

Processos Estocásticos

Lista de Exercícios – Unidade 04 - Parte 1

Aluno: Oséias Dias de Farias

Matrícula: 201733940002

4.1 – Conceito de Variável Aleatória (V.A.) e

4.2 – Probabilidade associada à variável aleatória (V.A.)

Questão 1 – Um experimento (E) consiste em jogar uma moeda 4 vezes.

A) Especifique o espaço amostral (S) , onde C corresponde a “cara” e K corresponde a “coroa”.

- RESPOSTA

$S = [$

KKKK, KK KC, KK CK, KK CC,

K CKK, K CCK, K CKC, K CCC,

C CCC, C CCK, C CKC, C CKK,

CK CC, CK CK, CK KC, CK KK

$]$

B) Seja a Variável Aleatória (X) a ocorrência de “coroas” nas 4 jogadas. Especifique os resultados de S , os valores de X correspondentes (contradomínio R_x) e a probabilidade de cada valor de X .

- RESPOSTA

Questão 2 – Um experimento (E) consiste em jogar 3 dados (de 6 faces).

A) Especifique o espaço amostral (S) . Especificando a ocorrência das faces pelo número correspondente (1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

- RESPOSTA

$E = [$

(000), (001), (002), (003), (004), (005), (006),
 (010), (011), (012), (013), (014), (015), (016),
 (020), (021), (022), (023), (024), (025), (026),
 (030), (031), (032), (033), (034), (035), (036),
 (040), (041), (042), (043), (044), (045), (046),
 (050), (051), (052), (053), (054), (055), (056),
 (060), (061), (062), (063), (064), (065), (066),

(100), (101), (102), (103), (104), (105), (106),
 (110), (111), (112), (113), (114), (115), (116),
 (120), (121), (122), (123), (124), (125), (126),
 (130), (131), (132), (133), (134), (135), (136),
 (140), (141), (142), (143), (144), (145), (146),
 (150), (151), (152), (153), (154), (155), (156),
 (160), (161), (162), (163), (164), (165), (166),

(200), (201), (202), (203), (204), (205), (206),
 (210), (211), (212), (213), (214), (215), (216),
 (220), (221), (222), (223), (224), (225), (226),
 (230), (231), (232), (233), (234), (235), (236),
 (240), (241), (242), (243), (244), (245), (246),
 (250), (251), (252), (253), (254), (255), (256),
 (260), (261), (262), (263), (264), (265), (266),

(300), (301), (302), (303), (304), (305), (306),
 (310), (311), (312), (313), (314), (315), (316),
 (320), (321), (322), (323), (324), (325), (326),
 (330), (331), (332), (333), (334), (335), (336),
 (340), (341), (342), (343), (344), (345), (346),
 (350), (351), (352), (353), (354), (355), (356),
 (360), (361), (362), (363), (364), (365), (366),

(400), (401), (402), (403), (404), (405), (406),
(410), (411), (412), (413), (414), (415), (416),
(420), (421), (422), (423), (424), (425), (426),
(430), (431), (432), (433), (434), (435), (436),
(440), (441), (442), (443), (444), (445), (446),
(450), (451), (452), (453), (454), (455), (456),
(460), (461), (462), (463), (464), (465), (466),

(500), (501), (502), (503), (504), (505), (506),
(510), (511), (512), (513), (514), (515), (516),
(520), (521), (522), (523), (524), (525), (526),
(530), (531), (532), (533), (534), (535), (536),
(540), (541), (542), (543), (544), (545), (546),
(550), (551), (552), (553), (554), (555), (556),
(560), (561), (562), (563), (564), (565), (566),

(600), (601), (602), (603), (604), (605), (606),
(610), (611), (612), (613), (614), (615), (616),
(620), (621), (622), (623), (624), (625), (626),
(630), (631), (632), (633), (634), (635), (636),
(640), (641), (642), (643), (644), (645), (646),
(650), (651), (652), (653), (654), (655), (656),
(660), (661), (662), (663), (664), (665), (666)

]

```
print("E = [")
for i in range(7):
    for j in range(7):
        for n in range(7):
            print(f"({i}{j}{n}), ", end=" ")
        print()
    print("\n")
print("]")
```

B) Seja a Variável Aleatória (X) a soma dos valores das duas primeiras faces menos o valor da terceira. Especifique os resultados de S , os valores de X correspondentes (contradomínio R_x) e a probabilidade de cada valor de X .

