# 1 Grundlegende Datenstrukturen

## 1.1 Stacks

### Abstrakter Datentyp Stack

`new S()`
- Erzeugt neuen (leeren) Stack

`s.isEmpty()`
- Gibt an, ob Stack `s` leer ist

`s.pop()`
- Gibt oberstes Element vom Stack `s` zurück und löscht es vom Stack
- Gibt Fehlermeldung aus, falls der Stack leer ist

`s.push(k)`
- Schreibt `k` als neues oberstes Element auf Stack `s`

**Abstrakter Aufbau** **LIFO**-Prinzip - Last in, First out

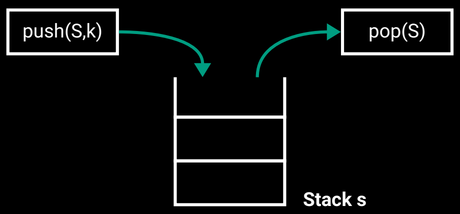
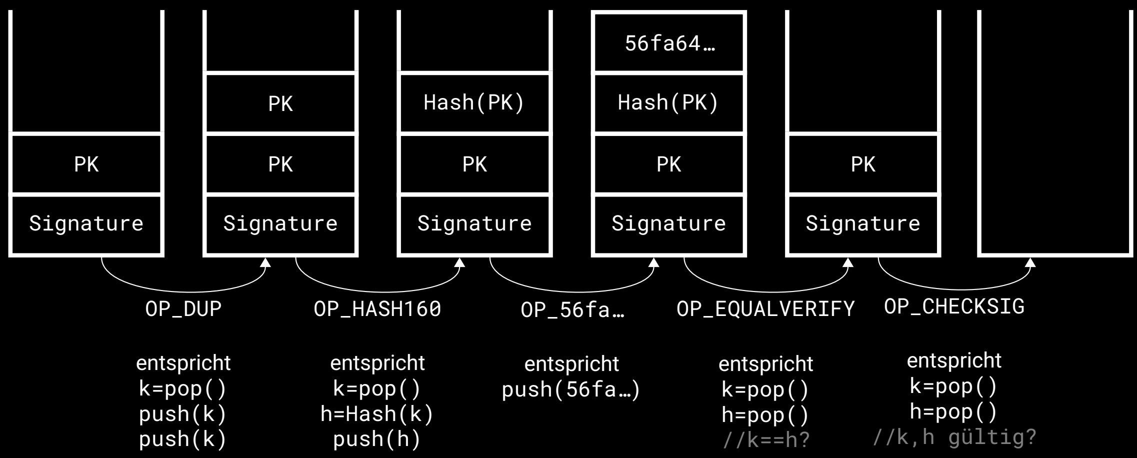



Abbildung 1: Abstrakter Aufbau eines Stacks

### Beispiel Bitcoin

```
scriptPubKey:
OP_DUP OP_HASH160 56fa64a8bd7852d2c58095fa9a2fcd52d2c580b65d35549d
OP_EQUALVERIFY OP_CHECKSIG
```



### Stacks als Array

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | 12 | 47 | 17 | 98 | 72 | | | | |

Abbildung 2: Beispiel: Stack als Array

`s.top` zeigt immer auf oberstes Element

`pop()` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach links bewegt

`push(k)` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach rechts bewegt

### Stacks als Array - Methoden, falls maximale Größe bekannt

new(S)

```
S.A[]=ALLOCATE(MAX);
S.top=-1;
```

isEmpty(S)

```
IF S.top<0 THEN
  return true;
ELSE
  return false;
```

pop(S)

```
IF isEmpty(S) THEN
  error "underflow";
ELSE
  s.top=s.top-1;
  return S.A[S.top+1];
```

push(S)

```
IF S.top==MAX-1 THEN
  error "overflow";
ELSE
  S.top=S.top+1;
  S.A[S.top]=k;
```

### Stacks mit variabler Größe - Einfach

- Falls `push(k)` bei vollem Array $\Rightarrow$ Vergößerung des Arrays
- Erzeugen eines neuen Arrays mit Länge $+ 1$ und Umkopieren aller Elemente
- Durchschnittlich $\Omega(n)$ Kopierschritte pro `push`-Befehl

### Stacks mit variabler Größe - Verbesserung

**Idee — Stacks mit Variabler Größe**

- Wenn Grenze erreicht, Verdopplung des Speichers und Kopieren der Elemente
- Falls weniger als ein Viertel belegt, schrumpfe das Array wieder

Methoden: `RESIZE(A,m)` reserviert neuen Speicher der Größe `m` und kopiert `A` um

new(S)

```
S.A[]=ALLOCATE(1);
S.top=-1;
S.memsize=1;
```

isEmpty(S)

```
IF S.top<0 THEN
    return true;
ELSE
    return false;
```

pop(S)

```
IF isEmpty(S) THEN
    error "underflow";
ELSE
    S.top=S.top-1;
    IF 4*(S.top+1)==S.memsize THEN
        S.mensize=s.memsize/2;
        RESIZE(S.A,S.memsize);
    return S.A[S.top+1];
```

push(S)

```
S.top=S.top+1;
S.A[S.top]=k;
IF S.top+1>=S.memsize THEN
    S.memsize=2*S.memsize;
    RESIZE(S.A,S.memsize);
```

