שפות תכנות- תרגיל 2

יוסי מעתוק 208641472 ואושר אלחדד 318969748

- **חלק א: הוכחות בסמנטיקה**

שאלה 1:

א. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-Operational Semantics **Natural**:
(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

תשובה-

על מנת להוכיח את השקילות סמנטית הנ״ל נצטרך להוכיח את שתי הטענות הבאות (לכל s, מצב, קיים s'', מצב):

- יהי s , נוכיח כי מתקיים $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \to s'' \rightarrow \langle S1;(S2;S3),s\rangle \to s''$

נניח כי $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \to s''$ ולכן יש עץ גזירה T שגוזר את הכלל הזה. עץ הגזירה שלנו נראה ככה-

$$[comp_{ns}]\ \frac{[comp_{ns}]\ \dfrac{\langle S1,s\rangle \to \hat{s}, \langle S2,\hat{s}\rangle \to s'}{\langle (S1;S2),s\rangle \to s'}, \langle S3,s'\rangle \to s''}{\langle (S1;S2);S3,s\rangle \to s''}$$

נסמן את עץ הגזירה של $\langle S1,s\rangle \to \hat{s}$ בT_1 , את עץ הגזירה של $\langle S2,\hat{s}\rangle \to s'$ בT_2 ואת עץ הגזירה של $\langle S3,s'\rangle \to s''$ בT_3.

כעת נראה עץ גזירה מתאים ל$\langle S1;(S2;S3),s\rangle \to s''$:

$$[comp_{ns}]\ \frac{\langle S1,s\rangle \to \hat{s}, \quad [comp_{ns}]\ \dfrac{\langle S2,\hat{s}\rangle \to s', \langle S3,s'\rangle \to s''}{\langle (S2;S3),s'\rangle \to s''}}{\langle S1;(S2;S3),s\rangle \to s''}$$

כלומר אם נציב את T_1,T_2,T_3 נקבל

$$[comp_{ns}]\ \frac{T_1 \quad [comp_{ns}]\ \dfrac{T_2,T_3}{\langle (S2;S3),s'\rangle \to s''}}{\langle S1;(S2;S3),s\rangle \to s''}$$

כעת נשים לב כי עץ הגזירה שלנו אכן תקין מכיוון שהגענו לעצי הגזירה T_1,T_2,T_3 (הם נכונים בפרט מכיוון שהנחנו נכונות ל$\langle (S1;S2);S3,s\rangle \to s''$ והם גוזרים את הכלל הזה).

- יהי s , נוכיח כי מתקיים $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \to s'' \leftarrow \langle S1;(S2;S3),s\rangle \to s''$

נניח כי $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \to s''$ ולכן יש עץ גזירה T שגוזר את הכלל הזה. עץ הגזירה שלנו נראה ככה-

$$[comp_{ns}]\ \frac{\langle S1,s\rangle \to s', \quad [comp_{ns}]\ \dfrac{\langle S2,s'\rangle \to \hat{s}, \langle S3,\hat{s}\rangle \to s''}{\langle (S2;S3),s'\rangle \to s''}}{\langle S1;(S2;S3),s\rangle \to s''}$$

נסמן את עץ הגזירה של $\langle S1, s\rangle \to s'$ ב-T_1 , את עץ הגזירה של $\langle S2, s'\rangle \to \hat{s}$ ב-T_2 ואת עץ הגזירה של $\langle S3, \hat{s}\rangle \to s''$ ב-T_3.

כעת נראה עץ גזירה מתאים ל-$\langle (S1; S2); S3, s\rangle \to s''$:

$$[comp_{ns}] \quad \frac{[comp_{ns}] \quad \dfrac{\langle S1, s\rangle \to s', \langle S2, s'\rangle \to \hat{s}}{\langle (S1; S2), s\rangle \to \hat{s}}, \langle S3, \hat{s}\rangle \to s''}{\langle (S1; S2); S3, s\rangle \to s''}$$

כלומר אם נציב את T_1, T_2, T_3 נקבל

$$[comp_{ns}] \quad \frac{[comp_{ns}] \quad \dfrac{T_1, T_2}{\langle (S1; S2), s\rangle \to \hat{s}}, T_3}{\langle (S1; S2); S3, s\rangle \to s''}$$

כעת נשים לב כי עץ הגזירה שלנו אכן תקין מכיוון שהגענו לעצי הגזירה T_1, T_2, T_3 (הם נכונים בפרט מכיוון שהנחנו נכונות ל-$\langle S1; (S2; S3), s\rangle \to s''$ והם גוזרים את הכלל הזה).

ובסה"כ הוכחנו את השקילות הסמנטית (סמנטיקה טבעית): $\boldsymbol{(S1; S2); S3 \sim S1; (S2; S3)}$.

ב. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-**Structural** Operational Semantics:
(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

<u>תשובה-</u>

תחילה נוכיח טענת עזר:

- נוכיח כי אם מתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^k s'$ אזי מתקיים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^k \langle S2,s'\rangle$:
נוכיח זאת באינדוקציה על מספר הגזירות k.

<u>בסיס האינדוקציה-</u>

עבור $k=0$ נקבל כי הטענה מתקיימת באופן ריק שכן לא מתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^0 s'$ אלא מתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^0 \langle S1,s\rangle$.
עבור $k=1$ נקבל כי הטענה מתקיימת לפי $[comp_{sos}^2]$ כי אם מתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^1 s'$ בדיוק לפי כלל הגזירה של $[comp_{sos}^2]$ נקבל $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^1 \langle S2,s'\rangle$ כדרוש.

<u>הנחת האינדוקציה-</u>

נניח כי הטענה מתקיימת עבור k ונוכיח את נכונות הטענה עבור $k+1$.