• RESPOSTA

Contradomínio R_x

$R_x = [0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$

Probabilidade de cada valor de X

$X_0=0.00291545, X_1=0.00874636, X_2=0.01749271$
 $X_3=0.02915452, X_4=0.04373178, X_5=0.06122449$
 $X_6=0.08163265, X_7=0.09620991, X_8=0.10495627$
 $X_9=0.10787172, X_{10}=0.10495627, X_{11}=0.09620991$
 $X_{12}=0.08163265, X_{13}=0.06122449, X_{14}=0.04373178$
 $X_{15}=0.02915452, X_{16}=0.01749271, X_{17}=0.00874636$
 $X_{18}=0.00291545$

Resultado de S

```
s = []
for i in range(7):
    for j in range(7):
        for n in range(7):
            soma = (i+j)-n
            s.append(soma)
            print(f"x({i}{j}{n}) = {soma}, ", end=" ")
        print()
    print("\n")
```

```
unicos_lista = list(dict.fromkeys(s))
#print("Rx", unicos_lista)
```

Encontrando o Contradomínio R_x e as Probabilidades de cada valor de X

```
import numpy as np
```

```
prob = np.array([0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], dtype="float64")
for i in s:
    if (i == -6):
        prob[0] += 1/len(s)
    elif (i == -5):
        prob[1] += 1/len(s)
    elif (i == -4):
        prob[2] += 1/len(s)
    elif (i == -3):
        prob[3] += 1/len(s)
```

```

elif (i == -2):
    prob[4] += 1/len(s)
elif (i == -1):
    prob[5] += 1/len(s)
elif (i == 0):
    prob[6] += 1/len(s)
elif (i == 1):
    prob[7] += 1/len(s)
elif (i == 2):
    prob[8] += 1/len(s)
elif (i == 3):
    prob[9] += 1/len(s)
elif (i == 4):
    prob[10] += 1/len(s)
elif (i == 5):
    prob[11] += 1/len(s)
elif (i == 6):
    prob[12] += 1/len(s)
elif (i == 7):
    prob[13] += 1/len(s)
elif (i == 8):
    prob[14] += 1/len(s)
elif (i == 9):
    prob[15] += 1/len(s)
elif (i == 10):
    prob[16] += 1/len(s)
elif (i == 11):
    prob[17] += 1/len(s)
elif (i == 12):
    prob[18] += 1/len(s)

print(f"\nProbabilidade para os Xs =\n {prob}\n")
print(f"Soma das Probabilidades: {prob.sum()}")

```

```

Probabilidade para os Xs =
[0.00291545 0.00874636 0.01749271 0.02915452 0.04373178 0.06122449
 0.08163265 0.09620991 0.10495627 0.10787172 0.10495627 0.09620991
 0.08163265 0.06122449 0.04373178 0.02915452 0.01749271 0.00874636
 0.00291545]

```

```

Soma das Probabilidades: 1.0000000000000004

```

```

# Importando a biblioteca Matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('seaborn')

