אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

שפות תכנות- תרגיל 1

חלק א

שאלה 2

ב. מה הייתם משנים בפונקציה שכתבתם בסעיף א כדי שתתמוך גם בעץ חיפוש בינארי שכל איבריו הם מספרים של נקודה צפה (float).
הערה: תשובה לסעיף ב צריכה להתוסף לקובץ התשובות pdf .

תשובה

לא היינו משנים דבר בפונקציה שכתבנו בסעיף א על מנת שתתמוך גם בעץ חיפוש בינארי שכל איבריו הם מספרים של נקודה צפה מכיוון שבפונקציה שלנו אין שום שימוש באופרטור (כמו למשל +,- וכו׳) שיגרום לכך שהinterpreter של ocaml יסיק את הטיפוס הספציפי שהוא int למשל. האופרטור היחיד שאנו משתמשים בו הוא > ולכן הinterpreter של ocaml לא יכול לדעת האם מדובר בint או float מכיוון שאופרטור זה מתאים לשניהם, ולכן למעשה הinterpreter של ocaml יפרש את הטיפוס של איברי עץ החיפוש הבינארי כטיפוס פרמטרי (למשל a׳) שמתאים במקרה זה גם לint וגם ל float ולכן לא נצטרך לשנות דבר בפונקציה שכתבנו.

חלק ב- אינדוקציה מבנית

שאלה 1:

א. להלן דקדוק חסר הקשר:

E1 ::= ε | id | (E1)

הסימן ε מייצג את המחרוזת הריקה, ו-id היא מחרוזת שמייצגת מספר זהות כלשהו.
הוכיחו שבכל ביטוי בשפה של E1, מספר הסוגריים הפותחים "(" שווה למספר הסוגריים הסוגרים ")".

תשובה-

נוכיח באמצעות אינדוקציה מבנית :

בסיס האינדוקציה-

נתבונן על איברי הבסיס (עם עצי הגזירה המינימליים).

עבור ε נקבל כי אכן מספר הסוגריים הפותחים ״)״ שווה ל0 ושווה למספר הסוגריים הסוגרים ״(״.

כמו כן עבור id נקבל כי אכן מספר הסוגריים הפותחים ״)״ שווה ל0 ושווה למספר הסוגריים הסוגרים ״(״.

הנחת האינדוקציה-

בהינתן $x \in L(E_1)$ אזי מתקיים כי מספר הסוגריים הפותחים ״)״ שווה למספר הסוגריים הסוגרים ״(״.

צעד האינדוקציה-

לפי ההנחה נתון כי $x \in L(E_1)$ צ״ל $(x) \in L(E_1)$ (האיבר היחיד שניתן לגזור מ$x \in L(E_1)$)..
נסמן את מספר הסוגריים הפותחים של x ״)״ בעזרת n ונתון כי מספר זה שווה למספר הסוגריים הסוגרים של x ״(״ ולכן גם מספרו הוא n. ונקבל כי מספר הסוגריים הפותחים ״)״ של (x) הוא

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

$n+1$ ומספר הסוגריים הסוגרים של (x) הינו גם $n+1$ (מכיוון שנוספו ל-x עוד סוגר פותח "(" וסוגר ")" אחד) וסה"כ קיבלנו כי $(x) \in L(E_1)$.

לסיכום הוכחנו שבכל ביטוי בשפה של E_1, מספר הסוגריים הפותחים "(" שווה למספר הסוגריים הסוגרים ")".

ב. להלן דקדוק חסר הקשר:

E2 ::= ε | id | (R
R ::=) | E2)

הוכיחו שבכל ביטוי בשפה של E2, מספר הסוגריים הפותחים "(" שווה למספר הסוגריים הסוגרים ")".

תשובה-

נגדיר פונקציות $right, left$ כך שלכל מילה x נקבל כי $right(x)$ תחזיר לנו את מספר הסוגריים הפותחים ("(") במילה ו-$left(x)$ תחזיר לנו את מספר הסוגריים הסוגרים (")") במילה.

נוכיח טענה חזקה יותר: לכל $e \in L(E_2)$ ו-$r \in L(R)$ מתקיים $left(r)+1 = right(r) \wedge left(e) = right(e)$ באמצעות אינדוקציה מבנית:

בסיס האינדוקציה-

נתבונן על איברי הבסיס (עם עצי הגזירה המינימליים).

