Elementos de Física 24 de octubre de 2019

Clase -4: Colisiones elásticas en una y dos dimensiones

Profesor: *Julián Rincón* Autor: J.R.

Nota: *Estas notas están basadas en el capítulo ocho de "An Introduction to Computer Simulations Methods: Applications to Physical Systems" de H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian, y en el capítulo seis de "An Introduction to Mechanics" de D. Kleppner and R. Kolenkow.*

Recordemos primero las definiciones de colisiones elásticas e inelásticas.

Una colisión en la que la energía cinética total no cambia se denomina **colisión elástica**. No se pierde ni se gana cinética durante la colisión. Una colisión es elástica si las fuerzas de interacción son conservativas, como la fuerza de un resorte, por ejemplo.

Una colisión en la que no se conserva la energía cinética total se llama **colisión inelástica**. La energía cinética ha cambiado porque las fuerzas de interacción no son conservativas; parte de la energía cinética inicial se transformó en alguna otra forma de energía.

También existen colisiones a veces llamadas **superelásticas**, donde la energía cinética de las partículas salientes es mayor que la de las partículas entrantes. Por otro lado, una colisión inelástica en la que los cuerpos en colisión se unen y se mueven como un solo objeto después de la colisión, a menudo se denomina **colisión completamente inelástica**.

También debemos recordar que en cualquier colisión en la que se puedan despreciar las fuerzas externas, se conserva el momentum lineal total antes y después de la colisión.

En lo siguiente, nos referiremos a partículas y discos impenetrables, o simplemente discos, como sinónimos. Debería ser claro del contexto a qué tipo de objeto en particular nos estamos refiriendo. Por ejemplo, en una dimensión hablamos de puntos o varillas (*rods*); en dos dimensiones hablamos de discos, discos impenetrables (*hard disks*) o partículas.

-4.1. Colisiones elásticas en una dimensión

Consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 con velocidades $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ que colisionan elásticamente. Luego de la interacción, las partículas dispersan con velocidades $\mathbf{u}_1'$ y $\mathbf{u}_2'$. Note que aunque, en principio, no hay necesidad de usar vectores en este problema por su carácter unidimensional, veremos que resultará útil mantener la notación vectorial. La tarea para este problema es encontrar las velocidades $\mathbf{u}_1'$ y $\mathbf{u}_2'$ después de la colisión. Refiérase a la Figura (-4.1) para entender el significado de las variables definidas y las ecuaciones planteadas en lo que sigue.

Dado que la colisión es elástica, esto implica que la energía cinética se conserva. El momentum lineal, como siempre, es una cantidad conservada durante el proceso de colisión. Sea $\mathbf{P} = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{P}' = m_1\mathbf{u}_1' + m_2\mathbf{u}_2'$ los momentums lineales antes y después de la colisión, respectivamente. Entonces, las leyes de conservación son

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}, \qquad K' = K, \tag{-4.1}$$

donde hemos adoptado una notación similar para la energía cinética $K = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$ y $K' = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2$. Aunque es posible encontrar las velocidades después de la colisión desde el sistema de referencia del laboratorio (L), el cálculo se simplifica desde el sistema de referencia de centro de masa (C).

Sea $\mathbf{x}_k$ la posición de la masa m_k, con $k = 1, 2$, medida desde el sistema de coordenadas del laboratorio L. El origen del sistema de coordenadas de centro de masa C se localiza mediante el vector centro de masa:

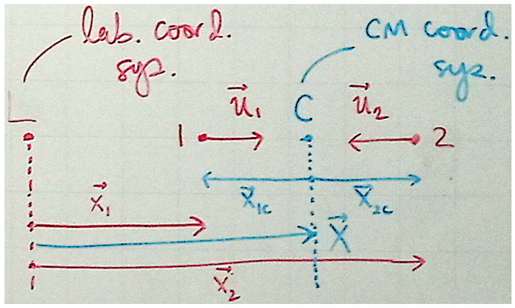

Figura -4.1: Colisión en una dimensión. Descripción del sistema de coordenadas de laboratorio (L) y de centro de masa (C). Ver el texto para más detalles.