```

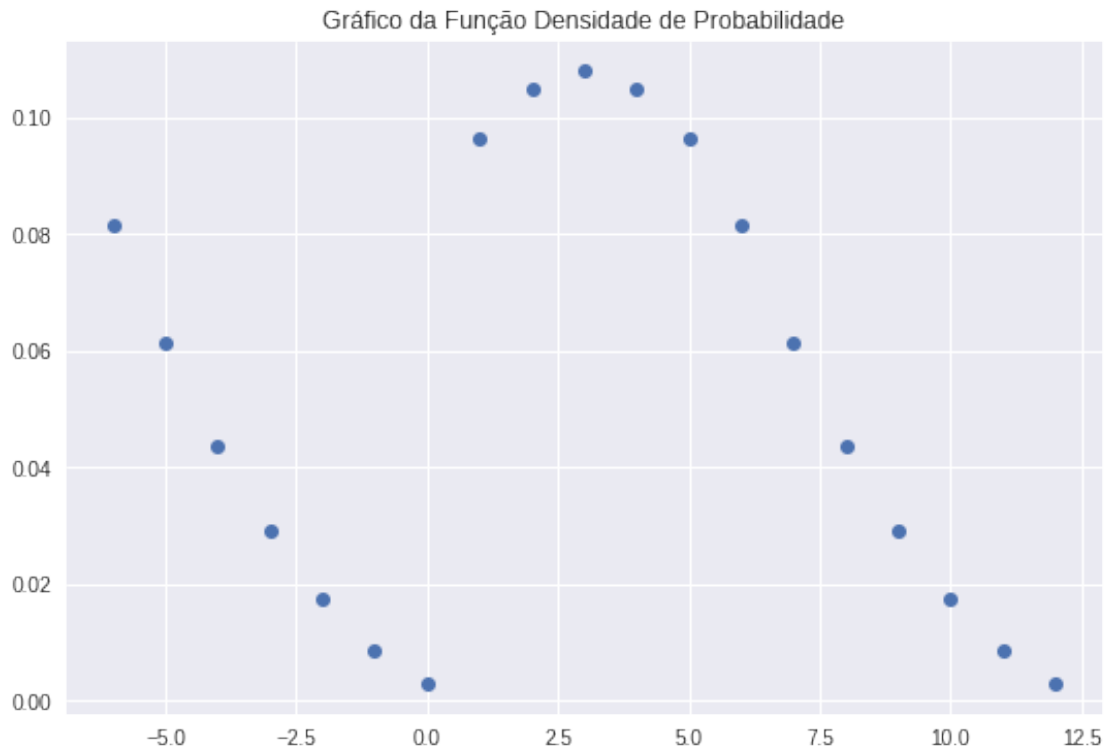
```

%matplotlib inline

```

```
# Gráfico da Função Densidade de Probabilidade
```

```
plt.figure(figsize=(9, 6))  
plt.plot(unicos_lista, prob, "o")  
plt.title("Gráfico da Função Densidade de Probabilidade")  
plt.show()
```



4.3 – Variáveis aleatórias discretas e contínuas e

4.4 – Funções de variáveis aleatórias (V.A.) – fdp e FDP

Questão 3 – Com base na Questão 1. Determine:

A) $p(x_i)$ – fdp de X.

- RESPOSTA

x_i |

P[X = x_i]

```

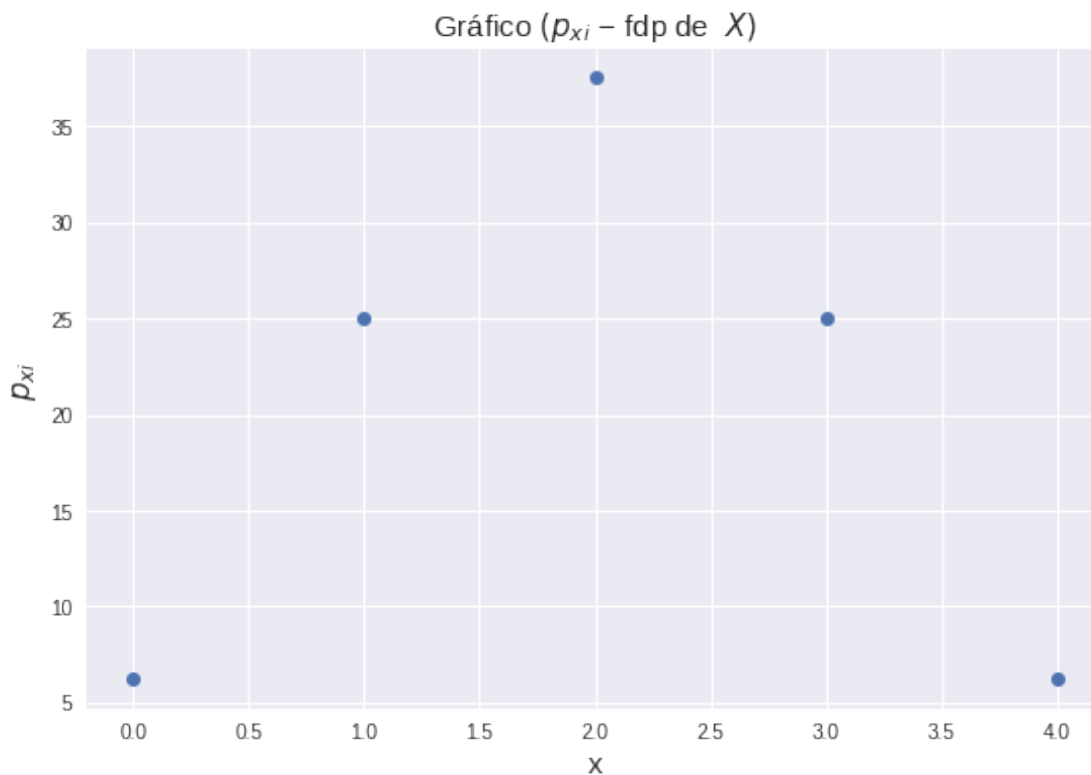
x_i = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
prob_q1 = np.array([1/16, 1/4, 3/8, 1/4, 1/16], dtype="float64")
fdp_q1 = prob_q1*100.0

print(f"\np(xi)– fdp de X:")
for i in fdp_q1:
    print(f"{i}% ", end=" ")

# Gráfico da Função Densidade de Probabilidade
plt.figure(figsize=(9, 6))
plt.plot(x_i, fdp_q1, "o")
plt.title("Gráfico $( p_{xi}$ - fdp de $X )$", fontsize=15)
plt.xlabel("x", fontsize=15)
plt.ylabel("$p_{xi}$", fontsize=15)
plt.show()

