

# 離散數學

## Discrete Mathematics

TZU-CHUN HSU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>[vm3y3rmp40719@gmail.com](mailto:vm3y3rmp40719@gmail.com)

<sup>1</sup>Department of Computer Science, Zhejiang University



2020 年 11 月 21 日  
Version 1.3.0

# Disclaimer

本文「離散數學」為台灣研究所考試入學的「離散數學」考科使用，內容主要參考黃子嘉先生的三本離散數學參考書 [1][2][3]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的離散數學筆記 [4]。

本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其  $\text{\LaTeX}$  相關程式碼採用 MIT 協議，更多內容請訪問作者之 GITHUB 分頁 [Oscarshu0719](#)。

## MIT License

Copyright (c) 2020 TZU-CHUN HSU

Permission is hereby granted, free of charge, to any person obtaining a copy of this software and associated documentation files (the "Software"), to deal in the Software without restriction, including without limitation the rights to use, copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell copies of the Software, and to permit persons to whom the Software is furnished to do so, subject to the following conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be included in all copies or substantial portions of the Software.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

# 1 Overview

1. 本文頁碼標記依照實體書 [1][2][3] 的頁碼。

2. TKB 筆記 [4] 章節頁碼：

Chapter	Page No.
1	1
2	26
3	60
4	78
5	92
6	118
7	152
8	168
9	176
10	207
11	223
12	×
13	227

3. 1.2 考很重，2.5 少考，4.2 考不多，4.3 不是很重要。前 7 章佔 70%，第 9, 10, 13 章各 10%。

4. 第 9, 10, 11, 13 章暫時略過。

5. 必考：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

(a) 6

(b) 11

(c) 14

(d) 31

(e) 32

(f) 41

(g) 43

(h) 53

(i) 54

(j) 74

- (k) 89
- (l) 107
- (m) 111
- (n) 127
- (o) 134
- (p) 136
- (q) 137
- (r) 143
- (s) 144
- (t) 154
- (u) 157
- (v) 170

6. 證明：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

- (a) 6
- (b) 56
- (c) 58
- (d) 76
- (e) 129
- (f) 152

7. 三角函數：

- 和角公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1a)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (1b)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1c)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1d)$$

• 和差化積：

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2a)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2b)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2c)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2d)$$

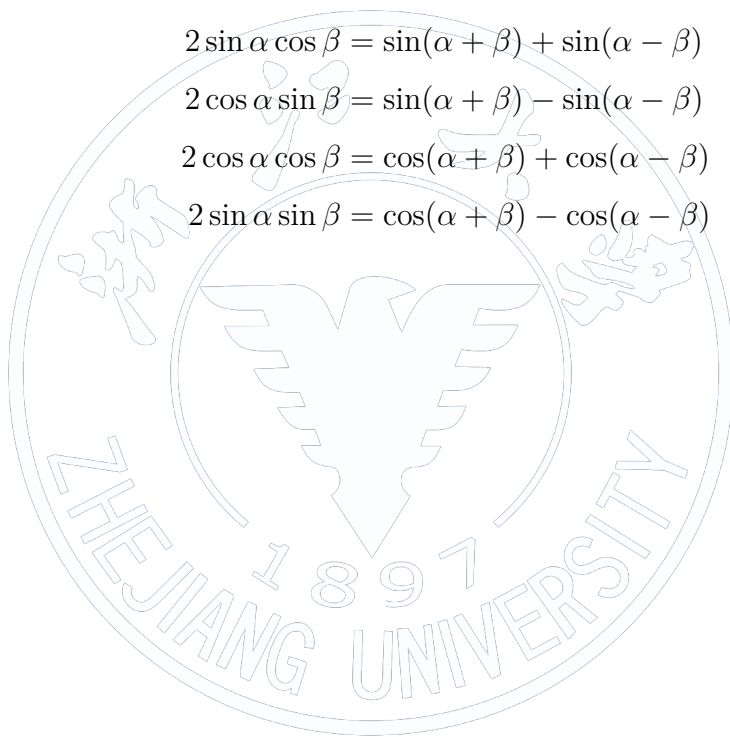
• 積化和差：

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (3a)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (3b)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (3c)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \quad (3d)$$



## 2 Summary

1. **Theorem (1.6)**  $\phi$  為任何集合的子集。

2. **Theorem (1.16)**

$$P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B) \quad (4a)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B) \quad (4b)$$