עבור E_2 נקבל כי איברי הבסיס הם:

- עבור ε נקבל כי אכן $left(\varepsilon) = 0 = right(\varepsilon)$ כדרוש.

  כמו כן עבור id נקבל כי אכן $left(id) = 0 = right(id)$ כדרוש.

עבור R נקבל כי איברי הבסיס הם:

- עבור (נקבל כי אכן $left(\,)\,)+1 = 0+1 = 1 = right(\,)\,)$ כדרוש.

הנחת האינדוקציה-

נניח כי עבור $e, e^* \in L(E_2)$ ו-$r, r^* \in L(R)$ מתקיים $left(r^*)+1 = right(r^*) \wedge left(e^*) = right(e^*)$ וכי $(r^* \wedge r = e^*) = e$ (כלומר e נבנית בגזירה אחת מ-r^* ו-r נבנית בגזירה אחת מ-e^*)

צעד האינדוקציה-

נשים לב תחילה כי כיסינו את כל אפשרויות הגזירה של E_2 ו-R בבסיס האינדוקציה ובהנחת האינדוקציה. כעת נוכיח כי אכן מתקיים עבור כל הגזירות האפשריות מ-e^*, r^* שהם למעשה כפי שסימנו e, r התנאי הבא $left(r)+1 = right(r) \wedge left(e) = right(e)$.

מהנחת האינדוקציה אנו מקבלים כי:

$$left(r)+1 = left(\,e^*)\,)+1 = left(e^*)+1 = right(e^*)+1 = right(\,e^*)\,) = right(r)$$

$$left(e) = left(\,(r^*\,) = left(r^*)+1 = right(r^*) = right(\,(r^*\,) = right(e)$$

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

לסיכום הוכחנו בפרט שבכל ביטוי בשפה של E_2, מספר הסוגריים הפותחים "(" שווה למספר הסוגריים הסוגרים ")".

ג. הוכיחו ששני הדקדוקים שבסעיפים א ו-ב מגדירים את אותה שפה. כלומר L(E1)=L(E2).

תשובה-

נוכיח הכלה דו כיוונית-

- נוכיח כי $L(E_1) \subseteq L(E_2)$, ונוכיח טענה חזקה יותר: לכל $x \in L(E_1)$ מתקיים $x \in L(E_2) \wedge x) \in L(R)$ באמצעות אינדוקציה מבנית:

בסיס האינדוקציה-

נתבונן על איברי הבסיס (עם עצי הגזירה המינימליים) של $L(E_1)$.

עבור $\varepsilon \in L(E_1)$ נקבל כי ניתן לגזור $E_2 \to \varepsilon$ (איבר בסיס) ולכן $\varepsilon \in L(E_2)$, כמו כן מכללי הגזירה $R \to E_2)$ נקבל כי עבור $\varepsilon \in L(E_2)$ מתקיים כי $\varepsilon) \in L(R)$ מכיוון שהוא נגזר מ$r \in L(R)$ כלשהו.

עבור $id \in L(E_1)$ נקבל כי ניתן לגזור $E_2 \to id$ (איבר בסיס) ולכן $id \in L(E_2)$, כמו כן מכללי הגזירה $R \to E_2)$ נקבל כי עבור $id \in L(E_2)$ מתקיים כי $id) \in L(R)$ מכיוון שהוא נגזר מ$r \in L(R)$ כלשהו.

הנחת האינדוקציה-

בהינתן $y \in L(E_1)$ אזי מתקיים כי $y \in L(E_2) \wedge y) \in L(R)$

צעד האינדוקציה-

לפי ההנחה נתון כי $y \in L(E_1)$ וצ"ל $(y) \in L(E_2) \wedge (y)) \in L(R)$ (זאת מכיוון שהאיבר היחיד שניתן לגזור מ$y \in L(E_1)$ הוא (y)). תחילה נשים לב כי מכלל הגזירה $R \to E_2)$ ומהנחת האינדוקציה $y) \in L(R)$ נקבל כי אכן ניתן לגזור מE_2 את (y) ולכן סה"כ $(y) \in L(E_2)$. כעת נשים לב כי מכלל הגזירה $R \to E_2)$ ומ$(y) \in L(E_2)$ נקבל כי אכן ניתן לגזור מR את $(y))$ כלומר קיבלנו ש$(y)) \in L(R)$ כדרוש.

