שפות תכנות- תרגיל 3

יוסי מעתוק 208641472 ואושר אלחדד 318969748

- **חלק א: חישובים בתחשיב למדא**

שאלה 1: חישוב ביטויי למדא

חשבו את הביטויים הבאים עד כמה שניתן (אם יש גזירה אינסופית הסבירו במילים למה יש גזירה אינסופית):

א. $(\lambda z.z)\ (\lambda y.\ y\ \ y)\ (\lambda x.x\ a)$

ב. $(\lambda x.\ \ \lambda y.x\ y\ y)\ (\lambda a.a)\ b$

ג. $(((\lambda x.\lambda y.(x\ y))\ (\lambda y.y))\ w)$

הראו שיש שתי גזירות שונות (שמביאות גם לתוצאות שונות) לביטוי הבא:

ד. $(\lambda x.y)\ ((\lambda y.y\ y\ y)\ (\lambda x.\ x\ x\ x))$

תשובה-

נשתמש בסדר נורמלי , הפעלת רדוקציות בטא כשאפשר משמאל לימין, ולפי call by value , ללא רדוקציה בתוך אבסטרקציה, וללא הפעלת אבסטרקציה כאשר צד ימין הוא redex.

א.

$$(\lambda z.z)\ (\lambda y.y\ y)\ (\lambda x.x\ a) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda y.y\ y)\ (\lambda x.x\ a) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda x.x\ a)\ (\lambda x.x\ a) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda x.x\ a)\ a \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$a\ a$$

ב.

$$(\lambda x.\lambda y.x\ y\ y)\ (\lambda a.a)\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\ \lambda y.(\lambda a.a)\ y\ y)\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda a.a)\ b\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$b\ b$$

ג.

$$\left(\left((\lambda x.\lambda y.(x\ y))\ (\lambda y.y)\right)\ w\right) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$\left(\lambda y.\left((\lambda y.y)\ y\right)\right)\ w \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda y.y)\ w \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$w$$

ד.

גזירה ראשונה $call\ by\ value$ -

$$(\lambda x.\, y)\ \big((\lambda y.\, y\ y\ y)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\big) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda x.\, y)\ \big((\lambda x.\, x\ x\ x)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\big) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda x.\, y)\ \big((\lambda x.\, x\ x\ x)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\big) \underset{\beta}{\Rightarrow} \dots$$

וניתן לראות כי הגזירה היא אינסופית (כל עוד נמשיך לבצע רדוקצית $beta$) כי בכל שלב אנו מקבלים את אותו הביטוי מלפני רק עם עוד תוספת של $(\lambda x.\, x\ x\ x)$ עד אינסוף.

גזירה שנייה $call\ by\ name$ -

$$(\lambda x.\, y)\ \big((\lambda y.\, y\ y\ y)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\big) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$y$$

הצבנו את כל הביטוי הימני $\big((\lambda y.\, y\ y\ y)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)\big)$ באבסטרקציה שמשמאל $(\lambda x.\, y)$. האבסטרקציה מחליפה את המופע של x בביטוי מימין, ומכיוון שלא קיים מופע של x באבסטרקציה משמאל לכן נשארנו רק עם y.

שאלה 2: תחשיב למדא לביטויים בוליאניים

נתונות ההגדרות הבאות (שחלקן ראינו בתרגול):

tru = $\lambda t.\lambda f.\ t$

fls = $\lambda t.\lambda f.\ f$

test = $\lambda l.\lambda m.\lambda n.\ l\ m\ n$

or = $\lambda b.\lambda c.\ \ b\ True\ c$

א. כתבו חישוב (reduction) call-by-value semantics תחת לביטוי:

test (or tru fls) a b

כאשר a, b הם ערכים כלשהם.

ב. כתבו ביטוי בתחשיב למדא nand.

ג. חשבו בעזרת הביטוי את (לא לדלג על שום שלב של רדוקציית הבטא):

nand tru fls

nand tru tru

תשובה-

א.

$$test\ (or\ tru\ fls)\ a\ b =$$

$$(\lambda l.\lambda m.\lambda n.l\ m\ n)\ \Big(\big((\lambda b.\ \lambda c.\ b\ tru\ c)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ f)\big)\ a\ b\Big) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda l.\lambda m.\lambda n.l\ m\ n)\ \big((\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ f)\big)\ a\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda l.\lambda m.\lambda n.l\ m\ n)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ a\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda m.\lambda n.(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ m\ n)\ a\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda n.(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ a\ n)\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ a\ b \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$a$$

ב.