$\mathbf{X} = (m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2)/(m_1+m_2)$, y la respectiva velocidad:

$$\mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2}{m_1+m_2}, \tag{-4.2}$$

donde $\mathbf{u}_k = \dot{\mathbf{x}}_k$. La posición de la partícula k, medida desde C, está dada por $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{kc} + \mathbf{X}$, donde $\mathbf{x}_{kc}$ es la posición de la partícula k desde el centro de masa. Por otro lado, para las velocidades tenemos que

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1c} + \mathbf{V}, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{2c} + \mathbf{V}, \tag{-4.3}$$

donde $\mathbf{V}$ es medida desde el sistema de referencia del laboratorio, por supuesto. Ahora que hemos relacionado las cantidades relevantes en los sistemas de coordenadas C y L podemos trabajar desde C y expresar las velocidades desde L usando las ecuaciones anteriores.

Las leyes de conservación de momentum lineal y energía (cinética), en el centro de masa, se enuncian como

$$\mathbf{P}'_c = \mathbf{P}_c = \mathbf{0}, \qquad K'_c = K_c, \tag{-4.4}$$

donde $\mathbf{P}_c = m_1\mathbf{u}_{1c} + m_2\mathbf{u}_{2c}$ y $K_c = \frac{1}{2}m_1u_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2u_{2c}^2$ son el momentum lineal y la energía cinética medidos desde el centro de masa (C) antes de la colisión. Note que hemos usado la misma notación para referirnos a las cantidades antes —sin prima— y después —con prima— de la colisión. Usando que $\mathbf{P}'_c = \mathbf{0}$ tenemos que

$$\mathbf{u}'_{2c} = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{u}'_{1c}. \tag{-4.5}$$

Por otro lado, $K'_c = K_c$ implica que la magnitud de $\mathbf{u}'_{1c}$ satisface

$$\boxed{u'_{1c} = \pm u_{1c}.} \tag{-4.6}$$

donde el origen de dos soluciones tiene que ver con el hecho de que K_c depende cuadráticamente de u'_{1c}. Es posible mostrar que la solución con signo '+' implica que las partículas no colisionan; por lo tanto, consideramos que esa solución no tiene sentido físico con respecto al problema que tratamos de solucionar. Siempre obtenemos tal "solución" trivial en este tipo de problemas porque las velocidades iniciales, evidentemente, satisfacen las ecuaciones de la leyes de conservación.

Usando la solución con signo '$-$' obtenemos para la velocidad, después de la colisión, medida desde L: $\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}'_{1c} + \mathbf{V} = -\mathbf{u}_{1c} + \mathbf{V} = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{V}$. Haciendo algo de álgebra se obtiene

$$\boxed{\mathbf{u}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\mathbf{u}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\mathbf{u}_2 = c\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2,} \tag{-4.7}$$

donde los coeficientes c, c_2 han quedado definidos implícitamente. Haciendo un análisis similar para la velocidad final de la partícula 2 tenemos

$$\boxed{\mathbf{u}'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}\mathbf{u}_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{u}_1 = -c\mathbf{u}_2 + c_1\mathbf{u}_1,} \tag{-4.8}$$

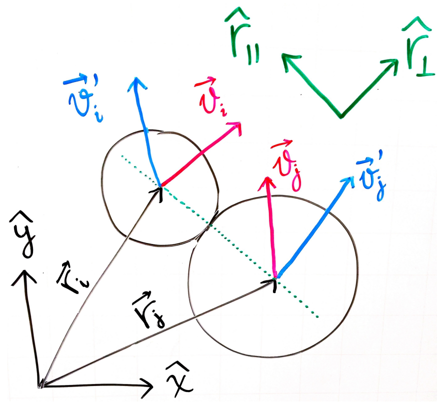

Figura -4.2: Colisión de discos en dos dimensiones y sistemas de coordenadas. Ver el texto para más detalles.

donde, de manera similar, el coeficiente c_1 ha quedado también implícitamente definido.