<u>צעד האינדוקציה-</u>

נניח כי מתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'$ ונוכיח כי מתקיים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k+1} \langle S2,s'\rangle$ ניתן למעשה לפי הגדרה של $k+1$ גזירות לפרק את הגזירה לשני חלקים - $\langle S1,s\rangle \Rightarrow \gamma \Rightarrow^k s'$. נחלק כעת למקרים:

1) אם γ הינו מצב טרמינלי, כלומר s'' כלשהו, אזי נקבל כי גזרנו לפחות גזירה אחת כלומר $k+1 \geq 1$ (גם מכיוון ש$k \geq 0$) ומכיוון שלא ניתן לגזור מצב טרמינלי לכן למעשה נקבל כי הגזירה חייבת להראות כך- $\langle S1,s\rangle \Rightarrow s'' \Rightarrow^0 s'$ כלומר נקבל כי $s''=s'$ ולכן קיבלנו כי $k+1=1$ ולפי בסיס האינדוקציה אכן טענה זו נכונה לפי כלל הגזירה של $[comp_{sos}^2]$, כלומר מתקיים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^1 \langle S2,s'\rangle$ כאשר $k+1=1$ כלומר $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k+1} \langle S2,s'\rangle$
2) אם γ הינו קונפיגורציה, כלומר $\langle S1',s''\rangle$ כלשהו, אזי נקבל כי הגזירה נראית כך- $\langle S1,s\rangle \Rightarrow \langle S1',s''\rangle \Rightarrow^k s'$ כעת לפי הנחת האינדוקציה נקבל כי מכיוון שמתקיים $\langle S1',s''\rangle \Rightarrow^k s'$ אזי מתקיים $\langle (S1';S2),s''\rangle \Rightarrow^k \langle S2,s'\rangle$. בנוסף לפי הכלל $[comp_{sos}^1]$ נקבל כי מכיוון שמתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow \langle S1',s''\rangle$ לכן מתקיים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow \langle (S1';S2),s''\rangle$ ובסה"כ קיבלנו כי
$$\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow \langle (S1';S2),s''\rangle \Rightarrow^k \langle S2,s'\rangle$$
כלומר לפי הגדרת גזירה נקבל $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k+1} \langle S2,s'\rangle$ כדרוש.

לסיכום הוכחנו את טענת העזר-

אם מתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^k s'$ אזי מתקיים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^k \langle S2,s'\rangle$.

על מנת להוכיח את השקילות הסמנטית הנתונה בשאלה נצטרך להוכיח את שתי הטענות הבאות:

1) נוכיח כי מתקיים לכל מצב s וγ מצב שבו נעצר או מגיע למצב סופי כלשהו מתקיים:
$\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^* \gamma \Leftrightarrow \langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^* \gamma$:

יהי מצב s וγ מצב שבו נעצר או מגיע למצב סופי כלשהו, נוכיח את שני הכיוונים-

כיוון ראשון: נוכיח כי $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^* \gamma \rightarrow \langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^* \gamma$

נניח כי $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^* \gamma$ ולכן קיים k טבעי עבורו $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^k \gamma$ ולפי משפט מהתרגול קיים מצב s' וk_1,k_2 טבעיים כאשר $k=k_1+k_2$ ומתקיימים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ וגם $\langle S3,s'\rangle \Rightarrow^{k_2} \gamma$.

באותו אופן גם עבור $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ נשתמש במשפט מהתרגול ונקבל כי קיים מצב s'' וk_3,k_4 טבעיים כאשר $k_1=k_3+k_4$ ומתקיימים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k_3} s''$ וגם $\langle S2,s''\rangle \Rightarrow^{k_4} s'$.

כעת נוכיח כי $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^* \gamma$ כלומר נראה שקיים k' טבעי עבורו $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{k'} \gamma$.

נשים לב כי לפי טענת העזר שהוכחנו- מכיוון שמתקיים $\langle S2,s''\rangle \Rightarrow^{k_4} s'$ לכן נקבל $\langle (S2;S3),s''\rangle \Rightarrow^{k_4} \langle S3,s'\rangle$ בנוסף מתקיים $\langle S3,s'\rangle \Rightarrow^{k_2} \gamma$ לכן למעשה נקבל $\langle (S2;S3),s''\rangle \Rightarrow^{k_4} \langle S3,s'\rangle \Rightarrow^{k_2} \gamma$ ונקבל כי עבור $k_5=k_4+k_2$ מתקיים $\langle (S2;S3),s''\rangle \Rightarrow^{k_5} \gamma$.

באותו אופן נשתמש שוב בטענת העזר- מכיוון שמתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k_3} s''$ לכן נקבל $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{k_3} \langle (S2;S3),s''\rangle$ בנוסף מתקיים $\langle (S2;S3),s''\rangle \Rightarrow^{k_5} \gamma$ לכן למעשה נקבל $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{k_3} \langle (S2;S3),s''\rangle \Rightarrow^{k_5} \gamma$ ונקבל כי עבור $k_6=k_3+k_5$ מתקיים $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{k_6} \gamma$.

ולכן הוכחנו כי קיים $k'=k_6$ שהינו טבעי (מכיוון שכל $k,k_1,k_2\dots,k_5$ הינם טבעיים) עבורו מתקיים $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{k_6} \gamma$ ולכן הוכחנו כי $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^* \gamma$.

כיוון שני: נוכיח כי $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^* \gamma \leftarrow \langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^* \gamma$

נניח כי $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^* \gamma$ ולכן קיים k טבעי עבורו $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^k \gamma$ ולפי משפט מהתרגול קיים מצב s' וk_1,k_2 טבעיים כאשר $k=k_1+k_2$ ומתקיימים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ וגם $\langle (S2;S3),s'\rangle \Rightarrow^{k_2} \gamma$.

באותו אופן גם עבור $\langle (S2;S3),s'\rangle \Rightarrow^{k_2} \gamma$ נשתמש במשפט מהתרגול ונקבל כי קיים מצב s'' וk_3,k_4 טבעיים כאשר $k_2=k_3+k_4$ ומתקיימים $\langle S2,s'\rangle \Rightarrow^{k_3} s''$ וגם $\langle S3,s''\rangle \Rightarrow^{k_4} \gamma$.

כעת נוכיח כי $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^* \gamma$ כלומר נראה שקיים k' טבעי עבורו $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{k'} \gamma$.