נגדיר כעת את הביטוי $nand$ אשר בהמשך באמת אנו רואים כי הוא לפי ההתנהגות הרצויה של $nand$ לפי הגדרתו הלוגית (השתמשנו בעצם בהגדרה של not וand שכן זו ההגדרה הלוגית של $nand$ - $not\ and$:

$$nand = \lambda b.\ \lambda c.\ b\ (c\ fls\ tru)\ tru$$

ג.

ביטוי ראשון-

$$nand\ tru\ fls =$$

$$(\lambda b.\ \lambda c.\ b\ (c\ fls\ tru)\ tru)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ f) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda c.\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (c\ fls\ tru)\ tru)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ f) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ \big((\lambda t.\ \lambda f.\ f)\ fls\ tru\big)\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ \big((\lambda f.\ f)\ tru\big)\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ tru\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda f.\ tru)\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$tru$$

ביטוי שני-

$$nand\ tru\ tru =$$

$$(\lambda b.\ \lambda c.\ b\ (c\ fls\ tru)\ tru)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda c.\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (c\ fls\ tru)\ tru)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ \big((\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ fls\ tru\big)\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ \big((\lambda f.\ fls)\ tru\big)\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ fls\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda f.\ fls)\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$fls$$

אכן לפי התנהגות $nand$-

B	C	תוצאה
False	False	True
True	False	True
False	True	True
True	True	False

שאלה 3: תחשיב למדא לביטויים אריתמטיים

בתרגול ראינו את ההגדרות הבאות למספרים טבעיים ופעולות אריתמטיות:

$c_0 = \lambda s. \lambda z.\ \ z$

$c_1 = \lambda s. \lambda z.\ \ s\ z$

$c_2 = \lambda s. \lambda z.\ \ s\ (s\ z)$

$c_3 = \lambda s. \lambda z.\ \ s\ (s\ (s\ z))$

...

$succ = \lambda n.\ \ \lambda s.\ \ \lambda z.\ \ s\ (n\ s\ z)$

$plus = \lambda m.\ \ \lambda n.\ \ \lambda s.\ \ \lambda z.\ \ m\ s\ (n\ s\ z)$

$times = \lambda m. \lambda n.\ \ m\ (plus\ n)\ c_0$

iszero = $\lambda m.\ \ m\ \ (\lambda x.\ \ False)\ True$

א. חשבו את succ c_0 בעזרת Call-By-Name, האם התוצאה היא c_1?
ב. חשבו את succ c_0 בעזרת Call-By-Value, האם התוצאה היא c_1?
ג. הגדירות פונקציית isodd, שתקבל מספר טבעי כפי שקודדנו בהגדרת השאלה ותחזיר tru אם המספר הוא אי-זוגי ו-fls אם המספר זוגי.
ד. חשבו את:

isodd 3

isodd 4

תשובה-

א.

$$succ\ c_0 = \big(\lambda n. \lambda s. \lambda z. s\ (n\ s\ z)\big)\ (\lambda s.\ \lambda z.\ z) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$\lambda s. \lambda z. s\ \big((\lambda s.\ \lambda z.\ z)\ s\ z\big)$$

נשים לב כי התבקשנו לחשב ע"י $call\ by\ name$ ובסדר נורמלי ולכן לאחר רדוקצית הבטא שביצענו אנחנו נתקעים מכיוון שאסור לבצע רדוקציה בתוך אבסטרציה במקרה זה. לכן התוצאה אינה c_1 אלא קיבלנו $\lambda s. \lambda z. s\ \big((\lambda s.\ \lambda z.\ z)\ s\ z\big)$.

