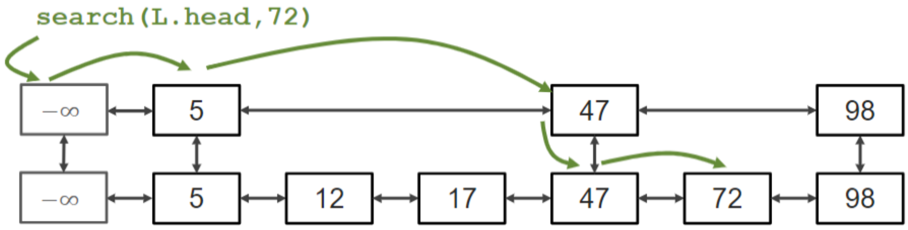
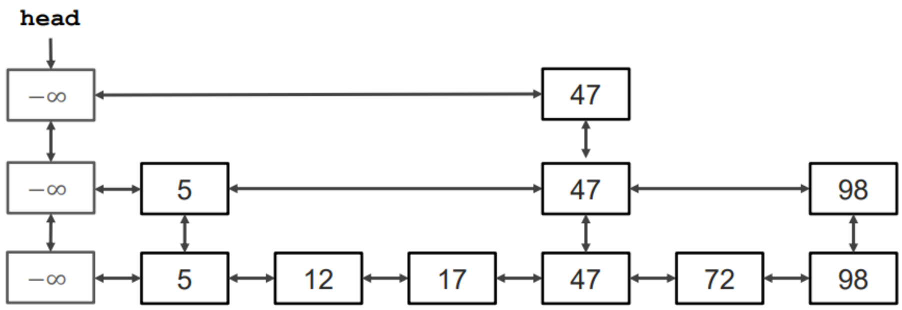
1 Randomized Data Structures

1.1 Skip Lists

- **Idee**
  - Einfügen von "Express-Liste" mit einigen Elementen
  - Beginne mit Suche in der Express-Liste mit weniger Elementen
  - Falls das suchende Element kleiner als nächstes Element in Express-Liste $\Rightarrow$ weiter nach rechts
  - Falls nicht $\Rightarrow$ Eine Stufe nach unten wandern und dort weiter suchen



  - Verbesserung: Zusätzliche Stufen an Express-Listen
  - Anwendung:
    * Gut für parallele Verarbeitung z.B. Multicore-Systeme (Einfügen und Löschen)
    * Dafür logarithmische Laufzeit nur im Durchschnitt
  - Auswahl von Elementen:
    * Abhängig von einer gewählten Wahrscheinlichkeit p
    * Element kommt mit Wahrscheinlichkeit p in übergeordnete Liste
    * Höhe: $h = O(log_{\frac{1}{p}} n)$
    * Anzahl Elemente: $n \Rightarrow pn \Rightarrow p^2 n \Rightarrow$ ... (unten nach oben)
- **Implementierung**



L.head – erstes/oberstes Element der Liste
L.height – Höhe der Skiplist
x.key – Wert
x.next – Nachfolger
x.prev – Vorgänger
x.down – Nachfolger Liste unten
x.up – Nachfolger Liste oben
nil – kein Nachfolger / leeres Element

- **Suche**
  - Laufzeit ist von Expresslisten abhängig

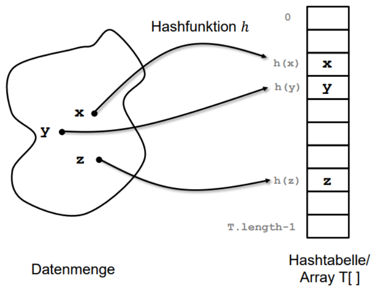
search(L, k)

```
current = L.head;
WHILE current != nil DO
    IF current.key == k THEN
        return current;
    IF current.next != nil AND current.next.key <= k THEN
        current = current.next;
    ELSE
        current = current.down;
return nil;
```

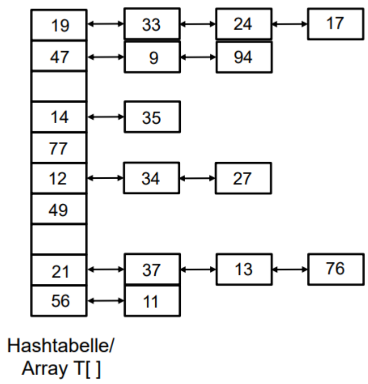
- **Einfügen**
  - Füge auf unterster Ebene ein
  - Evtl. auf höheren Ebenen mit zufälliger Wahl mithilfe von p auf jeder Ebene
- **Löschen**
  - Entferne Vorkommen des Elements aus allen Ebenen
- **Laufzeiten**
  - Einfügen: $\Theta(log_{\frac{1}{p}} n)$
  - Löschen: $\Theta(log_{\frac{1}{p}} n)$
  - Suchen: $\Theta(log_{\frac{1}{p}} n)$
  - (Im Durchschnitt)
  - O-Notation versteckt konstanten Faktor $\frac{1}{p}$
  - Speicherbedarf im Durchschnitt: $\frac{n}{1-p}$

