線性代數

Linear Algebra

TZU-CHUN HSU[1]

[1]vm3y3rmp40719@gmail.com

[1]Department of Computer Science, Zhejiang University

2020 年 9 月 8 日

Version 1.2

Disclaimer

本文「線性代數」為台灣研究所考試入學的「線性代數」考科使用，內容主要參考黃子嘉先生的三本線性代數參考書 [1][2][3]，以及 wjungle 網友在 PTT 論壇上提供的線性代數筆記 [4]。

本文作者為 TZU-CHUN HSU，本文及其 LaTeX 相關程式碼採用 **MIT 協議**，更多內容請訪問作者之 GitHub 分頁Oscarshu0719。

1 Overview

1. TKB 筆記 [4] 章節頁碼：

Chapter	Page No.
1	1
2	33
3	52
4	80
5	116
6	154
7	175
8	206

2. 第 4 章最重要，4.5 超重要，6.6 重要，7.4 超重要。

3. 參考 TKB 筆記 [4] 內容，部分刪減 8.6, 8.8, 8.10, 8.11 內容。刪去 3.6, 4.7, 5.7, 8.4, 8.9 全部內容。

4. 證明：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

   (a) 102

   (b) 135

   (c) 143

   (d) 144

   (e) 181

   (f) 190

   (g) 191

   (h) 228

5. 必考：（參考 TKB 筆記 [4] 中頁碼）

   (a) 110

   (b) 129

   (c) 133

   (d) 136

   (e) 138

(f) 139

(g) 167

(h) 183

(i) 194

(j) 195

(k) 212

(l) 218

6. 中英轉換：
   - ellipsoid 橢球
   - hyperbola 雙曲線
   - ellipse 橢圓
   - paraboloid 拋物面
   - perpendicular 垂直的
   - conic 圓錐

7. 三角函數：
   - 和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1a}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{1b}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1c}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{1d}$$

   - 和差化積：

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2a}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2b}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2c}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2d}$$

- 積化和差：

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \tag{3a}$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \tag{3b}$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \tag{3c}$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) \tag{3d}$$

8. 泰勒級數：

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,\ \forall |x| < 1, \alpha \in \mathbb{C} \tag{4a}$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \tag{4b}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \forall |x| < 1 \tag{4c}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \tag{4d}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ \forall x \in [-1, 1) \tag{4e}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ \forall x \tag{4f}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ \forall x \tag{4g}$$

9.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{5}$$

2 Summary

1. **Theorem (1.10)**（解）
   - 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，**未必**保證 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \vee \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$。
   - 若 $\boldsymbol{X}^n = \boldsymbol{A}$，**未必**保證 $\boldsymbol{X}$ 有 n 個解。

2. **Theorem (1.17)**（tr）$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$，可非方陣。

3. **Theorem (1.67, 1.92)**（可逆，特徵，解，方陣）若 $\boldsymbol{A}$ 為**方陣**，則以下等價
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆。
   - $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有 $\boldsymbol{0}$ 唯一解。
   - $\boldsymbol{A}$ 列等價於 $\boldsymbol{I}$。
   - $\boldsymbol{xA} = \boldsymbol{0}$ 只有 $\boldsymbol{0}$ 唯一解。
   - $\boldsymbol{A}$ 行等價於 $\boldsymbol{I}$。
   - 0 不為 $\boldsymbol{A}$ 的特徵根。

4. **Theorem (2.26)**（方陣，det）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **不為**方陣，$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$ **未必**成立。

5. **Theorem (2.43, 2.44, 2.45, 2.47)**（可逆，det）
   - $\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}$
   - $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$
   - $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A} = \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}})$
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$ 可逆。

6. **Theorem (2.48)**（可逆，det）Cramer's rule：
   若 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{x}$ 為 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的唯一解，$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b})$ 為將 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行改為 $\boldsymbol{b}$，$\Delta = \det(\boldsymbol{A}), \Delta_i = \det(\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b}))$，則
   $$\boldsymbol{x}_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \tag{6}$$

7. **Theorem (3.13)** 證明 W 為 V 的子空間：
   (a) $\boldsymbol{0} \in W$
   (b) $W \subseteq V, W \neq \emptyset$

(c) $\forall \alpha, \beta \in F,\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W,\ \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} \in W$，即加法及純量積封閉。

8. **Theorem (3.19, 3.20, 3.22)**

   - 若 W_i 為 V 的子空間，則 $\bigcap W_i$ 也是 V 的子空間。
   - 若 W_1, W_2 為 V 的子空間，**未必**保證 $W_1 \cup W_2$ 為 V 的子空間。
   - 若 W_1, W_2 為 V 的子空間，則 $W_1 \cup W_2$ 為 V 的子空間 $\iff W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1$。
   - 若 $W_i,\ \forall i = 1, \cdots, k$ 為 V 的子空間，則 $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ 為 V 的子空間。

9. **Theorem (3.37, 3.42)**

   - S 為 V 的子空間 $\iff \operatorname{span}(S) = S$。
   - $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \operatorname{span}(S_1) \cap \operatorname{span}(S_2)$。
   - $\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) \supseteq \operatorname{span}(S_1) \cup \operatorname{span}(S_2)$。
   - 若 $S_1, S_2, \cdots, S_k \subseteq V$，且 $W_i = \operatorname{span}(S_i),\ \forall i = 1, \cdots, k$，則

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \operatorname{span}(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k) \tag{7}$$

10. **Theorem (3.47)**（det，線性獨立）若 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in C^{(n-1)}[a, b]$，則

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \tag{8}$$

稱 $W(x)$ 為 Wronskian 行列式。若 $\exists x_0 \in [a, b], W(x_0) \neq 0$，則 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 線性獨立，但 $W(x_0) = 0$ 不保證線性相依。

