Tarea #3 Probabilidad

(7) Tenemos una v.a X tal que:

$$M_X(s) = e^{3(e^s - 1)}.$$

Observe que $M_X(s)$ es la función generadora de momentos de una v.a de Poisson con $\lambda = 3$.

Así $P_X(K) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^K}{K!} = \dfrac{e^{-3}\,3^K}{K!}.$

Por lo tanto:

$$P(X=0) = P_X(K=0) = \frac{e^{-3}\,\cancel{3^0}}{\cancel{0!}}$$

$$= e^{-3}$$

$$\boxed{P(X=0) = 0.04978}$$

Escaneado con CamScanner

(8) Tenemos Y v.a uniforme en $(0,1)$.
Sabemos que condicionado a $Y=p$, X tiene una distribución binomial con parámetros n & p.

Luego: $M_{X|Y=p}(s) = (1-p+pe^s)^n$

$$\mathbb{E}(e^{sX} | Y=p) = (1-p+pe^s)^n.$$

Sabemos por Teorema que:

$$\mathbb{E}(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(e^{sX} | Y=p) \underbrace{f_Y(p)}\, dp.$$

Así:

$$M_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) = \int_0^1 (1-p+pe^s)^n \underbrace{(1)}_{\text{Ya que } Y \text{ es unif. en } (0,1)} dp$$

$$M_X(s) = \int_0^1 (1-p+pe^s)^n\, dp$$

$$U = 1-p+pe^s$$
$$du = (-1+e^s)\, dp$$
$$\frac{du}{e^s-1} = dp$$

$$M_X(s) = \int_0^1 \frac{U^n}{e^s-1}\, du.$$

Escaneado con CamScanner

(Hay que evaluar en P)

$$M_X(s) = \frac{1}{e^s - 1} \int_0^1 u^n \, du$$

$$= \frac{1}{e^s - 1} \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{e^s - 1} \left(\frac{(1 - P + Pe^s)^{n+1}}{n+1} \right)_0^1$$

$$= \frac{1}{e^s - 1} \left(\frac{(\cancel{1-1} + (1)e^s)^{n+1} - (1 - 0 + (0)e^s)^{n+1}}{n+1} \right)$$

Así:

$$M_X(s) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{e^{s(n+1)}}{e^s - 1} \right).$$

Observe que $M_X(s)$ tiene la forma de la función generadora de momentos de una variable discreta uniforme, tomando $a=0$ & $b=n$.

Es decir que X es v.a discreta con distribución uniforme en $[0, n]$.

Por lo tanto es igualmente probable que X tome cualquier valor $0, 1, 2, \dots, n$.