3. **Theorem (1.55)** 若  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ , 則  $ax + by = c$  有整數解  $\iff \gcd(a, b) | c$ 。

4. **Theorem (1.42)1.92**  $2^{mn} \pmod{2^m - 1} = 1$ 。

5. **Theorem (1.58, 1.60)** (質數)

- 若  $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$ , 且  $\gcd(a, n) = 1$ , 則  $a^{-1} \pmod{n}$  存在。
- 若  $p$  為質數,  $a \in \mathbb{Z}$ , 則  $a^{-1} \equiv a \pmod{p}$  即  $a^2 \equiv 1 \pmod{p} \iff a \equiv \pm 1 \pmod{p}$ 。

6. **Theorem (1.62)** 若  $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$ , 若  $\gcd(c, n) = 1$ , 則  $ac \equiv bc \pmod{n} \iff a \equiv b \pmod{n}$ 。

7. **Theorem (1.61, 1.62)** (質數)

- Wilson's theorem: 若  $p$  為質數, 則

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \quad (5)$$

- Fermat's little theorem: 若  $p$  為質數,  $m \in \mathbb{Z}$ , 且  $\gcd(m, p) = 1$ , 則

$$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (6)$$

8. **Theorem (1.64, 1.65, 1.66)** (質數)

- 若  $n \in \mathbb{Z}^+$ , 則 Euler  $\phi$ -函數  $\phi(n)$  為  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  中與  $n$  互質的元素個數, 又稱 Euler's totient function。
- 若  $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$  為  $n$  的質因數分解, 則  $\phi(n) = n \prod_{j=1}^k (1 - \frac{1}{p_j})$ 。
- 若  $p \in \mathbb{Z}^+$ , 則  $\phi(p) = p - 1 \iff p$  為質數。

- 若  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$ , 且  $\gcd(m, n) = 1$ , 則  $m^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ 。
- 若  $p$  為質數,  $m \in \mathbb{Z}$ , 且  $\gcd(m, p) = 1$ , 則  $m^{-1} \equiv m^{p-2} \pmod{p}$

9. **Theorem (1.66)** 中國餘數定理 (Chinese Remainder Theorem, CRT) 中, 模的數之間必須互質。

10. **Theorem (1.71)** RSA 公鑰密碼系統 (RSA public key cryptosystem):

- 訊息:  $M$ 。
- 加密鑰 (encryption key):

$$n = pq, e \quad (7)$$

其中  $p, q$  為質數, 且  $\gcd(e, \phi(n)) = 1$ ,  $\phi(n) = (p-1)(q-1)$ 。

- 加密訊息:

$$C = M^e \pmod{n} \quad (8)$$

- 解密鑰 (decryption key):

$$d \equiv e^{-1} \pmod{\phi(n)} \quad (9)$$

- 解密訊息:

$$C^d \equiv M \pmod{n} \quad (10)$$

11. **Theorem (2.8, 2.10)** 若  $R$  為一關係, 則  $M_{R^{-1}} = M_R^T$ 。

12. **Theorem (2.18, 2.25)**

- 非對稱性 (asymmetric): 若  $A$  為集合,  $R \subseteq A \times A$  為一關係, 則  $\forall a, b \in A$ ,  $aRb \Rightarrow \neg(bRa)$ , 即若  $(a, b) \in R$ , 則  $(b, a) \notin R$ 。
- 反對稱性 (antisymmetric): 若  $A$  為集合,  $R \subseteq A \times A$  為一關係, 則  $\forall a, b \in A$ ,  $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ , 即若  $(a, b) \in R$ ,  $(b, a) \in R$ , 則  $a = b$ 。
- 非對稱性不允許對角線上元素為 1, 反對稱性則允許對角線上元素為 1。
- 若  $A$  為集合,  $R \subseteq A \times A$  為一關係, 則  $R$  具遞移性  $\iff R^n \subseteq R, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ 。
- 若  $A$  為集合,  $R, S \subseteq A \times A$  為二關係, 則
  - 若  $R, S$  具反身性, 則  $R \cap S$  與  $R \cup S$  亦具反身性。
  - 若  $R, S$  具對稱性, 則  $R \cap S$  與  $R \cup S$  亦具對稱性。
  - 若  $R, S$  具遞移性, 則  $R \cap S$  亦具遞移性。

