1 Sortieren

1.1 Einführung - Das Sortierproblem

Definition — Das Sortierproblem
Ausgangspunkt:

D_1	D_2	$\cdots$	D_n

ABBILDUNG 1: Folge von Datensätzen $D_1, D_2, \cdots, D_n$

Ziel: Datensätze so anzuordnen, dass die Schlüsselwerte sukzessive ansteigen (oder absteigen)
Bedingung: Schlüssel(werte) müssen vergleichbar sein

- zu sortierende Elemente heißen auch Schlüssel(werte)

Durchführung

- **Eingabe**: Sequenz von Schlüsselwerten $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- Eingabe ist eine **Instanz** des Sortierproblems
- **Ausgabe**: Permutation $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\}$ derselben Folge mit Eigenschaft $a'_1 \leq \ldots \leq a'_n$
- Algorithmus ist **korrekt**, wenn dieser das Problem für alle Instanzen löst

1.2 Arrays

Definition — Array Reihung (Feld) fester Länge von Daten des gleichen Typs

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	12	47	17	98	72				

ABBILDUNG 2: beispielhafte Darstellung eines Arrays

A Bezeichnung des Arrays mit dem Namen „A"

$A[i]$ Zugiff auf das $(i+1)$-te Element des Arrays

Beispiel:

$A[2] = 17$

$\Longrightarrow$ Arrays erlauben effizienten Zugriff auf Elemente: konstanter Aufwand

1.3 Exkurs: Totale Ordnung

Definition — Totale Ordnung Sei M eine nicht leere Menge und $\leq \subseteq M \times M$ eine binäre Relation auf M.
Das Paar $(M, \leq)$ heißt genau dann eine totale Relation auf der Menge M, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Reflexivität: $\forall x \in M : x \leq x$
- Transitivität: $\forall x, y, z \in M : x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Antisymmetrie: $\forall x, y \in M : x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$
- Totalität: $\forall x, y \in M : x \leq y \lor y \leq x$

Beispiele

- $\leq$ Ordnung auf natürlichen Zahlen
- Lexikographische Ordnung $\leq_{lex}$ ist eine totale Ordnung

1.4 Vergleichskriterien von Suchalgorithmen

Berechnungsaufwand	• $\mathcal{O}(n)$
Effizienz	• Best Case vs. Average Case vs Worst Case
Speicherbedarf	• in-Place (in situ): zusätzlicher Speicher von der Eingabegröße unabhängig • out-of-place: Speichermehrbedarf von Eingabegröße abhängig
Stabilität	• stabile Verfahren verändern die Reihenfolge von äquivalenten Elementen nicht
Anwendung als Auswahlfaktor	• Hauptoperationen beim Sortieren: Vergleichen und Vertauschen • Anwendung spielt eine enorme Rolle: – Verfahren mit vielen Vertauschungen und wenig Vergleichen, wenn Vergleichen teuer – Verfahren mit wenig Vertauschungen und vielen Vergleichen, wenn Umsortieren teuer

1.5 Analyse von Algorithmen (I)

Schleifeninvariante (SIV):

- Sonderform der Invariante
- Am Anfang/Ende jedes Schleifendurchlaufs und vor/nach jedem Schleifendurchlauf gültig
- Wird zur Feststellung der Korrektheit von Algorithmen verwendet
- Eigenschaften:

Initialisierung	Invariante ist vor jeder Iteration wahr
Fortsetzung	Wenn SIV vor der Schleife wahr ist, dann auch bis Beginn der nächsten Iteration
Terminierung	SIV liefert bei Schleifenabbruch, helfende Eigenschaft für Korrektheit

- Beispiel für Umsetzung: Insertion Sort - SIV

Laufzeitanalyse:

- Aufstellung der Kosten und Durchführungsanzahl für jede Zeile des Quelltextes
- Beachte: Bei Schleifen wird auch der Aufruf gezählt, der den Abbruch einleitet
- Beispiel für Umsetzung: Insertion Sort - Laufzeit
- Zusätzliche Überprüfung des `Best Case`, `Worst Case` und `Average Case`

Effizienz von Algorithmen:

Effizienzfaktoren
- Rechenzeit (Anzahl der Einzelschritte)
- Kommunikationsaufwand
- Speicherplatzbedarf
- Zugriffe auf Speicher

Laufzeitfaktoren
- Länge der Eingabe
- Implementierung der Basisoperationen
- Takt der CPU

1.6 Analyse von Algorithmen (II)

Komplexität:

- Abstrakte Rechenzeit $T(n)$ ist abhängig von den Eingabedaten
- Übliche Betrachtungsweise der Rechenzeit ist asymptotische Betrachtung

Asymptotik:

- Annäherung an einer sich ins Unendliche verlaufende Kurve
- z.B.: $f(x) = \frac{1}{x} + x$ | Asymptote: $g(x) = x$ | ($\frac{1}{x}$ läuft gegen Null)

Asymptotische Komplexität:

- Abschätzung des zeitlichen Aufwands eines Algorithmus in Abhängigkeit einer Eingabe
- Beispiel für Umsetzung: Insertion Sort - Laufzeit Θ

Asymptotische Notation:

