim(V)=n\iff$ $\boldsymbol{A}$ 列獨立，行生成 $F^{m\times 1}\iff$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\ge 1$ 解 $\iff$ $\boldsymbol{AA}^{\mathsf{H}}$ 可逆 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{AA}^{\mathsf{T}})^{-1}$

10. **Theorem (5.5, 5.35, 5.37, 6.35, 6.51)**（相似，tr，det，特徵，方陣）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 為方陣且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，則 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的

    - tr
    - det
    - rank
    - nullity
    - 特徵多項式
    - 特徵根
    - 喬丹型

    皆**相等**，反之不然。但**特徵向量**不保證相同，且僅**喬丹型**為充要條件。

11. **Theorem (5.10, 5.11, 5.34, 6.7, 6.22, 6.34)**（方陣，特徵）若 $T\in\mathcal{L}(V,V)$，$W_i,\ \forall i=1,\cdots,k$ 為 V 子空間且 W_i 為 T-不變子空間，λ 為 T 的特徵根，則

    - $\{\boldsymbol{0}\}$
    - V
    - $\mathrm{N}(T^k),\ k\in\mathbb{N}$
    - $\mathrm{Im}(T^k),\ k\in\mathbb{N}$
    - $W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_k$
    - $W_1+W_2+\cdots+W_k$
    - 特徵空間 $V(\lambda)=\mathrm{N}(T-\lambda\boldsymbol{I})$
    - T-循環子空間 $C_{\boldsymbol{v}}(T)=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v},T(\boldsymbol{v}),T^2(\boldsymbol{v}),\ \cdots\}$

- 廣義特徵空間 $K(\lambda)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{N}((T-\lambda\boldsymbol{I})^i)$

皆為 T-不變子空間。

12. **Theorem (5.38)**（特徵，方陣）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 為方陣，則 $\boldsymbol{AB}$ 與 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的

    - 特徵根
    - 特徵多項式

    若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不為方陣，只能保證 $\boldsymbol{AB}$ 與 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的**非零**特徵根。

    Proof.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{BA} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}=\boldsymbol{PSP}^{-1} \tag{9}$$

，所以 $\boldsymbol{S}\sim\boldsymbol{T}$，有

$$\begin{aligned}&\det(\begin{bmatrix}-x\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}-x\boldsymbol{I}\end{bmatrix})=\det(\begin{bmatrix}\boldsymbol{BA}-x\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & -x\boldsymbol{I}\end{bmatrix})\\ &\Rightarrow\det(-x\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{AB}-x\boldsymbol{I})=\det(\boldsymbol{BA}-x\boldsymbol{I})\det(-x\boldsymbol{I})\\ &\Rightarrow\det(\boldsymbol{AB}-x\boldsymbol{I})=\det(\boldsymbol{BA}-x\boldsymbol{I})\end{aligned} \tag{10}$$

    則 $\boldsymbol{AB}$ 與 $\boldsymbol{BA}$ 有相同特徵多項式。

13. **Theorem (5.40, 8.13)**（特徵，方陣，可逆）若 $\boldsymbol{A}$ 為方陣，則

    - $\boldsymbol{A}^{-1}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆
    - $\boldsymbol{A}^m$, $\forall m\in\mathbb{N}$
    - $\alpha\boldsymbol{A}$
    - $\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}$
    - $f(\boldsymbol{A}),\ f(x)\in P$
    - $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$，若 $\boldsymbol{A}$ 為正規矩陣，即 $\boldsymbol{AA}^{\mathsf{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$。

    特徵向量不改變。

14. **Theorem (5.81)**（對角化，方陣）若 $T,U\in\mathcal{L}(V,V)$ 皆可對角化，則

$$T,U\text{ 可同步對角化}\iff TU=UT \tag{11}$$

15. **Theorem (5.100, 5.102)**（方陣，特徵，對角化，tr）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，且 $T^2 = T$，稱 T 為 V 上的冪等（idempotent）算子，則

