

1 Advanced Data Structures

1.1 Rot-Schwarz-Bäume

- **Definition**

- Binärer Suchbaum mit Zusatzeigenschaften
- Zusatzeigenschaften:
 - * Jeder Knoten hat die Farbe rot oder schwarz
 - * Die Wurzel ist schwarz
 - * Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz („Nicht-Rot-Rot-Regel“)
 - * Für jeden Knoten hat jeder Pfad zu einem Blatt die selbe Anzahl an gleichen schwarzen Knoten
- Halbblätter im RBT sind schwarz
- Schwarzhöhe eines Knoten:
Eindeutige Anzahl von schwarzen Knoten auf dem Weg zu einem Blatt im Teilbaum des Knoten
- Für leeren Baum gibt Schwarzhöhe = 0 ($SH(nil) = 0$)
- Höhe eines Rot-Schwarz-Baums
 - * $h \leq 2 \cdot \log_2(n + 1)$ (n Knoten)
 - * In jedem Unterteilbaum gleiche Anzahl schwarzer Knoten
 - * Maximal zusätzlich gleiche Anzahl roter Knoten auf diesem Pfad
 - * Einigermaßen ausbalanciert \Rightarrow Höhe $O(\log n)$
- Alle folgenden Algorithmen arbeiten mithilfe eines Sentinels (zeigt auf sich selbst)

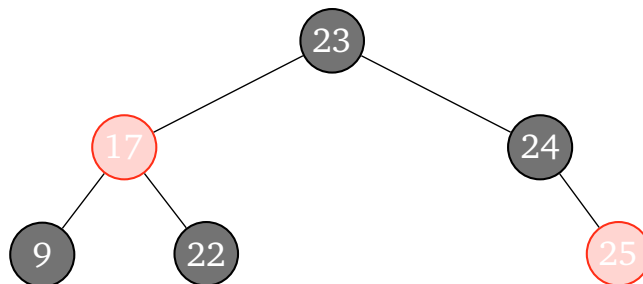


ABBILDUNG 1: Beispielhafte Darstellung wie in 1.3

- Einfügen

- Laufzeit: $\Theta(h)$ (h jedoch $\log n$)

1. Finde Elternknoten wie im BST (BST-Einfüge Algorithmus)
2. Knoten als Kind von Elternknoten anfügen
3. Färbe den neuen Knoten rot
4. Wiederherstellen der Rot-Schwarz-Bedingung

```
insert(T,z) //z.left==z.right==nil;

1  x=T.root; px=T.sent;
2  WHILE x != nil DO                                //Bis zum passenden Blatt gehen
3      px=x;
4      IF x.key > z.key THEN
5          x=x.left;
6      ELSE
7          x=x.right;
8  z.parent=px;
9  IF px==T.sent THEN                                // Einfügen
10     T.root=z
11 ELSE
12     IF px.key > z.key THEN
13         px.left=z;
14     ELSE
15         px.right=z;
16 z.color=red;                                       // ab hier anders als bei BST-Insert
17 fixColorsAfterInsertion(T,z);
```

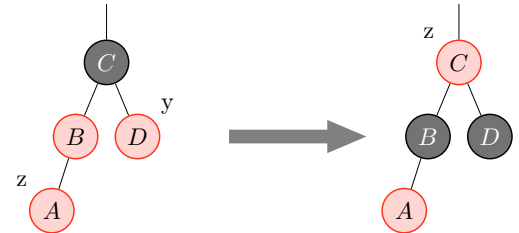
- Hilfsmethode rotateLeft

```
rotateLeft(T,x)

1  y = x.right;
2  x.right = y.left;
3  IF y.left != nil THEN
4      y.left.parent = x;
5  y.parent = x.parent;
6  IF x.parent == T.sent THEN
7      T.root = y;
8  ELSE
9      IF x == x.parent.left THEN
10         x.parent.left = y;
11     ELSE
12         x.parent.right = y;
13 y.left = x;
14 x.parent = y;
```