- Betrachtung der Laufzeit $T(n)$ für sehr große Eingaben $n \in \mathbb{N}$
- Komplexität ist unabhängig von konstanten Faktoren und Summanden
- Nicht berücksichtigt: Rechnergeschwindigkeit / Initialisierungsaufwände
- Komplexitätsmessung via Funktionsklasse ausreichend
  - Verhalten des Algorithmus für große Problemgrößen
  - Veränderung der Laufzeit bei Verdopplung der Problemgröße

Gründe für die Nutzung der theoretischen Betrachtung statt der Messung der Laufzeit

Vergleichbarkeit
- Laufzeit abhängig von konkreter Implementierung und System
- Theoretische Betrachung ist frei von Abhängigkeiten und Seiteneffekten
- Theoretische Betrachtung lässt direkte Vergleichbarkeit zu

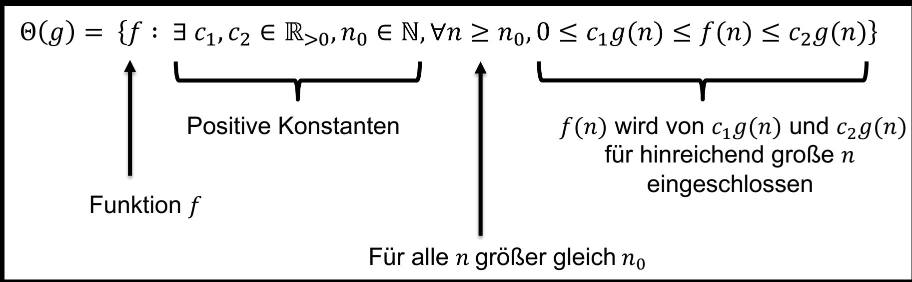
Aufwand
- Wieviele Testreihen?
- In welcher Umgebung?
- Messen führt in der Ausführung zu hohem, praktischen Aufwand

Komplexitätsfunktion
- Wachstumsverhalten ausreichend
- Praktische Evaluation mit Zeiten nur für Auswahl von Systemen möglich
- Theoretischer Vergleich (Funktionsklassen) hat ähnlichen Erkenntnisgewinn

1.7 Analyse von Algorithmen (III)

Θ-Notation

- Θ-Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben und unten
- Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ ($\mathbb{N}$: Eingabelänge, $\mathbb{R}$: Zeit)



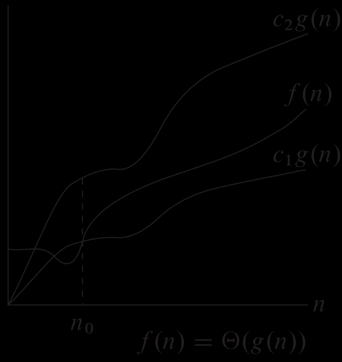
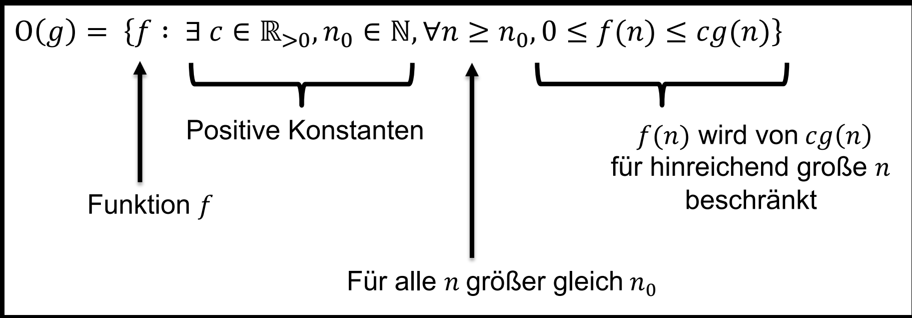


Abbildung 3: Veranschaulichung Θ-Notation

- $\Theta(g)$ enthält alle f, die genauso schnell wachsen wie g
- **Schreibweise**: $f \in \Theta(g)$ (korrekt), manchmal auch $f = \Theta(g)$
- $g(n)$ ist eine asymptotisch scharfe Schranke von $f(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n))$ gilt, wenn $f(n) = O(g(n))$ und $f(n) = \Omega(g(n))$ erfüllt sind
- z.B.: $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \mid f(n) \in \Theta(n^2)$?
- Aus $\Theta(n^2)$ folgt, dass $g(n) = n^2$
- **Vorgehen**:
  - Finden eines n_0 und c_1, c_2, sodass
  - $c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$ erfüllt ist
  - Konkret: $c_1 * n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 * n^2$
  - Division durch n^2: $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c2$
  - Ab $n = 7$ positives Ergebnis: $0,0714 \mid n_0 = 7$
  - Deswegen setzen wir $c_1 = \frac{1}{14}$
  - Für $n \to \infty :\ 0,5 \mid c_2 = 0,5$
  - Natürlich auch andere Konstanten möglich