13. **Theorem (2.42)** 若  $P_i$  表示  $i \geq 1$  個元素上相異的等價關係個數，假設  $P_0 = 1$ ，則

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i.$$

14. **Theorem (2.53, 2.55)**

- $t(s(r(R)))$  未必等於  $t(R) \cup r(R) \cup r(R)$ 。
- 若  $R_1, R_2$  為二等價關係，其分割分別為  $\pi_1$  與  $\pi_2$ ，則
  - $R_1 \cap R_2$  為等價關係，且分割為  $\pi_1 \cdot \pi_2$ 。
  - $R_1 \cup R_2$  未必為等價關係，因為  $R_1 \cup R_2$  未必具遞移性，而  $t(R_1 \cup R_2)$  為等價關係，且分割為  $\pi_1 + \pi_2$ 。

15. **Theorem (2.63, 2.66, 2.67, 2.69, 2.70, 2.71, 2.74)**

- 定義域中所有值都必須有對應到對應域的一個值。
- 若  $f: A \rightarrow B$ ,  $A_1, A_2 \subseteq A$ ，則
  - 若  $A_1 \subseteq A_2$ ，則  $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ 。
  - $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ 。
  - $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ 。
  - $f$  為一對一  $\iff f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
- 若  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ ，則
  - 若  $f, g$  為一對一，則  $g \circ f$  亦是一對一，反之不然。
  - 若  $f, g$  為映成，則  $g \circ f$  亦是映成，反之不然。
  - 若  $f, g$  可逆，則  $g \circ f$  亦可逆，反之不然。
  - 若  $g \circ f$  為一對一，則  $f$  亦是一對一。
  - 若  $g \circ f$  為映成，則  $g$  亦是映成。
- 若  $f: A \rightarrow B$ ,  $B_1, B_2 \subseteq B$ ，則
  - 若  $B_1 \subseteq B_2$ ，則  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ 。
  - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ 。
  - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ 。

16. **Theorem (2.96, 2.99, 2.100, 2.101, 2.102)**

- 若  $A$  為一集合，若  $A = \emptyset$  或  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$  使得  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ ，則稱  $A$  為有限集。
- 若  $A$  為一集合，且  $A$  為有限集或  $A \sim \mathbb{Z}^+$ ，則稱  $A$  為可數集。



- 若  $A, B$  為可數集, 則  $A \times B$  為可數集。
- 若  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$  為可數集, 則  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i$  為可數集。
- $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$  皆為可數集。
- $(0, 1) \sim \mathbb{R}, \mathbb{R}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{C} \sim \mathbb{R}$  皆為不可數集。
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{Q}| < |\overline{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

**17. Theorem (3.23, 3.24)**

•

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad (11)$$

- Vandermonde's convolution:

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} \quad (12)$$

**18. Theorem (3.29, 3.31) 允許重複組合:**

- $- n$  個相異物重複取  $r$  次。
- $- r$  個相同球放入  $n$  個相異箱 (允許空箱)。
- $- x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r, \forall x_i \geq 0$

$$\binom{n+r-1}{r} \quad (13)$$

- $- r$  個相同球放入  $n$  個相異箱 (不允許空箱)。
- $- x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r, \forall x_i > 0$

$$\binom{r-1}{n-1} \quad (14)$$

**19. Theorem (3.50, 3.56, 3.57, 3.59, 3.60)**

- 若  $A, B$  為二集合, 且  $|A| = m, |B| = n, m \geq n$ , 則

$$\text{onto}(m, n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m \quad (15)$$

稱由  $A$  到  $B$  的映成函數。  $\text{onto}(m, n)$  也可視為  $m$  個相異物放入  $n$  個相異箱 (不允許空箱)。

- 第二種 Stirling 數 (String number of the second kind):

$$S(m, n) = \frac{\text{onto}(m, n)}{n!} = \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m}{n!}, \forall m \geq n \geq 1 \in \mathbb{Z}^+ \quad (16)$$

記  $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ , 其中  $\forall m < n, S(m, n) = 0$ 。  $S(m, n)$  也可視為  $m$  個相異物放入  $n$  個相同箱 (不允許空箱)。

- - $m$  個相異物放入  $n$  個相同箱 (允許空箱)。
  - 若  $A$  為一集合, 且  $|A| = m$ , 則  $A$  上等價關係的個數, 即相異分割數。

$$\sum_{i=1}^n S(m, i) \quad (17)$$

•

$$S(m+1, n) = S(m, n-1) + nS(m, n), \forall m \geq n \geq 2 \in \mathbb{Z}^+ \quad (18)$$