ב.

$$succ\ c_0 = \big(\lambda n. \lambda s. \lambda z. s\ (n\ s\ z)\big)\ (\lambda s.\ \lambda z.\ z) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$\lambda s. \lambda z. s\ \big((\lambda s.\ \lambda z.\ z)\ s\ z\big)$$

נשים לב כי התבקשנו לחשב ע"י $call\ by\ value$ ובסדר נורמלי ולכן לאחר רדוקצית הבטא שביצענו אנחנו נתקעים מכיוון שאסור לבצע רדוקציה בתוך אבסטרציה במקרה זה. לכן התוצאה אינה c_1 אלא קיבלנו $\lambda s. \lambda z. s\ \big((\lambda s.\ \lambda z.\ z)\ s\ z\big)$.

ג.

נזכיר תחילה את הפונקציה not

$$not = \lambda b. b\ fls\ tru$$

ונזכיר את הפונקציה fls

$$fls = \lambda t.\ \lambda f.\ f$$

וכעת נגדיר את הפונקציה $isodd$

$$isodd = \lambda n. n\ not\ fls$$

האינטואיציה היא מכיוון שהמספרים c_i הם בעצם הפעלה רקורסיבית של פונקציה i פעמים על ערך מסויים, לכן השתמשנו בפונקציה שמופעלת שוב ושוב בnot ובערך לפונקציה בfls מכיוון שעבור c_0 אכן המספר לא אי זוגי ולכן אכן נקבל fls כדרוש, ועבור למשל c_1 הוא כן אי זוגי וכפי שאנו מראים בסעיף ד' אכן $not\ fls = tru$ כפי שרצינו וכך עבור כל c_i.

ד.

נראה תחילה כי $not\ fls = tru$

$$not\ fls = (\lambda b. b\ fls\ tru)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ f) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ f)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ f)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t) = tru$$

באופן דומה נראה כי $not\ tru = fls$

$$not\ tru = (\lambda b. b\ fls\ tru)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ f)\ (\lambda t.\ \lambda f.\ t) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$(\lambda t.\ \lambda f.\ f) = fls$$

כעת נחשב את $isodd\ 3$ (כאשר $3 = c_3$) -

$$isodd\ 3 = (\lambda n. n\ not\ fls)\ c_3 \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$c_3\ not\ fls \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$\left(\lambda s. \lambda z. s\ \left(s\ (s\ z)\right)\right)\ not\ fls \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$\left(\lambda z. not\ \left(not\ (not\ z)\right)\right)\ fls \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$not\ \left(not\ (not\ fls)\right) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$not\ (not\ tru) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$not\ fls \underset{\beta}{\Rightarrow} tru$$

כדרוש כי 3 אכן אי זוגי כלומר קיבלנו tru.

כעת נחשב את $isodd\ 4$ (כאשר $4 = c_4$) -

$$isodd\ 4 = (\lambda n. n\ not\ fls)\ c_4 \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$c_4\ not\ fls \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$\Big(\lambda s.\lambda z.s\ \big(s\ \big(s\ (s\ z)\big)\big)\Big)\ not\ fls \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$\Big(\lambda z.not\ \big(not\ \big(not\ (not\ z)\big)\big)\Big)\ fls \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$not\ \Big(not\ \big(not\ (not\ fls)\big)\Big) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$not\ \big(not\ (not\ tru)\big) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$not\ (not\ fls) \underset{\beta}{\Rightarrow}$$

$$not\ tru \underset{\beta}{\Rightarrow} fls$$

כדרוש כי אכן 4 אינו אי זוגי ולכן קיבלנו fls.

שאלה 4: Simply Typed Lambda Calculus

בכל אחת מהקביעות הבאות, קביעו מהו הטיפוס של T כך שהקביעה מתקיימת. הוכיחו את קביעתכם תוך שימוש בכללי הגזירה:

א. f:Bool → Bool ⊢ (f (if true then false else true)):T

ב. f:Bool → Bool ⊢ ($\lambda x{:}\, Bool.$ f (if x then false else true)):T

ג. ⊢ ($\lambda x{:}\, Bool.\ \lambda y{:}\, T.$ y x):Bool→ T →Bool→Bool

תשובה-

לצורך קריאות (שכל העץ יכנס בשורה אחת) נסמן את כל הכללים : $T -$ ללא הסימון הזה, כלומר רק APP, IF ....