• fixColorsAfterInsertion

- Beim Aufrufen werden zwei Bedingungen potentiell verletzt:
 1. root ist nicht mehr schwarz
 2. wenn eine Node rot ist müssen beide Kinder schwarz sein
- Also müssen wir:
 - * nach rotation die root des aktuellen Teilbaumes auf schwarz setzen
 - * Überprüfen, ob RSB-Bedingung verletzt wurde
 - * Bloß wenn das parent auch rot ist kommen wir in Verlegenheit \Rightarrow wir müssen den Algorithmus starten
- Fälle falls Parent rot ist:
 1. Onkel ist ebenfalls rot \Rightarrow parent und Onkel werden schwarz gefärbt und Grandparent wird rot gefärbt
 2. Onkel ist schwarz und z hat andere Kindrichtung wie z.p \Rightarrow zu Fall 3 durch rotation konvertieren
 3. Onkel ist schwarz und z hat gleiche Kindrichtung wie z.p \Rightarrow z.p wird schwarz, z.p.p wird rot, und es wird um z.p.p entgegen der Kindrichtung gedreht

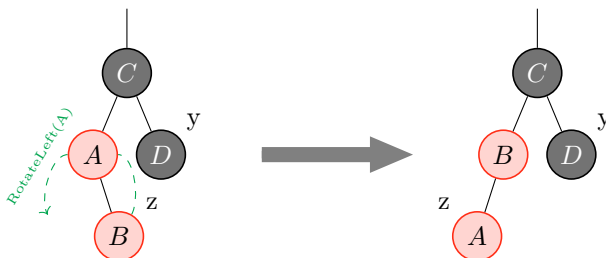


Fall 1

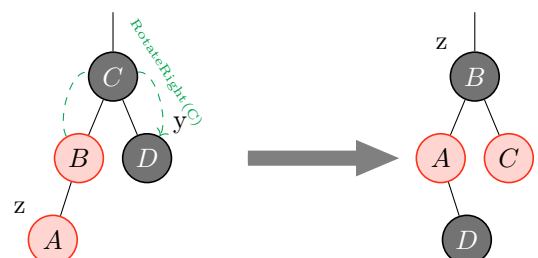
fixColorsAfterInsertion(T,z)

```

1 WHILE z.parent.color == red DO // solange der Elternknoten rot ist
2   IF z.parent == z.parent.parent.left THEN // Linkes Kind (if-Fall)
3     y = z.parent.parent.right;
4     IF y != nil AND y.color == red THEN // Fall 1
5       z.parent.color = black;
6       y.color = black;
7       z.parent.parent.color = red;
8       z = z.parent.parent; // rekursiv nach oben weiterführen
9     ELSE // Fall 2
10      IF z == z.parent.right THEN // Zwischenfall (2.1)
11        z = z.parent;
12        rotateLeft(T,z);
13        z.parent.color = black;
14        z.parent.parent.color = red;
15        rotateRight(T, z.parent.parent);
16   ELSE // Rechtes Kind (else-Fall)
17     // Tauschen von rechts und links
18     T.root.color = black; // Setzen der Wurzel auf Schwarz
  
```



Fall 2



Fall 3

- **Löschen**

- Laufzeit: $O(h) = O(\log n)$
- analog zum binären Suchbaum, aber neue Node erbt Farbe der alten Node
- Wenn „neue“ Node schwarz war \Rightarrow Fixup
- Verschiedene Fälle, die auch gegenseitig Voraussetzungen füreinander sind
- Hilfsroutine transplant