נשים לב כי לפי טענת העזר שהוכחנו- מכיוון שמתקיים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ לכן נקבל $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k_1} \langle S2,s'\rangle$ בנוסף מתקיים $\langle S2,s'\rangle \Rightarrow^{k_3} s''$ לכן למעשה נקבל $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k_1} \langle S2,s'\rangle \Rightarrow^{k_3} s''$ ונקבל כי עבור $k_5=k_1+k_3$ מתקיים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k_5} s''$.

באותו אופן נשתמש שוב בטענת העזר- מכיוון שמתקיים $\langle (S1;S2),s\rangle \Rightarrow^{k_5} s''$ לכן נקבל $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{k_5} \langle S3,s''\rangle$ בנוסף מתקיים $\langle S3,s''\rangle \Rightarrow^{k_4} \gamma$ לכן למעשה נקבל

ונקבל כי עבור $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{k_5} \langle S3,s''\rangle \Rightarrow^{k_4} \gamma$ מתקיים $k_6 = k_5 + k_4$ $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{k_6} \gamma$.

ולכן הוכחנו כי קיים $k' = k_6$ שהינו טבעי (מכיוון שכל $k, k_1, k_2 \dots, k_5$ הינם טבעיים) עבורו מתקיים $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{k_6} \gamma$ ולכן הוכחנו כי $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{*} \gamma$.

2) נוכיח כי מתקיים לכל מצב s שממנו יש גזירה אינסופית ב $\langle (S1;S2);S3,s\rangle$ יש גם גזירה אינסופית ב $\langle S1;(S2;S3),s\rangle$.

יהי מצב s , נניח שיש גזירה אינסופית ב $\langle (S1;S2);S3,s\rangle$ ונניח בשלילה כי אין גזירה אינסופית ב $\langle S1;(S2;S3),s\rangle$ ונקבל לפי המשפט שנוכיח בסעיף 2 ב' כי לא יתכן כי קיימת לקונפיגורציה גם גזירה אינסופית וגם קיימת גזירה סופית, ובנוסף מכיוון שלקונפיגורציה חייבת להיות גזירה מסוג כלשהו- אינסופית או סופית ולכן נקבל כי מכיוון שאין גזירה אינסופית ב$\langle S1;(S2;S3),s\rangle$ לכן יש גזירה סופית ב $\langle S1;(S2;S3),s\rangle$, כלומר קיים k טבעי וs' מצב כלשהו עבורם $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{k} s'$ ולפי הגדרת $\Rightarrow^{*}$ נקבל כי $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{*} s'$ והוכחנו בחלק הראשון של הוכחה זו כי $\langle S1;(S2;S3),s\rangle \Rightarrow^{*} s' \leftarrow \langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{*} s'$, כלומר קיים k טבעי עבורו $\langle (S1;S2);S3,s\rangle \Rightarrow^{*} s'$ ולכן יש גזירה סופית ב$\langle (S1;S2);S3,s\rangle$. ונקבל כי מכיוון שהנחנו כי קיימת גזירה אינסופית ב$\langle (S1;S2);S3,s\rangle$ וגם קיבלנו שיש גזירה סופית ב$\langle (S1;S2);S3,s\rangle$ בסתירה למשפט שנוכיח בסעיף 2 ב' כי לא יתכן כי קיימת לקונפיגורציה גם גזירה אינסופית וגם קיימת גזירה סופית.

לכן הוכחנו כי מתקיים לכל מצב s שממנו יש גזירה אינסופית ב $\langle (S1;S2);S3,s\rangle$ יש גם גזירה אינסופית ב $\langle S1;(S2;S3),s\rangle$.

ובסה"כ הוכחנו את השקילות הסמנטית (סמנטיקה מבנית): $\boldsymbol{(S1;S2);S3 \sim S1;(S2;S3)}$.

ג. הוכיחו שבמקרה הכללי לא מתקיימת השקילות ב-Operational Semantics **Natural** :

S1;S2 ~ S2;S1

כלומר קיימים S1,S2 כך שהשקילות לא מתקיימת.

<u>תשובה-</u>

ניתן דוגמה נגדית שמפריכה את הטענה כי מתקיימת השקילות $S1; S2 \sim S2; S1$. יהי מצב s_0 (עבורו כל המשתנים, במקרה שלנו x מאותחלים ל0) נגדיר :

$$S1 = (x \coloneqq 1)$$

$$S2 = (x \coloneqq 2)$$

כעת נראה כי לא מתקיימת השקילות זאת באמצעות כך שנראה כי עבור s' מצב סופי שאליו אנו מגיעים כך- $\langle S1; S2, s_0\rangle \rightarrow s'$ מתקיים כי עבור s'' מצב סופי שאליו אנו מגיעים כך- $\langle S2; S1, s_0\rangle \rightarrow s''$ כאשר $s' \neq s''$.

נשים לב לגזירה הבאה לפי כלל הגזירה $[ass_{ns}]$:

$$\langle S1, s_0\rangle \rightarrow s\big[x \mapsto A[[1]]\ s_0\big] = s_1$$

$$\langle S2, s_0\rangle \rightarrow s\big[x \mapsto A[[2]]\ s_0\big] = s_2$$

כעת נראה עצי גזירה של $\langle S1; S2, s_0\rangle \rightarrow s'$:

$$[comp_{ns}]\ \frac{[ass_{ns}]\ \dfrac{}{\langle S1, s_0\rangle \rightarrow s_1}\ ,\ [ass_{ns}]\ \dfrac{}{\langle S2, s_1\rangle \rightarrow s\big[x \mapsto A[[2]]\ s_1\big]}}{\langle S1; S2, s_0\rangle \rightarrow s'}$$

ונקבל כי $s' = s\big[x \mapsto A[[2]]\ s_1\big] = s\big[x \mapsto A[[2]]\ s_0\big] = s_2$ לפי הגדרת $comp_{ns}$.

