4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza σ^2. Muestre que: $Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = 0$

$Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = Cov(X_i, \bar{X}) - Cov(\bar{X}, \bar{X})$

$= \mathbb{E}[X_i \bar{X}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[\bar{X}] - (\mathbb{E}[\bar{X}\bar{X}] - \mathbb{E}[\bar{X}]\mathbb{E}[\bar{X}])$

$= \mathbb{E}[X_i \bar{X}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[\bar{X}] - (\mathbb{E}[\bar{X}^2] - \mathbb{E}[\bar{X}]^2)$ definición de $Var(\bar{X})$

$= \mathbb{E}[X_i \bar{X}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[\bar{X}] - Var(\bar{X})$

$= \mathbb{E}[X_i \bar{X}] - \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2$

$= \mathbb{E}(X_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) - \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2$ definición de $\bar{X}$

$= \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_i^2 + (n-1)(X_i X_j)) - \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2$ Resolvemos la primera iteración y eso nos da X_i^2. Al final resolvemos toda y llamamos X_j a su resultado.

$= \frac{1}{n}(\mathbb{E}(X_i^2) + (n-1)\mathbb{E}(X_i X_j)) - \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2$

$= \frac{1}{n}(\sigma^2 + \mu^2 + (n-1)\mu^2) - \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2$ Resultados del ejercicio anterior

$= \cancel{\frac{1}{n}\sigma^2} + \frac{1}{n}\mu^2 + \frac{n-1}{n}\mu^2 - \mu^2 - \cancel{\frac{1}{n}\sigma^2}$

$= \frac{1+n-1}{n}\mu^2 - \mu^2 = \frac{n}{n}\mu^2 - \mu^2$

$= \mu^2 - \mu^2 = 0$

Cantidad de personas

5. Variable aleatoria con media 50 = n   Todas Independientes

Variable aleatoria con media comun 8 = X_i
Cantidad de dinero gastado

Como hay n Personas que ingresan a la tienda en un dia determinado, Por ende Podemos definir Y como la cantidad de dinero que ingresa a la tienda en un dia así:

$$Y = X_1 + \dots + X_n$$

Como Y es una suma de numeros aleatorios de variables aleatorias independientes, Entonces tenemos que

$$E[Y] = E[N]\,E[X]$$

$$E[Y] = 8 \cdot 50 = 400$$

6. Valor esperado y varianza de una variable Poisson

$$P_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad M_X(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$$

$$\frac{d\,e^{\lambda(e^s-1)}}{ds} = \lambda e^s e^{\lambda(e^s-1)} \Big|_{s=0} = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda = E[X]$$

$$\frac{d\,\lambda e^s e^{\lambda(e^s-1)}}{ds} = \frac{d\,\lambda e^{s+(\lambda e^s-\lambda)}}{ds} = \lambda\left(e^{s+\lambda(e^s-1)}(1+\lambda e^s)\right)\Big|_{s=0} =$$

$$\lambda(1+\lambda) = \lambda + \lambda^2$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = (\lambda+\lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$$