Finalmente, calculemos el impulso total recibido por la partícula 1, $\mathbf{J}_1 = \mathbf{P}_1' - \mathbf{P}_1$, debido a la fuerza de contacto ejercida por la partícula 2 durante en intervalo de tiempo de duración de la colisión. De la definición de impulso tenemos

$$\mathbf{J}_1 = m_1\mathbf{u}_1' - m_1\mathbf{u}_1 = -\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\right) \tag{-4.9}$$

El impulso de la partícula 2 es obtenido de la relación $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1$, consecuencia de la conservación del momentum lineal —¡tercera ley de Newton!—. Es decir, no hay fuerzas externas que actúan sobre el sistema físico conformado por las partículas 1 y 2.

-4.2. Colisiones elásticas en dos dimensiones

Aumentemos la complejidad del problema de colisiones elásticas entre dos partículas, atacando el problema ahora en dos dimensiones espaciales.

Consideremos dos discos impenetrables (*hard disks*) i y j, con masas m_i y m_j, y radios σ_i y σ_j. Las velocidades iniciales, antes de la colisión, son $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$, y sean $\mathbf{v}_i'$ y $\mathbf{v}_j'$ las correspondientes velocidades después de la colisión. Como en todo problema de colisiones, supondremos que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema de discos. La única interacción es debida a las fuerzas internas de contacto entre los discos. El problema aquí, como siempre, es encontrar las velocidades $\mathbf{v}_i'$ y $\mathbf{v}_j'$. Las cantidades primadas significan que son calculadas después de la colisión. Refiérase a la Figura (-4.2) para entender el origen de coordenadas y las ecuaciones planteadas en adelante.

Suponiendo que la colisión es elástica, entonces tenemos que

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}, \qquad K' = K, \tag{-4.10}$$

donde $\mathbf{P}' = m_i\mathbf{v}_i' + m_j\mathbf{v}_j'$ y $\mathbf{P} = m_i\mathbf{v}_i + m_j\mathbf{v}_j$ son los momentums lineales después y antes de la colisión, respectivamente. De forma similar, las energías cinéticas antes y después del impacto están dadas por $K = \frac{1}{2}m_iv_i^2 + \frac{1}{2}m_jv_j^2$ y $K' = \frac{1}{2}m_iv_i'^2 + \frac{1}{2}m_jv_j'^2$, respectivamente. Es claro de estas ecuaciones que la rapidez (la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}_k$) del disco k se expresa como v_k.

Note que las leyes de conservación corresponden a tres ecuaciones diferentes —dos para conservación del momentum lineal y una para conservación de la energía cinética—; sin embargo, tenemos cuatro incógnitas que resolver: las componentes de las velocidades $\mathbf{v}_i'$ y $\mathbf{v}_j'$. Necesitamos otra ecuación más para resolver de manera única el problema de colisión en dos dimensiones. ¿De dónde puede provenir esta ecuación extra? Una posibilidad es considerar a unos de los discos como un subsistema. En particular, note que la única fuerza que existe durante la colisión es la fuerza de contacto entre los discos. Esta fuerza se encuentra en la dirección $\hat{\mathbf{r}}_\parallel$; por lo tanto, en la dirección $\hat{\mathbf{r}}_\perp$ no hay fuerzas de contacto. Esto implica que el momentum lineal de los discos a lo largo de esta dirección se conserva. En otras palabras, el impulso neto sobre el disco k, a lo largo de la dirección $\hat{\mathbf{r}}_\perp$, es cero; es decir,

$$\mathbf{J}_{k\perp} = \mathbf{0}. \tag{-4.11}$$

Esta ecuación, que de hecho es unidimensional, corresponde a la cuarta ecuación que nos permitirá encontrar las velocidades finales de los discos.

Ahora, en el instante exacto de la colisión, los dos discos están en contacto en un punto que está definido por el vector que une los centros de los discos. Si la posición del disco k, en este instante de tiempo, se escribe como $\mathbf{r}_k$, entonces, el "vector de contacto" se puede escribir como

$$\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \tag{-4.12}$$

y, a partir de este vector podemos definir un vector unitario como $\hat{\mathbf{r}}_\parallel := \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|$, donde $|\mathbf{r}_{ij}| = \sigma_i + \sigma_j$, *en el instante de la colisión*. De manera similar, podemos definir un vector unitario en la dirección perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}_\parallel$ que vamos a llamar $\hat{\mathbf{r}}_\perp$.