$\mathcal{O}$-Notation

- $\mathcal{O}$-Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben



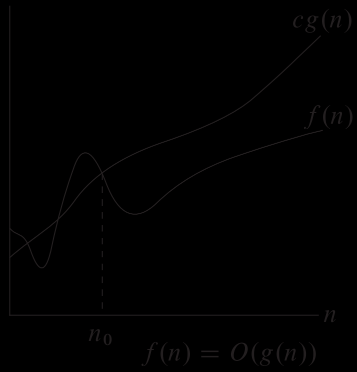


Abbildung 4: Veranschaulichung $\mathcal{O}$-Notation

- $O(g)$ enthält alle f, die höchstens so schnell wie g wachsen
- **Schreibweise**: $f = \mathcal{O}(g)$
- $f(n) = \Theta(g) \to f(n) = \mathcal{O}(g) \mid \Theta(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$
- Ist f in der Menge $\Theta(g)$, dann auch in der Menge $\mathcal{O}(g)$
- z.B.: $f(n) = n + 2 \mid f(n) = \mathcal{O}(n)$?
- Ja $f(n)$ ist Teil von $\mathcal{O}(n)$ für z.B. $c = 2$ und $n_0 = 2$

O-Notation Rechenregeln

Konstanten
- $f(n) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ konstante Funktion $\to f(n) = O(1)$
- z.B. $3 \in O(1)$

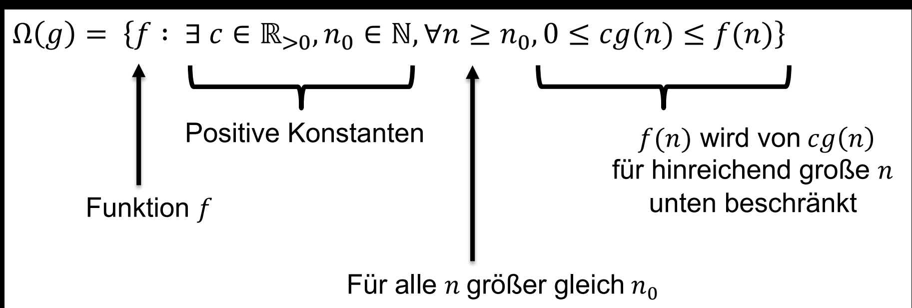
Skalare Multiplikation
- $f = O(g)$ und $a \in \mathbb{R} \to a * f = O(g)$

Addition
- $f_1 = O(g_1)$ und $f_2 = O(g_2) \to f_1 + f_2 = O(max\{g_1, g_2\})$

Multiplikation
- $f_1 = O(g_1)$ und $f_1 = O(g_2) \to f_1 * f_2 = O(g_1 * g_2)$

Ω-Notation

- Ω-Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von unten



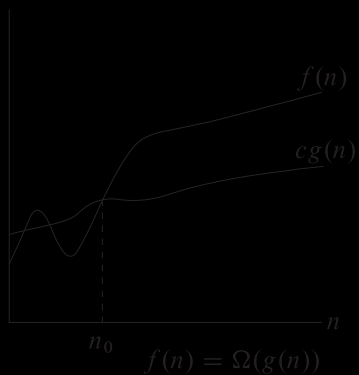


Abbildung 5: Veranschaulichung

- Ω-Notation enthält alle f, die mindestens so schnell wie g wachsen
- **Schreibweise**: $f = \Omega(g)$

Komplexitätsklassen

Klasse	Bezeichnung	Beispiel
$\Theta(1)$	Konstant	Einzeloperation
$\Theta(\log n)$	Logarithmisch	Binäre Suche
$\Theta(n)$	Linear	Sequentielle Suche
$\Theta(n \log n)$	Quasilinear	Sortieren eines Arrays
$\Theta(n^2)$	Quadratisch	Matrixaddition
$\Theta(n^3)$	Kubisch	Matrixmultiplikation
$\Theta(n^k)$	Polynomiell	
$\Theta(2^n)$	Exponentiell	Travelling-Salesman*
$\Theta(n!)$	Faktoriell	Permutationen

TABELLE 1: Komplexitätsklassen (n= Länge der Eingabe)

Eingabegröße n	$\log_{10} n$	n	n^2	n^3	2^n
10	$1\mu s$	$10\mu s$	$100\mu s$	1ms	~ 1 ms
100	$2\mu s$	$100\mu s$	10ms	1s	$\sim 4 \times 10^{16}$ y
1000	$3\mu s$	1ms	$1s$	16min 40s	?
10000	$4\mu s$	10ms	1min 40s	$\sim 11,5$d	?
100000	$5\mu s$	100ms	2h 64min 40s	$\sim 31,7$y	?

TABELLE 2: Komplexitätsklassen-Ausführungsdauer, falls eine Operation n genau $1\mu s$ dauert

Es gilt: $\log(n) < \sqrt{n} < n < n \cdot \log(n) < n^2 < n! < 2^n < n^n$

Asymptotische Notationen in Gleichungen

- $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$
- $\Theta(n)$ fungiert hier als Platzhalter für eine beliebige Funktion $f(n)$ aus $\Theta(n)$
- z.B.: $f(n) = 3n + 1$

o-Notation

- o-Notation stellt eine echte obere Schranke dar
- Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten muss
- Außerdem $<$ statt $\leq$
- z.B.: $2n = o(n^2)$ und $2n^2 \neq o(n^2)$

$$o(g) = \{f : \underbrace{\forall c \in \mathbb{R}_{>0}}_{\substack{\text{Gilt für \textbf{alle} Konstanten } c > 0. \\ \text{In } \mathcal{O}\text{-Notation gilt es für eine Konstante } c > 0}}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < cg(n)\}$$