Im Durchschnitt für jeder der mindestens `n` Befehle $\Theta(1)$ Umkopierschritte

## 1.2 Verkettete Listen

### Aufbau

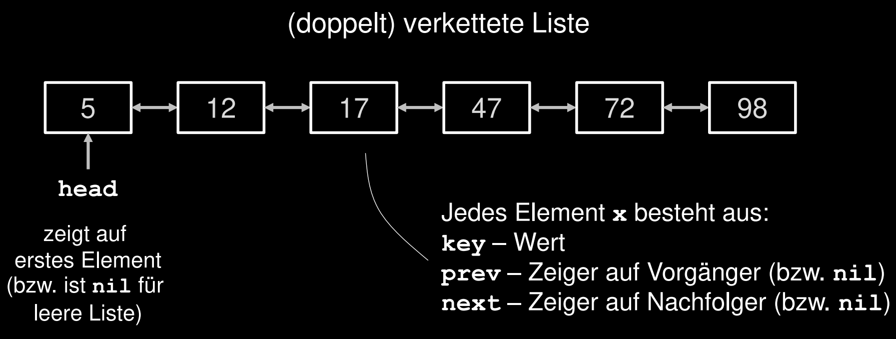



Abbildung 3: Aufbau Verkettete Liste

### Verkettete Listen durch Arrays

Entspricht doppelter Verkettung zwischen 45 und 12

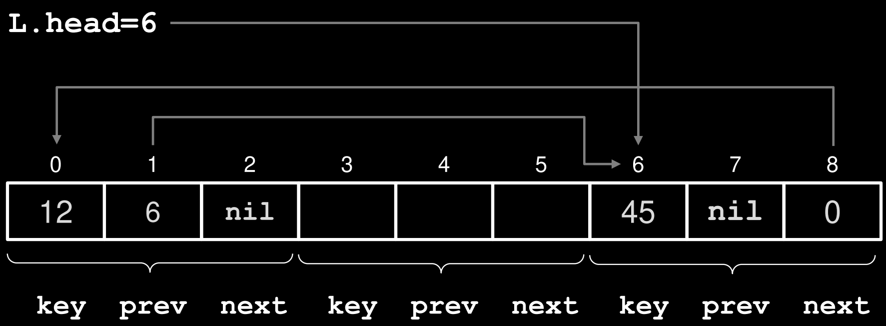



Abbildung 4: Beispiel Verkettete Liste durch Arrays

### 1.2.1 Elementare Operationen auf Listen

#### Suche nach Element

search(L,k) // Returns pointer to k in L (or nil)

```
current = L.head;
WHILE current != nil AND current.key != k DO
  current = current.next;
return current;
```

Laufzeit beträgt im Worst Case $\Theta(n) \Rightarrow$ Keine Überprüfung, ob Wert bereits in Liste, sonst $\Theta(n)$

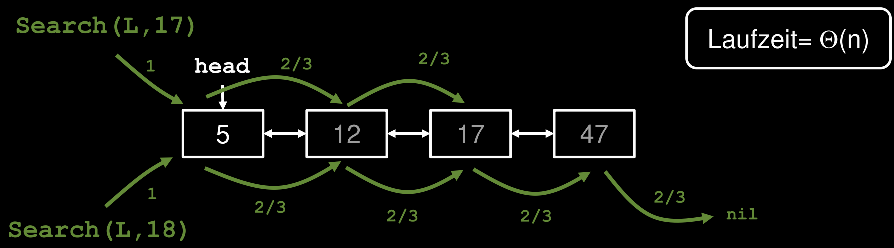



Abbildung 5: Grafische Darstellung einer Suche in Listen

#### Einfügen eines Elements am Kopf der Liste

insert(L,x)

```
insert(L,x)
x.next = l.head;
x.prev = nil;
IF L.head != nil THEN
    L.head.prev = x;
L.head = x;
```

Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da Einfügen am Kopf

#### Löschen eines Elements aus Liste

delete (L,x)

```
IF x.prev != nil THEN
  x.prev.next = x.next
ELSE
  L.head = x.next;
IF x.next != nil THEN
  x.next.prev = x.prev;
```

Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da hier Pointer auf Objekt gegeben
Löschen eines Wertes $k$ mithilfe von Suche beträgt $\Omega(n)$

#### Vereinfachung per Wächter/Sentinels

Ziel ist die Eliminierung der Spezialfälle für Listenanfang/-ende

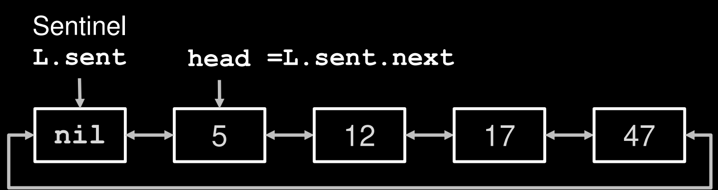



Abbildung 6: Beispiel Sentinel

Löschen mit Sentinels:

deleteSent(L,x)

```
x.prev.next = x.next;
x.next.prev = x.prev;
```

## 1.3 Queues

### Abstrakter Datentyp Queue

`new Q()`
- Erzeuge neue (leere) Queue

`q.isEmpty()`
- Gibt an, ob Queue `q` leer ist

`q.dequeue()`
- Gibt vorderstes Element aus `q` zurück und löscht es auf Queue
- Fehlermeldung, falls Queue leer ist