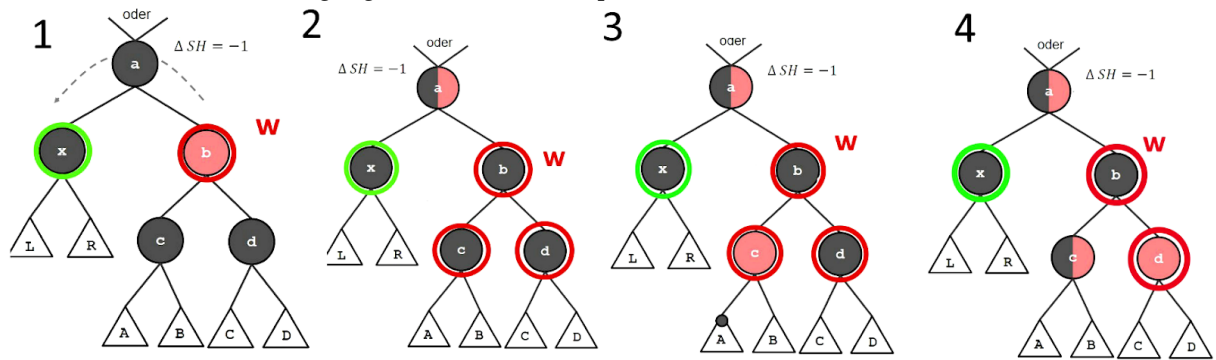
transplant(T,u,v)

```
1 IF u.parent==nil THEN
2   T.root=v;
3 ELSE
4   IF u==u.parent.left THEN
5     u.parent.left=v;
6   ELSE
7     u.parent.right=v;
8 IF v != nil THEN
9   v.parent=u.parent;
```

delete(T,z)

```
1 y=z;
2 y-original-color=y.color;
3 IF z.left == nil;
4   x = z.right;
5   transplant(T,z,z.right);
6 ELSE IF z.right == nil;
7   x = z.left;
8   transplant(T,z,z.left);
9 ELSE
10  y TREE-MINIMUM(z.right);
11  y-original-color=y.color;
12  x=x.right;
13  IF <.p == z
14    x.p = y;
15  ELSE
16    transplant(T,y,y.right);
17    y.right=z.right;
18    y.right.p=y;
19    transplant(T,z,y);
20    y.left=z.left;
21    y.left.p=y;
22    y.color=z.color;
23 IF y-original-color == BLACK
24   deleteFixup(T,x);
```

- Delete kann die RSB-Bedingung verletzen. Das fixup hat vier fälle:



1. Knoten w (Bruder von Knoten x), rot

- Da w schwarze Kinder haben muss, können wir die Farben von w und $x.p$ wechseln und dann eine Linksdrehung auf $x.p$ ausführen, ohne eine der rot-schwarzen Eigenschaften zu verletzen.
- Das neue Geschwisterchen von x , das vor der Rotation eines der Kinder von w ist, ist jetzt schwarz. Wir haben also Fall 1 in Fall 2, 3 oder 4 konvertiert. Die Fälle 2, 3 und 4 treten auf, wenn der Knoten w schwarz ist, aber unterschiedliche Farben der Kinder.

2. w ist schwarz und beide Kinder von w sind schwarz

- entfernen eines Schwarz von x und w , wobei x nur ein Schwarz hat und w rot bleibt
- Um Entfernen aus x und w zu kompensieren ein zusätzliches Schwarz hinzufügen.
- w konnte entweder Schwarz oder rot sein.
- Wenn $x.p(a)$ schwarz, dann Vaterknoten $\Delta SH = -1$; verfahren rekursiv mit $x.p(a)$ als neuem x ; \Rightarrow wir wiederholen die while-Schleife mit $x.p$ als neuem Knoten x .

3. w ist schwarz, w 's linkes Kind ist rot und w 's rechtes Kind ist schwarz

- Farben von w und seinem linken Kind links ändern und dann eine Rechtsdrehung auf w ausführen
- Das neue Geschwister w von x ist jetzt ein schwarzer Knoten mit einem roten rechten Kind

\Rightarrow Fall 3 in Fall 4 transformiert.