ω-Notation

- ω-Notation stellt eine echte untere Schranke dar
- Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R}> 0$ gelten muss
- Außerdem $>$ statt $\geq$
- z.B.: $\frac{n^2}{2} = \omega(n)$ und $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

$$\omega(g) = \{f : \forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) < f(n)\}$$

1.8 **Insertion Sort** (Sortieren durch Einfügen)

Idee — Insertion-Sort

- Halte die linke Teilfolge sortiert
- Füge nächsten Schlüsselwert hinzu, indem es an die korrekte Position eingefügt wird
- Wiederhole den Vorgang bis Teilfolge aus der gesamten Liste besteht

Code

Insertion-Sort(A)

```
FOR j = 1 TO A.length - 1
  key = A[j]
  // Füge A[j] in die sortierte Sequenz A[0...j-1] ein
  i = j - 1
  WHILE i >= 0 and A[i] > key
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
  A[i + 1] = key
```

Schleifeninvariante von `Insertion Sort`

- Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife besteht die Teilfolge `A[0...j-1]` aus den Elementen der ursprünglichen Teilfolge `A[0...j-1]` enthaltenen Elementen, allerdings in sortierter Reihenfolge.

Korrektheit von `Insertion Sort`

Initialisierung Beginn mit `j=1`, also Teilfeld `A[0...j-1]` besteht nur aus einem Element `A[0]`. Dies ist auch das ursprüngliche Element und Teilfeld ist sortiert.

Fortsetzung Zu zeigen ist, dass die Invariante bei jeder Iteration erhalten bleibt. Ausführungsblock der `for`-Schleife sorgt dafür, dass `A[j-1], A[j-2]`,... je um Stelle nach rechts geschoben werden bis `A[j]` korrekt eingefügt wurde. Teilfeld `A[0...j]` besteht aus ursprünglichen Elementen und ist sortiert. Inkrementieren von j erhält die Invariante.

Terminierung Abbruchbedingung der `for`-Schleife, wenn `j > A.length - 1`. Jede Iteration erhöht j. Dann bei Abbruch ist `j = n` und einsetzen in Invariante liefert das Teilfeld `A[0...n-1]` welches aus den ursprünglichen Elementen besteht und sortiert ist. Teilfeld ist gesamtes Feld.

$\Longrightarrow$ Algorithmus `Insertion Sort` arbeitet damit korrekt.

Laufzeitanalyse von `Insertion Sort`

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	n
2	c_2	$n-1$
3	0	$n-1$
4	c_4	$n-1$
5	c_5	$\sum_{j=1}^{n-1} t_j$
6	c_6	$\sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1)$
7	c_7	$\sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1)$
8	c_8	$n-1$

- Festlegung der Laufzeit für jede Zeile
- Jede Zeile besitzt gewissen Kosten c_i
- Jede Zeile wird x mal durchgeführt
- $Laufzeit = Anzahl * Kosten$ jeder Zeile
- Schleifen: Abbruchüberprüfung zählt auch
- t_j: Anzahl der Abfragen der `While`-Schleife
- Laufzeit: $T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=1}^{n-1} t_j + c_6 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + c_8(n-1)$

Warum n in Zeile 1?

- Die Überprüfung der Fortführungsbedingung beinhaltet auch die letze Überprüfung
- Quasi die Überprüfung, durch die die Schleife abbricht

Warum $\sum_{j=1}^{n-1}$ in Zeile 5?

- Aufsummierung aller einzelnen t_j über die Anzahl der Schleifendurchläufe
- Diese ist allerdings $n-1$ und nicht n, da die Abbruchüberprüfung dort auch enthalten ist

Warum $t_j - 1$ in Zeile 6?

- Selbes Argument wie oben, bei t_j ist die Abbruchüberprüfung enthalten
- Deswegen wird die `while`-Schleife nur $t_j - 1$-mal ausgeführt

`Best Case`

- zu sortierendes Feld ist bereits sortiert
- t_j wird dadurch zu 1, da die `While`-Schleife immer nur einmal prüft (Abbruch)
- Die zwei Zeilen innerhalb der `While`-Schleife werden nie ausgeführt
- Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine lineare Funktion in n ist

`Worst Case`

- zu sortierendes Feld ist umgekehrt sortiert
- t_j wird dadurch zu $j+1$, da die `While`-Schleife immer die gesamte Länge prüft
- Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine quadratische Funktion in n ist (n^2)

`Average Case`

- im Mittel gut gemischt
- t_j wird dadurch zu $j/2$
- Die Laufzeit bleibt aber eine quadratische Funktion in n (n^2)

Asymptotische Laufzeitbetrachtung Θ

- $T(n)$ lässt sich als quadratische Funktion $an^2 + bn + c$ betrachten
- Terme niedriger Ordnung sind für große n irrelevant
- Deswegen Vereinfachung zu n^2 und damit $\Theta(n^2)$

1.9 Bubble Sort

Idee — Bubble Sort

- Vergleiche Paare von benachbarten Schlüsselwerten
- Tausche das Paar, falls rechter Schlüsselwert kleiner als linker

Code

BubbleSort(A)

```
FOR i = 0 TO A.length - 2
    FOR j = A.length - 1 DOWNTO i + 1
        IF A[j] < A[j-1]
            SWAP(A[j], A[j-1])
```

Analyse von `Bubble Sort`

Anzahl der Vergleiche
- Es werden stets alle Elemente der Teilfolge miteinander verglichen
- Unabhängig von der Vorsortierung sind `Worst` und `Best Case` identisch