En esta base cualquier vector $\mathbf{w}$, en dos dimensiones, se puede escribir como $\mathbf{w} = w_\parallel \hat{\mathbf{r}}_\parallel + w_\perp \hat{\mathbf{r}}_\perp =: \mathbf{w}_\parallel + \mathbf{w}_\perp$. En particular, para el disco k el vector velocidad se escribe, entonces, como

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k\parallel} + \mathbf{v}_{k\perp}. \tag{-4.13}$$

En adelante, trabajaremos con las ecuaciones de las leyes de conservación en esta base; de esta manera el problema es más fácil de analizar. La ley de conservación (-4.11) implica $\mathbf{0} = \mathbf{J}_{k\perp} = \mathbf{P}'_{k\perp} - \mathbf{P}_{k\perp} = m_k\mathbf{v}'_{k\perp} - m_k\mathbf{v}_{k\perp}$. Por lo tanto,

$$\boxed{\mathbf{v}'_{k\perp} = \mathbf{v}_{k\perp}.} \tag{-4.14}$$

Note que esta solución implica que la componente perpendicular de la ecuación $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$, que es $\mathbf{P}'_\perp = \mathbf{P}_\perp$, es ahora trivial. Es decir, se satisface automáticamente. Por otro lado, la ecuación $K' = K$ se reduce a

$$m_i v'^2_{i\parallel} + m_j v'^2_{j\parallel} = m_i v^2_{i\parallel} + m_j v^2_{j\parallel}, \tag{-4.15}$$

donde hemos usado la ecuación anterior. Adicionalmente, la ecuación $\mathbf{P}'_\parallel = \mathbf{P}_\parallel$ se escribe como

$$m_i\mathbf{v}'_{i\parallel} + m_j\mathbf{v}'_{j\parallel} = m_i\mathbf{v}_{i\parallel} + m_j\mathbf{v}_{j\parallel}. \tag{-4.16}$$

Cabe señalar que estas dos ecuaciones son suficientes para encontrar las variables que nos hacen falta: las componentes $\mathbf{v}'_{i\parallel}$ y $\mathbf{v}'_{j\parallel}$ de las velocidades $\mathbf{v}'_i$ y $\mathbf{v}'_j$, respectivamente. Más importante, las dos ecuaciones anteriores son exactamente las ecuaciones que describen la colisión elástica de partículas en una dimensión que vimos en la sección anterior. En este caso, esa única dimensión espacial corresponde a la dirección $\hat{\mathbf{r}}_\parallel$.

Realizando la siguiente identificación de variables: $v_{i\parallel} \longleftarrow u_1$, $v_{j\parallel} \longleftarrow u_2$ y una identificación análoga para el caso prima, tenemos que las componentes de las velocidades que queremos encontrar se pueden expresar como

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v}'_{i\parallel} &= c\mathbf{v}_{i\parallel} + c_j\mathbf{v}_{j\parallel}, \\ \mathbf{v}'_{j\parallel} &= -c\mathbf{v}_{j\parallel} + c_i\mathbf{v}_{i\parallel}, \end{aligned}} \tag{-4.17}$$

donde $c := (m_i - m_j)/(m_i + m_j)$ y $c_k := 2m_k/(m_i + m_j)$, con $k = i,\, j$.

Esto completaría la solución del problema de colisión elástica en dos dimensiones. Sin embargo, note que las velocidades finales están escritas en la base $\{\hat{\mathbf{r}}_\parallel, \hat{\mathbf{r}}_\perp\}$ y las velocidades iniciales están en la base canónica $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\}$. Por lo tanto, para completar la solución en la base en la que fue planteado el problema, debemos ahora escribir $\mathbf{v}'_i$ y $\mathbf{v}'_j$ en la base canónica. Para ello consideremos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_i &= \mathbf{v}'_{i\parallel} + \mathbf{v}'_{i\perp} = \mathbf{v}'_{i\parallel} + \mathbf{v}_{i\perp} = c\mathbf{v}_{i\parallel} + c_j\mathbf{v}_{j\parallel} + \mathbf{v}_{i\perp} \\ &= c\mathbf{v}_{i\parallel} + c_j\mathbf{v}_{j\parallel} + \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i\parallel} = c_j(\mathbf{v}_{j\parallel} - \mathbf{v}_{i\parallel}) + \mathbf{v}_i = c_j\left[(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)\cdot\hat{\mathbf{r}}_\parallel\right]\hat{\mathbf{r}}_\parallel + \mathbf{v}_i \end{aligned} \tag{-4.18}$$