4. w ist schwarz und das rechte Kind von w ist rot

- w erbt die farbe von $x.p$
- $x.p$ wird schwarz
- $w.right$ wird schwarz

\Rightarrow Linksrotation von $x.p$

- x als Wurzel festlegen, wird der Whileloop beendet, wenn die Schleifenbedingung getestet wird.

deleteFixup(T,z)

```
1 WHILE x != T.root and x.color == BLACK
2   IF x==x.p.left
3     w=x.p.right;
4     IF w.color == RED // Case 1
5       w.color=BLACK;
6       x.p.color=RED;
7       rotateLeft(T,x.p);
8       w=x.p.right;
9     IF w.left.color == w.right.color == BLACK // Case 2
10      w.color = RED;
11      x=x.p;
12    ELSE IF w.right.color == BLACK // Case 3
13      w.left.color = BLACK;
14      w.color=RED;
15      rotateRight(T,w);
16      w=x.p.right;
17      w.color=x.p.color; // Case 4
18      x.p.color=BLACK;
19      w.right.color=BLACK;
20      rotateLeft(T,x.p);
21      x=T.root;
22    ELSE
23      // same as above with "right" and "left" exchanged
24      x.color=BLACK;
```

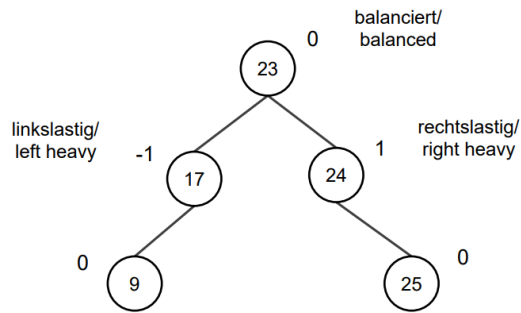
• Worst-Case-Laufzeiten

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$

1.2 AVL-Bäume

- **Definition:**

- $h \leq 1.441 \cdot \log n$ (optimierte Konstanten - 1,441 vs 2 (RBT))
- Binärer Suchbaum
- Allerdings Balance in jedem Knoten nur $-1, 0, 1$
- Balance für x : $B(x) = \text{Höhe}(\text{rechter Teilbaum}) - \text{Höhe}(\text{linker Teilbaum})$



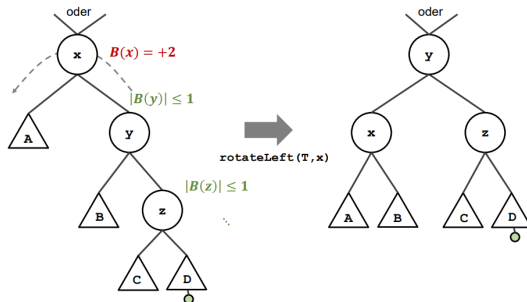
- **AVL vs. Rot-Schwarz**

- *AVL:*
 - * Einfügen und Löschen verletzen in der Regel öfter die Baum-Bedingung
 - * Aufwendiger zum Rebalancieren
- *Rot-Schwarz:*
 - * Suchen dauert evtl. länger
- *Konklusion:*
 - * AVL geeigneter, wenn mehr Such-Operationen und weniger Einfügen und Löschen
- *Gemeinsamkeiten:*
- $AVL \subset \text{Rot-Schwarz}$
- AVL Baum \Rightarrow Rot-Schwarz-Baum mit Höhe $\lceil \frac{h+1}{2} \rceil$
- Für jede Höhe $h \geq 3$ gibt es einen RBT, der kein AVL-Baum ist ($AVL \neq \text{RBT}$)