כעת נראה עצי גזירה של $\langle S2; S1, s_0\rangle \rightarrow s''$:

$$[comp_{ns}]\ \frac{[ass_{ns}]\ \dfrac{}{\langle S2, s_0\rangle \rightarrow s_2}\ ,[ass_{ns}]\ \dfrac{}{\langle S2, s_2\rangle \rightarrow s\big[x \mapsto A[[1]]\ s_2\big]}}{\langle S2; S1, s_0\rangle \rightarrow s''}$$

ונקבל כי $s' = s\big[x \mapsto A[[1]]\ s_2\big] = s\big[x \mapsto A[[1]]\ s_0\big] = s_2$ לפי הגדרת $comp_{ns}$.

כעת נשים לב כי $s_1 \neq s_2$ מכיוון ש$A[[x]]\ s_2\ x = s_2\ x = 2 \neq 1 = s_1\ x = s_1\ A[[x]]$. ולכן בהינתן $\langle S1; S2, s_0\rangle \rightarrow s_2$ לפי עץ הגזירה שהראנו לא מתקיים $\langle S2; S1, s_0\rangle \rightarrow s_2$.

ולכן סה"כ קיבלנו כי $\langle S2; S1, s_0\rangle \rightarrow s_2 \nrightarrow \langle S1; S2, s_0\rangle \rightarrow s_2$ ולכן לפי ההגדרה של שקילות בסמנטיקה טבעית כמו שהראנו בסעיף 1 א' **אין שקילות סמנטית טבעית בין $\boldsymbol{S1; S2 \sim S2; S1}$ כדרוש.**

שאלה 2:

הוכיחו שה-Structural Operational Semantics של שפת While היא דטרמיניסטית. כלומר שמתקיימים שני תנאים:

(1) אם $<S,s> \Rightarrow^* s_1$ וגם $<S,s> \Rightarrow^* s_2$ אז $s_1 = s_2$. בצורה פורמלית:
$(<S,s> \Rightarrow^* s_1 \text{ and } <S,s> \Rightarrow^* s_2) \rightarrow s_1 = s_2$

(2) לא ייתכן שתוכנית S גם תעצור וגם תגיע ללולאה אינסופית החל ממצב s מסוים (כלומר לא ייתכן של-$<S, s>$ קיימת גזירה סופית וגם קיימת גזירה אינסופית).

(1) **תשובה-**

נוכיח את הטענה $((\langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_1 \wedge \langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_2) \rightarrow s_1 = s_2$

כלומר נוכיח כי לכל $\langle S,s\rangle$ ולכל $k \geq 0$ טבעי מתקיים:

$$\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s_1 \rightarrow (\langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_2 \rightarrow s_1 = s_2)$$

תהי קונפיגורציה $\langle S,s\rangle$ נוכיח באינדוקציה על $k \geq 0$ טבעי (מספר הגזירות) את הטענה:

בסיס האינדוקציה-

עבור $k = 0$ נקבל כי הטענה מתקיימת באופן ריק שכן לא מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^0 s_1$ אלא מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^0 \langle S,s\rangle$.

הנחת האינדוקציה-

נניח כי הטענה מתקיימת עבור כל $k' < k$ ונוכיח את נכונות הטענה עבור k.

צעד האינדוקציה-

נניח כי מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s_1$ נוכיח כי מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_2 \rightarrow s_1 = s_2$. לכן נניח כי מתקיים גם $\langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_2$ ונוכיח כי $s_1 = s_2$. כעת מכיוון ש$\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s_1$ לכן קיימת סדרת גזירות סופית, נתבונן כעת בגזירה הראשונה בסדרה זו ונחלק למקרים לפי כללי הגזירה בסמנטיקה המבנית:

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[ass_{sos}]$ אזי $S = (x := a)$ עבור x, a כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה (מכיוון שלאחר גזירה זו הגענו לטרמינל אזי הוא בעצם הטרמינל s_1 שעבורו מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s_1$ כאשר במקרה שלנו $k = 1$):
$$\langle S,s\rangle = \langle x := a, s\rangle \Longrightarrow s[x \mapsto A[[a]]\,s] = s_1$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) עבורה $\langle S,s\rangle = \langle x := a, s\rangle \Rightarrow^* s_2$ היא בעזרת הכלל $[ass_{sos}]$ כפי שהראנו ולכן $s_1 = s_2$ כדרוש.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[skip_{sos}]$ אזי $S = skip$ ונקבל את הגזירה הבאה (מכיוון שלאחר גזירה זו הגענו לטרמינל אזי הוא בעצם הטרמינל s_1 שעבורו מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s_1$ כאשר במקרה שלנו $k = 1$):
$$\langle S,s\rangle = \langle skip, s\rangle \Longrightarrow s = s_1$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) עבורה $\langle S,s\rangle = \langle skip, s\rangle \Rightarrow^* s_2$ היא בעזרת הכלל $[skip_{sos}]$ כפי שהראנו ולכן $s_1 = s_2$ כדרוש.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[while_{sos}]$ אזי $S = while\ b\ do\ S1$ עבור $b, S1$ כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה:

$$\langle S, s\rangle = \langle while\ b\ do\ S1, s\rangle$$
$$\Longrightarrow \langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s_1$$

ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[while_{sos}]$ (לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle while\ b\ do\ S1, s\rangle$ בk גזירות לs_1 כך ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle$ לs_1) ובנוסף נקבל:

$$\langle S, s\rangle = \langle while\ b\ do\ S1, s\rangle \Longrightarrow \langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle \Rightarrow^{*} s_2$$

כעת מכיוון שמתקיים כי:

$$(\langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s_1)$$
$$\wedge (\langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle \Rightarrow^{*} s_2)$$

לכן לפי הנחת האינדוקציה ($k-1<k$) נקבל כי $s_1 = s_2$ כדרוש.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[if_{sos}^{tt}]$ אזי $S = if\ b\ then\ S1\ else\ S2$ עבור $b, S1, S2$ כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה:
$$\langle S, s\rangle = \langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle \Longrightarrow \langle S1, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s_1$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[if_{sos}^{tt}]$ (לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle$ בk גזירות לs_1 כך ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle S1, s\rangle$ לs_1) ובנוסף נקבל: $\langle S, s\rangle =$ $\langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle \Longrightarrow \langle S1, s\rangle \Rightarrow^{*} s_2$