- 第一種 Stirling 數 (String number of the first kind): 記  $\left[ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right]$ , 可視為  $m$  個相異物安排成  $n$  個環狀排列。

$$- \left[ \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix} \right] = (m-1)!.$$

$$- \left[ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] \geq S(m, n).$$

–

$$\left[ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix} \right] + m \left[ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right], \forall m \geq n \geq 2 \in \mathbb{Z}^+ \quad (19)$$

20. **Theorem (3.69, 3.70)**  $n$  個相異物的亂序 (Derangement) 個數:

$$D_n = n! \left( \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right) \quad (20)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = n!e^{-1}$$

21. **Theorem (4.8)**

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} &= (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \\ (1+x)^{-n} &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r \end{aligned} \quad (21)$$

## 22. Theorem ()

- 生成函數：
  - 取相異物組合。
  - 相同球放相異箱。
- 指數生成函數：
  - 取相異物排列。
  - 相異物放相異箱。

## 23. Theorem (5.6) Fibonacci 數列：

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \\ F_0 = 1, F_1 = 1 \end{cases} \quad (22)$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

## 24. Theorem (5.90) $n$ 個節點的相異有序二元樹個數：

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (23)$$

又稱為第  $n$  階的 Catalan 數 ( $n$ th Catalan number)，記  $C_n$ 。

## 25. Theorem (6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.16, 6.18)

- 單方向 (unilaterally) 連通圖： $\forall x, y \in V, x \neq y$ ，在  $x, y$  之間存在一條由某一點到另一點的有向路徑。
  - 強連通圖必為單方向連通圖，反之不然。
  - 單方向連通圖必微弱連通圖，反之不然。
- 誘導子圖 (Induced subgraph)：子圖所含原圖之點，皆保留其原有的邊。
- 雙連通圖：無迴圈的連通無向圖且不含切點。
- 度數為一的點稱懸吊點 (pendant)。
- 迴圈的度數為 2。
- 若  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ，則

$$|E| \geq \binom{n-1}{2} + 1 \quad (24)$$

時， $G$  為連通圖。

**26. Theorem (6.44, 6.47, 6.55)**

- 一簡單無向圖，若所有點的度數至數為  $k$ ，則圖上必含一個長度至少為  $k + 1$  的環路 (cycle)。
- 一無向圖，為雙分圖  $\iff$  圖中不含奇數長度的環路。
- 若  $A$  為一鄰接矩陣，則  $\frac{1}{6} \text{tr}(A^3)$  為圖上三角形個數。

**27. Theorem (6.57, 6.59, 6.60, 6.62)**

- 若存在一路線經過圖中每一邊恰一次稱有尤拉路線 (Euler trail)。
- 圖中有尤拉迴路  $\iff$  為連接圖且所有點的度數為偶數。
- $K_n$  有尤拉迴路  $\iff n$  為奇數。
- $K_{m,n}$  有尤拉迴路  $\iff m, n$  為偶數。
- 圖中有尤拉路線  $\iff$  為連通圖且圖中恰含 0 個或 2 個點度數為奇數。
- 圖中有尤拉迴路  $\iff$  為強連通圖且所有點的出度數與入度數相同。

**28. Theorem (6.64, 6.68, 6.71, 6.72, 6.73, 6.74, 6.84)**

- 若存在一路境經過圖中每一點恰一次稱有漢米爾頓路徑 (Hamiltonian path)。
- 漢米爾頓環路必要條件：
  - 度數為 2 的點，與其相鄰的邊必在漢米爾頓環路中。
  - 度數  $\geq 2$  的點，除了前一條件已知在漢米爾頓環路中的邊之外，其他的邊必不在漢米爾頓環路中。
- 有向完全圖必有有向漢米爾頓路徑。
- 若  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n \geq 3$  為一無迴圈無向圖，
  - 若

$$\begin{aligned} \deg(x) + \deg(y) &\geq n - 1, \forall x, y \in V, x \neq y \vee \\ \deg(v) &\geq \frac{n-1}{2}, \forall v \in V \end{aligned} \quad (25)$$

，則  $G$  有漢米爾頓路徑。

- 若

$$\begin{aligned} \deg(x) + \deg(y) &\geq n, \forall x, y \in V, x, y \text{ 不相鄰} \vee \\ \deg(v) &\geq \frac{n}{2}, \forall v \in V \end{aligned} \quad (26)$$

