Introdução ao Processamento Digital de Imagem
MC920 / MO443

Prof. Hélio Pedrini

Instituto de Computação
UNICAMP
http://www.ic.unicamp.br/~helio

2º Semestre de 2020

Roteiro

1. Complementação
   - Transformadas Geométricas
   - Projeções Planares

- a) determinante da matriz de rotação:

$$\det R_\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

- b) suponha que a aplicação de uma rotação no ponto P' de volta para P, ou seja, a realização de transformação inversa da rotação. O ângulo de rotação requerido é, obviamente, $-\theta$. Da equação de transformação de rotação, tem-se que:

$$R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$.

- c) pode-se mostrar que a matriz R^{-1} é a inversa de R, recordando que o produto de uma matriz e sua inversa é a matriz identidade:

$$R_\theta . R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- d) a transposta de R, denotada R^T, é igual à inversa de R, R^{-1}:

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R^{-1}$$

Portanto, a inversa de qualquer matriz de rotação R é sua transposta. Desde que formalmente a determinação da inversa de uma matriz é computacionalmente mais cara do que determinar sua transposta, o resultado acima é importante e prático.

Transformadas Geométricas

Composição de Transformações

- Usaremos composição como uma combinação de matrizes de transformação T, S e R.
- O propósito de se compor transformações é o ganho de eficiência que se obtém ao aplicarmos uma transformação composta a um ponto em vez de aplicarmos uma série de transformações, uma após a outra.

- Considere a rotação 2D de um objeto em torno de um ponto arbitrário P_1. Sabemos apenas aplicar a rotação em um ponto em torno da origem. Assim, podemos dividir este problema de rotação em 3 problemas simples, ou seja:
  1) efetuar translação, levando P_1 à origem;
  2) efetuar a rotação desejada;
  3) efetuar translação oposta à realizada em (1), levando P_1 à posição anterior.

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um ponto arbitrário

- Esta sequência é ilustrada a seguir, em que o objeto sofre uma rotação em $P_1(x_1, y_1)$. A primeira translação é por $(-x_1, -y_1)$ e a última translação (oposta à primeira) é por (x_1, y_1).

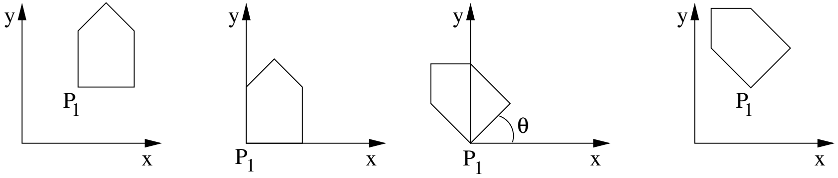

Figura: Composição de transformações.

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um ponto arbitrário

- A transformação em sequência é:

$$
\begin{aligned}
T(x_1, y_1)\; R(\theta)\; T(-x_1, -y_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & -x_1(1-\cos\theta) + y_1 \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & -y_1(1-\cos\theta) - x_1 \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Esse procedimento pode ser usado de forma similar para se efetuar a escala de um objeto em relação a um ponto arbitrário P_1.
- Primeiramente, o ponto P_1 é transladado para a origem, então é feita a escala desejada e, então, o ponto P_1 é transladado de volta. Dessa forma, a transformação em sequência é:

$$T(x_1, y_1)\, S_{xy}\, T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_x & 0 & x_1(1 - S_x) \\ 0 & S_y & y_1(1 - S_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um ponto arbitrário

- Vamos supor que se deseja aplicar as transformações de escala, rotação e translação em um objeto conforme mostrado a seguir, em que o ponto $P_1(x_1, y_1)$ é o centro da rotação e da escala. A sequência de transformações ficaria a seguinte:
  1) efetuar translação, levando P_1 à origem;
  2) efetuar a escala e a rotação desejadas;
  3) efetuar translação da origem à nova posição P_2, onde o objeto deve ser posicionado.