1.2 Hashtables

- **Idee**



* Hashfunktion sollte gut verteilen
* $h(x)$ sollte uniform sein
* Unabhängig im Intervall $[0, T.length - 1]$ verteilt
* Einfügen mit konstant vielen Array-Operationen



* Kollisionsauflösung z.B. mithilfe von LinkedLists
* Neue Elemente werden vorne angefügt
* Konstante Anzahl an Array-Operationen
* Soviele Schritte wie die Liste lang ist
* Uniforme Hashfunktion

  $\Rightarrow \frac{n}{T.length}$ Einträge pro Liste

- **Hash-Funktionen**
  - Universelle Hash-Funktion:
    * Wähle zufällige $a, b \in [0, p - 1]$, $p\ prim$, $a \neq 0$
    * $h_{a,b}(x) = ((a \cdot x + b)\ mod\ p)\ mod\ T.length$
  - Krypthographische Hash-Funktionen:
    * MD5, SHA-1, SHA-2, SHA-3
    * $h(x) = MD5(x)\ mod\ T.length$

- **Hashtables vs. Bäume**
  - Hashtables:
    * nur Suche nach bestimmten Wert möglich
    * meist größer als zu erwartende Anzahl Einträge
  - Bäume:
    * schnelles Traversieren zu Nachbarn möglich
    * Bereichssuche möglich
- **Laufzeiten**
  - Wählt mal $T.length = n$ ergibt sich konstante Laufzeit
  - Einfügen: $\Theta(1)$
  - Löschen: $\Theta(1)$
  - Suchen: $\Theta(1)$
  - (Im Durchschnitt, beim Einfügen sogar im Worst-Case)
  - Speicherbedarf i.d.R. höher als n, meist ca. $1,33 \cdot n$

1.3 Bloom-Filter

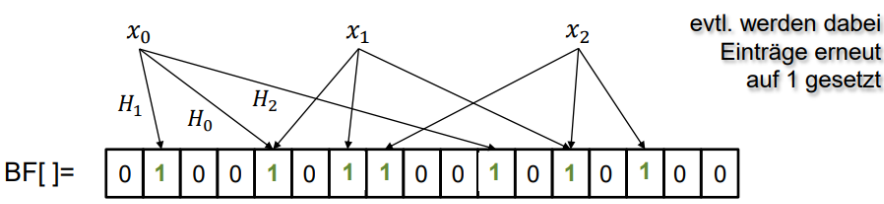
- **Idee**
  - Speicherschonende Wörterbucher mit kleinem Fehler
  - z.B. Vermeidung von schlechten Passwörtern
    (a) Abspeichern aller schlechten Passwörter in kompakter Form
    (b) Prüfe, ob eingegebenes Passwort im Bloom-Filter
  - z.B. Erkennen von schädlichen Websites (Chrome früher)
- **Erstellen**
  - n Elemente $x_0, ..., x_{n-1}$
  - m Bits-Speicher z.B. als Bit-Array
  - k gute Hash-Funktionen $H_0, ..., H_{k-1}$ mit Bildbereich $0, 1, ..., m-1$
  - Empfohlene Wahl: $k = \frac{m}{n} \cdot ln2$ (Fehlerrate von ca. 2^{-k})

- Code:

initBloom(X, BF, H) // H Array of hash functions

```
FOR i = 0 TO BF.length - 1 DO
    BF[i] = 0;
FOR i = 0 TO X.length - 1 DO
    FOR j = 0 TO H.length - 1 DO
        BF[H[j](X[i])] = 1;
```

1. Initialisiere Array mit 0-Einträgen
2. Schreibe für jedes Element in jede Bit-Position $H_0(x_i), \ldots, H_{k-1}(x_i)$ eine 1

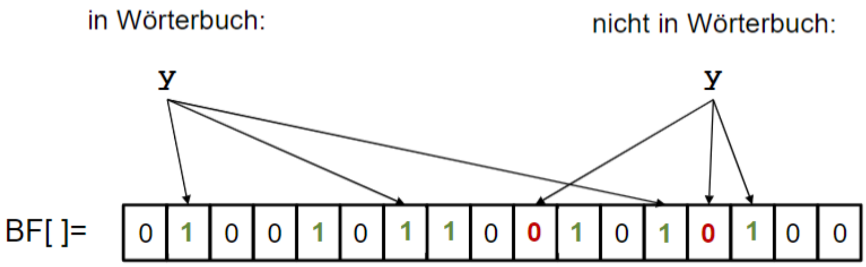


- **Suche**

searchBloom(BF, H, y)

```
result = 1;
FOR j = 0 TO H.length - 1 DO
    result = result AND BF[H[j](y)];
return result;
```

- Gibt an, dass y im Wörterbuch, falls alle k Einträge für y in $BF = 1$ sind



- Eventuell "false positives" (1, obwohl y nicht im Wörterbuch)
    * Passiert, falls die Einträge vorher von anderen Werten getroffen wurden
    * Daher gute Hashfunktionen und Filtergröße nicht zu klein