，則  $G$  有漢米爾頓環路。

- $K_n, n \geq 3$  必有漢米爾頓環路。
- 若一圖有漢米爾頓環路，則該圖中任兩點至少有兩條路徑相連。
- 一連通雙分圖，若圖中有漢米爾頓環路，則兩邊的頂點數相同。
- 一連通雙分圖，若圖中有漢米爾頓路徑，則兩邊的頂點數相差  $\leq 1$ 。
- $K_n$  有  $\frac{(n-1)!}{2}$  個相異漢米爾頓環路。
- $K_n, n$  為奇數，有  $\leq \frac{n-1}{2}$  個不共邊的漢米爾頓環路。
- $K_{n,n}$  有  $\frac{1}{2}n!(n-1)!$  個相異漢米爾頓環路。
- 若  $G = (V, E), |V| = n$ ，則

$$|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2 \quad (27)$$

時， $G$  有漢米爾頓環路。

## 29. Theorem (6.88, 6.90, 6.93, 6.94, 6.97, 6.98)

- 一無迴圈無向圖，在圖中一邊中加上一頂點，使其變為二邊，稱基本區分 (elementary subdivision)。
- 二無迴圈無向圖，若二圖同構或皆可由某個圖經由數次基本區分得到，稱二圖同胚 (homeomorphic)。
- Kuratowski's theorem: 平面圖  $\iff$  不含子圖與  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同胚。
- 當一個邊在一個區域出現二次，該邊的度數為二。
- Euler formula: 若  $G = (V, E), |V| = v, |E| = e, r$  為區域個數， $M$  為分量圖數，且  $G$  為平面圖，則  $v - e + r = 1 + M$ 。
- 若  $G = (V, E), |V| = v, |E| = e \geq 2, r$  為區域個數，且  $G$  為無迴圈簡單連通平面圖，則

$$\frac{3}{2}r \leq e \leq 3v - 6 \quad (28)$$

– 若  $G$  不含任何三角形，則

$$e \leq 2v - 4 \quad (29)$$

– 若每個環路  $\geq k \geq 3$  邊組成，則

$$e \leq \frac{k}{k-2}(v-2) \quad (30)$$

- 雙分圖不含三角形。
- 一無迴圈簡單平面圖必含一個度數  $\leq 5$  的頂點。

### 30. Theorem (6.109, 6.110, 6.113, 6.114, 6.115, 6.116)

- $\chi(K_n) = n$ ,  $\chi(W_n) = 1 + \chi(C_n)$ ,  $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 2k \\ 3, & n = 2k + 1 \end{cases}$ 。
- 若  $K_n$  為一圖  $G$  的子圖，則  $\chi(G) \geq n$ 。
- 雙分圖  $\iff$  2-著色  $\iff$  圖中不含奇數長的迴圈。
- 任意平面圖皆為 4-著色，反之不然。
- 若  $G = (V, E)$  為無向圖， $\lambda$  為顏色數，則稱  $P(G, \lambda)$  為著色多項式，表示至多使用  $\lambda$  種顏色著色的不同方法數，且  $\chi(G) = \min\{\lambda | P(G, \lambda) > 0\}$ 。
  - $P(G, \lambda)$  常數項為 0。
  - $P(G, \lambda)$  係數和為 0。
  - $P(G, \lambda)$  最高次項係數為 1。
- 若  $G = (V, E)$  為連通無向圖， $e = \{a, b\} \in E$ ， $G \cdot e$  為  $G - e$  中將  $a, b$  二頂點黏合後的圖，則

$$P(G, \lambda) = P(G - e, \lambda) - P(G \cdot e, \lambda) \quad (31)$$

- 若  $G = (V, E)$  為連通無向圖， $e = \{a, b\} \notin E$ ， $G \cdot e$  為  $G + e$  中將  $a, b$  二頂點黏合後的圖，則

$$P(G, \lambda) = P(G + e, \lambda) + P(G \cdot e, \lambda) \quad (32)$$

- 若  $G = (V, E)$  為無向圖，且  $G_1, G_2$  為  $G$  子圖、 $G = G_1 \cup G_2$ 、 $G_1 \cap G_2 = K_n$ ，則

$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda)}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-1))} \quad (33)$$