11. **Theorem (3.59)**

   - $V = \{\mathbf{0}\}$ 是唯一一個維度為 0 的空間。
   -

V	F	vector space	dim
$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{C}$	$\surd$	n
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$	$\surd$	n
$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	$\surd$	$2n$
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{C}$	$\times$	$\times$

12. **Theorem ((3-77)3.153, 3.73)** 若 W_1, W_2, W_3 為 V 子空間，但

$$\begin{aligned}\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \\ + \dim(W_3) - \dim((W_1 \cap W_2) + W_3)\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) \neq{} & \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3) \\ & - (\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 \cap W_3) + \dim(W_2 \cap W_3)) \\ & + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)\end{aligned} \tag{10}$$

13. **Theorem (4.10)** 旋轉矩陣（從左到右分別為繞 x, y, z 軸旋轉的旋轉矩陣）：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

14. **Theorem (4.30, 4.32)** 若 $T \in \mathcal{L}(V, V')$ 滿足

    (a) 線性映射。

    (b) 一對一。

    (c) 映成。

    則稱 V 與 V' 同構（isomorphic），記作 $V \cong V'$。因為任意 n 維向量皆與 $F^{n\times 1}$ 同構，因此**同維即同構**。

15. **Theorem (4.73, 4.74)**（線性獨立）若 $T \in \mathcal{L}(V, V')$，則

    - T 必保相依。
    - T 保獨立，即若 S 為線性獨立，則 $T(S)$ 亦是線性獨立 $\iff$ T 為一對一
    - T 保生成，即若 S 為 V 生成集，則 $T(S)$ 亦是 V 生成集 $\iff$ T 為映成

16. **Theorem (4.67, 4.71, 4.93, 4.96, 4.97, 7.69, 7.70, 8.163)**（可逆，解）若 $T(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, T \in \mathcal{L}(V, V'), \boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$，則

    - $\boldsymbol{A}$ 為一對一 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 有左反矩陣 $\iff$ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \dim(V) = n \leq \dim(V') = m$, $\mathrm{N}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{0}\}$ $\iff$ $n \leq m$ $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有 $\boldsymbol{0}$ 唯一解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 行獨立，列生成 $F^{1\times n}$ $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 至多一解 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$

- $\boldsymbol{A}$ 為映成 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 有右反矩陣 $\iff$ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \dim(V') = m \le \dim(V) = n \iff m \le n \iff$ $\boldsymbol{A}$ 列獨立，行生成 $F^{m\times 1} \iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 至少一解 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ 可逆 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{\intercal}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\intercal})^{-1}$
- T 可逆 $\iff T$ 為雙射

17. **Theorem (4.90)**（可逆）

    - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{AB}) \subseteq \mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$
    - $\mathrm{RS}(\boldsymbol{AB}) \subseteq \mathrm{RS}(\boldsymbol{B})$
    - $\mathrm{N}(\boldsymbol{B}) \subseteq \mathrm{N}(\boldsymbol{AB})$。當 $\boldsymbol{A}$ 可逆時，$\mathrm{N}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{N}(\boldsymbol{AB})$
    - $\mathrm{Lker}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathrm{Lker}(\boldsymbol{AB})$

18. **Theorem ((4-3)4.3)** 若 T_1 為繞 x 軸旋轉的旋轉矩陣，T_2 為繞 z 軸旋轉的旋轉矩陣，則 $T_1T_2 \neq T_2T_1$。

19. **Theorem (5.5, 5.35, 5.37, 6.35, 6.51)**（相似，tr，det，特徵，方陣）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 為方陣且 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，則 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的

    - tr
    - det
    - rank
    - nullity
    - 特徵多項式
    - 特徵根
    - 喬丹型

    皆**相等**，反之不然。但**特徵向量**不保證相同，且僅**喬丹型**為充要條件。

20. **Theorem (5.6)**（相似，方陣）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 為方陣且 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，則

    - $\boldsymbol{A}^{\intercal} \sim \boldsymbol{B}^{\intercal}$
    - $\boldsymbol{A}^k \sim \boldsymbol{B}^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$
    - $\alpha\boldsymbol{A} \sim \alpha\boldsymbol{B}$, $\forall \alpha \in F$
    - $\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{I} \sim \boldsymbol{B} + \alpha\boldsymbol{I}$
    - $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$, $\forall f(x) \in F[x]$

21. **Theorem (5.10, 5.11, 5.34, 6.7, 6.22, 6.34)**（方陣，特徵）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，$W_i,\ \forall i = 1, \cdots, k$ 為 V 子空間且 W_i 為 T-不變子空間，λ 為 T 的特徵跟，則

    - $\{\mathbf{0}\}$
    - V
    - $\mathrm{N}(T^k),\ k \in \mathbb{N}$
    - $\mathrm{Im}(T^k),\ k \in \mathbb{N}$
    - $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k$
    - $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$
    - 特徵空間 $V(\lambda) = \mathrm{N}(T - \lambda \boldsymbol{I})$
    - T-循環子空間 $C_{\boldsymbol{v}}(T) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{v}), T^2(\boldsymbol{v}), \cdots\}$
    - 廣義特徵空間 $K(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{N}((T - \lambda \boldsymbol{I})^i)$

    皆為 T-不變子空間。

22. **Theorem (5.23)**（特徵）特徵多項式：

$$p_{\boldsymbol{A}}(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) x^{n-1} + \cdots + \det(\boldsymbol{A}) \tag{12}$$

23. **Theorem (5.34)**（特徵，線性獨立，方陣）若 $\boldsymbol{A}$ 為方陣，$\lambda_i,\ \forall i = 1, \cdots, k$ 為 $\boldsymbol{A}$ 相異特徵根，則

