# 1 NP

- **Berechnungsprobleme**
  Probleme die in


  - Sind alle Probleme in polynomieller Zeit lösbar? ($O(n^k)$)
  - Nein $\Rightarrow$ Manche nur in superpolynomieller Zeit lösbar
  - Polynomielle Probleme: "einfach"
  - Superpolynomielle Probleme: "hart"
- **Klasse P**
  - Klasse aller Polynomialzeitprobleme
  - Problem ist effizient lösbar gdw. es in polynomieller Zeit lösbar ist
  - Gilt für Polynome beliebigen Grades (auch $n^k$)
  - Zeitkomplexität $n^k$ mit großem $k$ bedenklich, jedoch fast nie notwendig
  - $n$ beschreibt die Länge der Eingabe
  - Beispiele: Binäre Addition, Kürzeste Wege, Sortieren,...
- **Klasse NP**
  - Enthält "einfach zu verifizierende" Probleme (polynomieller Zeit)
  - Enthält Probleme mit "kurzem Beweis" (Länge polynomiell in Länge der Instanz)
  - Also: Klasse aller Probleme, deren Lösung in Polynomialzeit verifizierbar ist
  - Beispiele: Soduko, 3D-Matching,...
  - Beispiel: Faktorisierungsproblem
    - Jede nicht-Primzahl kann eindeutig als Primzahlprodukt geschrieben werden
    - $35 = 5 \cdot 7$, $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$,...
    - Faktorsieren auf klassischen Computern schwer
    - $n \longrightarrow^{schwer} p, q$
    - $n, p, q \longrightarrow^{leicht}$ ist $n = p \cdot q$?
  -  Rucksackproblem auch in polynomieller Laufzeit verifizierbar

- Hamilton-Kreis-Problem
  - Hamiltonischer Kreis: Zyklus, der alle Knoten, aber nicht unbedingt alle Kanten enthält
  - Entscheidungsalgorithmus listet alle möglichen Permutationen der Knoten aus $G$ auf
  - Prüfung bei jeder Permutation, ob es ein Hamiltonischer Kreis ist
  - Laufzeit:
    - Kodierung via Adjazenzmatrix: $m$ Knoten $\Rightarrow$ Matrix mit $n = m\ x\ m$ Einträgen
    - $m!$ mögliche Permutationen der Knoten
    - $\Omega(m!) = \Omega(\sqrt{n}!) = \Omega(2^{\sqrt{n}})$
    - $\Rightarrow$ superpolynomielle Laufzeit (liegt **nie** in $O(n^k)$)
  - **Allerdings:** Einfacher, wenn nur Beweis verifiziert werden muss

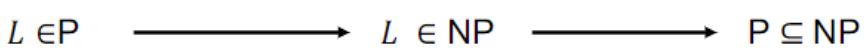
    $\Rightarrow$ Test, ob es sich um Permutation der Knoten handelt

    $\Rightarrow$ Test, ob alle angegebenen Kanten auf Kreis im Graphen existieren

    $\Rightarrow$ Verifikationsalgorithmus $V$ mit quadratischer Laufzeit
  - Verifikationsalgorithmus: $V(x, y) = 1/0$ (1, falls Kreis bzw. 0, falls nicht)
  - Damit: Hamilton-Kreis $\in$ NP

- **Entscheidungsproblem vs Optimierungsproblem**
  - Optimierungsproblem: Lösung nimmt bestimmten Wert an
  - Entscheidungsproblem: Binäre Antwort (Ja/Nein)
  - Bei NP Betrachtung von Entscheidungsproblemen
  - Optimierungsproblem oft in verwandtes Entscheidungsproblem umwandelbar
  - Verwandtes Entscheidungsproblem: dem zu optimierenden Wert wird eine Schranke auferlegt

- **P versus NP**




  - Für viele wichtige Probleme ist jedoch unbekannt, ob sie in P (effizient) lösbar sind
  - Unbekannt ob $P \neq NP$
  - Intuitive Frage: Ist das Finden eines Beweises schwieriger als dessen Überprüfung?