Anzahl der Vertauschungen
- `Best Case`: 0 Vertauschungen
- `Worst Case`: $\frac{n^2-n}{2}$ Vertauschungen

Komplexität
- `Best Case`: $\Theta(n)$
- `Average Case`: $\Theta(n^2)$
- `Worst Case`: $\Theta(n^2)$

1.10 Selection Sort

Idee — Selection Sort

- Sortieren durch direktes Auswählen
- `MinSort`: "wähle kleines Element in Array und tausche es nach vorne"
- `MaxSort`: "wähle größtes Element in Array und tausche es nach vorne"

Code (MinSort)

Selection-Sort(A)

```
FOR i = 0 TO A.length - 2
    k = i
    FOR j = i + 1 TO A.length - 1
        IF A[j] < A[k]
            k = j
    SWAP(A[i], A[k])
```

1.11 Divide-And-Conquer Prinzip

Idee — Divide-And-Conquer
Zerlege das Problem und löse es direkt oder zerlege es weiter:

Divide	• Teile das Problem in mehrere Teilprobleme auf • Teilprobleme sind Instanzen des gleichen Problems
Conquer	• Beherrsche die Teilprobleme rekursiv • Falls Teilprobleme klein genug, löse sie auf direktem Weg
Combine	• Vereine die Lösungen der Teilprobleme zu Lösung des ursprünglichen Problems

- Anderer Ansatz im Gegensatz zu z.B. `InsertionSort` (inkrementelle Herangehensweise)
- Laufzeit ist im schlechtesten Fall immer noch besser als `InsertionSort`

1.12 Merge Sort

Idee — Merge Sort

- *Divide:* Teile die Folge aus n Elementen in zwei Teilfolgen von je $\frac{n}{2}$ Elemente auf
- *Conquer:* Sortiere die zwei Teilfolgen rekursiv mithilfe von `MergeSort`
- *Combine:* Vereinige die zwei sortierten Teilfolgen, um die sortierte Lösung zu erzeugen

Code

MERGE-SORT(A,p,r)

```
IF p < r
  q = ⌊(p+r)/2⌋         // Teilen in 2 Teilfolgen
  MERGE-SORT(A,p,q)    // Sortieren der beiden Teilfolgen
  MERGE-SORT(A,q+1,r)
  MERGE(A,p,q,r)       // Vereinigung der beiden sortierten Teilfolgen
```

MERGE(A,p,q,r)

```
n_1 = q - p + 1
n_2 = r - q
Let L[0...n_1] and R[0...n_2] be new arrays
FOR i = 0 TO n_1 - 1 // Auffüllen der neu erstellten Arrays
  L[i] = A[p + i]
FOR j = 0 TO n_2 - 1
  R[j] = A[q + j + 1]
L[n_1] = ∞ // Einfügen des Sentinel-Wertes
R[n_2] = ∞
i = 0
j = 0
FOR k = p TO r  // Eintragweiser Vergleich der Elemente
  IF L[i] ≤ R[j]
      A[k] = L[i] // Sortiertes Zurückschreiben in Original-Array
      i = i + 1
  ELSE
      A[k] = R[j]
      j = j + 1
```

(Teilarrays werden nicht parallel bearbeitet)

Korrektheit von MergeSort

Schleifeninvariante Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife (Letztes `for` in Methode `MERGE`) enthält das Teilfeld `A[p...k-1]` die `k-p` kleinsten Elemente aus `L[0...`n_1`]` und `R[0...`n_2`]` in sortierter Reihenfolge. Weiter sind `L[i]` und `R[i]` die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.

Initialisierung Vor der ersten Iteration gilt `k=p`. Daher ist `A[p...k-1]` leer und enthält 0 kleinste Elemente von `L` und `R`. Wegen `i=j=0` sind `L[i]` und `R[i]` die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.

Fortsetzung Müssen zeigen, dass Schleifeninvariante erhalten bleibt. Dafür nehmen wir an, dass `L[i]` $\leq$ `R[j]`. Dann ist `L[i]` kleinstes Element, welches noch nicht zurück kopiert wurde. Da Array `A[p...k-1]` die `k-p` kleinsten Elemente enthält, wird der Array `A[p...k]` die `k-p+1` kleinsten Elemente enthalten, nachdem der Wert nach der Durchführung von `A[k]=L[i]` kopiert wurde. Die Erhöhung der Variablen `k` und `i` stellt die Schleifeninvariante für die nächste Iteration wieder her. Wenn `L[i]>R[j]` dann analoges Argument in der `ELSE`-Anweisung.

Terminierung Beim Abbruch gilt `k=r+1`. Durch die Schleifeninvariante enthält `A[p...r]` die kleinste Elemente von `L[0...`n_1`]` und `R[0...`n_2`]` in sortierter Reihenfolge. Alle Elemente außer der Sentinels wurden komplett zurück kopiert. `MergeSort` ist außerdem ein stabiler Algorithmus.