    - $V(\lambda_1), V(\lambda_2), \cdots, V(\lambda_k)$ 為獨立子空間。
    - 若 $\boldsymbol{v}_i$ 為 λ_i 的特徵向量，則 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 線性獨立。

24. **Theorem (5.38)**（特徵，方陣）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 為方陣，則 $\boldsymbol{AB}$ 與 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的

    - 特徵根
    - 特徵多項式

    若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **不**為方陣，只能保證 $\boldsymbol{AB}$ 與 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的**非零**特徵根。

25. **Theorem (5.40, 8.13)**（特徵，方陣，可逆）若 $\boldsymbol{A}$ 為方陣，則

    - $\boldsymbol{A}^{-1}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆
    - $\boldsymbol{A}^m,\ \forall m \in \mathbb{N}$

- $\alpha \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} + \alpha \boldsymbol{I}$
- $f(\boldsymbol{A}),\ f(x) \in P$
- 若 $\boldsymbol{A}$ 為正規矩陣，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$。

特徵向量不改變。

26. **Theorem (5.55, 5.57)**（對角化，特徵，線性獨立，方陣）若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$ 為方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 可對角化 $\iff \boldsymbol{A}$ 有 n 個線性獨立特徵向量；當 $< n$ 個線性獨立特徵向量時，稱 $\boldsymbol{A}$ 有缺陷（defective），即 $\boldsymbol{A}$ 不可對角化。

27. **Theorem (5.59, 5.61)**（方陣，特徵）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，λ 為 T 特徵根，則

    - $\mathrm{am}(\lambda)$ 為 λ 在特徵多項式 $p_T(x)$ 的重根數。
    - $\mathrm{gm}(\lambda) = \dim(V(\lambda)) = \mathrm{nullity}(T - \lambda\boldsymbol{I}) = \dim(V) - \mathrm{rank}(T - \lambda\boldsymbol{I})$
    - $1 \le \mathrm{gm}(\lambda) \le \mathrm{am}(\lambda) \le \dim(V)$

28. **Theorem (5.64)**（方陣，tr，det）若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$ 為方陣且 $\lambda_i,\ \forall i = 1, \cdots, n$ 為 $\boldsymbol{A}$ 特徵根，則

    - $\det(\boldsymbol{A}) = \Pi_{i=1}^{n}\lambda_i$（含重根）
    - $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$（含重根）

29. **Theorem (5.71, 5.75)**（方陣，特徵，對角化）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，$\dim(V) = n$，$\lambda_i,\ \forall i = 1, \cdots, r$ 為相異特徵根，則以下等價

    - T 可對角化。
    - $\mathrm{gm}(\lambda_i) = \mathrm{am}(\lambda_i)$
    - $V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r)$

    若有 n 個相異特徵根，即 $r = n$，則 T 可對角化，反之不然。

30. **Theorem (5.79)**（方陣,對角化）若 $T, U \in \mathcal{L}(V, V)$,存在 V 基底 β 使得 $[T]_\beta = \boldsymbol{D}_1, [U]_\beta = \boldsymbol{D}_2$，且 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ 為對角矩陣，則

    - T, U 稱可同步對角化。
    - $TU = UT$

反之不然，因為 T 或 U **未必**能對角化。當 T 與 U 皆能對角化時，Theorem 30的兩個敘述等價。

31. **Theorem (5.97, 5.100, 5.102, 5.103)**（方陣，特徵，對角化，tr）若 $T \in \mathcal{L}(V,V)$，且 $T^2 = T$，稱 T 為 V 上的冪等（idempotent）算子，則
    - $V = \mathrm{N}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$
    - T 可能特徵根只有 0 和 1。
    - $V(0) = \mathrm{N}(T), V(1) = \mathrm{Im}(T)$
    - T 可對角化，且存在 V 基底 β 使得 $[T]_\beta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{bmatrix}$，其中 $r = \mathrm{rank}(T)$。
    - $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{tr}(T)$

32. **Theorem (5.99)**（方陣）若 $T \in \mathcal{L}(V,V)$，以下等價
    - $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T^2)$
    - $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(T^2)$
    - $\mathrm{nullity}(T) = \mathrm{nullity}(T^2)$
    - $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(T^2)$

33. **Theorem (5.100)**（方陣）Sylvester 第二定理：
    若 $T \in \mathcal{L}(V,V)$，以下等價
    - $V = \mathrm{N}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$
    - $V = \mathrm{N}(T) + \mathrm{Im}(T)$
    - $\mathrm{N}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{0}\}$

34. **Theorem (5.148, 5.150, 5.151, 5.153, 5.155)**（方陣，特徵，對角化）若 $\boldsymbol{P} \in F^{n\times n}$ 為方陣且 $\boldsymbol{P}$ 為 Markov 矩陣，則
    - 若 λ 為 $\boldsymbol{P}$ 的特徵根，則 $|\lambda| \le 1$，且 $\boldsymbol{P}$ 必定含 1 特徵根。
    - 若 $\boldsymbol{Q} \in F^{n\times n}$ 為方陣，則 $\boldsymbol{PQ}$ 仍為 Markov 矩陣。
    - 若存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\boldsymbol{P}^k$ 中元素皆 > 0，則稱 $\boldsymbol{P}$ 為正則轉移矩陣，則
      - 若 λ 為 $\boldsymbol{P}$ 特徵根且 $\lambda \neq 1$，則 $|\lambda| < 1$。
      - 若 $\boldsymbol{P}$ 可對角化，則 $\mathrm{am}(1) = 1$。

- $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{P}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{x}$ 為穩定狀態向量。