כעת נוכיח כי $L(E_2) \subseteq L(E_1)$, ונוכיח טענה חזקה יותר: לכל $x \in L(E_2)$ מתקיים $x \in L(E_1)$ וגם לכל $r \in L(R)$ מתקיים כי $(r \in L(E_1)$ באמצעות אינדוקציה מבנית:

- **בסיס האינדוקציה-**

נתבונן על איברי הבסיס (עם עצי הגזירה המינימליים) של $L(E_2)$:

עבור $\varepsilon \in L(E_2)$ נקבל כי ניתן לגזור $E_1 \to \varepsilon$ (איבר בסיס) ולכן $\varepsilon \in L(E_1)$.

עבור $id \in L(E_2)$ נקבל כי ניתן לגזור $E_1 \to id$ (איבר בסיס) ולכן $id \in L(E_1)$.

נתבונן על איברי הבסיס (עם עצי הגזירה המינימליים) של $L(R)$:

עבור $) \in L(R)$ אזי נוכיח כי $() \in L(E_1)$ ונקבל כי מהכלל $E_1 \to (E_1)$ ועבור $\varepsilon \in L(E_1)$ (הוכחנו למעלה) אזי מתקיים כי ניתן לגזור מE_1 את $()$ ולכן $() \in L(E_1)$ כדרוש.

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

הנחת האינדוקציה-

בהינתן $e, e^* \in L(E_2)$ ו$r, r^* \in L(R)$ אזי מתקיימים כי $e^* \in L(E_1) \wedge (r^* \in L(E_1)$ וכי $e = (r^* \wedge r = e^*)$ (כלומר e נבנית בגזירה אחת מr^* וr נבנית בגזירה אחת מe^*)

צעד האינדוקציה-

נשים לב תחילה כי כיסינו את כל אפשרויות הגזירה של E_2 וR בבסיס האינדוקציה ובהנחת האינדוקציה. כעת נוכיח כי אכן מתקיים עבור כל הגזירות האפשריות מr^*, e^* שהם למעשה כפי שסימנו e, r התנאי הבא $e \in L(E_1) \wedge (r \in L(E_1)$.

נשים לב תחילה כי $e = (r^* \wedge r = e^*)$ כפי שהגדרנו. תחילה לפי הנחת האינדוקציה נקבל כי $(r^* = e \in L(E_1)$. בנוסף נשים לב לפי הנחת האינדוקציה כי $e^* \in L(E_1)$ וגם $(r = (e^*)$ ונקבל שלפי כלל הגזירה $E_1 \rightarrow (E_1)$ אזי נקבל כי אכן ניתן לגזור מE_1 את (e^*) ששווה לr) ולכן סה״כ קיבלנו את הדרוש כי $(r \in L(E_1)$.

לסיכום הוכחנו בפרט הכלה דו כיוונית ולכן נקבל את השיוון הדרוש $L(E_1) = L(E_2)$.

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

שאלה 2:

להלן דקדוק חסר הקשר לאובייקט משפת JSON ‏(string ו-int מקבלים את המשמעות המקובלת שלהם, כלומר מחרוזות ומספרים):