```

p(xi)– fdp de X:
6.25% 25.0% 37.5% 25.0% 6.25%



B) $F(x_i)$ –FDP de X .

- RESPOSTA

x_i

$F[X = x_i]$

$P[x \leq 0] = 6.25\%$

$P[x \leq 1] = 31.25\%$

$P[x \leq 2] = 68.75\%$

$P[x \leq 3] = 93.75\%$

$P[x \leq 3] = 100.0\%$

```
x_i2 = np.array([-3., -2., -1., 0., 0., 1., 1., 2., 2., 3., 3., 4.,
4., 5., 5., 6., 6., 7., 7., 8.,])
```

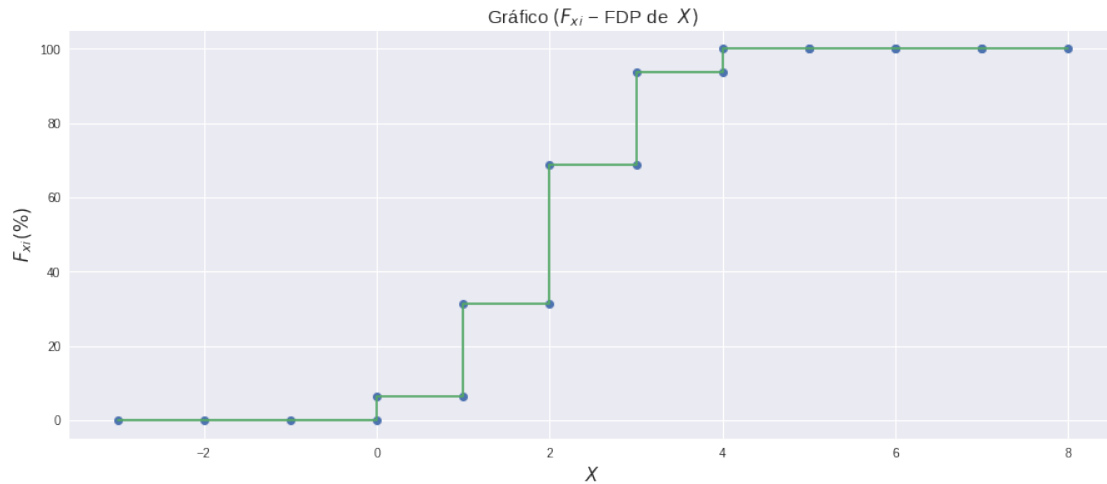
```
FDP_q1 = []
```

```
for i in range(4):
    FDP_q1.append(0.0)
```

```
for i in range(0, 8):
    FDP_q1.append(fdp_q1[:i+1].sum())
    FDP_q1.append(fdp_q1[:i+1].sum())
```

```
# Printa os valores de F(xi)
#print(f"\n\nF(xi)-FDP de X:")
#for i in FDP_q1:
#    print(f"{i}% ", end=" ")
#print("\n")
```

```
# Gráfico da Função Densidade de Probabilidade
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(x_i2, FDP_q1, "o")
plt.plot(x_i2, FDP_q1)
plt.title("Gráfico $( F_{xi} - FDP de X )$", fontsize=15)
plt.xlabel("$X$", fontsize=15)
plt.ylabel("$F_{xi} (\%)$", fontsize=15)
plt.show()
```

Questão 4 – Com base na Questão 2. Determine:

a) $p(x_i)$ - fdp de X .