### 31. Theorem (7.5, 7.9, 7.15, 7.16, 7.18, 7.20, 7.22, 7.24, 7.28)

- 樹： $|E| = |V| - 1$ 。
- 森林： $|E| = |V| - \kappa(G)$ ，其中  $\kappa(G)$  表示樹的個數。

- 滿 (full) 二叉樹：非樹葉節點都有二個兒子。
- 完全 (complete) 二叉樹：所有樹葉節點的階層皆與樹高相同。
- 平衡 (balanced) 二叉樹：若樹高為  $h$ ，則所有樹葉節點的階層皆為  $h$  或  $h-1$ 。
- 若  $T = (V, E), |V| = n$  為  $m$ -元樹，其中  $i, l$  分別表示內部節點與樹葉個數，則

$$n \leq mi + 1 \quad (34)$$

$$l \leq (m-1)i + 1 \quad (35)$$

當  $T$  為滿  $m$ -元樹時，等號成立。

- 若  $T = (V, E), |V| = n$  為滿  $m$ -元樹，其中  $l, h$  分別表示樹葉個數與樹高，則

$$(m-1)(h-1) + m \leq l \leq m^h$$

$$mh + 1 \leq n \leq \frac{m^{h+1} - 1}{m-1} \quad (36)$$

$h \geq \lceil \log_m l \rceil$   $T$  為平衡樹時，等號成立

- 一二元樹， $n_0$  表示樹葉個數， $n_2$  表示二個兒子的節點個數，則

$$n_0 = n_2 + 1 \quad (37)$$

- 一滿  $m$ -元樹， $i$  為內部節點個數， $I, E$  分別表示內部及外部路徑長，則

$$E = (m-1)I + mi \quad (38)$$

### 32. Theorem (7.30, 7.33, 7.34, 7.35, 7.37, 7.44, 7.46, 7.49)

- 若  $G$  為無向圖，則  $G$  為連通圖  $\iff G$  有生成樹。
- $K_n$  相異生成樹個數為  $n^{n-2}$ 。
- $K_{m,n}$  相異生成樹個數為  $m^{n-1}n^{m-1}$ 。
- 若  $G = (V, E)$  為無向圖，且  $e = \{a, b\} \in E$ ， $N(G)$  為  $G$  的相異生成樹個數，則

$$N(G) = N(G - e) + N(G \cdot e) \quad (39)$$

- 生成樹的任一邊稱分枝 (branch)，是原圖的邊但不為生成樹的邊稱弦 (chord)。  
若  $G = (V, E), |V| = v, |E| = e$ ，則
  - 生成樹必含  $v - 1$  分支與  $e - v + 1$  弦。
  - 若將任意弦加入生成樹，則新圖必含一環路，稱該環路為基本環路 (fundamental cycle)。
  - 若生成樹切除任意分支，則新圖變不連通，稱  $G$  中該切集為基本切集 (fundamental cut set)。
- 一無向連通圖，其任意切集與環路必含偶數個共同邊。
- Prim's 只能找相鄰的邊，Kruskal's 則無限制。
- Kruskal's 時間複雜度為  $O(m \log m)$ ，其中  $m$  為圖的邊數；Prim's 時間複雜度為  $O(n^2)$ ，其中  $n$  為圖的點數。
- 最小生成樹未必唯一，只有在所有邊權重皆不同時，最小生成樹唯一。

### 33. Theorem (8.8, 6.15, 8.21)

- Dijkstra's:
  - 單源。
  - 需在所有邊非負權重情況才能正確工作。
  - 生成的生成樹未必是最小生成樹。
- Floyd-Warshall:
  - 多源。
  - 可以處理負權邊，但不能處理負權迴圈。

### 34. Theorem (8.43)

- 若圖中含有完美配對 (配對含有圖中所有點)，圖中必含偶數頂點數。
- 若  $n$  為奇數時， $K_n$  不具完美配對；若  $n$  為偶數時， $K_n$  具完美配對。



## References

- [1] 黃子嘉. 離散數學（上）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 5 edition, 2010.
- [2] 黃子嘉. 離散數學（下）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 5 edition, 2010.
- [3] 黃子嘉. 離散數學（習題詳解）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 6 edition, 2019.
- [4] wjungle@ptt. 離散數學 @tkb 筆記. <https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VVXFqS3liaXpjLTQ/view?usp=sharing>, 2017.