obj ::= {} | {member}

member ::= keyvalue | member, member

keyvalue ::= string : value

value ::= string | int | obj

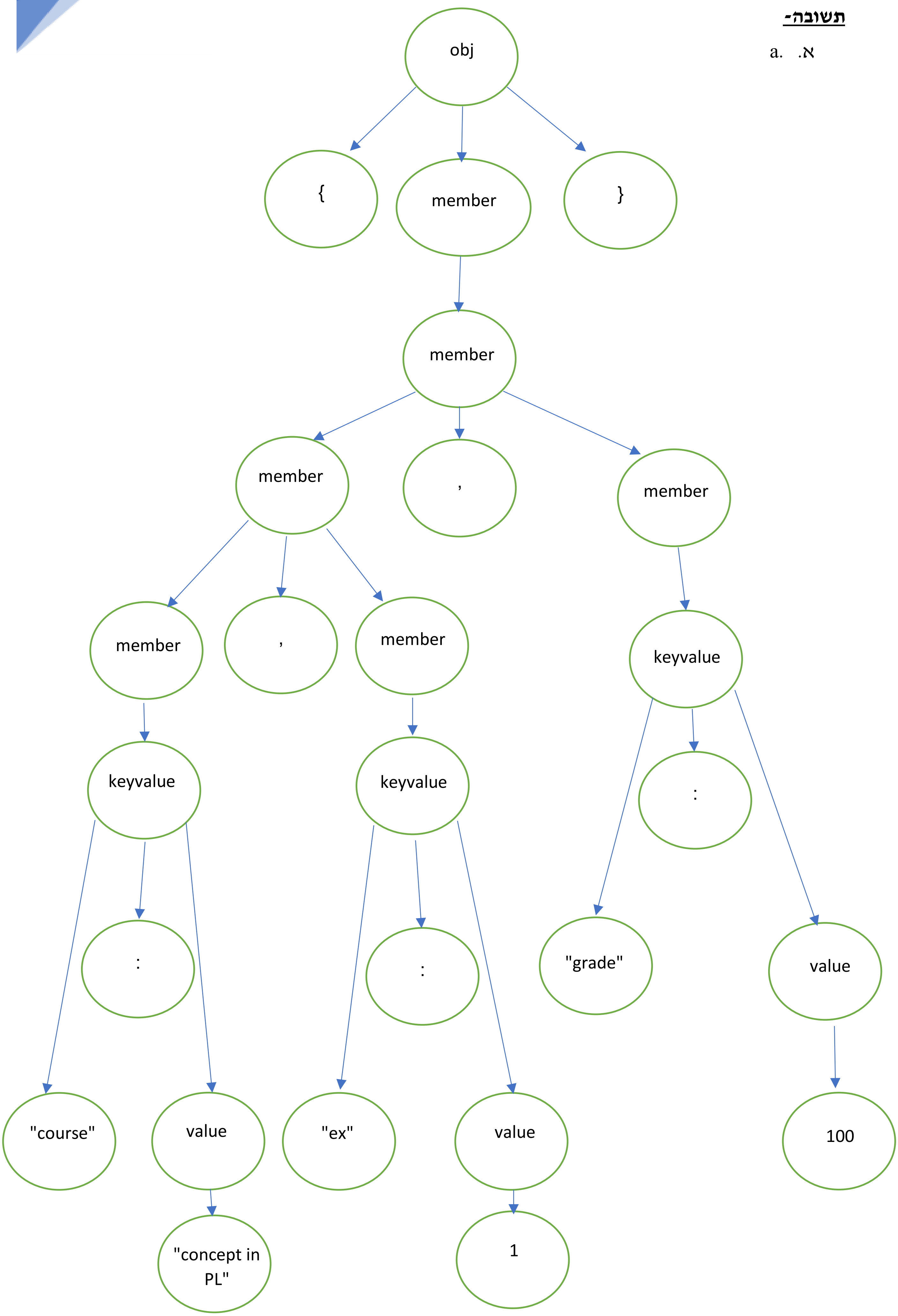
א. האם המילים הבאות נמצאות בשפת הדקדוק הנ"ל? אם כן, הראו עץ גזירה שמוכיח זאת. אם לא, הוכיחו שאין עץ גזירה כזה:

a. {“course” : “concept in PL”, “ex” : 1, “grade” : 100}
b. {“course” : “concept in PL”, “ex” : 1, “grade” : {100}}

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

תשובה-

א. a.



אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

א. b.

נוכיח שלא קיים עץ גזירה למילה זו, כלומר נוכיח כי מילה זו אינה שייכת לשפת JSON ולכן לא קיים לה עץ גזירה. נוכיח טענה חזקה מכך- המילה {100} לא קיימת באף מילה בשפת JSON, כלומר כל מילה שמכילה את {100} לא שייכת לשפת JSON.

נניח בשלילה כי קיימת מילה $c \in L(JSON)$ אשר מכילה את הביטוי {100} .

נעבור כעת על כל אפשרויות גזירה של ביטויים שמוקפים ב {} (סוגריים מסולסלים).