• RESPOSTA

x_i	0
$P[X = x_i]$	0.29%
x_i	10
$P[X = x_i]$	10.49%

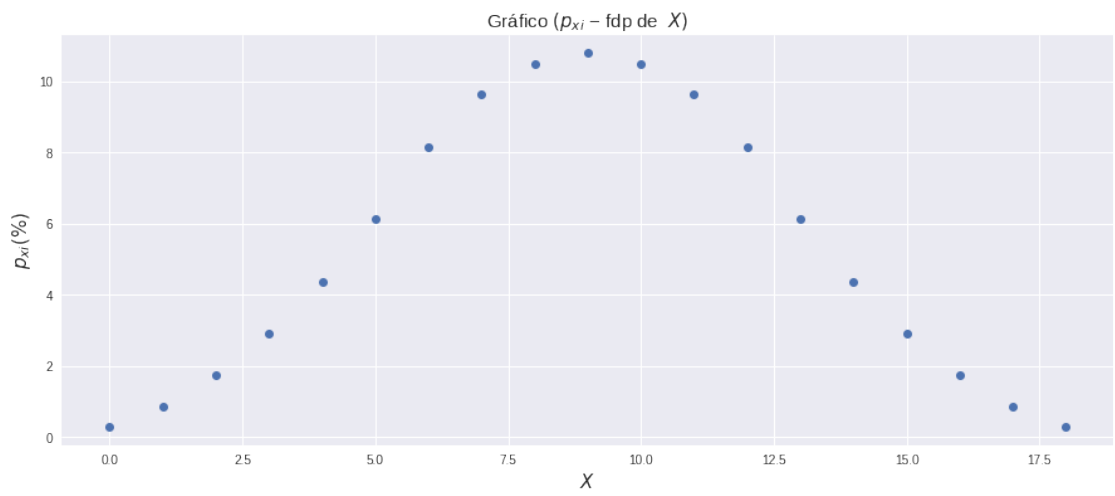
```

q2_x_i = np.linspace(0, 18, 19)
fdp_q2 = prob*100

#print("\n\np(x_i)- fdp de X:")
#for i in range(19):
#    print(f"{format(fdp_q2[i], '.2f')}}% ", end=" ")
#    if (i == 9):
#        print()

# Gráfico da Função Densidade de Probabilidade
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(q2_x_i, fdp_q2, "o")
plt.title("Gráfico $( p_{xi}$ - fdp de $X )$", fontsize=15)
plt.xlabel("$X$", fontsize=15)
plt.ylabel("$p_{xi}$ (\%)$", fontsize=15)
plt.show()

```



b) $F(x_i)$ – FDP de X .

• RESPOSTA

x_i	0
$P[X = x_i]$	0.29%
x_i	10
$P[X = x_i]$	65.89%

$$P[x \leq -6] = 0.29$$

$$P[x \leq -5] = 1.17$$

$$P[x \leq -4] = 2.92$$

$$P[x \leq -3] = 5.83$$

$$P[x \leq -2] = 10.20$$

$$P[x \leq -1] = 16.33$$

$$P[x \leq 0] = 24.49$$

$$P[x \leq 1] = 34.11$$

$$P[x \leq 2] = 44.61$$

$$P[x \leq 3] = 55.39$$

$P\hat{I}$

$$P[x \leq 5] = 75.51\%$$

$P\hat{I}$

$$P[x \leq 7] = 89.80\%$$

$P\hat{I}$

$$P[x \leq 9] = 97.08\%$$

$P\hat{I}$

$$P[x \leq 11] = 99.71\%$$

$P\hat{I}$

```
FDP_q2 = [] #np.zeros(19)
xi = np.array([-3., -2., -1., 0., 0., 1., 1., 2., 2., 3., 3., 4.,
4., 5., 5., 6., 6., 7., 7., 8., 8.,
9., 9., 10., 10., 11., 11., 12., 12., 13., 13., 14.,
14., 15., 15., 16., 16., 17., 17., 18., 18.,
19., ])