    - $V = \mathrm{N}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$
    - $V(0) = \mathrm{N}(T), V(1) = \mathrm{Im}(T)$

16. **Theorem (5.99, 6.13)**（方陣）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，以下等價

    - $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T^2)$
    - $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(T^2)$
    - $\mathrm{nullity}(T) = \mathrm{nullity}(T^2)$
    - $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(T^2) \iff V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$

17. **Theorem (6.17)**（方陣，det，特徵，線性獨立）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ 為冪零算子，且最小正整數 k 為 T 的指標，則 $\exists \boldsymbol{v} \in V \vee \boldsymbol{v} \in \mathrm{N}(T^k) - \mathrm{N}(T^{k-1})$ 且 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, $\{\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{v}), \cdots, T^{k-1}(\boldsymbol{v})\}$ 線性獨立。

18. **Theorem (6.9, 6.11)**（方陣）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，則

    - $\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathrm{N}(T) \subseteq \mathrm{N}(T^2) \subseteq \cdots \subseteq V$
    - $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{N}(T^i) = \mathrm{N}(T^k)$ 為最大冪零區。
    - $V \supseteq \mathrm{Im}(T) \supseteq \mathrm{Im}(T^2) \supseteq \cdots \supseteq \{\mathbf{0}\}$
    - $W = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Im}(T^i) = \mathrm{Im}(T^k)$ 為最大可逆區。

19. **Theorem (6.12)**（方陣）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，則 $\exists\, k \in N$ 使得 $V = \mathrm{N}(T^k) \oplus \mathrm{Im}(T^k)$。

20. **Theorem (6.16)**（特徵）冪零矩陣特徵根全都是 0。

21. **Theorem (6.22, 6.23, 6.24)**（方陣）若 $T \in \mathcal{L}(V, V), \boldsymbol{v} \in V$，則

    - $\dim(C_{\boldsymbol{v}}(T)) = k$ **不能**保證 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{N}(T^k) - \mathrm{N}(T^{k-1})$。
    - $\dim(C_{\boldsymbol{v}}(T)) = k$ 保證 $\beta = \{\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{v}), \cdots, T^{k-1}(\boldsymbol{v})\}$ 為 $C_{\boldsymbol{v}}(T)$ 的基底。
    - $\dim(C_{\boldsymbol{v}}(T)) = k$ **不能**保證 $T^k(\boldsymbol{v}) = 0$。

22. **Theorem (6.69, 6.115, 6.116)**（方陣，特徵，對角化）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，W 為 T-不變子空間，則

    - T_W 的特徵多項式整除 T 的特徵多項式。

- T_W 的極小多項式整除 T 的極小多項式。
- 若 T 可對角化，則 T_W 也可對角化。

23. **Theorem (6.111)**（方陣，特徵）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 為相異特徵根，則

$$T\text{ 可對角化} \iff m_T(x) = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_r) \tag{12}$$

24. **Theorem ((6-55)6.88)**（方陣，特徵）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為實方陣，當 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 時，

$$e^A e^B = e^{A+B} \tag{13}$$

可通過泰勒展開式證明。

25. **Theorem (7.68, 7.69, 7.70, (7-97)7.174)**（實數，可逆）
    - $\mathrm{N}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{N}(\boldsymbol{A})$
    - $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$
    - $\mathrm{Lker}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}) = \mathrm{Lker}(\boldsymbol{A})$
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$
    - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$
    - $\boldsymbol{A}$ 行獨立 $\iff \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$ 可逆
    - $\boldsymbol{A}$ 列獨立 $\iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ 可逆

26. **Theorem (7.79, 7.81)**（正交）若 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$，$W = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{b} \in F^{m\times 1}$，則
    - 若 $\boldsymbol{A}$ 行獨立，且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解，則 $\boldsymbol{x} \in F^{n\times 1}$ 使得 $||\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}||$ 最小 $\iff \boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{b}$。
    - 若 $\boldsymbol{Q}$ 的行向量為**單範正交集**，$W = \mathrm{CS}(\boldsymbol{Q})$，則

$$\mathrm{proj}_W \boldsymbol{b} = \boldsymbol{QQ}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{b} \tag{14}$$