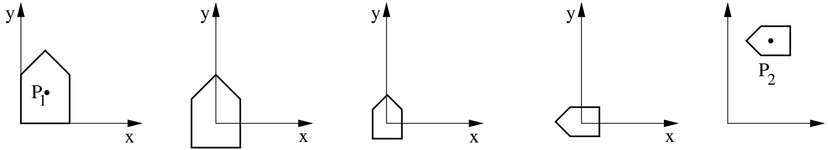

Figura: Sequência de transformações.

Transformadas Geométricas

- A ordem na qual as transformações são realizadas pode afetar o resultado final.
- Considere, por exemplo, a translação e a rotação de um objeto. Observe a diferença quando fazemos (a) uma rotação seguida de uma translação e (b) uma translação seguida de uma rotação.

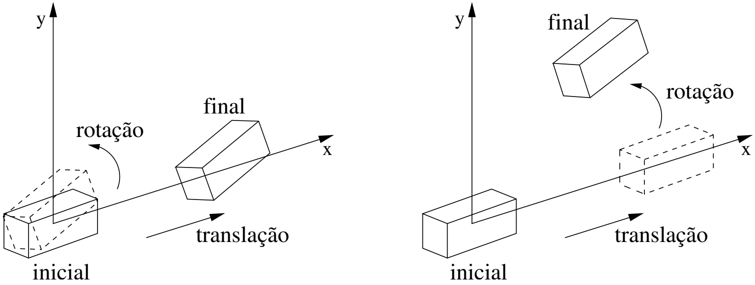

Figura: Ordem das transformações.

Transformadas Geométricas

- Se M_1 e M_2 representam duas transformações fundamentais (escala, translação ou rotação), em quais casos $M_1\ M_2 = M_2\ M_1$, ou seja, quando suas matrizes de transformação são comutativas?
- Sabemos que nem sempre a multiplicação de matrizes é comutativa, entretanto, não é difícil mostrar que nos casos especiais mostrados na tabela 1 a comutatividade existe. Nestes casos, a ordem das matrizes de transformação não é relevante.

M_1	M_2
Translação	Translação
Escala	Escala
Rotação	Rotação
Escala ($S_x = S_y$)	Rotação

Tabela: Ordem das transformações.

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um eixo arbitrário

- Um exemplo de composição de transformações 3D é a rotação de um objeto em torno de um eixo arbitrário. Uma solução para esse problema é fazer com que o eixo de rotação arbitrário coincida com um dos eixos de coordenadas.
- Seja o eixo arbitrário formado pelos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, conforme a figura (a) a seguir. A rotação sobre esse eixo em um ângulo θ é realizada por meio dos seguintes passos:
  1) transladar o ponto P_1 para a origem do sistema de coordenadas;
  2) aplicar rotações apropriadas tal que o eixo de rotação coincida com um dos eixos de coordenadas, por exemplo, o eixo z;
  3) aplicar rotação no objeto ao longo do eixo z pelo ângulo θ;
  4) aplicar inversa da rotação combinada;
  5) aplicar inversa da translação no ponto P_1.

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um eixo arbitrário

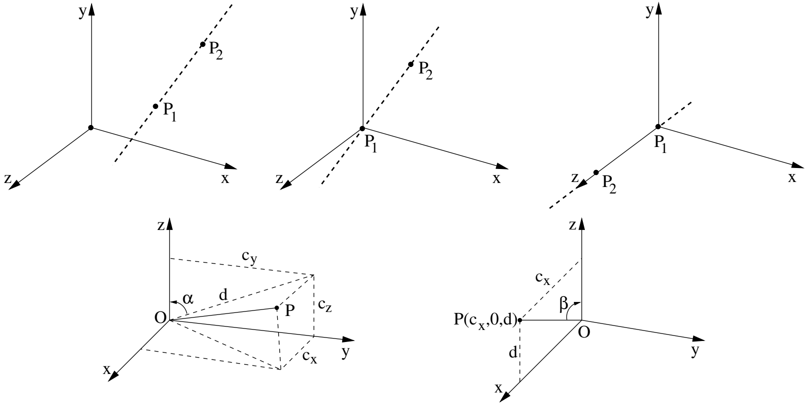

Figura: Rotação sobre eixo arbitrário.