Recordando que $\hat{\mathbf{r}}_\parallel = \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|$ y usando el hecho que $|\mathbf{r}_{ij}|= \sigma_i + \sigma_j$ en el instante exacto de la colisión, la velocidad final del disco i es

$$\boxed{\mathbf{v}_i' = -\frac{c_j}{(\sigma_i+\sigma_j)^2}\left(\mathbf{v}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij}\right)\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_i,} \tag{-4.19}$$

donde $\mathbf{v}_{ij} := \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$. Esta es la solución, en la base canónica, para la colisión elástica de dos discos en dos dimensiones. Se puede obtener una ecuación similar para $\mathbf{v}_j'$ si se intercambian las variables $i \longleftrightarrow j$ en la ecuación anterior.

Finalmente, el impulso que recibe el disco i debido a la fuerza de contacto ejercida por el disco j es $\mathbf{J}_i = m_i\mathbf{v}_i' - m_i\mathbf{v}_i$. Insertando en esta ecuación, la definición de c_j y la ecuación solución anterior, obtenemos

$$\boxed{\mathbf{J}_i = -\frac{2m_im_j}{m_i+m_j}\frac{\mathbf{v}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij}}{(\sigma_i+\sigma_j)^2}\mathbf{r}_{ij}.} \tag{-4.20}$$

Igual que antes, note que $\mathbf{J}_j = -\mathbf{J}_i$ —por tercera ley de Newton—. Esto completa la solución final al problema de colisión de dos discos impenetrables en dos dimensiones espaciales.

-4.3. Tiempo de colisión

Para finalizar nuestro análisis, encontremos el criterio que especifica cuándo, y si es que, un disco colisiona con otro disco o con un muro del contenedor (que suponemos contiene los discos). Para este problema supondremos que estamos trabajando bajo las condiciones impuestas por el modelo de discos impenetrables. Debido a que la interacción dentro de este modelo entre los discos, y los muros y los discos, es de corto alcance, podemos suponer que las trayectorias entre colisiones ocurren bajo la condición de velocidad constante o aceleración nula. En otras palabras, los discos se desplazan en líneas rectas.

-4.3.1. Colisión disco-muro

Considere la colisión de un disco k, de masa m_k y radio σ_k, con uno de los muros horizontales del contenedor. Suponga que, en un instante de tiempo dado, el disco tiene posición $\mathbf{r}_k$ y velocidad $\mathbf{v}_k$. Queremos, entonces, determinar cuándo, y si es que, el disco impacta algún muro.

Durante un intervalo de tiempo t_k el disco, que se mueve con velocidad constante, avanza a una nueva posición $\mathbf{r}_k' = \mathbf{r}_k + \mathbf{v}_k t_k$. Note que el disco choca con un muro horizontal si se cumple que la magnitud de la posición final del disco es tal que

$$r_{ky}' = r_{ky} + v_{ky}t_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } v_{ky} < 0, \\ L_y - \sigma_k & \text{si } v_{ky} > 0, \\ 0 & \text{si } v_{ky} = 0, \end{cases} \tag{-4.21}$$

donde L_y es la longitud vertical del contenedor, y el origen del correspondiente sistema de coordenadas se ubica en la esquina inferior izquierda del mismo. Note que si la primera igualdad se cumple, esto quiere decir que el disco impacta al muro horizontal inferior. De manera similar, si $v_{ky} > 0$, el disco se mueve hacia arriba y por tanto existe la posibilidad de chocar con el muro horizontal superior. Por último, si el disco solo se mueve horizontalmente nunca colisiona con los muros horizontales.