27. **Theorem (7.80, 7.81)**（正交，方陣）若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$ 為方陣，且 $\boldsymbol{A}$ **行獨立**，則
    - $P^2 = P$ 為冪等方陣且 $P^{\mathsf{H}} = P \iff P$ 為正交投影矩陣
    - $\mathrm{CS}(P) = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$
    - $\mathrm{rank}(P) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$

28. **Theorem (7.100, 7.103, 7.104)**（正交）若 $W \subseteq V$，P 為 V 在 W 上的投影算子，則 $\mathrm{N}(P) = W^{\perp}$。

29. **Theorem (7.112)**（解，實數）若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，則

    - **唯一** $\exists \boldsymbol{s} \in \mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$ 為 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 之極小解，即 $||\boldsymbol{x}||_2$ 為所有解中最小。
    - 若 $\boldsymbol{u}$ 滿足 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$，則 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{u}$。

30. **Theorem (.181)** 證明 Cauchy-Schwarz inequality：

$$|<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>| \leq ||\boldsymbol{u}|| \times ||\boldsymbol{v}|| \tag{15}$$

Proof. 用數學歸納法證明：
若 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$，成立。
若 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$，取

$$\alpha = \frac{<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>}{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>} \tag{16}$$

則

$$\begin{aligned}
0 \leq\, & ||\boldsymbol{u} - \alpha \boldsymbol{v}||^2 \\
& = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> - \overline{\alpha} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> - \alpha <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}> + \alpha\overline{\alpha} <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}> \\
& = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> - \frac{\overline{<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>}}{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> - \frac{<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>}{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>} <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}> \\
& + \frac{<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>}{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>} \frac{\overline{<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>}}{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>} <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}> \\
& = ||\boldsymbol{u}||^2 - \frac{|<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>|^2}{||\boldsymbol{v}||^2} \\
\Rightarrow & \frac{|<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>|^2}{||\boldsymbol{v}||^2} \leq ||\boldsymbol{u}||^2 \\
\Rightarrow & |<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>|^2 \leq ||\boldsymbol{u}||^2 \times ||\boldsymbol{v}||^2
\end{aligned} \tag{17}$$

31. **Theorem (8.14, 8.15, 8.17, 8.18, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23, 8.54, 8.55, 8.56)**（方陣，正交，特徵，tr，det，可逆，實數，複數）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，則

定義	λ	a_{ii}	det
self-adjoint $T^* = T$ Hermitian (over $\mathbb{C}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$
symmetric (over $\mathbb{R}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}$			
skew self-adjoint $T^* = -T$ skew Hermitian (over $\mathbb{C}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = -\boldsymbol{A}$	0 或純虛數	0 或純虛數	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0\text{或純虛數}, & \text{if } n \in 2k+1 \end{cases}$
skew symmetric (over $\mathbb{R}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{A}$	0	0	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0, & \text{if } n \in 2k+1 \end{cases}$
positive definite $< T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} >> 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ $< \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x} >= \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{Ax} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$	> 0	> 0	> 0
positive semi-definite $< T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} >\geq 0,\ \forall \boldsymbol{x}$ $< \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x} >= \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{Ax} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x}$	≥ 0	≥ 0	≥ 0
unitary (over $\mathbb{C}$) $T^*T = \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\times$	$\lvert\det(\boldsymbol{A})\rvert = 1$
orthogonal (over $\mathbb{R}$) $T^*T = \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\times$	± 1

32. **Theorem (8.28)**（實數，複數）Polar identity：

- 若 V over $\mathbb{R}$，則

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \frac{1}{4}||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2 - \frac{1}{4}||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}||^2 \tag{18}$$

- 若 V over $\mathbb{C}$，則

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k||\boldsymbol{u}+i^k\boldsymbol{v}||^2 \tag{19}$$

33. **Theorem (8.31, 8.32)**（方陣，正交，實數，複數）若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}(\vee\, \mathbb{R}^{n\times n})$，則以下等價