כעת מכיוון שמתקיים כי:

$$(\langle S1, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s_1) \wedge (\langle S1, s\rangle \Rightarrow^{*} s_2)$$

לכן לפי הנחת האינדוקציה ($k-1<k$) נקבל כי $s_1 = s_2$ כדרוש.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[if_{sos}^{ff}]$ אזי $S = if\ b\ then\ S1\ else\ S2$ עבור $b, S1, S2$ כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה:
$$\langle S, s\rangle = \langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle \Longrightarrow \langle S2, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s_1$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[if_{sos}^{ff}]$ (לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle$ בk גזירות לs_1 כך ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle S2, s\rangle$ לs_1) ובנוסף נקבל: $\langle S, s\rangle =$ $\langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle \Longrightarrow \langle S2, s\rangle \Rightarrow^{*} s_2$

כעת מכיוון שמתקיים כי:

$$(\langle S2, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s_1) \wedge (\langle S2, s\rangle \Rightarrow^{*} s_2)$$

לכן לפי הנחת האינדוקציה ($k-1<k$) נקבל כי $s_1 = s_2$ כדרוש.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[comp_{sos}^{1}]$ או $[comp_{sos}^{2}]$ אזי $S = S1; S2$ עבור $S1, S2$ כלשהם.
לפי המשפט מהתרגול קיים מצב s' וk_1, k_2 טבעיים כאשר $k = k_1 + k_2$ ומכיוון שמתקיים כי $\langle S, s\rangle = \langle S1; S2, s\rangle \Rightarrow^{k} s_1$ לכן מתקיימים $\langle S1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ וגם $\langle S2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s_1$. כעת נשים לב כי מכיוון ש$\langle S1, s\rangle$ אינו מצב סופי לכן $\langle S1, s\rangle \neq s'$ ולכן $\mathrm{k}_1 > 0$ בדומה לכך מכיוון ש$\langle S2, s'\rangle$ אינו מצב סופי לכן $\langle S2, s'\rangle \neq s_1$ ולכן $\mathrm{k}_2 > 0$ ונקבל בסה"כ כי $k_1 < k \wedge k_2 < k$ והם מקיימים את הנחת האינדוקציה.

כעת לפי הגדרת סדרת גזירות נקבל מ $\langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_2$ כי קיים $k' > 0$ טבעי (אינו שווה ממש ל0 מכיוון ש$\langle S,s\rangle$ אינו מצב סופי לכן $\langle S,s\rangle \neq s_2$ ולכן $\mathrm{k}' > 0$) עבורו $\langle S,s\rangle \Rightarrow^{k'} s_2$. לפי המשפט מהתרגול קיים מצב s'' וk'_1, k'_2 טבעיים כאשר $k' = k'_1 + k'_2$ ומכיוון שמתקיים כי $\langle S,s\rangle = \langle S1;S2,s\rangle \Rightarrow^{k'} s_2$ לכן מתקיימים $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k'_1} s''$ וגם $\langle S2,s''\rangle \Rightarrow^{k'_2} s_2$. כעת נשים לב כי לפי הגדרת סדרת גזירות לכן מ $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k'_1} s''$ נקבל $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^* s''$, וגם מ $\langle S2,s''\rangle \Rightarrow^{k'_2} s_2$ נקבל $\langle S2,s''\rangle \Rightarrow^* s_2$.

לפי הנחת האינדוקציה מכיוון ש$k_1 < k$ ומתקיים: $(\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k_1} s') \wedge (\langle S1,s\rangle \Rightarrow^* s'')$ נקבל כי $s' = s''$. ולכן נקבל בנוסף $\langle S2,s''\rangle = \langle S2,s'\rangle \Rightarrow^* s_2$.

לפי הנחת האינדוקציה מכיוון ש$k_2 < k$ ומתקיים: $(\langle S2,s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s_1) \wedge (\langle S2,s'\rangle \Rightarrow^* s_2)$ נקבל כי $s_1 = s_2$.

הוכחנו את הטענה לכל כלל גזירה או אקסיומה בשפה ולכן לכל המקרה הטענה נכונה.

לסיכום הוכחנו את הטענה- $(\langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_1 \wedge \langle S,s\rangle \Rightarrow^* s_2) \to s_1 = s_2$ כדרוש.

(2) **תשובה-**

נוכיח את הטענה כי לא יתכן של- $\langle S,s\rangle$ קיימת גזירה סופית וגם קיימת גזירה אינסופית.

מכיוון שגם חייבת להיות לפחות אחת מהאופציות- או גזירה אינסופית או גזירה סופית, לכן למעשה ניתן להוכיח טענה שקולה:

נוכיח כי לכל $\langle S,s\rangle$, לכל מצב סופי s' ולכל $k \geq 0$ טבעי מתקיים:

אם $\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s'$ אזי לא קיימת גזירה אינסופית ל$\langle S,s\rangle$.

תהי קונפיגורציה $\langle S,s\rangle$ ויהי מצב סופי s' נוכיח באינדוקציה על $k \geq 0$ טבעי (מספר הגזירות) את הטענה:

בסיס האינדוקציה-

עבור $k = 0$ נקבל כי הטענה מתקיימת באופן ריק שכן לא מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^0 s'$ אלא מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^0 \langle S,s\rangle$.

הנחת האינדוקציה-

נניח כי הטענה מתקיימת עבור כל $k' < k$ ונוכיח את נכונות הטענה עבור k.