- Inicialmente, um dos pontos do eixo, por exemplo, P_1 é transladado para a origem, conforme a figura (b). Em geral, fazer um eixo arbitrário que passa pela origem coincidir com um dos eixos de coordenadas requer duas rotações sucessivas ao longo dos outros dois eixos de coordenadas.
- Para fazer o eixo de rotação arbitrário coincidir com o eixo z (figura (c)), primeiro pode-se aplicar uma rotação sobre o eixo x e então sobre o eixo y.
- Para determinar o ângulo de rotação α sobre o eixo x usado para posicionar o eixo arbitrário no plano xz, primeiro projeta-se o vetor unitário ao longo do eixo sobre o plano yz, como ilustrado na figura (d).

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um eixo arbitrário

- Os componentes y e z do vetor projetado são c_y e c_z, ou seja, os cossenos de direção do vetor unitário ao longo do eixo arbitrário. Da figura (d), obtém-se que

$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2}$$

e também

$$\cos\alpha = \frac{c_z}{d} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{c_y}{d}$$

Transformadas Geométricas

- Depois da rotação sobre o eixo x no plano xz, o componente z do vetor unitário é d e o componente x é c_x, ou seja, o cosseno direção da direção x, como mostrado na figura (e). O comprimento do vetor unitário, é claro, é igual a 1. Então, o ângulo de rotação β ao longo do eixo y necessário para fazer com que o eixo arbitrário coincida com o eixo z é

$$\cos\beta = d \qquad\qquad \operatorname{sen}\beta = c_x$$

- A transformação completa é então

$$M = T\, R_x\, R_y\, R_\theta\, R_y^{-1}\, R_x^{-1}\, T^{-1}$$

em que a matriz de translação requerida é

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um eixo arbitrário

- A matriz de transformação para rotação sobre o eixo x é

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z/d & -c_y/d & 0 \\ 0 & c_y/d & c_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sobre o eixo y

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \operatorname{sen}(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformadas Geométricas

Rotação em torno de um eixo arbitrário

- A rotação ao longo do eixo arbitrário é dada pela matriz de rotação no eixo z

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finalmente, a translação de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ para a posição original é

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

1) Obter as matrizes de transformação 3×3 em coordenadas homogêneas bidimensionais que executam as seguintes transformações, na ordem especificada:

   a) rotação de 30° em torno do ponto $(4, 5)$; ampliação de 2 vezes na direção x e de 4 vezes na direção y;
   b) translação para a direita de 4 unidades e para baixo de 2; rotação de 45° em torno da origem;
   c) espelhamento em relação à reta definida pelos pontos $(1, 3)$ e $(1, 0)$; ampliação de 3 vezes em ambos os eixos.

2) Aplicar as matrizes obtidas no exercício anterior sobre o triângulo delimitado pelos pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e $C = (5, 6)$, obtendo os correspondentes triângulos transformados.

Exercícios

3) Obter as matrizes de transformação 4×4 em coordenadas homogêneas tridimensionais que executam as seguintes transformações:
   a) translação de 4 unidades no eixo x, 5 no eixo y e -2 no eixo z; ampliação de 3 vezes em relação à origem do sistema de coordenadas;
   b) rotação de 30° em torno do eixo definido pelos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 2, 3)$.

4) Verifique que a matriz de rotação

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é igual a

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, qualquer rotação em duas dimensões é uma combinação de escala e cisalhamento (verdadeiro para todos os ângulos satisfazendo $\tan\theta \neq \infty$).