Analyse von MergeSort

Ziel Bestimme Rekursionsgleichung für Laufzeit $T(n)$ von n Zahlen im schlechtesten Fall

Divide Berechnung der Mitte des Feldes: Konstante Zeit $\Theta(1)$

Conquer Rekursives Lösen von zwei Teilproblemen der Größe $\frac{n}{2}$: Laufzeit von $2\,T(\frac{n}{2})$

Combine `MERGE` auf einem Teilfeld der Länge n: Lineare Zeit $\Theta(n)$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{falls } n = 1 \\ 2\,T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

- Lösen der Rekursionsgleichung mithilfe eines Rekursionsbaums
  - Verwenden der Konstante c statt $\Theta(1)$
  - cn stellt den Aufwand an der ersten Ebene dar
  - Der addierte Aufwand jeder Stufe (aller Knoten) ist auch cn
  - Die Azahl der Ebenen lässt sich mithilfe von $lg(n) + 1$ bestimmen (2-er Logarithmus)
  - Damit ergibt sich für die Laufzeit: $cn \cdot lg(n) + cn$
  - Für $\lim_{n\to\infty}$ wird diese zu $n \cdot lg(n)$
  - Laufzeit beträgt damit $\Theta(n \cdot lg(n))$
  - Laufzeit von `MergeSort` ist in jedem Fall gleich

1.13 Quicksort

Idee — Quicksort

Pivotelement: Wahl eines Pivotelement `x` aus dem Array (=Mittelsäule bei Sortierung)

Divide: Zerlege den Array `A[p...r]` in zwei Teilarrays `A[p...q-1]` und `A[q+1...r]`, sodass jedes Element von `A[p...q-1]` kleiner oder gleich `A[q]` ist, welches wiederum kleiner oder gleich jedem Element von `A[q+1...r]` ist. Berechnen Sie den Index `q` als Teil vom `Partition` Algorithmus.

Conquer: Sortieren beider Teilarrays `A[p...q-1]` und `A[q+1...r]` durch rekursiven Aufruf von Quicksort.

Combine: Da die Teilarrays bereits sortiert sind, ist keine weitere Arbeit nötig um diese zu vereinigen. `A[p...r]` ist nun sortiert.

Code

QUICKSORT(A,p,r)

```
IF p < r    // Überprüfung, ob Teilarray leer ist
  q = PARTITION(A,p,r)
  QUICKSORT(A,p,q-1)
  QUICKSORT(A,q+1,r)
```

PARTITION(A,p,r)

```
x = A[r]    // Wahl des Pivotelements
i = p - 1   // Index i setzen
FOR j = p TO r - 1 // Auffüllen des Teilarrays mit Elementen
  IF A[j] ≤ x
      i = i + 1
      SWAP(A[i], A[j])
SWAP(A[i+1], A[r]) // Tausch des Pivotelements
RETURN i + 1 // Neuer Index des Pivotelements
```

(Teilarrays werden nicht parallel bearbeitet)

Korrektheit von Quicksort

Schleifeninvariante Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife gilt für den Arrayindex k folgendes:

1. Ist $p \leq k \leq i$, so gilt `A[k]` $\leq x$
2. Ist $i+1 \leq k \leq j-1$, so gilt `A[k]` $> x$
3. Ist $k = r$, so gilt `A[k]` $= x$

Initialisierung Vor der ersten Iteration gilt $i = p - 1$ und $j = p$. Da es keine Werte zwischen p und i gibt und es auch keine Werte zwischen $i + 1$ und $j - 1$ gibt, sind die ersten beiden Eigenschaften trivial erfüllt. Die Zuweisung in `x = A[r]` sorgt für die Erfüllung der dritten Eigenschaft.

Fortsetzung Zwei mögliche Fälle durch `IF A[j]` $\leq$ `x`. Wenn `A[j] > x`, dann inkrementiert die Schleife nur den Index j. Dann gilt Bedingung 2 für `A[j-1]` und alle anderen Einträge bleiben unverändert. Wenn `A[j]` $\leq$ `x`, dann wird Index i inkrementiert und die Einträge `A[i]` und `A[j]` getauscht und schließlich der Index j erhöht. Wegen des Vertauschens gilt `A[i]` $\leq$ `x` und Bedingung 1 ist erfüllt. Analog gilt `A[j-1] > x`, da das Element welches mit `A[j-1]` vertauscht wurde wegen der Invariante gerade größer als x ist.

Terminierung Bei der Terminierung gilt, dass $j = r$. Daher gilt, dass jeder Eintrag des Arrays zu einer der drei durch die Invariante beschriebenen Mengen gehört.

Performanz von Quicksort

- *Abhängig von der **Balanciertheit** der Teilarrays*
  - Definition Balanciert: ungefähr gleiche Anzahl an Elementen
  - Teilarrays balanciert: Laufzeit asymptotisch so schnell wie `MergeSort`
  - Teilarrays unbalanciert: Laufzeit kann so langsam wie `InsertionSort` laufen
- *Zerlegung im **schlechtesten Fall***
  - Partition zerlegt Problem in ein Teilproblem mit $n - 1$ Elementen und eins mit 0 Elementen
  - Unbalancierte Zerlegung mit Kosten $\Theta(n)$ zieht sich durch gesamte Rekursion
  - Aufruf auf Feld der Größe 0: $T() = \Theta(1)$
  - Laufzeit (rekursiv):
    - $T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
    - Insgesamt folgt: $T(n) = \Theta(n^2)$
- *Zerlegung im **besten Fall***
  - Problem wird so balanciert wie möglich zerlegt
  - Zwei Teilprobleme mit maximaler Größe von $\frac{n}{2}$
  - Zerlegung kostet $\Theta(n)$
  - Laufzeit (rekursiv):
    - $T(n) \leq 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
    - Laufzeit beträgt: $O(n\ lg(n))$
  - Solange die Aufteilung konstant bleibt, bleibt die Laufzeit $O(n\ lg(n))$