35. **Theorem (5.153)**（方陣，特徵）若 $\boldsymbol{P} \in F^{n\times n}$ 為方陣且 $\boldsymbol{P}$ 為 Markov 矩陣，$\boldsymbol{x}$ 為機率向量，有
$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{13}$$
則 $\boldsymbol{x}$ 為 $\boldsymbol{P}$ 的一個穩定狀態向量，且 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{N}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})$，$\boldsymbol{x}$ 為 $\boldsymbol{P}$ 相對於 1 的特徵向量。

36. **Theorem (6.3, 6.15, 6.17, 6.71)**（方陣，det，特徵，線性獨立）若 $T \in \mathcal{L}(V,V)$，存在 $k \in N$ 使得 $T^k = \boldsymbol{O}$，則稱 T 為冪零（nilpotent）算子，最小正整數 k 為 T 的指標，則
    - $\det(T) = 0$
    - $T^n = \boldsymbol{O}$
    - T 為冪零算子 $\iff$ T 特徵根**皆** 0。
    - $\exists \boldsymbol{v} \in V \vee \boldsymbol{v} \in \mathrm{N}(T^k) - \mathrm{N}(T^{k-1})$ 且 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$，$\{\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{v}), \cdots, T^{k-1}(\boldsymbol{v})\}$ 線性獨立。

37. **Theorem (6.9, 6.11)**（方陣）若 $T \in \mathcal{L}(V,V)$，則
    - 核集鏈定理：
        - $\{\boldsymbol{0}\} \subseteq \mathrm{N}(T) \subseteq \mathrm{N}(T^2) \subseteq \cdots \subseteq V$
        - $\exists \min k \in \mathbb{N},\ \mathrm{N}(T^k) = \mathrm{N}(T^{k+1}) = \cdots$
        - $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{N}(T^i) = \mathrm{N}(T^k)$ 為最大冪零區。
    - 像集鏈定理：
        - $V \supseteq \mathrm{Im}(T) \supseteq \mathrm{Im}(T^2) \supseteq \cdots \supseteq \{\boldsymbol{0}\}$
        - $\exists \min k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Im}(T^k) = \mathrm{Im}(T^{k+1}) = \cdots$
        - $W = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Im}(T^i) = \mathrm{Im}(T^k)$ 為最大可逆區。

38. **Theorem (6.12)**（方陣）Fitting lemma：
若 $T \in \mathcal{L}(V,V)$，則存在 $k \in N$ 使得 $V = \mathrm{N}(T^k) \oplus \mathrm{Im}(T^k)$。

39. **Theorem (6.20, 6.22, 6.23, 6.24)**（方陣）若 $T \in \mathcal{L}(V,V), \boldsymbol{v} \in V$，稱
$C_{\boldsymbol{v}}(T) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{v}), T^2(\boldsymbol{v}), \cdots\}$ 為由 $\boldsymbol{v}$ 生成的 T-循環子空間，且 $C_{\boldsymbol{v}}(T)$ 為 T-不變子空間，則：
    - 若 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{N}(T^k) - \mathrm{N}(T^{k-1})$，則稱 $\beta = \{\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{v}), \cdots, T^{k-1}(\boldsymbol{v})\}$ 為循環基底，且 β 為 $W = C_{\boldsymbol{v}}(T)$ 的基底有 $[T_W]_\beta = \boldsymbol{S}_k$ 為下移矩陣，$\dim(C_{\boldsymbol{v}}(T)) = k$，$T^k(\boldsymbol{v}) = 0$。
        - 當 $\beta = \{T^{k-1}(\boldsymbol{v}), T^{k-2}(\boldsymbol{v}), \cdots, T(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\}$ 時，$[T_W]_\beta = \boldsymbol{S}_k^{\intercal}$ 為上移矩陣。

– 反之，$\dim(C_{\boldsymbol{v}}(T)) = k$ **不能**保證 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{N}(T^k) - \mathrm{N}(T^{k-1})$。

– 反之，$\dim(C_{\boldsymbol{v}}(T)) = k$ 保證 $\beta = \{\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{v}), \cdots, T^{k-1}(\boldsymbol{v})\}$ 為 $C_{\boldsymbol{v}}(T)$ 的基底。

– 反之，$\dim(C_{\boldsymbol{v}}(T)) = k$ **不能**保證 $T^k(\boldsymbol{v}) = 0$。
令 $T^k(\boldsymbol{v}) = -a_0\boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{k-1}(-a_i)T^i(\boldsymbol{v})$，有

$$\boldsymbol{A} = [T_W]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} \tag{14}$$

有 $p_{\boldsymbol{A}}(x) = (-1)^k(a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)$，稱 $\boldsymbol{A}$ 為 $(a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)$ 的友（companion）矩陣。當 $T^k(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 時，$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, \boldsymbol{A} = [T_W]_\beta = S_k$。

40. **Theorem (6.24)**（方陣）循環分解定理（Cyclic decomposition theorem）：
若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$ 為指標為 k 的冪零算子，則存在 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in V$ 使得

$$V = C_{\boldsymbol{v}_1}(T) \oplus C_{\boldsymbol{v}_2}(T) \oplus \cdots \oplus C_{\boldsymbol{v}_r}(T) \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{v}_i \in \mathrm{N}(T^{n_i}) - \mathrm{N}(T^{n_i-1})$，則

- $\dim(C_{\boldsymbol{v}_i}(T)) = n_i$，$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$，稱 $\{n_1, n_2, \cdots, n_r\}$ 為不變集（invariant set）。
- $r = \dim(\mathrm{N}(T))$
- $k = n_1$