נשים לב כי הדרך היחידה לגזור ביטוי שיהיה חלק ממילה בשפה שתהיה מוקפת בסוגריים מסולסלים היא ע״י כלל הגזירה $obj ::= \{member\}$, כעת את $member$ ניתן לגזור ל$member, member$ אך נקבל סתירה כי במקרה זה הביטוי בתוך הסוגריים המסולסלים מכיל פסיק והביטוי {100} אינו מכיל פסיק. לכן האופציה היחידה שנותרה היא לגזור את $member$ ל$keyvalue$. כעת את $keyvalue$ ניתן לגזור אך ורק ל$string: value$, בסתירה לכך שבתוך הסוגריים המסולסלים הביטוי {100} אינו מכיל נקודותיים ״:״ והגזירה של $keyvalue$ כן.

בסה״כ הוכחנו כי לא קיימת מילה בשפת JSON אשר מכילה את הביטוי {100} ובעצם בכך הוכחנו כי המילה בסעיף b אינה שייכת לשפת JSON (כי הינה מכילה את הביטוי {100}) ולכן לא קיים עץ גזירה למילה זו כדרוש.

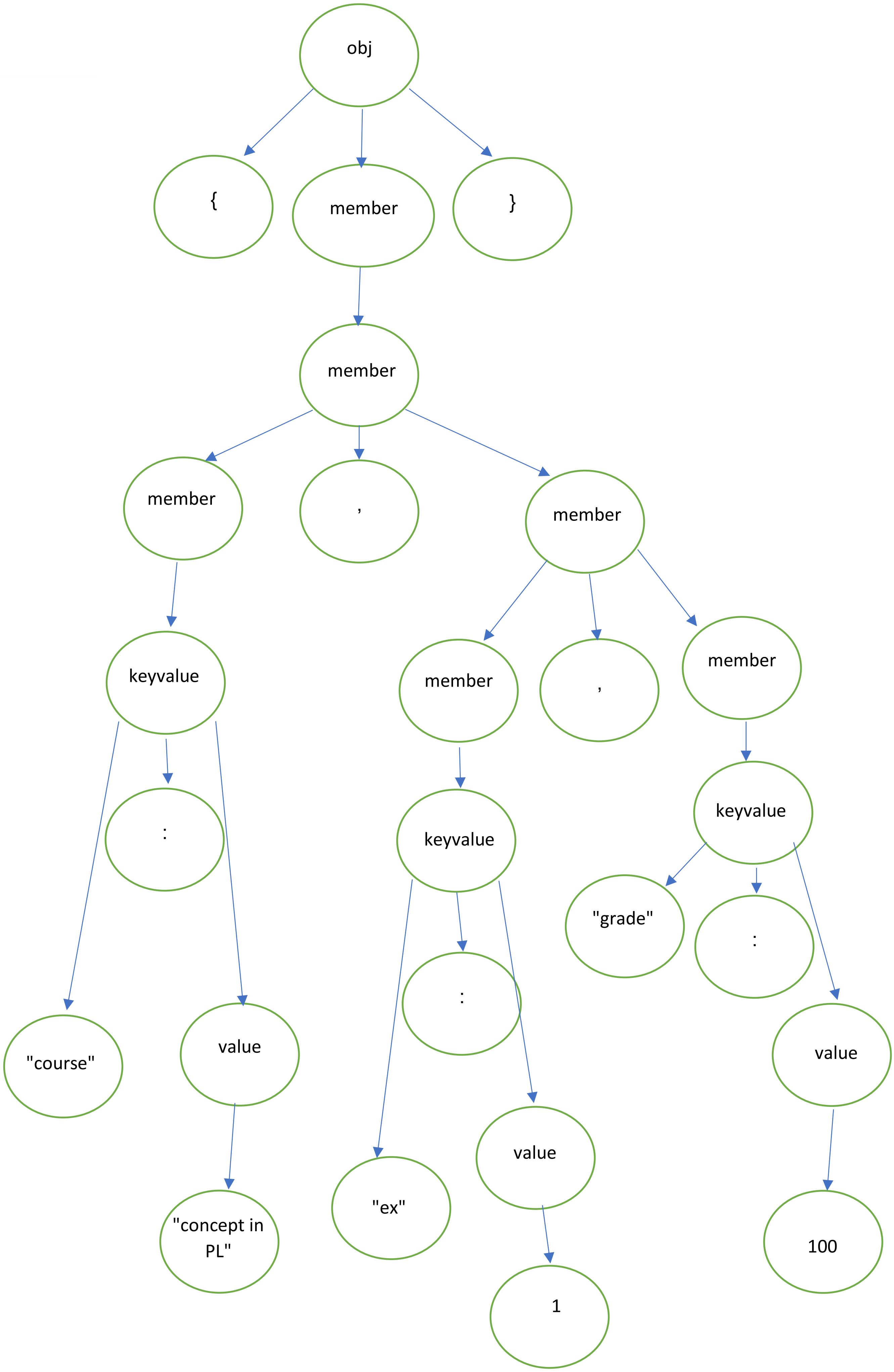
ב. הראו שהדקדוק הוא רב משמעי ע"י מציאת שני עצי גזירה שונים לאותה מילה.