`q.enqueue(k)`
- Schreibt `k` als neues hinterstes Element auf `q`
- Fehlermeldung, falls Queue voll ist

### Abstrakter Aufbau

**FIFO**-Prinzip / First in, First out

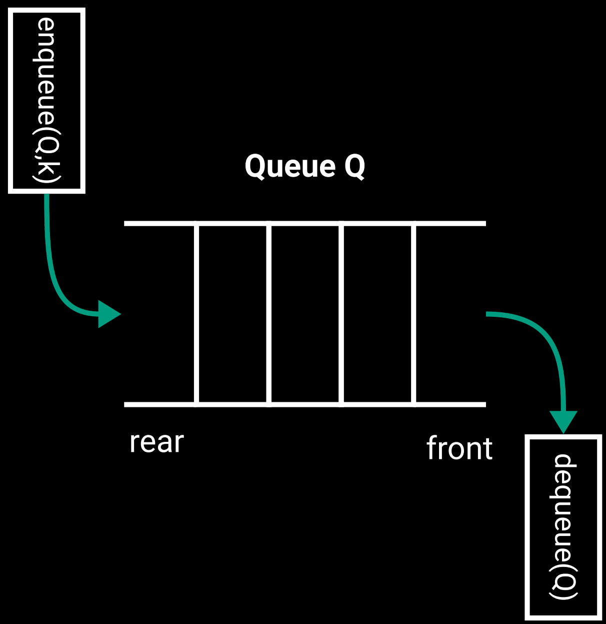



Abbildung 7: Beispiel FIFO

### Queues als (virtuelles) zyklisches Array

Bekannt: Maximale Elemente gleichzeitig in Queue

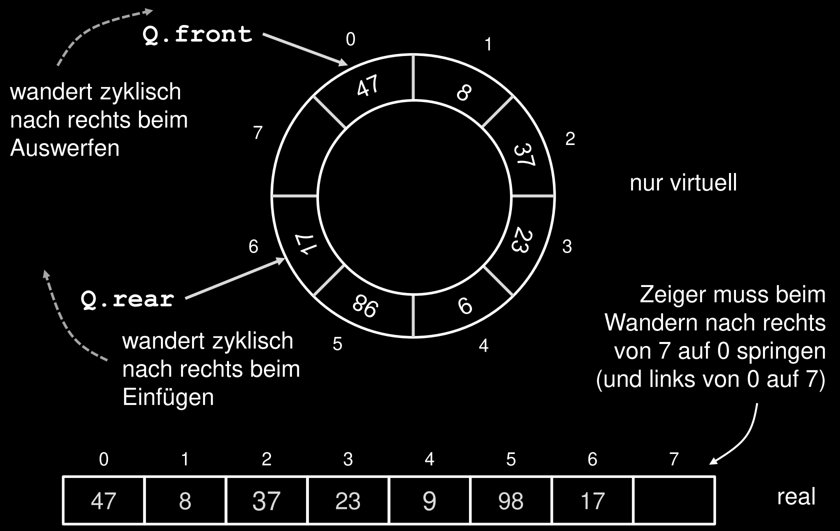



Abbildung 8: Beispiel Queue als Zyklisches Array

Problem, falls `Q.rear` und `Q.front` auf selbes Element zeigen

- Speichere Information, ob Schlange leer oder voll, in boolean `empty`
- Alternativ: Reserviere ein Element des Arrays als Abstandshalter

Methoden für zyklisches Array:

new(Q)

```
Q.A[]=ALLOCATE(MAX);
Q.front=0;
Q.rear=0;
Q.empty=true;
```

isEmpty(Q)

```
return Q.empty;
```

dequeue(Q)

```
IF isEmpty(Q) THEN
    error "underflow";
ELSE
    Q.front=Q.front+1 mod MAX;
    IF Q.front==Q.rear THEN
        Q.empty=true;
    return Q.A[Q.front-1 mod MAX];
```

enqueue(Q,k)

```
IF Q.rear==Q.front AND !Q.isEmpty
THEN error "overflow";
ELSE
    Q.A[Q.rear]=k;
    Q.rear=Q.rear+1 mod MAX;
    Q.empty=false;
```