41. **Theorem (6.33, 6.34, 6.35, 6.36, 6.38)**（方陣，特徵）若 $T \in \mathcal{L}(V, V), \dim(V) = n$，$\lambda$ 為 T 特徵根，稱

$$K(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{N}((T - \lambda \boldsymbol{I})^i) \tag{16}$$

為 T 相對於 λ 的廣義特徵空間，且 $\dim(K(\lambda)) = m$，則

- $K(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in V | (T - \lambda\boldsymbol{I})^p(\boldsymbol{v}) = 0, \exists p \in \mathbb{N}\} = \mathrm{N}((T - \lambda\boldsymbol{I})^n) \supseteq V(\lambda)$
- $K(\lambda) \subseteq V$，為 T-不變子空間。
- λ 為 $p_T(x) = 0$ 的 m 重根，則 $\mathrm{am}(\lambda) = m$。

- $(T-\lambda \boldsymbol{I})_{K(\lambda)}$ 為冪零算子。
- 存在 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in K(\lambda)$ 使得

$$K(\lambda) = C_{\boldsymbol{v}_1}(T-\lambda \boldsymbol{I}) \oplus C_{\boldsymbol{v}_2}(T-\lambda \boldsymbol{I}) \oplus \cdots \oplus C_{\boldsymbol{v}_k}(T-\lambda \boldsymbol{I}) \tag{17}$$

- 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 為 T 相異特徵根，且 $p_T(x)$ 在 F 可分解，則

$$V = K(\lambda_1) \oplus K(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus K(\lambda_r) \tag{18}$$

42. **Theorem (6.68)**（方陣，特徵）Cayley-Hamilton theorem：
若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$ 為方陣，$f(x) = p_{\boldsymbol{A}}(x) = \det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I})$，則 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$。

43. **Theorem (6.69, 6.115, 6.116)**（方陣，特徵，對角化）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，W 為 T-不變子空間，則

    - T_W 的特徵多項式整除 T 的特徵多項式。
    - T_W 的極小多項式整除 T 的極小多項式。
    - 若 T 可對角化，則 T_W 也可對角化。

44. **Theorem (6.99, 6.100, 6.111)**（方陣，特徵，對角化）若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$ 為方陣，$m(x) \in P$ 滿足

    (a) $m(x)$ 為首一（monic）多項式，即 $\deg(m(x)) \geq 1$，且最高項係數為 1。

    (b) $m(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$

    (c) $f(x) \in P,\ f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$，則 $\deg(f(x)) \leq \deg(m(x))$。

    稱 $m(x)$ 為極小（minimal）多項式，則

    - $f(x) \in P,\ f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$，則 $m(x)|f(x)$。
    - $m(x)|p_{\boldsymbol{A}}(x)$
    - $m(x)$ 唯一。
    - 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 為 T 相異特徵根，則
        - $(T-\lambda \boldsymbol{I})_{K(\lambda_i)}$ 有指標 k_i，即點圖的第一列點數，則 $m(x) = (x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}\cdots(x-\lambda_r)^{k_r}$
        - T 可對角化 $\iff m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_r)$

45. **Theorem (7.3, 7.6)**（方陣，tr）若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$ 為方陣，則

- $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>=\overline{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}>}$
- $<\boldsymbol{u},\alpha\boldsymbol{v}>=\overline{\alpha}<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$
- $<\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}>=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathsf{H}})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}$

46. **Theorem (7.34)**（正交，線性獨立）若 $S=\{\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{k}\}\subseteq V$ 為不含 $\mathbf{0}$ 的正交集，則 S 線性獨立，反之不然。

47. **Theorem (7.64, 7.65, 7.66)**（正交）若 W 為 V 子空間，$\beta=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}$ 為 W 的**正交**基底，$\boldsymbol{v}\in V$，則稱

$$P(\boldsymbol{v})=\mathrm{proj}_W\,\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{k}\frac{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i>}{<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>}\boldsymbol{v}_i \tag{19}$$

為 V 在 W 上的正交投影向量，則

- P 為線性映射。
- $\forall\boldsymbol{v}\in W,\ P(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$
- $\mathrm{Im}(P)=W$
- $P^2=P$
- $$||P(\boldsymbol{v})||^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{|<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i>|^2}{||\boldsymbol{v}_i||^2},\ \forall\boldsymbol{v}\in V \tag{20}$$
- Bessel's Inequality：
$$||P(\boldsymbol{v})||\le||\boldsymbol{v}||,\ \forall\boldsymbol{v}\in V \tag{21}$$
- Parseval's equality：
$$||P(\boldsymbol{v})||=||\boldsymbol{v}||,\ \forall\boldsymbol{v}\in W \tag{22}$$
- $$||\boldsymbol{v}-P(\boldsymbol{v})||\le||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}||,\ \forall\boldsymbol{w}\in W,\boldsymbol{v}\in V \tag{23}$$

48. **Theorem (7.68)**（正交）

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx\} \tag{24}$$

為單範正交集。

49. **Theorem (7.68, 7.69)**（實數）

- $\mathrm{N}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{N}(\boldsymbol{A})$
- $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$
- $\mathrm{Lker}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}) = \mathrm{Lker}(\boldsymbol{A})$
- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$

50. **Theorem (7.73, 7.79)**（正交）若 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$，$W = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{b} \in F^{m\times 1}$，則

- $\boldsymbol{x} \in F^{n\times 1}$ 使得 $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||$ 最小 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{b}$ 稱正規方程式（normal equation），正規方程式必有解，則
  - 若 $\boldsymbol{A}$ **不**為行獨立，正規方程式有**無限多解**，但 $\mathrm{proj}_W \boldsymbol{b}$ **必定唯一**。
  - 若 $\boldsymbol{A}$ 為行獨立，$\mathrm{proj}_W \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{b}$。