תשובה-

נראה שהדקדוק הוא רב משמעי ע״י שנראה מילה שיש לה שני עצי גזירה שונים.

עבור המילה מסעיף א. a. אזי ישנו את עץ הגזירה כפי שהראנו בסעיף הנ״ל ובנוסף נראה עץ גזירה אחר לאותה המילה ולכן בעצם הדקדוק הנ״ל הוא רב משמעי (לפי הגדרת דקדוק רב משמעי)-

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472



אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

שאלה 3

א. הוכיחו באינדוקציה מבנית או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: לכל ביטוי exp מטיפוס bool_expr מתקיים:

num_of_vars(exp) = num_of_connectives(exp) + 1

תשובה

נפריך את הטענה באמצעות הדוגמא הבאה –

נתבונן בביטוי $exp = Not(Var("a"))$.

קל לראות כי exp אכן מתאים להגדרת הטיפוס $bool\_expr$ שבשאלה(כלומר הינו תחביר קונקרטי של התחביר האבסטרקטי הנתון).

בנוסף לכך, נשים לב כי על פי הגדרת num_of_vars נקבל–

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_vars\left(Not\left(Var(\text{a})\right)\right) = num\_of\_vars(Var("a")) = 1$$

בנוסף לכך, על פי הגדרת $num\_of\_connectives$, נקבל-

$$num\_of\_connectives(exp) = num\_of\_connectives\left(Not\left(Var("\text{a}")\right)\right) = 1 + num\_of\_connectives(Var("a")) = 1 + 0 = 1$$

לפיכך, ניתן לראות כי זוהי סתירה לטענה היות וקיבלנו –

$$1 = num\_of\_vars(exp) \neq num\_of\_connectives(exp) + 1 = 2$$

ב. הוכיחו באינדוקציה מבנית או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: לכל ביטוי exp מטיפוס bool_expr בו לא מופיע Not מתקיים:

num_of_vars(exp) = num_of_connectives(exp) + 1

תשובה

נוכיח את הטענה באינדוקציה מבנית.

בסיס האינדוקציה-

עבור איבר הבסיס $exp = Var("var\_name")$, על פי הגדרת הפונקציות $num\_of\_connectives$ ו- num_of_vars נקבל -

$$num\_of\_connectives(Var("var\_name")) = 0$$

$$num\_of\_vars(Var("var\_name")) = 1$$

כלומר סך הכל, קיבלנו $1 = num\_of\_vars(Var("var\_name")) = num\_of\_connectives(Var("var\_name")) + 1 = 0 + 1 = 1$ כנדרש.

הנחת האינדוקציה-

318969748 אושר אלחדד
208641472 יוסי מעתוק

נניח כי $\exp_1, \exp_2$ מסוג $bool\_expr$ (בהם לא מופיע Not) מקיימים את הטענה, כלומר מקיימים- $num\_of\_vars(\exp_1) = num\_of\_connectives(\exp_1) + 1$ וגם $num\_of\_vars(\exp_2) = num\_of\_connectives(\exp_2) + 1$

צעד האינדוקציה-

על פי ההנחה אנו יודעים כי הביטויים $\exp_1, \exp_2$ מסוג $bool\_expr$ (בהם לא מופיע Not) ומקיימים את הטענה. נוכיח כי לכל ביטוי exp(בו לא מופיע Not) אשר מורכב מ-$\exp_1$ ו-$\exp_2$ מתקיים כי-

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_connectives(exp) + 1$$

ראשית נשים לב כי ב- exp אכן לא מופיע Not מאחר וב-$\exp_1$ וב-$\exp_2$ לא מופיע Not.