1.14 Laufzeitanalyse von rekursiven Algorithmen

1.14.1 Analyse von Divide-And-Conquer Algorithmen

- $T(n)$ ist Laufzeit eines Problems der Größe n
- Für kleines Problem benötigt die direkte Lösung eine konstante Zeit $\Theta(1)$
- Für sonstige n gilt:
  - Aufteilen eines Problems führt zu a Teilproblemen
  - Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{1}{b}$ der Größe des ursprünglichen Problems
  - Lösen eines Teilproblems der Größe $\frac{n}{b}$: $T(\frac{n}{b})$
  - Lösen a solcher Probleme: $a\,T(\frac{n}{b})$
  - $D(n)$: Zeit um das Problem aufzuteilen (Divide)
  - $C(n)$: Zeit um Teillösungen zur Gesamtlösung zusammenzufügen (Combine)

$$T(n) = \begin{Bmatrix} \Theta(1) & \text{falls } n \leq c \\ a\,T(\frac{n}{b}) + D(n) + C(n) & \text{sonst} \end{Bmatrix}$$

1.14.2 Subsitutionsmethode

- Idee: Erraten einer Schranke und Nutzen von Induktion zum Beweis der Korrektheit
- Ablauf:
  1. Rate die Form der Lösung (Scharfes Hinsehen oder kurze Eingaben ausprobieren/einsetzen)
  2. Anwendung von vollständiger Induktion zum Finden der Konstanten und Beweis der Lösung

Beispiel

Betrachten von `MergeSort`

- $T(1) \leq c$
- $T(n) \leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn$

Ziel

Obere Abschätzung $T(n) \leq g(n)$ mit $g(n)$ ist eine Funktion, die durch eine geschlossene Formel dargestellt werden kann.

Wir "raten": $T(n) \leq 4cn\ lg(n)$ und nehmen dies für alle $n' < n$ an und zeigen es für n.

Induktion

- lg steht hier für $\log_2$
- $n = 1$: $T(1) \leq c$
- $n = 2$: $T(2) \quad \leq T(1) + T(1) + 2c$

$$\leq 4c \leq 8c$$

$$T(2) = 4c * 2\ lg(2) = 8c$$

Hilfsbehauptungen

- (1): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$
- (2): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2}{3}n$
- (3): $\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c(a) - \log_c(b)$
- (4): $\log_c(a * b) = \log_c(a) + \log_c(b)$

Induktionsschritt

- Annahme: $n > 2$ und sei Behauptung wahr für alle $n' < n$.

$$\begin{aligned}
\text{T(n)} \quad & \leq T(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + cn \\
& \leq 4c \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\ lg(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + 4c \lceil \tfrac{n}{2} \rceil\ lg(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + cn \\
\text{(HB)} \quad & \leq 4c \cdot lg(\tfrac{2}{3}n) \cdot (\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + \lceil \tfrac{n}{2} \rceil + cn \\
& \leq 4c \cdot lg(\tfrac{2}{3}n) \cdot n + cn \\
\text{(HB)} \quad & \leq 4cn \cdot (lg(\tfrac{2}{3}) + lg(n)) + cn \\
& = 4cn \cdot lg(n) + 4cn \cdot lg(\tfrac{2}{3}) \\
& = 4cn \cdot lg(n) + cn(1 + 4 \cdot (lg(2) - lg(3))) \\
& \leq 4cn \cdot lg(n) \\
& \Rightarrow \Theta(n\ lg(n))
\end{aligned}$$

1.14.3 Rekursionsbaum

Idee — Rekursionsbaum

Stellen das Ineinander-Einsetzen als Baum dar und Analyse der Kosten.
Ablauf:

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar
   - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar (z.B. $T(0)$)
2. Berechnen der Kosten innerhalb jeder Ebene des Baums
3. Die Gesamtkosten sind die Summe über die Kosten aller Ebenen

Rekursionsbaum ist nützlich um Lösung für Subsitutionsmethode zu erraten

Beispiel
$T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \Theta(n^2)$

Vorüberlegungen
- $\Rightarrow T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + cn^2$ $(c > 0)$
- Je Abstieg verringert sich die Größe des Problems um den Faktor 4.
- Erreichen der Randbedingung ist vonnöten, die Frage ist wann dies geschieht.
- Größe Teilproblem bei Level i: $\frac{n}{4^i}$
- Erreichen Teilproblem der Größe 1, wenn $\frac{n}{4^i} = 1$, d.h. wenn $i = log_4(n)$
  $\Rightarrow$ Baum hat also $\log_4 n + 1$ Ebenen

Kosten pro Ebene
- Jede Ebene hat 3-mal soviele Knoten wie darüber liegende
- Anzahl der Knoten in Tiefe i ist 3^i
- Kosten $c(\frac{n}{4^i})^2$, $i = 0, \cdots, \log_4 n - 1$
- Anzahl $\cdot$ Kosten $= 3^i \cdot c(\frac{n}{4^i})^2 = (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2$