51. **Theorem (7.80, 7.81)**（正交）若 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ **行獨立**，$P = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ 為正交投影矩陣，則

- $P^2 = P$ 且 $P^{\mathsf{H}} = P$
- $\mathrm{CS}(P) = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$
- $\mathrm{rank}(P) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$

反之，若 $P^2 = P$ 且 $P^{\mathsf{H}} = P$，則 P 為投影在 $\mathrm{CS}(P)$ 上的正交投影矩陣。

52. **Theorem (7.81)**（正交）若 $\boldsymbol{Q}$ 的行向量為**單範正交集**，$W = \mathrm{CS}(\boldsymbol{Q})$，則

$$\mathrm{proj}_W \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{b} \tag{25}$$

即投影在 $\boldsymbol{Q}$ 的正交投影矩陣為 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathsf{H}}$。

53. **Theorem (7.98)**（正交）若 $S \subseteq V$，稱

$$S^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V | < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{s} >= 0,\ \forall \boldsymbol{s} \in S\} \tag{26}$$

為 S 的正交補空間，則

- $\{\boldsymbol{0}\}^{\perp} = V$ 且 $V^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$
- $S^{\perp} \subseteq V$
- $S \subseteq S^{\perp\perp}$

- $S \cap S^{\perp} = \begin{cases} \{\mathbf{0}\}, & \text{if } \{\mathbf{0}\} \in S \\ \emptyset, & \text{if } \{\mathbf{0}\} \notin S \end{cases}$

54. **Theorem (7.100, 7.103, 7.104)**（正交）若 $W \subseteq V$，P 為 V 在 W 上的投影算子，則

    - $\mathrm{N}(P) = W^{\perp}$
    - $V = W \oplus W^{\perp}$
    - $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$
    - $W = W^{\perp\perp}$
    - $\boldsymbol{v} - P(\boldsymbol{v})$ 為 $\boldsymbol{v}$ 在 $W^{\perp}$ 上的正交投影向量，即 $\operatorname{proj}_{W^{\perp}} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \operatorname{proj}_{W} \boldsymbol{v}$。
    - $\boldsymbol{I} - P$ 為 V 在 $W^{\perp}$ 上的正交投影算子。
    - $\boldsymbol{v}$ 到 W 的距離 $= ||\boldsymbol{v} - \operatorname{proj}_{W} \boldsymbol{v}|| = ||\operatorname{proj}_{W^{\perp}} \boldsymbol{v}||$。

55. **Theorem (7.108)**（正交，實數）$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，則

    - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\intercal})^{\perp} = \mathrm{N}(\boldsymbol{A})$
    - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A})^{\perp} = \mathrm{N}(\boldsymbol{A}^{\intercal})$
    - $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})^{\perp} = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\intercal})$
    - $\mathrm{N}(\boldsymbol{A}^{\intercal})^{\perp} = \mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$

56. **Theorem (7.110, 7.111)**（正交，實數）若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{m}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n}$，則

    - 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$，則
      - $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\intercal}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\intercal}$ 為 $\mathbb{R}^{m}$ 投影在 $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$ 的正交投影矩陣。
      - $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\intercal}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\intercal}$ 為 $\mathbb{R}^{m}$ 投影在 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A}^{\intercal})$ 的正交投影矩陣。
    - 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$，則
      - $\boldsymbol{A}^{\intercal}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\intercal})^{-1}\boldsymbol{A}$ 為 $\mathbb{R}^{n}$ 投影在 $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\intercal})$ 的正交投影矩陣。
      - $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\intercal}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\intercal})^{-1}\boldsymbol{A}$ 為 $\mathbb{R}^{n}$ 投影在 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$ 的正交投影矩陣。

57. **Theorem (7.112)**（解，實數）

    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$，則 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\iff \forall \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$，則 $\boldsymbol{b}^{\intercal}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$。
    - 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，則
      - **唯一** $\exists \boldsymbol{s} \in \mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$ 為 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 之極小解，即 $||\boldsymbol{x}||_2$ 為所有解中最小。

– 若 $\boldsymbol{u}$ 滿足 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$，則 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{u}$。

58. **Theorem (8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.8)**（方陣，可逆，特徵）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，存在 $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$ 使得

$$< T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} >=< \boldsymbol{u}, T^*(\boldsymbol{v}) > \tag{27}$$

稱 T^* 為 T 的伴隨（adjoint）算子，則

- T^* 唯一。
- 若 $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 為 V **單範正交基底**，則 $[T^*]_\beta = ([T]_\beta)^{\mathsf{H}}$。
- 若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$ 為方陣，則 $< \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{y} >$。
- $(\alpha T + \beta U)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}U^*$
- $(T^*)^* = T$
- $(TU)^* = U^*T^*$
- 若 T 可逆，則 T^* 可逆，$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$。
- 若 λ 為 T 特徵根，則 $\overline{\lambda}$ 為 T^* 特徵根。

59. **Theorem (8.13)**（方陣，特徵）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，滿足

$$T^*T = TT^* \tag{28}$$

稱 T 為正規（normal）算子，則

- $||T(\boldsymbol{v})|| = ||T^*(\boldsymbol{v})||, \forall \boldsymbol{v} \in V$
- $T - c\boldsymbol{I}, \forall c \in V$ 仍是正規算子。
- 若 $\boldsymbol{v}$ 為 T 相對於 λ 的特徵向量，則 $\boldsymbol{v}$ 為 T^* 相對於 $\overline{\lambda}$ 的特徵向量。
- 若 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 分別是 T 相對於 λ_1, λ_2 相異特徵根的特徵向量，則 $\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2$。