צעד האינדוקציה-

נניח כי מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s'$ ונוכיח כי לא קיימת גזירה אינסופית מ$\langle S,s\rangle$. כעת מכיוון ש$\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s'$ לכן קיימת סדרת גזירות סופית, נתבונן כעת בגזירה הראשונה בסדרה זו ונחלק למקרים לפי כללי הגזירה בסמנטיקה המבנית:

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[ass_{sos}]$ אזי $S = (x \coloneqq a)$ עבור x, a כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה (מכיוון שלאחר גזירה זו הגענו לטרמינל אזי הוא בעצם הטרמינל s' שעבורו מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s'$ כאשר במקרה שלנו $k = 1$):
$$\langle S,s\rangle = \langle x \coloneqq a, s\rangle \Longrightarrow s\big[x \mapsto A\big[[a]\big]\, s\big] = s'$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[ass_{sos}]$ ומסתיימת במצב סופי s' לכן למעשה הוכחנו כי לא קיימת גזירה אינסופית מ$\langle S,s\rangle$.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[skip_{sos}]$ אזי $S = skip$ ונקבל את הגזירה הבאה (מכיוון שלאחר גזירה זו הגענו לטרמינל אזי הוא בעצם הטרמינל s' שעבורו מתקיים $\langle S,s\rangle \Rightarrow^k s'$ כאשר במקרה שלנו $k = 1$):
$$\langle S,s\rangle = \langle skip, s\rangle \Longrightarrow s = s'$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[skip_{sos}]$ ומסתיימת במצב סופי s' לכן למעשה הוכחנו כי לא קיימת גזירה אינסופית מ$\langle S,s\rangle$.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[while_{sos}]$ אזי $S = while\ b\ do\ S1$ עבור $b, S1$ כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה:
$$\langle S,s\rangle = \langle while\ b\ do\ S1, s\rangle$$
$$\Longrightarrow \langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[while_{sos}]$ לפי הגזירה שהראנו לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle while\ b\ do\ S1, s\rangle$ בk גזירות לs' כל ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle if\ \ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle$ לs' .

כעת מכיוון שמתקיים $\langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$

לכן לפי הנחת האינדוקציה ($k-1<k$) נקבל כי לא קיימת סדרת גזירות אינסופית מ$\langle if\ b\ then\ (S;\ while\ b\ do\ S1)\ else\ skip, s\rangle$ ומכיוון שזו הגזירה האפשרית היחידה מ$\langle S,s\rangle = \langle while\ b\ do\ S1, s\rangle$ ולכן גם מ$\langle S,s\rangle$ לא קיימת סדרת גזירות אינסופית כדרוש.

- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[if_{sos}^{tt}]$ אזי $S = if\ b\ then\ S1\ else\ S2$ עבור $b, S1, S2$ כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה:
$$\langle S,s\rangle = \langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle \Longrightarrow \langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[if_{sos}^{tt}]$ לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle$ בk גזירות לs' כך ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle S1,s\rangle$ לs'.

כעת מכיוון שמתקיים כי $\langle S1,s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$,

לכן לפי הנחת האינדוקציה ($k-1<k$) נקבל כי לא קיימת סדרת גזירות אינסופית מ$\langle S1,s\rangle$ ומכיוון שזו הגזירה האפשרית היחידה מ$\langle S,s\rangle = \langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle$ ולכן גם מ$\langle S,s\rangle$ לא קיימת סדרת גזירות אינסופית כדרוש.
- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[if_{sos}^{ff}]$ אזי $S = if\ b\ then\ S1\ else\ S2$ עבור $b, S1, S2$ כלשהם ונקבל את הגזירה הבאה:
$$\langle S,s\rangle = \langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle \Longrightarrow \langle S2,s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$$
ומכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[if_{sos}^{ff}]$ לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle$ בk גזירות לs' כך ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle S2,s\rangle$ לs'.

כעת מכיוון שמתקיים כי $\langle S2,s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$,

לכן לפי הנחת האינדוקציה ($k-1<k$) נקבל כי לא קיימת סדרת גזירות אינסופית מ$\langle S2,s\rangle$ ומכיוון שזו הגזירה האפשרית היחידה מ$\langle S,s\rangle = \langle if\ b\ then\ S1\ else\ S2, s\rangle$ ולכן גם מ$\langle S,s\rangle$ לא קיימת סדרת גזירות אינסופית כדרוש.
- אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[comp_{sos}^{1}]$ או $[comp_{sos}^{2}]$ אזי $S = S1; S2$ עבור $S1, S2$ כלשהם.
  - אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[comp_{sos}^{2}]$ אזי נקבל את הגזירה הבאה:
  $$\langle S,s\rangle = \langle S1;S2,s\rangle \Rightarrow \langle S2,s_2\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$$
  ולפי כלל הגזירה $[comp_{sos}^{2}]$ מתקיים גם $\langle S1,s\rangle \Rightarrow s_2$.
  מכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[comp_{sos}^{2}]$ לפי ההנחה שלנו במקרה זה לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle S1;S2,s\rangle$ בk גזירות לs' כך ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle S2,s_2\rangle$ לs'.

  ומכיוון ש$\mathrm{k}-1<k$ לכן מתקיימת הנחת האינדוקציה ולא קיימת סדרת גזירות אינסופית מ$\langle S2,s_2\rangle$ ומכיוון שזו הגזירה האפשרית היחידה מ$\langle S,s\rangle$ (מהכלל $[comp_{sos}^{2}]$ כפי שהנחנו) ולכן גם מ$\langle S,s\rangle$ לא קיימת סדרת גזירות אינסופית כדרוש.