- $\boldsymbol{A}$ 為么正（正交）。

- $< \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} > = < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$，保內積。
- $||\boldsymbol{Ax}|| = ||\boldsymbol{x}||$，保長度。

34. **Theorem (8.35, (8-5)8.10)**（方陣，正交）若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$ 為么正或是正交方陣，則
    - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{RS}(\boldsymbol{A})$ 皆為單範正交集。
    - 若 $\boldsymbol{A}$ **不為方陣**，則 $\mathrm{RS}(\boldsymbol{A})$ **未必**為單範正交集。
35. **Theorem ()**（方陣，tr）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$ 為方陣，且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 么正相等，則 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{B})$。
36. **Theorem (8.60, 8.61, 8.62, 8.63, 8.68, 8.69)**（方陣，正交，相似，對角化，實數，複數）
    - 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，且 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 么正相似，則以下 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的性質等價
      - 正規
      - Hermitian
      - 斜 Hermitian
      - 正定
      - 半正定
      - 么正
    - 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為實方陣，且 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 正交相似，則以下 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的性質等價
      - 對稱
      - 斜對稱
      - 正交
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 為正規且上三角方陣 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 為對角方陣。
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 為正規方陣 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 可么正對角化。
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為實方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 為對稱方陣 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 可正交對角化。
37. **Theorem (8.89)**（方陣）Cholesky 分解必須對稱且正定。
38. **Theorem (8.94)**（實數，複數）
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 為複數矩陣，則 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ 皆正半定。
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 為實矩陣，則 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ 皆正半定。
39. **Theorem (8.142)**（方陣，正交）Householder 矩陣為對稱且正交矩陣。

40. **Theorem (8.157, (8-47)8.94)**（正交，方陣，特徵）若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{H}}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 的奇異值分解，則

   - $$\sum_{i=1}^{r} \sigma^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \tag{20}$$
   - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{V})$ 為 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$ 的特徵向量且為單範正交集。
   - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{U})$ 為 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ 的特徵向量且為單範正交集。
   - 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 為非零奇異值個數，則
     - $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ 為 $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$ 單範正交基底。
     - $\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 為 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$ 單範正交基底。
     - $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 為 $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$ 單範正交基底。
     - $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 為 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$ 單範正交基底。

41. **Theorem (8.163)**

   - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{+}) = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = \mathrm{RS}(\boldsymbol{A})$
   - $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$ 為 $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||_2$ 的最小平方解。

42. **Theorem ()**

   - (**FALSE**) For any non-zero real **symmetric** matrix, its SVD can be the same as its eigenvalue decomposition.
   - For any non-zero real matrix $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}$'s SVD can be the same as its eigenvalue decomposition. 因為 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}$ 正半定，$\boldsymbol{A}$ 可么正對角化，$\exists\, \boldsymbol{P}$ 為么正矩陣，使得

     $$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} \\ \Rightarrow &\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} \end{aligned} \tag{21}$$

     為 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}$ 的 SVD。
   - 可對角化不保證 non-singular。
   - If $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ are non-singular square matrices, and $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ is also non-singular. Since $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$ is invertible,

     $$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \tag{22}$$

- The transition matrix from one basis to another must be **non-singular**, but a linear transformation matrix can be singular.
- (**FALSE**) Let S be a subset of an inner product space, then $S = (S^{\perp})^{\perp}$.
- (**FALSE**) Let S_1, S_2 be subsets of an inner product space, and $S_1^{\perp} = S_2^{\perp}$, then $S_1 = S_2$.
- (**FALSE**) If V is orthogonal to W, then $V^{\perp}$ is orthogonal to $W^{\perp}$.

References

[1] 黃子嘉. 線性代數及其應用（上）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.

[2] 黃子嘉. 線性代數及其應用（下）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.

[3] 黃子嘉. 線性代數分類題庫. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.

[4] wjungle@ptt. 線性代數 @tkb 筆記. https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VaGtrdW9RVTYtM3c/view?usp=sharing, 2017.