Resolviendo estas ecuaciones para t_k encontramos que dependiendo de la componente $\hat{\mathbf{y}}$ de la velocidad del disco k el tiempo de colisión es

$$t_k = \begin{cases} \dfrac{\sigma_k - r_{ky}}{v_{ky}} & \text{si } v_{ky} < 0, \\ \dfrac{L_y - \sigma_k - r_{ky}}{v_{ky}} & \text{si } v_{ky} > 0, \\ \infty & \text{si } v_{ky} = 0. \end{cases} \tag{-4.22}$$

Es decir, existen tres posibles casos: El disco podría colisionar con (i) el muro horizontal inferior, (ii) el muro horizontal superior, o (iii) no colisionar en absoluto con los muros horizontales.

Este cálculo asume que solamente existen un disco y los muros del contenedor. La presencia de otras partículas o discos implica que existe una probabilidad que la colisión disco-muro en el tiempo t_k nunca ocurra.

Una ecuación análoga predice el tiempo de colisión con un muro vertical. Solamente debemos intercambiar las posiciones, las dimensiones del contenedor y las componentes de la velocidad a lo largo de las direcciones canónicas ($x \longleftrightarrow y$) en las ecuaciones anteriores.

-4.3.2. Colisión disco-disco

Evaluemos, ahora, las condiciones bajo las que dos discos colisionan elásticamente. Considere dos discos i y j, con masas m_i y m_j y radios σ_i y σ_j, cuyas posiciones son $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$, respectivamente, en un instante de tiempo dado. La tarea es determinar cuándo, y si es que, los discos colisionan.

Después de un tiempo t_{ij}, los discos se han desplazado a las nuevas posiciones $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t_{ij}$ y $\mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j + \mathbf{v}_j t_{ij}$. (Note que se cumple que $t_{ij} = t_{ji}$.) Si los discos colisionan, sus centros estarán separados una distancia igual a la suma de los radios; es decir,

$$\left|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j\right| = \sigma_i + \sigma_j \tag{-4.23}$$

Sustituyendo las posiciones de los discos después de la colisión en términos de las posiciones antes de la colisión y las velocidades, se obtiene $|\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} t_{ij}| = \sigma_i + \sigma_j =: \sigma$, donde $\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ y $\mathbf{v}_{ij} := \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$. Resolviendo para t_{ij} se obtiene una ecuación cuadrática cuyas soluciones son

$$t_{ij}^{\pm} = \frac{-\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \pm \sqrt{\left(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}\right)^2 - v_{ij}^2 \left(r_{ij}^2 - \sigma^2\right)}}{v_{ij}^2}. \tag{-4.24}$$

De las posibles soluciones, solo debemos extraer las que tienen sentido físico. Para obtener dichas soluciones se debe cumplir que $t_{ij}^{\pm} > 0$, luego debe satisfacerse que

$$\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0. \tag{-4.25}$$

Note que si este producto interno es positivo, las partículas se están desplazando en direcciones opuestas y nunca habría colisión.

Adicionalmente, para que existan soluciones que nos dan tiempos reales y no complejos, el discriminante, d_{ij}, debe cumplir la condición

$$d_{ij} = \left(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}\right)^2 - v_{ij}^2 \left(r_{ij}^2 - \sigma^2\right) \geqslant 0. \tag{-4.26}$$

Si esta condición se satisface tenemos dos posible soluciones para t_{ij}. Note que la solución con raíz positiva no tiene sentido físico porque esto implica que los discos se cruzaron sin colisionar y están haciendo contacto en un punto opuesto al esperado. Esto contradice la suposición que los discos son impenetrables; por lo tanto, esta solución es descartada.

Nos queda, entonces, la solución con raíz negativa; es decir, el tiempo más corto. Entonces, el tiempo de colisión entre los discos i y j es, $t_{ij} = t_{ij}^{-}$. Incluyendo todos los casos que acabamos de analizar, la solución completa al tiempo de colisión entre dos discos i y j impenetrables es

$$t_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{si } v_{ij} = 0, \\ \infty & \text{si } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0, \\ \infty & \text{si } d_{ij} < 0, \\ -\dfrac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \sqrt{d_{ij}}}{v_{ij}^2} & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{-4.27}$$

Esto finaliza el análisis de una colisión elástica entre dos discos, de acuerdo al modelo de discos impenetrables, en dos dimensiones espaciales.