  - אם הגזירה הראשונה נובעת מכלל הגזירה $[comp_{sos}^{1}]$ אזי נקבל את הגזירה הבאה:

$$\langle S, s\rangle = \langle S1; S2, s\rangle \Rightarrow \langle S1'; S2, s_2\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$$

ולפי כלל הגזירה $[comp_{sos}^1]$ מתקיים גם $\langle S1, s\rangle \Rightarrow \langle S1', s_2\rangle$.
מכיוון שסדרת הגזירות האפשרית היחידה (לפי אקסיומות או כללי גזירה) היא בעזרת הכלל $[comp_{sos}^1]$ לפי ההנחה שלנו במקרה זה לכן למעשה נקבל כי אכן כפי שניתן להגיע מ$\langle S1; S2, s\rangle$ בk גזירות לs' כך ניתן להגיע ב$k-1$ גזירות מ$\langle S1'; S2, s_2\rangle$ לs' .
ומכיוון ש$k-1 < k$ לכן מתקיימת הנחת האינדוקציה ולא קיימת סדרת גזירות אינסופית מ$\langle S1'; S2, s_2\rangle$ ומכיוון שזו הגזירה האפשרית היחידה מ$\langle S, s\rangle$ (מהכלל $[comp_{sos}^1]$ כפי שהנחנו) ולכן גם מ$\langle S, s\rangle$ לא קיימת סדרת גזירות אינסופית כדרוש.

הוכחנו את הטענה לכל כלל גזירה או אקסיומה בשפה ולכן לכל המקרה הטענה נכונה.

לסיכום הוכחנו את הטענה- לא יתכן של- $\langle S, s\rangle$ קיימת גזירה סופית וגם קיימת גזירה אינסופית כדרוש.

שאלה 3:

נרצה לשנות לשפת While את הפקודה של while לפקודה הבאה:

do S **while** b

זוהי לולאה שתמיד מתבצעת פעם אחת לפחות, והביצוע שלה נפסק כאשר התנאי b אינו מתקיים. לדוגמא. הקוד הבא:

do x = x-10 **while** x>10

יסתיים במצב בו x=5 אם יתחיל במצב בו x=55, ויסתיים במצב בו x=-3 אם יתחיל במצב בו x=7.

הבהרה: בשפה המתקבלת לא קיימת פקודת **while** b **do** S אלא רק **do** S **while** b.

א. הוסיפו כלל/ים לטבלה של **Natural** Operational Semantics (טבלה 2.1 בנספח) שיגדירו את פקודת do while. הכללים אינם יכולים להסתמך על מבנה לולאת while הקיים בשפת while המקורית.

ב. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-**Natural** Operational Semantics המורחב שיצרתם בסעיף א:

do S **while** b ~ S; **if** b (**do** S **while** b) **else** skip

---

בס"ד

ג. הוסיפו כלל/ים לטבלה של **Structural** Operational Semantics (טבלה 2.2 בנספח) שיגדירו את פקודת do while. הכללים אינם יכולים להסתמך על מבנה לולאת while הקיים בשפת while המקורית.

תשובה-

א. נגדיר כללים לטבלה של Nos עבור הפקודה $do - while$:

$$[do - while_{ns}^{ff}] \quad \frac{\langle S, s\rangle \to s'}{\langle do\ S\ while\ b\ , s\rangle \to s'} \quad if B[\![b]\!]s = ff$$

כלל זה נובע מהעובדה כי על פי הגדרת $do - while$ נבצע תמיד את פעולה S על s ולאחר מכן נמשיך לבצע את תוכן הלולאה רק במידה והתנאי מתקיים. כאמור במקרה זה $B[\![b]\!]s = ff$ ולכן גוף הלולאה לא מתקיים ונקבל סך הכל- $\langle S, s\rangle \to s'$.

$$[do - while_{ns}^{tt}] \frac{\langle S, s\rangle \to s', \langle do\ S\ while\ b, s'\rangle \to s''}{\langle do\ S\ while\ \ b, s\rangle \to s''} \ if B[\![b]\!]s = tt$$

כלל זה נובע מהעובדה כי על פי הגדרת $do-while$ נבצע תמיד את פעולה S על s ולאחר מכן נמשיך לבצע את תוכן הלולאה רק במידה והתנאי מתקיים. כאמור במקרה זה $B[\![b]\!]s=tt$ ולכן גוף הלולאה מתקיים פעם נוספת. כלומר כל אלו הן ההנחות של הכלל ומהן קיבלנו כי $\langle do\ S\ while\ \ b,s\rangle\rightarrow s''$ כפי שהצגנו מעלה.

ב. על מנת להוכיח את השקילות סמנטית הנ"ל נצטרך להוכיח את שתי הטענות הבאות (לכל s, מצב, קיים s'', מצב):

- יהי s , נוכיח כי מתקיים

$$\langle do\ S\ while\ b,s\rangle\rightarrow s''\rightarrow\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''$$

נניח כי $\langle do\ S\ while\ b,s\rangle\rightarrow s''$ ומכך נקבל כי קיים עץ גזירה T אשר גוזר את הכלל הנ"ל. נחלק למקרים -

במידה ו-$B[\![b]\!]s=ff$ אזי נקבל את העץ גזירה-

$$[do-while_{ns}^{ff}]\quad\frac{\langle S,s\rangle\rightarrow s''}{\langle do\ S\ while\ b\ ,s\rangle\rightarrow s''}$$

נסמן $T_1=\langle S,s\rangle\rightarrow s''$.

כעת, נראה שקיים עץ גזירה עבור $\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''$.

$$[comp_{ns}]\frac{T_1\qquad\qquad [if_{ns}^{ff}]\ \dfrac{\langle skip,s''\rangle\rightarrow s''}{\langle if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s''\rangle\rightarrow s''}}{\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''}$$

כלומר קיבלנו כי העץ מורכב מאקסיומות T_1 , $\langle skip,s''\rangle\rightarrow s''$ ולכן אכן עץ גזירה תקין.

במידה ו-$B[\![b]\!]s=tt$ אזי נקבל את העץ גזירה-

$$[do-while_{ns}^{tt}]\quad\frac{\langle S,s\rangle\rightarrow s',\langle do\ S\ while\ b,s'\rangle\rightarrow s''}{\langle do\ S\ while\ b,s\rangle\rightarrow s''}$$

נסמן $T_1=\langle S,s\rangle\rightarrow s'$ ו-$T_2=\langle do\ S\ while\ b,s'\rangle\rightarrow s''$.