### Queues durch einfach verkettete Listen

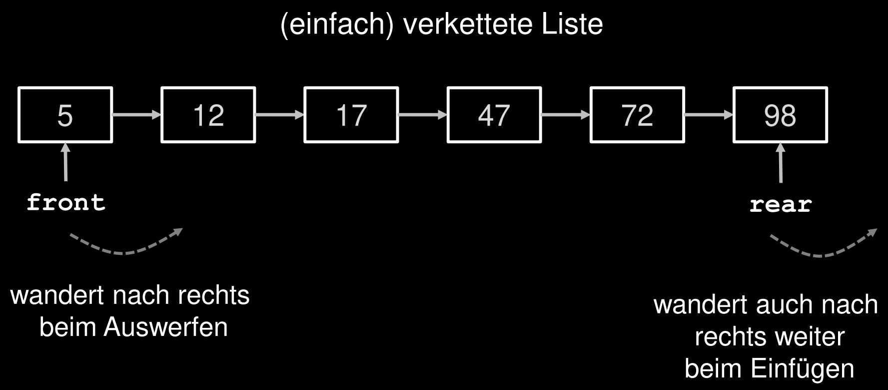



Abbildung 9: Beispiel Queue durch einfach verkettete Liste

Methoden:

new(Q)

```
Q.front=nil;
Q.rear=nil;
```

isEmpty(Q)

```
IF Q.front==nil THEN
    return true;
ELSE
    return false;
```

dequeue(Q)

```
IF isEmpty(Q) THEN
    error "underflow";
ELSE
    x=Q.front;
    Q.front=Q.front.next;
    return x;
```

enqueue(Q,k)

```
IF isEmpty(Q) THEN
    Q.front=x;
ELSE
    Q.rear.next=x;
x.next=nil;
Q.rear=x;
```

Laufzeit:

- Enqueue: $\Theta(1)$
- Dequeue: $\Theta(1)$

## 1.4 Binäre Bäume

### Bäume durch verkettete Listen

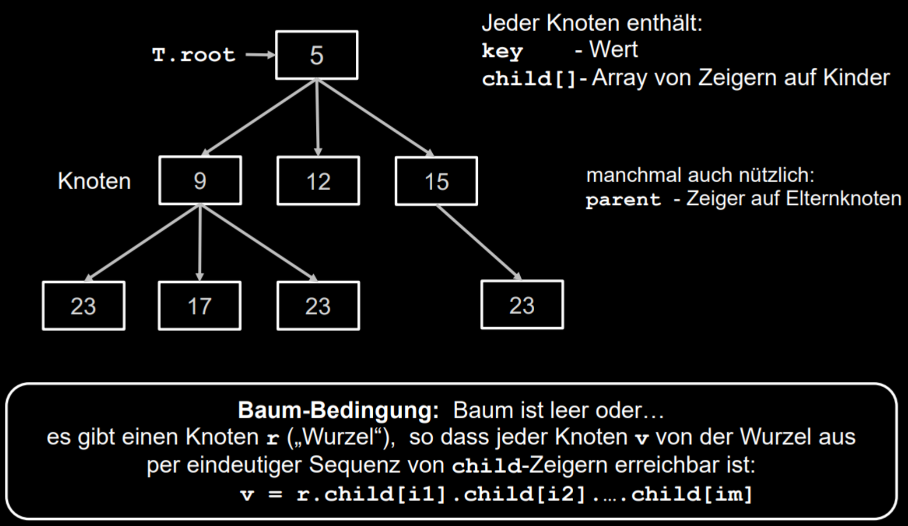
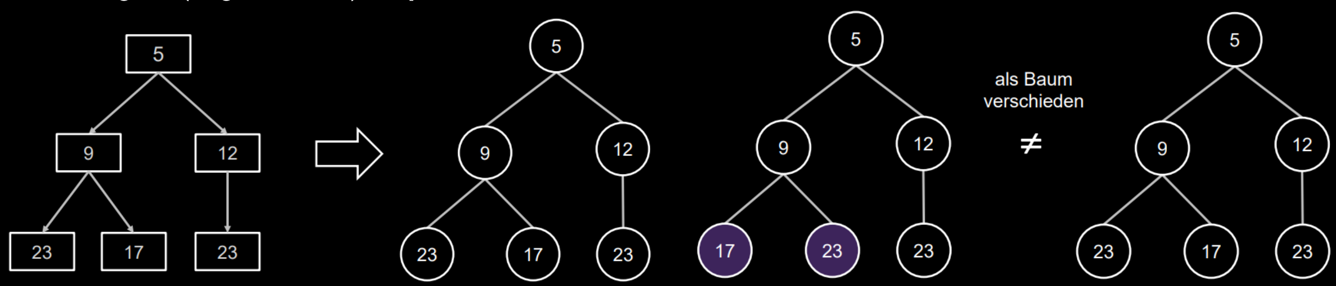


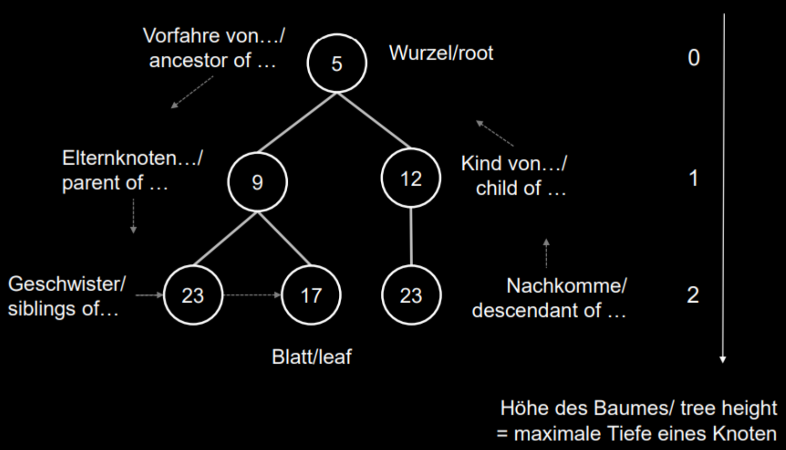

Abbildung 10: Binärbaum-Beispiel

Bäume sind „azyklisch“(also „keine Schleifen zwischen Knoten“)