נחלק למקרים –

- אם $exp = And(\exp_1, \exp_2)$ (בלי הגבלת הכלליות לסדר הזוג) אזי נקבל על פי הגדרת הפונקציות כי מתקיים –

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_vars(\exp_1) + num\_of\_vars(\exp_2) =$$

על פי הנחת האינדוקציה מתקיים –

$$= num\_of\_connectives(\exp_1) + 1 + num\_of\_connectives(\exp_2) + 1$$
$$= num\_of\_connectives(\exp_1) + num\_of\_connectives(\exp_2) + 2$$

כעת, נשים לב כי מתקיים-

$$num\_of\_connectives(exp) = num\_of\_connectives(\exp_1) + num\_of\_connectives(\exp_2) + 1 = num\_of\_vars(exp) + 1$$

כנדרש.

- ההוכחה למקרה השני זהה לחלוטין- אם $exp = Or(\exp_1, \exp_2)$ (בלי הגבלת הכלליות לסדר הזוג) אזי נקבל על פי הגדרת הפונקציות כי מתקיים –

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_vars(\exp_1) + num\_of\_vars(\exp_2) =$$

על פי הנחת האינדוקציה מתקיים –

$$= num\_of\_connectives(\exp_1) + 1 + num\_of\_connectives(\exp_2) + 1$$
$$= num\_of\_connectives(\exp_1) + num\_of\_connectives(\exp_2) + 2$$

כעת, נשים לב כי מתקיים-

$$num\_of\_connectives(exp) = num\_of\_connectives(\exp_1) + num\_of\_connectives(\exp_2) + 1 = num\_of\_vars(exp) + 1$$

כנדרש.

קיבלנו את הטענה ב-2 המקרים ולכן הוכחנו את צעד האינדוקציה כנדרש.

לפיכך, הוכחנו באינדוקציה מבנית את הטענה כי לכל ביטוי exp(בו לא מופיע Not) מהטיפוס $bool\_expr$ מתקיים כי-

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_connectives(exp) + 1$$

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

שאלה 4

א. כתבו דקדוק חסר הקשר שגוזר משתנה בשם H לקבוצת הביטויים הנ"ל. מומלץ להשתמש במשתנה נוסף.

תשובה

נציג דקדוק חסר הקשר לקבוצת הביטויים שבשאלה –

$$H ::= \{M\}$$
$$M ::= \varepsilon|\{\}|\{M\}|\ M, M|N$$
$$N ::= n \in N$$

ב. כתבו הגדרה של הקבוצה H ע"י הגדרה אינדוקטיבית בעזרת כללי היסק.

תשובה

נציג כללי היסק אינוקטיבים עבור H –

$$H \to \{M\}$$

$$M \to \varepsilon$$

$$M \to \{\}$$

$$M \to \{M\}$$

$$M \to M, M$$

$$M \to N$$

$$N \to n \in N$$

ג. הגדירו בהגדרה אינדוקטיבית פונקציה שסוכמת את כל האיברים שמופיעים במולטי-קבוצה בסדר כלשהו. למשל:

sum({1, {2, 2}, {{3}}}) = 1 + 2 + 2 + 3 = 8
sum({{}, {{}}}) = 0

תשובה

נגיד את הפונקציה הבאה –

$$f(h) = \begin{cases} 0 & h = \{\} \\ h & h \in N \\ f(h_1) & h = \{h_1\} \\ f(h_1) + f(h_2) & h = \{h_1, h_2\} \end{cases}$$

ד. הגדירו בהגדרה אינדוקטיבית פונקציה שסופרת את מספר האיברים במולטי-קבוצה בקינון כלשהו. למשל:

sum({1, {2, 2}, {{3}}}) = 4
sum({{}, {{}}}) = 0

אושר אלחדד 318969748
יוסי מעתוק 208641472

תשובה

נגיד את הפונקציה הבאה –

$$f(h)=\begin{cases} 0 & h=\{\} \\ 1 & h\in N \\ f(h_1) & h=\{h_1\} \\ f(h_1)+f(h_2) & h=\{h_1,h_2\} \end{cases}$$

ה. הגדירו בהגדרה אינדוקטיבית בעזרת כללי היסק את קבוצת המולטי-קבוצות כנ"ל שבהן לא מופיעים מספרים טבעיים פרט ל-1, לקבוצה זו נקרא בשם J.

תשובה

נגדיר את הקבוצה באופן הבא –

$$J:=\{M\}$$

$$M ::= \varepsilon|\{\}|\{M\}|M,M|1$$