כעת, נוכיח כי ל-$\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''$ יש עץ גזירה חוקי –

$$[comp_{ns}]\frac{T_1\qquad\qquad [if_{ns}^{tt}]\ \dfrac{T_2}{\langle if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s''\rangle\rightarrow s''}}{\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''}$$

כלומר, ניתן לראות כי הגענו לעץ תקין היות ומורכב מאקסיומות T_1,T_2 אשר גוזרות אותו.

לפיכך, הוכחנו כי מתקיים-

$\langle do\ S\ while\ b,s\rangle\rightarrow s''\rightarrow\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''$ כפי שרצינו להוכיח.

נוכיח כעת את הכיוון השני-

- יהי s, נוכיח כי $\langle do\ S\ while\ b,s\rangle\rightarrow s''\leftarrow$

$\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''$

נניח כי $\langle S;if\ \ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip,s\rangle\rightarrow s''$ ומכך נקבל כי קיים עץ גזירה T אשר גוזר את הכלל הנ"ל. נחלק למקרים-

במידה ו-$B[\![b]\!]s = ff$ אזי נקבל את העץ גזירה-

$$[comp_{ns}]\frac{\langle S,s\rangle \to s'' \qquad [if_{ns}^{ff}]\ \dfrac{\langle skip, s''\rangle \to s''}{\langle if\ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip, s''\rangle \to s''}}{\langle S; if\ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip, s\rangle \to s''}$$

נסמן את האקסיומה שקיבלנו - $T_1 = \langle S,s\rangle \to s'$

כעת, נראה כי קיים עץ גזירה חוקי עבור $\langle do\ S\ while\ b, s\rangle \to s''$ -

$$[do - while_{ns}^{ff}] \quad \frac{\langle S,s\rangle \to s''}{\langle do\ S\ while\ b\ , s\rangle \to s''}$$

על כן, מאחר והגענו לאקסיומה T_1 אזי העץ גזירה חוקי.

במידה ו-$B[\![b]\!]s = tt$ אזי נקבל את העץ גזירה-

$$[comp_{ns}]\frac{\langle S,s\rangle \to s' \qquad [if_{ns}^{tt}]\ \dfrac{\langle do\ S\ while\ b, s'\rangle \to s''}{\langle if\ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip, s'\rangle \to s''}}{\langle S; if\ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip, s\rangle \to s''}$$

נסמן את האקסיומות שקיבלנו –

$$T_1 = \langle S,s\rangle \to s', \langle do\ S\ while\ b, s'\rangle \to s''$$

כעת, נראה כי קיים עץ גזירה חוקי עבור $\langle do\ S\ while\ b, s\rangle \to s''$ -

$$[do - while_{ns}^{tt}] \quad \frac{\langle S,s\rangle \to s',\ \ \langle do\ S\ while\ b, s'\rangle \to s''}{\langle do\ S\ while\ b\ , s\rangle \to s''}$$

על כן, מאחר והגענו לאקסיומות T_1, T_2 אזי העץ גזירה חוקי.

לפיכך, הוכחנו כי

$$\langle do\ S\ while\ b, s\rangle \to s'' \leftarrow \langle S; if\ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip, s\rangle \to s''$$

לסיכום, מאחר והוכחנו גרירה דו כיוונית, קיבלנו כי

$do\ S\ while\ b \sim S; if\ b\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip$ כנדרש.

ג. נגדיר כלל לטבלה של Sos עבור הפקודה $do - while$:

$$[do - while_{sos}] \quad \langle do\ S\ while\ b\ , s\rangle \Rightarrow \langle S; if\ b\ then\ (do\ S\ while\ b)\ else\ skip, s\rangle$$

כלל זה נובע מהעובדה כי על פי הגדרת $do - while$ נבצע תמיד את פעולה S על s ולאחר מכן נמשיך לבצע את תוכן הלולאה רק במידה והתנאי מתקיים. לפיכך, ניתן לראות שנקבל על פי הגזירה שכתבנו כי נבצע על המצב הנוכחי s את שרשור הפעולות S ואז פעולת $if\ b\ then\ do\ S\ while\ b\ else\ skip$ אשר תתנהג באופן הבא -
במידה ו-$B[\![b]\!]s = ff$ אזי נקבל כי הפעולה הבאה תיהיה $skip$ כפי שרצינו מאחר וכאמור נרצה שגוף הלולאת ה-$do - while$ לא תתקיים במקרה זה.

במידה ו-$B[\![b]\!]s = tt$ אזי נקבל כי הפעולה הבאה תיהיה $do\ S\ while\ b$ אשר תבטיח פעולה נוספת של S (כלומר תבצע איטרציה אחד של גוף הלולאה) ולאחר מכן נמשיך בהתאמה על פי ערך -$B[\![b]\!]s$ כנדרש.

ב. הוסיפו כללים לסמנטיקה של ביטויים אריתמטיים עבור טיפול בפעולות הבאות (שימו לב סעיף זה אינו תכנותי):

$$x \ll y$$

$$x \gg y$$

<u>תזכורת</u>: האופרטורים >>, << מקיימים את הזהויות הבאות:

$x \ll y \quad = \quad x * 2^y$

ד"

$x \gg y` \quad = \quad \lfloor x / 2^y \rfloor$

<u>תשובה-</u>

נגדיר את הפעולות $\gg$,$\ll$ עבור סמנטיקה של ביטויים אריתמטיים –

נגדיר כלל סמנטי עבור $\ll$:

$$A\llbracket x \ll y \rrbracket s = A\llbracket x \rrbracket s * (A\llbracket 2 \rrbracket s)^{A\llbracket y \rrbracket s}$$

היות וישירות על פי ההגדרה של שיפט שמאלה, הביטוי $x \ll y$ שווה ל-$x * 2^y$.

כעת נגדיר את הסמנטיקה עבור $\gg$:

$$A\llbracket x \ll y \rrbracket s = A\llbracket x \rrbracket s / (A\llbracket 2 \rrbracket s)^{A\llbracket y \rrbracket s}$$

כאשר גם כלל זה נובע ישירות מהגדרת שיפט ימינה - $x \gg y = x/2^y$.