### Darstellung als (ungerichteter) Graph

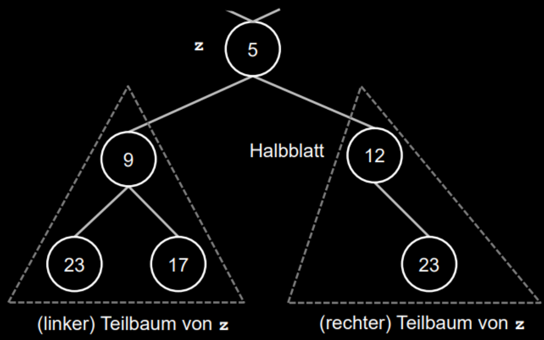



### Allgemeine Begrifflichkeiten




- Blatt: Knoten ohne Nachfolger
- Nachkomme von x:
  Erreichbar durch Pfad ausgehend von x

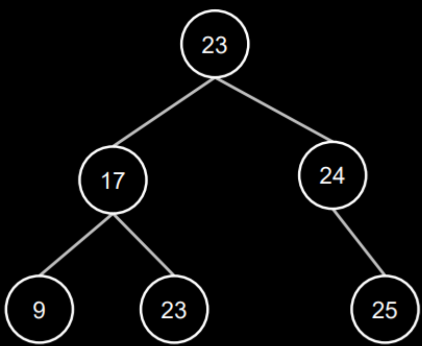
### Begrifflichkeiten Binärbaum




- Jeder Knoten hat maximal zwei Kinder `left=child[0]` und `right=child[1]`
- Ausgangsgrad jedes Knoten ist $\leq 2$
- Höhe leerer Baum per Konvention $-1$
- Hohe (nicht-leerer) Baum: $\max\{$Höhe aller Teilbäume der Wurzel$\} + 1$
- Halbblatt: Knoten mit nur einem Kind

### Traversieren von Bäumen

- Darstellung eines Baumes mithilfe einer Liste der Werte aller Knoten
- Laufzeit bei $n$ Knoten: $T(n) = O(n)$
- Nutzung der Preorder für das Kopieren von Bäumen
  1. Preorder betrachtet Knoten und legt Kopie an
  2. Preorder geht dann in Teilbäume und kopiert diese
- Nutzung der Postorder für das Löschen von Bäumen
  1. Postorder geht zuerst in Teilbäume und löscht diese
  2. Betrachten des Knoten erst danach und dann Löschung dieses




`inorder(T.root)` ergibt

9 17 23 23 24 25

`preorder(T.root)` ergibt

23 17 9 23 24 25

`postorder(T.root)` ergibt

9 23 17 25 24 23

### Code:

inorder(x)

```
IF x != nil THEN
    inorder(x.left);
    print x.key;
    inorder(x.right);
```

preorder(x)

```
IF x != nil THEN
    print x.key;
    preorder(x.left);
    preorder(x.right);
```

postorder(x)

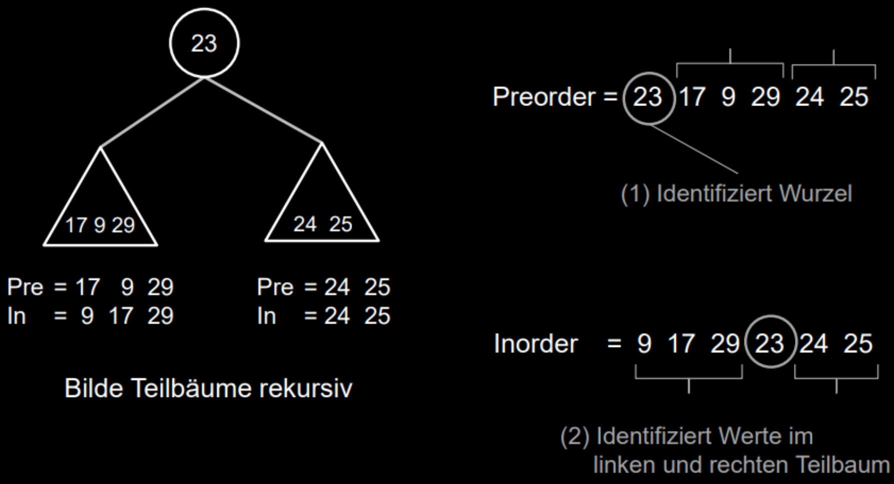
```
IF x != nil THEN
    postorder(x.left);
    postorder(x.right);
    print x.key;
```