```

```
for i in range(4):
    FDP_q2.append(0)

for i in range(0, 19):
    FDP_q2.append(fdp_q2[:i+1].sum())
    FDP_q2.append(fdp_q2[:i+1].sum())

```

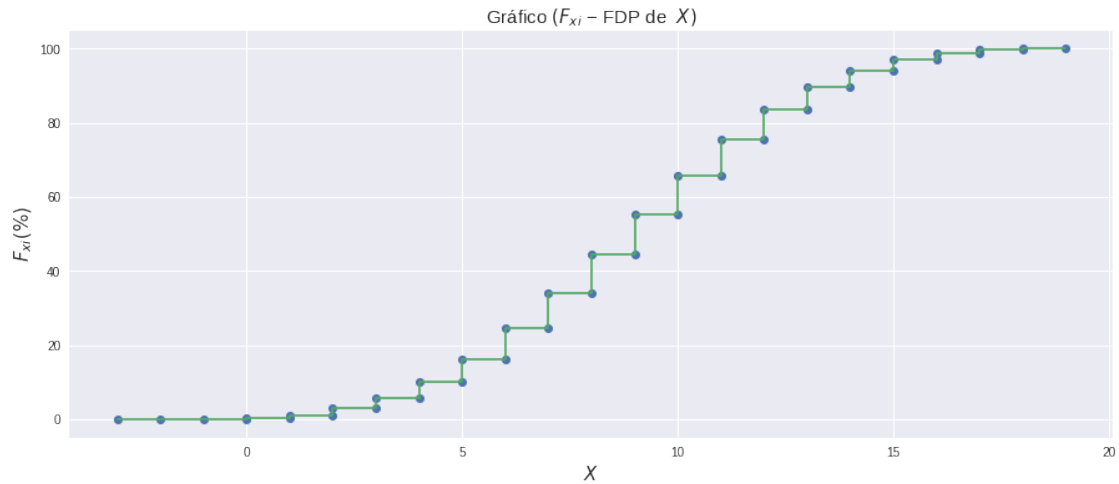
```
#print("\nF(xi)- FDP de X: ")
#for i in range(len(FDP_q2)):
#    print(f"{format(FDP_q2[i], '.2f')}% " , end=" ")
#    if (i == 10):
#        print()
#    if (i == 20):
#        print()
#print("\n")

```

Gráfico da Função Densidade de Probabilidade

```
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(xi, FDP_q2, "o")
plt.plot(xi, FDP_q2)
plt.title("Gráfico $( F_{xi}$ - FDP de $X )$", fontsize=15)
plt.xlabel("$X$", fontsize=15)
plt.ylabel("$F_{xi}$ (\%)$", fontsize=15)
plt.show()

```



Questão 5 - Uma função distribuição de probabilidade acumulada FDP é definida da seguinte forma:

- $X < a \rightarrow F = 0;$
- $a \leq X \leq b \rightarrow F = \frac{x - a}{b - a};$
- $X > b \rightarrow F = 1;$

a) Calcule $f(x)$ - fdp de X .

- RESPOSTA

b) Calcule $P[1 < X \leq 3]$ para $a = 1$ e $b = 5$.

- RESPOSTA

c) Calcule $P[-1 < X \leq 2]$ para $a = 1$ e $b = 5$.

- RESPOSTA

d) Calcule $P[-\infty < X \leq 1,5]$ para $a = 1$ e $b = 5$.

- RESPOSTA

e) Calcule $P[0 < X \leq 6]$ para $a=1$ e $b=5$.

- RESPOSTA

Questão 6 – O tempo de transmissão X de mensagens em um sistema de comunicação obedece a lei de probabilidade exponencial com parâmetro λ , isto é $P[X > x] = e^{-\lambda x}, x > 0$. Calcule, $T = 1/\lambda$.

a) Defina $F(x)$ - FDP de X

- RESPOSTA

b) Calcule $f(x)$ - fdp de X .

- RESPOSTA

c) Calcule $P[T < X \leq 2T]$ para $T = 1/\lambda$.

- RESPOSTA