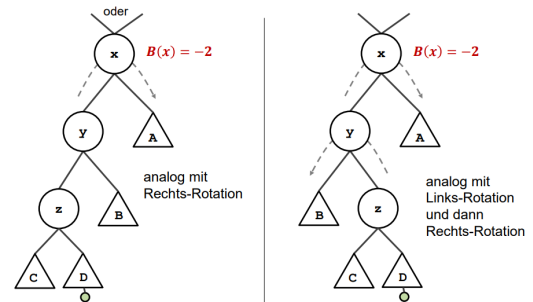
• Einfügen

- Einfügen funktioniert wie beim Binary Search Tree mit Sentinel
- Erfordert danach jedoch Rebalancieren weiter oben im Baum
- Rebalancieren: (verschiedene Fälle)

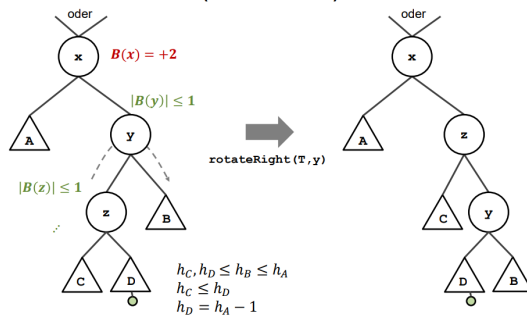
Rebalancieren: Fall I



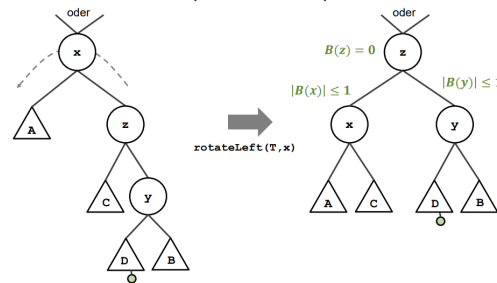
Rebalancieren: Fälle III+IV



Rebalancieren: Fall II (erste Rotation)



Rebalancieren: Fall II (zweite Rotation)



• Löschen

- Analog zum binären Suchbaum
- Rebalancieren bis eventuell in die Wurzel notwendig

• Worst-Case-Laufzeiten

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$
- theoretisch bessere Konstanten als RBT
- in Praxis aber nur unwesentlich schneller

1.3 Splay-Bäume

- **Definition**

- selbst-organisierende Listen
- Ansatz: Einmal angefragte Werte werden wahrs. noch öfter angefragt
- Angefragte Werte nach oben schieben
- Splay-Bäume sind Untermenge von BST

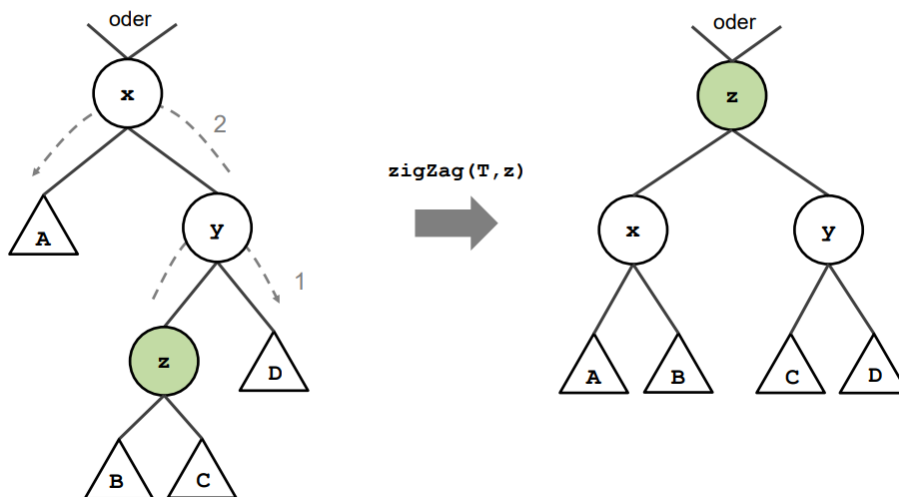
- **Splay-Operationen**

- Suchen oder Einfügen: Spüle gesuchten oder neu eingefügten Knoten an die Wurzel
- Splay: (Folge von Zig-, Zig-Zig-, Zig-Zag-Operationen)

splay(T,z)