**Anmerkung:** bei Inorder im BST sind Zahlen einfach nur aufsteigend Sortiert

### Eindeutige Bestimmbarkeit von Bäumen

- Nur In-, Pre-, Postorder reichen nicht zur eindeutigen Bestimmbarkeit von Bäumen

  $\Rightarrow$ Preorder/Postorder + Inorder + eindeutige Werte sind notwendig




## 1.4.1 Abstrakter Datentyp Baum

### Abstrakter Aufbau:

| | |
|---|---|
| `new T()` | • Erzeugt neuen Baum namens `t` |
| `t.search(k)` | • Gibt Element `x` in Baum `t` mit `x.key == k` zurück |
| `t.insert(k)` | • Fügt Element `x` in Baum `t` hinzu |
| `t.delete(x)` | • Löscht `x` aus Baum `t` |

**Suche nach Elementen** Starte mit `search(T.root,k)` Code:

search(x,k)

```
IF x == nil THEN return nil;
IF x.key == k THEN return x;
y = search(x.left,k);
IF y != nil THEN return y;
return search(x.right,k);
```

Laufzeit $= \Theta(n)$ (Jeder Knoten maximal einmal, jeder Knoten im schlechtesten Fall)

### Einfügen von Elementen

Hier wird als Wurzel eingefügt (Achtung: Erzeugt linkslastigen Baum) Code:

insert(T,x) // x.parent == x.left == x.right == nil;

```
IF T.root != nil THEN
  T.root.parent = x;
  x.left = T.root;
T.root = x;
```

Laufzeit $= \Theta(1)$

### Löschen von Elementen

Hier: Ersetze $x$ durch Halbblatt ganz rechts

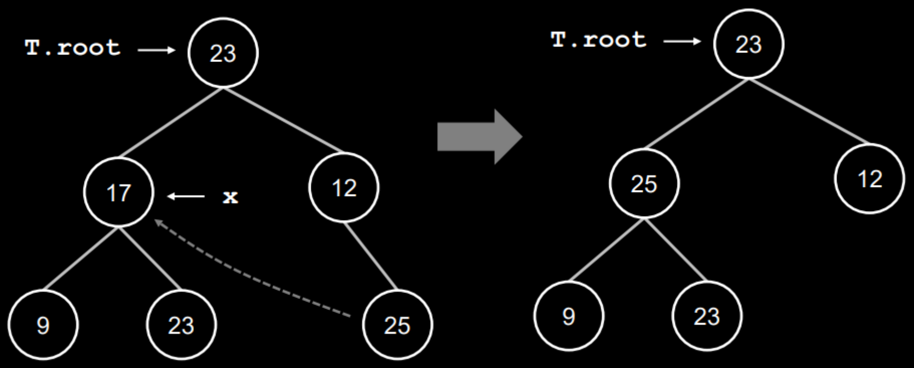



Abbildung 11: Löschen des Knoten 17

Connect-Algorithmus:

connect(T,y,w) // Connects w to y.parent

```
1  v = y.parent;
2  IF y != T.root THEN
3      IF y == v.right THEN
4          v.right = w;
5      ELSE
6          v.left = w;
7  ELSE
8      T.root = w;
9  IF w != nil THEN
10     w.parent = v;
```

Laufzeit $= \Theta(1)$

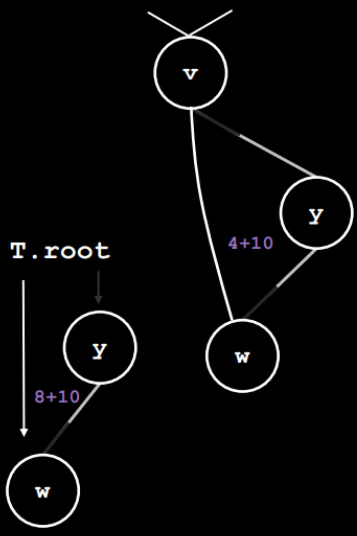



Abbildung 12: Beispiel Connect-Algorithmus Binärbaum

Delete-Algorithmus:

delete(T,x) // assumes x in T

```
1  y = T.root;
2  WHILE y.right != nil DO
3      y = y.right;
4  connect(T,y,y.left);
5  IF x != y THEN
6      y.left = x.left;
7      IF x.left != nil THEN
8          x.left.parent = y;
9      y.right = x.right;
10     IF x.right != nil THEN
11         x.right.parent = y;
12     connect(T,x,y);
```

Laufzeit $= \Theta(h)$ (Höhe des Baumes, $h = n$ möglich)

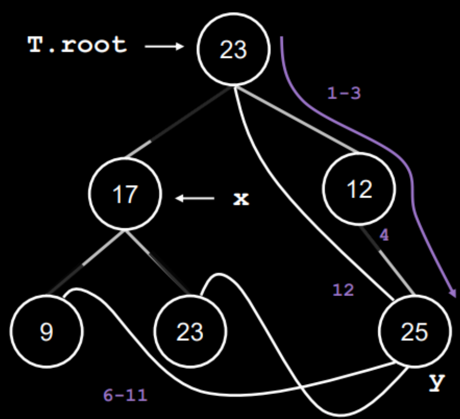



Abbildung 13: Beispiel Delete-Algorithmus Binärbaum

## 1.5 Binäre Suchbäume

**Definition — Binärer Suchbaum**

Totale Ordnung auf den Werten

Für alle Knoten $z$ gilt:

Wenn $x$ Knoten im linken Teilbaum von $z$, dann `x.key` $\leq$ `z.key`

Wenn $y$ Knoten im rechten Teilbaum von $z$, dann `y.key` $\geq$ `z.key`

Preorder/Postorder + eindeutige Werte $\Rightarrow$ Eindeutige Identifizierung

### Suchen im Binären Suchbaum

Code:

search(x,k) // 1. Aufruf: x = root

```
IF x == nil OR x.key == k THEN
  return x;
IF x.key > k THEN
  return search(x.left,k);
ELSE
  return search(x.right,k);
```

Iterativer Code:

iterative-search(x,k)

```
WHILE x != nil AND x.key != k DO
  IF x.key > k THEN
      x = x.left;
  ELSE
      x = x.right;
return x;
```

Laufzeit (beide) $= O(h)$ (Höhe)

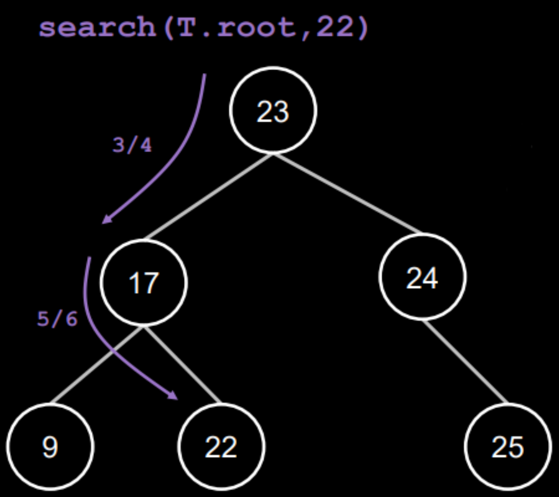



Abbildung 14: Beispiel Search-Algorithmus im Binärbaum

### Einfügen im Binary Search Tree

Aufwendiger, da Ordnung erhalten werden muss Code:

insert (T,z) // z.left == z.right == nil;

```
1  x = T.root;
2  px = nil;
3  WHILE x != nil DO
4    px = x;
5    IF x.key > z.key THEN
6        x = x.left;
7    ELSE
8        x = x.right;
9  z.parent = px;
10 IF px == nil THEN
11   T.root = z;
12 ELSE
13   IF px.key > z.key THEN
14       px.left = z;
15   ELSE
16       px.right = z;
```

Laufzeit $= O(h)$

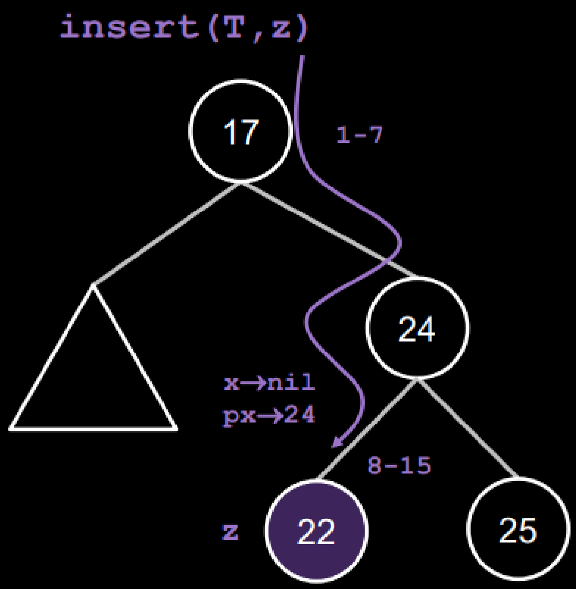


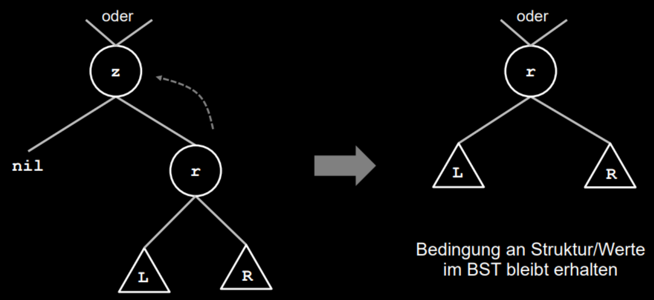

Abbildung 15: Beispiel einfügen in Binären Suchbaum

## Löschen im BST

wir Unterscheiden drei verschiedene Fälle:

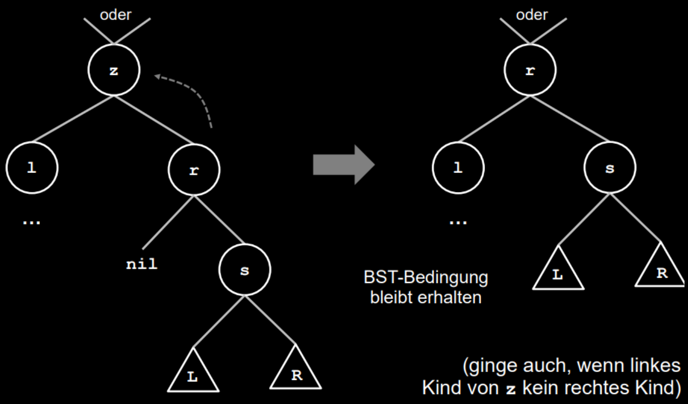
### Löschen im BST (I)

zu löschender Knoten **z** hat maximal ein Kind



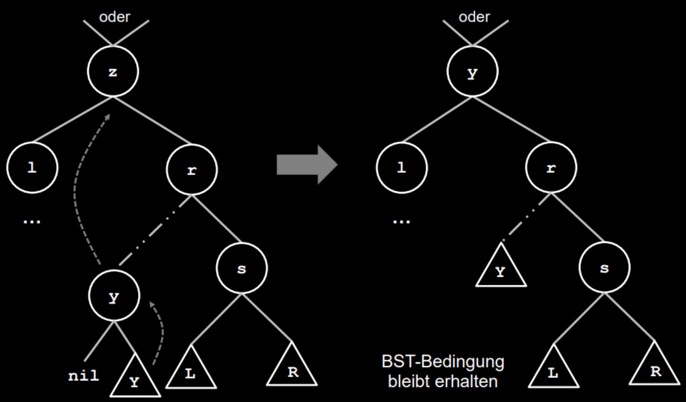

### Löschen im BST (II)

rechtes Kind von Knoten **z** hat kein linkes Kind




### Löschen im BST (III)

„kleinster" Nachfahre vom rechten Kind von **z**



Code:

transplant(T,u,v) // Hängt Teilbaum v an Parent von u

```
IF u.parent == nil THEN
    T.root = v;
ELSE
    IF u == u.parent.left THEN
        u.parent.left = v;
    ELSE
        u.parent.right = v;
IF v != nil THEN
    v.parent = u.parent;
```

delete(T,z)

```
IF z.left == nil THEN
    transplant(T,z,z.left)
ELSE
    IF z.right == nil THEN
        transplant(T,z,z,left)
    ELSE
        y = z.right;
        WHILE y.left != nil DO y = y.left;
        IF y.parent != z THEN
            transplant(T,y,y.right)
            y.right = z.right;
            y.right.parent = y;
        transplant(T,z,y)
        y.left = z.left;
        y.left.parent = y;
```

Laufzeit $= O(h)$
Laufzeit ist damit besser, wenn viele Suchoperationen und $h$ klein relativ zu $n$

#### Höhe eines BST

**Best Case**
- Vollständiger Baum (Alle Blätter gleiche Tiefe)
- $h = O(log_2 n)$
- Laufzeit $= O(log_2 n)$

**Worst Case**
- Degenerierter Baum (links- bzw. rechtslastiger Baum)
- $h = n - 1$
- Laufzeit $= \Theta(n)$

**Durchschnittliche Höhe**
- Erwartete Höhe: $\Theta(log_2 n)$

#### Suchbäume als Suchindex

- Knoten speichert nur Primärschlüssel und Zeiger auf Daten
- Zusätzliche Indizes möglich, kosten aber Speicherplatz

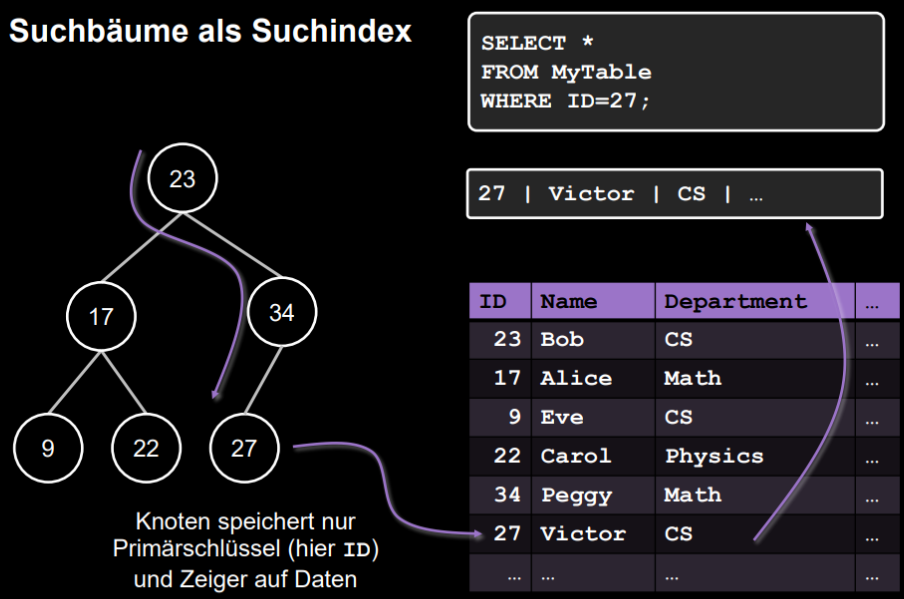



Abbildung 16: Suchbäume als Suchindex