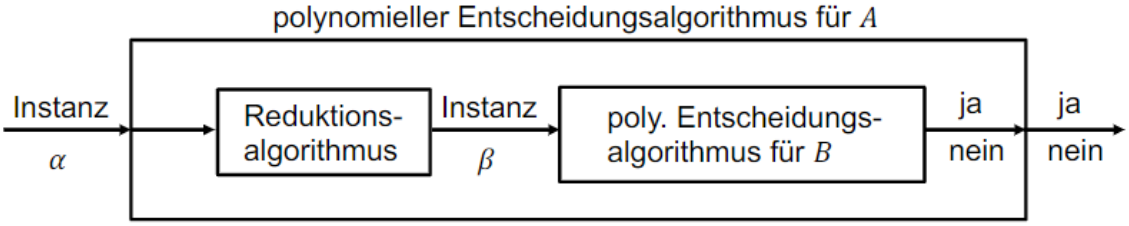
    $\Rightarrow$ Ja, also $P \neq NP$ gilt
  - In den letzten 50 Jahren kein Beweis für $P = NP$
  - Eines der wichtigsten offenen Probleme der theoretischen Informatik
  - Konsequenzen eines Beweises von $P = NP$:
    - $P = NP$: **dramatisch**, vieles bisher schwieriges einfacher lösbar (Rucksack, Kryptographie)
    - $P \neq NP$: **nicht dramatisch**, mgl. interessante Konsequenzen in Kryptographie

- **NP-Vollständigkeit**
  - Problem befindet sich in NP
  - Problem ist so "schwer" wie jedes Problem in NP
  - Beweis: Zeigen, dass kein effizienter Algorithmus existiert
  - Werkzeug: Reduktionen (zum Vergleich verschiedener Probleme)
  - NP-Härte/NP-Schwere:
    * Klassifikation von Problemen als schwierig, trotz fehlender genauer Zuordnung
    * Starke Indikatoren, dass Problem $L$ nicht in P ist:
      · $L$ ist mindestens so schwierig, wie alle anderen Probleme in NP
      · Daraus folgt, dass $L$ nur in P, wenn $P = NP$ (unwahrscheinlich )
  - Definitionen
    * Problem $L$ ist **NP-schwer**, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in NP$
    * Problem $L$ ist **NP-vollständig**, wenn $L$ sowohl NP-schwer als auch in NP ist
    * z.B.: Hamilton-Kreis ist NP-vollständig

- **Reduktionen**
  - Reduktionsidee
    - Betrachte Problem $A$, das wir in polynomieller Zeit lösen wollen
    - Bereits bekannt: Problem $B$ (in polynomieller Zeit lösbar)
    - Benötigt wird Prozedur, die Instanzen der Probleme ineinander überführt

      $\Rightarrow$ Transformation benötigt polynomielle Zeit

      $\Rightarrow$ Antworten sind gleich




  - Beispiel:
    - Intuitiv: Reduktion von A auf B, wenn Umformulierung möglich

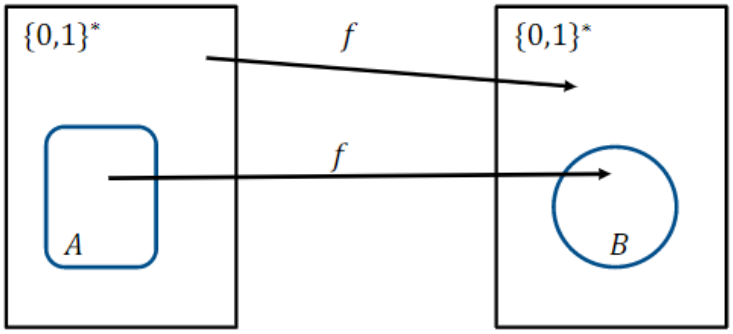
      $\Rightarrow$ Jede Instanz A kann leicht in Instanz von B umformuliert werden

      $\Rightarrow$ Lösung der Instanz B liefert Lösung von Instanz A
    - Reduktion: Lösen von linearen Gleichungen auf quadratische Gleichnungen
      - Lineare Gleichung $ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$
      - Quadratische Gleichung $ax^2 + bx + 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}, x = 0$
      - Quadratische Gleichung liefert also auch Lösung für lineare Gleichung
  - Formale Definition:

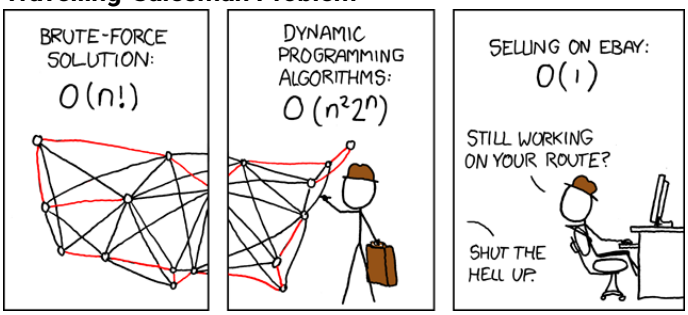
    A lässt sich auf B in **polynomieller Zeit reduzieren**, mit Schreibweise $A \leq_p B$, wenn eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ existiert, sodass für alle $x \in \{0,1\}^*$ gilt:

    $x \in A$ genau dann, wenn $f(x) \in B$

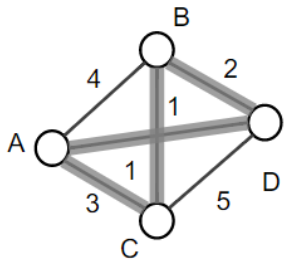
Illustration der Polynomialzeitreduktion:



- **Travelling-Salesman Problem**




  - Beschreibung
    - Reisender plant Rundreise durch mehrere Städte
    - Start und Ziel ist eine vorgegebene Stadt
    - Jede Stadt nur einmal besuchen
    - Ziel: Minimale Reisekosten

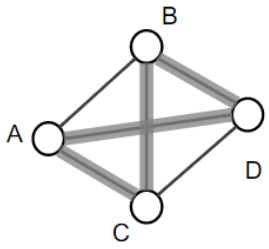



Eine optimale Route mit Kosten 7 verläuft von A → D → B → C → A

  - Problem:
    - Anzahl der verschiedenen Rundreisen $(n-1)!$
    - Stark nach oben explodierende Zahlen
    - Brute-Force für große $n$ praktisch unmöglich
    - Es existiert kein effizienter Algorithmus, der das TSP effizient löst
    - TSP ist **NP-vollständig**
  - Beweis NP-Vollständigkeit
    - Zeigen: TSP gehört zu NP und TSP ist NP-schwer
  - TSP gehört zu NP
    - Gegeben: Instanz des Problems TSP, Folge der $n$ Knoten der Tour (Zertifikat)
    - Verifikationsalgorithmus überprüft, ob Folge jeden Knoten genau einmal enthält
    - Außerdem Aufsummieren der Kantenkosten und überprüfen, ob diese maximal $k$ ist
    - Verifikation läuft in polynomieller Laufzeit $\Rightarrow$ gehört zu NP

- TSP ist NP-schwer
  - Wir zeigen $HAM - KREIS \leq_p TSP$
  - Start: Instanz von $HAM - KREIS$ mit $G = (V, E)$
  - Konstruiere Instanz von $TSP$

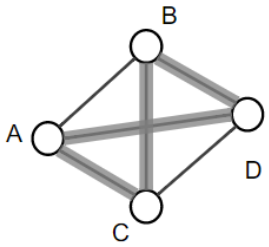
    $\Rightarrow G' = (V, E')$ mit $E' = \{(i, j) : i, j \in V \text{ und } i \neq j\}$
  - Definiere Kostenfunktion $c(i, j) = 0$, falls $(i, j) \in E$ / $c(i, j) = 1$, falls $(i, j) \notin E$
  - Instanz von TSP ist $< G', c, 0 >$ (Konstruktion in polynomieller Zeit) (0: Kosten von 0)
  - **Zeige jetzt:** $G$ besitzt hamiltonischen Kreis $\Leftrightarrow$ G' enthält Tour mit Kosten $\leq 0$
  - $\Rightarrow$ Graph $G$ besitzt einen hamiltonischen Kreis $h$




Jede Kante von $h$ gehört zu $E$ und daher besitzt laut Kostenfunktion der Graph $G'$ die Kosten $0$.

Damit ist $h$ eine Tour in $G'$ mit den Kosten $0$.

  - $\Leftarrow$ Graph $G$ besitzt eine Tour $h'$ mit Kosten kleiner gleich 0




Die Kosten der Kanten in $E'$ haben die Werte $0$ und $1$. Die Kosten der Tour betragen exakt $0$ und jede Kante muss die Kosten $0$ haben.

Damit hat $h'$ nur Kanten von $E$.

Damit folgt, dass $h'$ ein Hamiltonischer Kreis des Graphen $G$ ist.