א.

$$f{:}\, Bool \to Bool \vdash \big(f\ (if\ true\ then\ false\ else\ true)\big){:}\, T$$

נוכיח כי הטיפוס של T הוא $Bool$. נשמש בעץ $typing$ על מנת להוכיח זאת :

$$\dfrac{\dfrac{f:\ Bool \to Bool \in \Gamma}{f : Bool \to Bool \vdash f : Bool \to Bool}VAR \quad \dfrac{\dfrac{}{f{:}\, Bool \to Bool \vdash true : Bool}TRUE \quad \dfrac{}{f{:}\, Bool \to Bool \vdash false : Bool}FALSE \quad \dfrac{}{f{:}\, Bool \to Bool \vdash true : Bool}TRUE}{f{:}\, Bool \to Bool \vdash if\ true\ then\ false\ else\ true : Bool}IF}{f : Bool \to Bool \vdash \big(f\ (if\ true\ then\ false\ else\ true)\big) : Bool}APP$$

ואכן קיבלנו עץ תקין עם כל המעברים תקינים עד לאקסיומות (העלים) ולכן הוכחנו כי הטיפוס של T הוא $Bool$.

ב.

$$f{:}\, Bool \to Bool \vdash \big(\lambda x{:}\, Bool.\ f\ (if\ x\ then\ false\ else\ true)\big){:}\, T$$

נוכיח כי הטיפוס של T הוא $Bool \to Bool$. נשמש בעץ $typing$ על מנת להוכיח זאת :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f:\ Bool \to Bool \in \Gamma}{f : Bool \to Bool,\ x{:}\, Bool \vdash f : Bool \to Bool}VAR \quad \dfrac{\dfrac{x{:}\, Bool \in \Gamma}{f{:}\, Bool,\ x{:}\, Bool \to Bool \vdash x : Bool}VAR \quad \dfrac{}{f{:}\, Bool \to Bool,\ x{:}\, Bool \vdash false : Bool}FALSE \quad \dfrac{}{f{:}\, Bool \to Bool,\ x{:}\, Bool \vdash true : Bool}TRUE}{f{:}\, Bool \to Bool,\ x{:}\, Bool \vdash if\ x\ then\ false\ else\ true : Bool}IF}{f{:}\, Bool \to Bool,\ x{:}\, Bool \vdash f\ (if\ x\ then\ false\ else\ true) : Bool}APP}{f{:}\, Bool \to Bool \vdash (\lambda x{:}\, Bool.\ f\ (if\ x\ then\ false\ else\ true)) : Bool \to Bool}ABS$$

ואכן קיבלנו עץ תקין עם כל המעברים תקינים עד לאקסיומות (העלים) ולכן הוכחנו כי הטיפוס של T הוא $Bool \to Bool$.

ג.

$$\vdash (\lambda x{:}\, Bool.\ \lambda y{:}\, T.\ y\ x){:}\, Bool \to T \to Bool \to Bool$$

נוכיח כי הטיפוס של T הוא $Bool \to Bool \to Bool$. נשמש בעץ $typing$ על מנת להוכיח זאת :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y{:}\, Bool \to Bool \to Bool \in \Gamma}{x{:}\, Bool,\ y{:}\, Bool \to Bool \to Bool \vdash y{:}\, Bool \to Bool \to Bool}VAR \quad \dfrac{x{:}\, Bool \in \Gamma}{x{:}\, Bool,\ y{:}\, Bool \to Bool \to Bool \vdash x{:}\, Bool}VAR}{x{:}\, Bool,\ y{:}\, Bool \to Bool \to Bool \vdash y\ x{:}\, Bool \to Bool}APP}{x{:}\, Bool \vdash (\lambda y{:}\, Bool \to Bool \to Bool.\ y\ x){:}\, Bool \to Bool \to Bool \to Bool \to Bool}ABS}{\vdash (\lambda x{:}\, Bool.\ \lambda y{:}\, Bool \to Bool \to Bool.\ y\ x){:}\, Bool \to Bool \to Bool \to Bool \to Bool \to Bool}ABS$$

ואכן קיבלנו עץ תקין עם כל המעברים תקינים עד לאקסיומות (העלים) ולכן הוכחנו כי הטיפוס של T הוא $Bool \to Bool \to$ $Bool$.