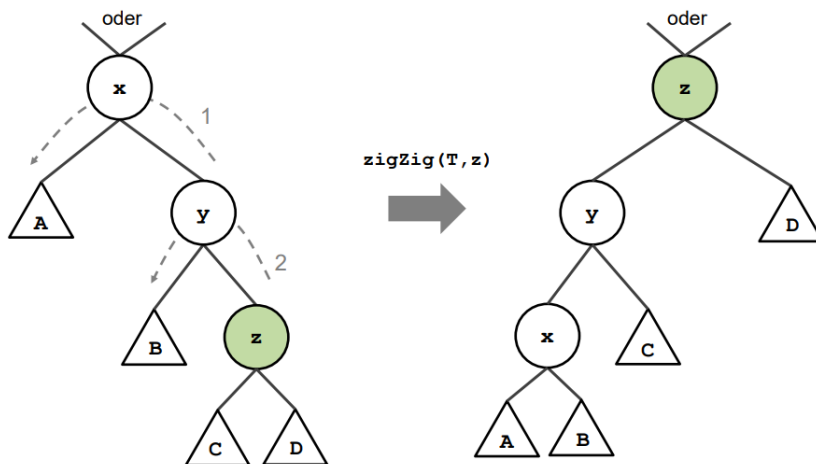
```
1 WHILE z != T.root DO
2   IF z.parent.parent == nil THEN
3     zig(T,z);
4   ELSE
5     IF z == z.parent.parent.left.left OR
6       z == z.parent.parent.right.right THEN
7       zigZig(T,z);
8     ELSE
9       zigZag(T,z);
```

Zig-Zag-Operation =Rechts-Links- oder Links-Rechts-Rotation



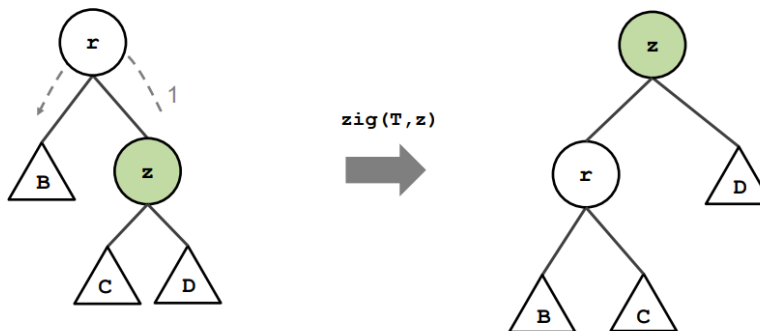
Zig-Zig-Operation

=Links-Links- oder Rechts-Rechts-Rotation



Zig-Operation

=einfache Links- oder Rechts-Rotation



- **Suchen**

- Laufzeit: $O(h)$
- Suche des Knotens wie im BST
- Hochspülen des gefundenen Knotens (alternativ zuletzt besuchter Knoten, falls nicht gefunden)

- **Einfügen**

- Laufzeit: $O(h)$
- Suche der Position wie im BST
- Einfügen und danach hochspülen des eingefügten Knotens

- **Löschen**

- Laufzeit: $O(h)$
- 1. Spüle gesuchten Knoten per Splay-Operation nach oben
- 2. Lösche den gesuchten Knoten (Wenn einer der beiden entstehenden Teilbäume leer, dann fertig)
- 3. Spüle den größten Knoten im linken Teilbaum nach oben (kann kein rechtes Kind haben)
- 4. Hänge rechten Teilbaum an größten Knoten aus 3. an