60. **Theorem (8.14, 8.15, 8.17, 8.18, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23, 8.54, 8.55, 8.56)**（方陣，正交，特徵，tr，det，可逆，實數，複數）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，則

定義	λ	a_{ii}	det
self-adjoint $T^* = T$ Hermitian (over $\mathbb{C}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}$ symmetric (over $\mathbb{R}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$
skew self-adjoint $T^* = -T$ skew Hermitian (over $\mathbb{C}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = -\boldsymbol{A}$	0 或純虛數	0 或純虛數	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0\text{或純虛數}, & \text{if } n \in 2k+1 \end{cases}$
skew symmetric (over $\mathbb{R}$) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{A}$	0	0	$\begin{cases} \in \mathbb{R}, & \text{if } n \in 2k \\ 0, & \text{if } n \in 2k+1 \end{cases}$
positive definite $< T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} >> 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ $< \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >= \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$	> 0	> 0	> 0
positive semi-definite $< T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} >\geq 0,\ \forall \boldsymbol{x}$ $< \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >= \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x}$	≥ 0	≥ 0	≥ 0
unitary (over $\mathbb{C}$) $T^*T = \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\times$	$\lvert\det(\boldsymbol{A})\rvert = 1$
orthogonal (over $\mathbb{R}$) $T^*T = \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\times$	± 1

- 皆為正規，相異特徵根對應的特徵向量皆正交。
- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣時，$\boldsymbol{A}$ 為對稱矩陣即 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}$ 時，**不**保證 $\boldsymbol{A}$ 為正規。
- 么正矩陣與正交矩陣的特徵值皆可能為**虛數**（並非 ± 1）。
- 正定（over $\mathbb{R} \vee \mathbb{C}$）、么正、正交矩陣皆可逆。
- 若 $\boldsymbol{A}$ 為 Hermitian 矩陣即 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}$ 時，$\boldsymbol{A}$ 的相異特徵根對應的特徵向量必正交（比正規更鬆的條件）。

61. **Theorem (8.27, 8.30)**（方陣，實數，複數）若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$，則

- 若 $< T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} >= 0,\ \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ (over $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$)，則 $T = \boldsymbol{O}$。

- 若 $< T(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} >= 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in V$ (over $\mathbb{C}$)，則 $T = \boldsymbol{O}$，**$\boldsymbol{V}$ (over $\mathbb{R}$) 時不成立**。
- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$ 為方陣，則 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{y}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F^{n\times 1}$
- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$。**在 $\mathbb{R}$ 時不成立**。

62. **Theorem (8.31, 8.32, 8.34, 8.35)**（方陣，正交，實數，複數）
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則以下等價
      - $\boldsymbol{A}$ 么正。
      - $< \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$
      - $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$
      - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$ 單範正交。
      - $\mathrm{RS}(\boldsymbol{A})$ 單範正交。
      - 若 $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 為 $\mathbb{C}^{n\times 1}$ 單範正交基底，則 $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_n\}$ 亦是單範正交基底。
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為實方陣，則以下等價
      - $\boldsymbol{A}$ 正交。
      - $< \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
      - $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
      - $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$ 單範正交。
      - $\mathrm{RS}(\boldsymbol{A})$ 單範正交。

63. **Theorem (8.28)**（實數，複數）Polar identity：
    - 若 V over $\mathbb{R}$，則 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \frac{1}{4}||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 - \frac{1}{4}||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||^2$。
    - 若 V over $\mathbb{C}$，則 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k||\boldsymbol{u} + i^k\boldsymbol{v}||^2$。

64. **Theorem (8.50, 8.53)**（方陣，實數，複數）
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則
      - $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A} \iff \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$。
      - 若 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，則 $\boldsymbol{A}$ 正定。
      - 若 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，則 $\boldsymbol{A}$ 半正定。
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為實方陣，則

- 若 $\boldsymbol{A}^\intercal = \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，則 $\boldsymbol{A}$ 正定。
- 若 $\boldsymbol{A}^\intercal = \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，則 $\boldsymbol{A}$ 半正定。

65. **Theorem (8.60, 8.61, 8.62, 8.63, 8.69)**（方陣，正交，相似，對角化，實數，複數）
    - 么正或正交相似必定相似，反之不然。
    - 可么正或正交對角化，則可對角化。
    - 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，且 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 么正相似，則以下 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的性質等價
      - 正規
      - Hermitian
      - 斜 Hermitian
      - 正定
      - 半正定
      - 么正
    - 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為實方陣，且 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 正交相似，則以下 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的性質等價
      - 對稱
      - 斜對稱
      - 正交
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 為正規方陣 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 可么正對角化。
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為實方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 為對稱方陣 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 可正交對角化。

66. **Theorem (8.89)**（方陣，分解，實數）Cholesky 分解：
    若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 對稱實方陣，且 $\boldsymbol{A}$ 正定，則 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\intercal$，其中 $\boldsymbol{L}$ 為下三角且對角線元素皆正。

67. **Theorem (8.83, 8.90, 8.91, 8.92, 8.93, 8.94, 8.95)**（方陣，實數，複數）
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則以下等價
      - $\boldsymbol{A}$ 正定。
      - $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 為複數矩陣且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = n$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^\mathsf{H}\boldsymbol{B}$。
      - 存在 $\boldsymbol{B}$ 為正定矩陣，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$。
    - 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為對稱實方陣，則以下等價
      - $\boldsymbol{A}$ 正定。

