Tarea # 4 : Optimización : 21 11 20

(3) $\min \; x_1^2 + x_2^2$

$$\text{s.a} \quad x_1^2 - x_2 \leq 4$$

$$x_2 - x_1 \leq 2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad G_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad G_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l(x) = x_1^2 + x_2^2 + M_1(x_1^2 + x_2 - 4) + M_2(x_2 - x_1 - 2)$$

$$l_{x_1} = 2x_1 + 2M_1 x_1 - M_2 = 0 \quad (a)$$

$$l_{x_2} = 2x_2 - M_1 + M_2 = 0 \quad (b)$$

$$l_{M_1} = x_1^2 - x_2 - 4 \leq 0 \quad (c)$$

$$l_{M_2} = x_2 - x_1 - 2 \leq 0 \quad (d)$$

$$M_1(x_1^2 - x_2 - 4) + M_2(x_2 - x_1 - 2) = 0$$

Con la condición necesaria de 1er orden encontramos el punto candidato a mínimo.

• Supongamos g_1 y g_2 inactivas $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Reemplazando en ⓐ : $2x_1 = 0$

$$\boxed{x_1 = 0}$$

Reemplazando en ⓑ : $2x_2 = 0$

$$\boxed{x_2 = 0}$$

$$\boxed{\mu_1 = \mu_2 = 0}$$

Se cumple CNPO.

Ahora verifiquemos que se cumpla la condición suficiente de segundo orden:

① $\nabla f(x^*) + \mu^{*\prime} \nabla g(x^*) = 0$

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(0) \\ 2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

② Como no hay restricciones activas, no se tiene en cuenta el espacio tangente.

③ $L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \succ 0$

$$\nabla L(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2\mu_1 x_1 - \mu_2 \\ 2x_2 - \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix} \Rightarrow L(x, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2+2\mu_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \succ 0$$