Unterste Ebene
- $3^{\log_4(n)} = n\log_4(3)$ Knoten
- Jeder Knoten trägt $T(1)$ Kosten bei
- Kosten unten: $n^{\log_4(3)} \cdot T(1) = \Theta(n^{\log_4(3)})$

Addiere alle Kosten aller Ebenen

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + (\frac{3}{16})^2 cn^2 + ... + (\frac{3}{16})^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)})$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4^3})$$

$$= \frac{(\frac{3}{16}^{\log_4 n}) - 1}{\frac{3}{16} - 1} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

- Verwendung einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe als obere Schranke:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{-1} (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$< \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{3}{16}} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{16}{13} \cdot cn^2 + Theta(n^{\log_4 3}) = O(n^2)$$

Jetzt **Subsitutionsmethode**

Zu zeigen $\exists d > 0 : T(n) \leq dn^2$

Induktionsanfang
$$T(n) = 3 \cdot T(\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor) + c \cdot 1^2$$
$$= 3 \cdot T(0) + c = c$$

Induktionsschritt
$$T(n) \leq 3 \cdot T(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor) + cn^2$$
$$\leq 3 \cdot d(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor)^2 + cn^2$$
$$\leq 3d(\frac{n}{4})^2 + cn^2$$
$$= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2$$
$$\leq dn^2, \text{ falls } d \geq \frac{16}{13}c$$

1.14.4 Mastertheorem

Idee — Mastertheorem

Seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten. Sei $f(n)$ eine positive Funktion und $T(n)$ über den nichtnegativen ganzen Zahlen über die Rekursionsgleichung $T(n) = a\,T(\frac{n}{b}) + f(n)$ defininiert, wobei wir $\frac{n}{b}$ so interpretieren, dass damit entweder $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ oder $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ gemeint ist. Dann besitzt $T(n)$ die folgenden asymptotischen Schranken (a und b werden aus $f(n)$ gelesen):

1. Gilt $f(n) = O(n^{\log_b(a-\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
2. Gilt $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} lg(n))$
3. Gilt $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a+\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$ und $a\ f(\frac{n}{b}) \leq c\ f(n)$ für eine Konstante $c < 1$ und hinreichend großen n, dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$

Erklärung

- In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^{\log_b(a)}$ verglichen
  1. Wenn $f(n)$ polynomial kleiner ist als $n^{\log_b(a)}$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
  2. Wenn $f(n)$ und $n^{\log_b(a)}$ die gleiche Größe haben, gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} lg(n))$
  3. Wenn $f(n)$ polynomial größer als $n^{\log_b(a)}$ und $a\ f(\frac{n}{b}) \leq c\ f(n)$ erfüllt, dann $T(n) = \Theta(f(n))$
- (polynomial größer/kleiner: um Faktor n^{ϵ} asymptotisch größer/kleiner)

Nicht abgedeckte Fälle

- Wenn einer dieser Fälle eintritt, kann das Mastertheorem nicht angewendet werden
  1. Wenn $f(n)$ kleiner ist als $n^{\log_b(a)}$, aber nicht polynomial kleiner
  2. Wenn $f(n)$ größer ist als $n^{\log_b(a)}$, aber nicht polynomial größer
  3. Regularitätsbedingung $a\ f(\frac{n}{b}) \leq c\ f(n)$ wird nicht erfüllt
  4. a oder b sind nicht konstant (z.B. $a = 2^n$)

Beispiel

- $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
  - $a = 9, b = 3, f(n) = n$
  - $\log_b(a) = \log_3(9) = 2$
  - $f(n) = n \quad = O(n^{\log_b(a-\epsilon)})$
    $= O(n^{2-\epsilon})$
  - Ist diese Gleichung für ein $\epsilon > 0$ erfüllt? $\Rightarrow \epsilon = 1$
  - **1. Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$
- $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$
  - $a = 1, b = \frac{3}{2}, f(n) = 1$
  - $\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$
  - $f(n) = 1 \quad = O(n^{\log_b(a)})$
    $= O(n^0)$
    $= O(1)$
  - **2.Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(1 * lg(n)) = \Theta(lg(n))$
- $T(n) = 3(T\frac{n}{4}) + n\ lg(n)$
  - $a = 3, b = 4, f(n) = n\ lg(n)$
  - $n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)} \leq n^{0.793}$
  - $\epsilon = 0.1$ im Folgenden
  - $f(n) = n\ lg(n) \geq n \geq n^{0.793+0.1} \geq n^{0.793}$
  - **3.Fall** $\Rightarrow f(n) = \Omega(n^{\log_b(a+0.1)})$
  - $af(\frac{n}{b}) = 3f(\frac{n}{4}) = 3(\frac{n}{4})\ lg(\frac{n}{4}) \leq \frac{3}{4}n\ lg(n)$
  - Damit ist auch die Randbedingung erfüllt und $T(n) = \Theta(n\ lg(n))$

Grundlegende Datenstrukturen	Fortgeschrittene Datenstrukturen	Randomisierte Datenstrukturen
Stacks	Rot-Schwarz-Bäume	Skip Lists
Verkettete Listen	AVL-Bäume	Hash Tables
Queues	Splay-Bäume	Bloom-Filter
Bäume	Heaps	
Binäre Suchbäume	B-Bäume	

Tabelle 3: Übersicht Datenstrukturen