  - $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 為實矩陣且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = n$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}$。
  - 主子行列式（principal minors）$\Delta_k(\boldsymbol{A}) > 0$（必須為對稱實方陣）。
  - 存在 $\boldsymbol{B}$ 為正定矩陣，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$。
- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣，則以下等價
  - $\boldsymbol{A}$ 正半定。
  - $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 為複數矩陣，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{B}$。
  - 存在 $\boldsymbol{B}$ 為正半定矩陣，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$。
- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 對稱實方陣，則以下等價
  - $\boldsymbol{A}$ 正半定。
  - $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 為實矩陣，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}$。
  - 存在 $\boldsymbol{B}$ 為正半定矩陣，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$。
- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 為複數矩陣，則 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ 皆正半定。
- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 為實矩陣，則 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ 皆正半定。

68. **Theorem (8.102)**（方陣，特徵，實數，複數）主軸定理（Principal axis theorem）：

- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為 Hermitian 複數方陣，則

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 + \cdots + \lambda_n|y_n|^2 \tag{29}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 為 $\boldsymbol{A}$ 特徵根，$y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{C}$。

- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為對稱實方陣，則

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{30}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 為 $\boldsymbol{A}$ 特徵根，$y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$。

69. **Theorem (8.108, 8.109, 8.111)**（方陣，特徵，實數，複數）若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為 Hermitian 複數方陣或 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為對稱實方陣，$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ 為 $\boldsymbol{A}$ 特徵根，則

- $$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{Q(\boldsymbol{x})}{||\boldsymbol{x}||^2} = \frac{<\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>}{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>},\ \boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0} \tag{31}$$

  稱 $\rho(\boldsymbol{x})$ 為 $\boldsymbol{x}$ 的 Rayleigh quotient。

- Rayleigh principle：

- $\lambda_1 \leq \rho(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_n$
- $\max_{||\boldsymbol{x}||=1} \rho(\boldsymbol{x}) = \lambda_n$
- $\min_{||\boldsymbol{x}||=1} \rho(\boldsymbol{x}) = \lambda_1$

70. **Theorem (8.141, 8.142, 8.145)**（實數，方陣）若 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, ||\boldsymbol{u}|| = 1$，則稱

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\intercal \tag{32}$$

為相對於 $\boldsymbol{u}$ 的 Householder 矩陣或基本鏡射算子（elementary reflextor），則

- $\boldsymbol{H}^\intercal = \boldsymbol{H}$ 為對稱方陣。
- $\boldsymbol{H}^\intercal \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}$ 為正交方陣。
- $||\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{y}||, \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||}$，則
  - $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = 2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^\intercal \boldsymbol{x}$
  - $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

71. **Theorem (8.154, 8.157, 8.160, 8.161, 8.163, 8.164)**（正交，方陣，特徵，可逆，解，實數，複數）

- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 為複數矩陣，$s = \min\{m, n\}$，則稱 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\mathsf{H}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 的奇異值分解（Singular Value Decomposition，SVD），其中 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 為複數方陣，$\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 為複數矩陣，$\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 為複數方陣。
  - $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 為么正。
  - $(\boldsymbol{\Sigma})_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$
  - $(\boldsymbol{\Sigma})_{ii} = \sigma_i,\ \forall i = 1, 2,\ \cdots, s$
  - $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_s$ 稱為奇異值。
- 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 為實矩陣，$s = \min\{m, n\}$，則稱 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\intercal$ 為 $\boldsymbol{A}$ 的奇異值分解（Singular Value Decomposition，SVD），其中 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 為實方陣，$\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 為實矩陣，$\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為複數方陣。
  - $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 為正交。
  - $(\boldsymbol{\Sigma})_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$
  - $(\boldsymbol{\Sigma})_{ii} = \sigma_i,\ \forall i = 1, 2,\ \cdots, s$
  - $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_s$ 稱為奇異值。
- 奇異值必定唯一，但 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 未必唯一。

- 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 為非零奇異值個數，則
  - $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ 為 $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$ 單範正交基底。
  - $\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 為 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$ 單範正交基底。
  - $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 為 $\mathrm{CS}(\boldsymbol{A})$ 單範正交基底。
  - $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 為 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$ 單範正交基底。
- 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathsf{H}}$，則稱 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V\Sigma}^+\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 的虛反矩陣（pseudoinverse），則
  - $(\boldsymbol{\Sigma}^+)_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$。
  - $(\boldsymbol{\Sigma}^+)_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i}, & \text{if} \sigma_i \neq 0 \\ 0, & \text{if} \sigma_i = 0 \end{cases}$
  - $\boldsymbol{O}^+ = \boldsymbol{O}$
  - 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，則 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{-1}$。
  - $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^+)$
  - $(c\boldsymbol{A})^+ = \frac{1}{c}\boldsymbol{A}^+$
  - $(\boldsymbol{A}^+)^+ = \boldsymbol{A}$
  - $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^+ = (\boldsymbol{A}^+)^{\mathsf{T}}$
  - 若 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times r}, \boldsymbol{B} \in F^{r\times n}, (\boldsymbol{AB})^+ = \boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A}^+$，其中 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = r$。
  - $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$ 為使 $||\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}||_2$ 最小的 $\boldsymbol{x}$，即 $||\boldsymbol{x}_0||_2$ 為最小者。
  - 若 $\boldsymbol{A}$ 行獨立，則 $\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$
  - 若 $\boldsymbol{A}$ 列獨立，則 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{-1}$

References

[1] 黄子嘉. 線性代數及其應用（上）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.

[2] 黄子嘉. 線性代數及其應用（下）. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.

[3] 黄子嘉. 線性代數分類題庫. 鼎茂圖書出版股份有限公司, 4 edition, 2011.

[4] wjungle@ptt. Tkb 筆記. https://drive.google.com/file/d/0B8-2o6L73Q2VaGtrdW9RVTYtM3c/view?usp=sharing, 2017.