- **Laufzeit Splay-Bäume**

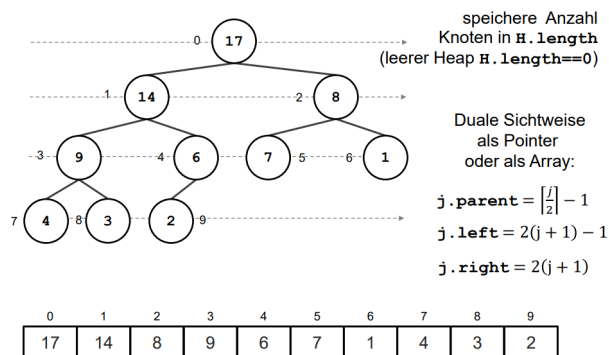
- Amortisierte Laufzeit: Laufzeit pro Operation über mehrere Operationen hinweg
- Worst-Case-Laufzeit pro Operation: $O(\log_n n)$

1.4 Binäre Max-Heaps

- **Definition**

- Heaps sind keine BSTs
- Eigenschaften binäre Max-Heaps:
 - * bis auf das unterste Level vollständig und dort von links gefüllt ist
 - * Für alle Knoten gilt: $x.\text{parent}.\text{key} \geq x.\text{key}$
 - * Maximum des Heaps steht damit in der Wurzel
- $h \leq \log n$, da Baum fast vollständig

- **Heaps durch Arrays**



- **Einfügen**

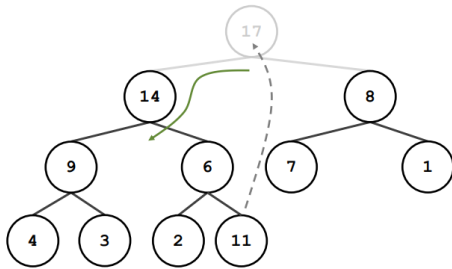
- Idee: Einfügen und danach Vertauschen nach oben, bis Max-Eigenschaft wieder erfüllt ist
- Laufzeit: $O(h) = O(\log n)$

```
insert(H,k) // als unbeschränktes Array
```

```
1 H.length = H.length + 1;  
2 H.A[H.length-1] = k;  
3  
4 i = H.length - 1;  
5 WHILE i > 0 AND H.A[i] > H.A[i.parent]  
6     SWAP(H.A, i, i.parent);  
7     i = i.parent;
```

• Lösche Maximum

1. Ersetze Maximum durch „letztes“ Blatt
2. Vertausche Knoten durch Maximum der beiden Kinder (heapify)



extract-max(H)

```

1 IF isEmpty(H) THEN return error "underflow";
2 ELSE
3     max = H.A[0];
4     H.A[0] = H.A[H.length - 1];
5     H.length = H.length - 1;
6     heapify(H, 0);
7     return max;

```

heapify(H, i)

```

1 maxind = i;
2 IF i.left < H.length AND H.A[i] < H.A[i.left] THEN
3     maxind = i.left;
4 IF i.right < H.length AND H.A[maxind] < H.A[i.right] THEN
5     maxind = i.right;
6
7 IF maxind != i THEN
8     SWAP(H.A, i, maxind);
9     heapify(H, maxind);

```

• Heap-Konstruktion aus Array

- Blätter sind für sich triviale Max-Heaps
- Bauen von Max-Heaps für Teilbäume mithilfe Rekursion per heapify
- (Array nicht unbedingt in richtiger Reihenfolge)

buildHeap(H.A) // Array in H.A

```

1 H.length = A.length;
2 FOR i = ceil((H.length-1)/2) - 1 DOWNT0 0 DO
3     heapify(H.A, i);

```

• Heap-Sort

- Idee: Bauen des Heaps aus Array und dann Extraktion des Maximums

heapSort(H.A)

```

1 buildHeap(H.A) // Bauen des Heaps
2 WHILE !isEmpty(H) DO
3     PRINT extract-max(H); // Ausgabe des Maximums bis Heap leer ist

```

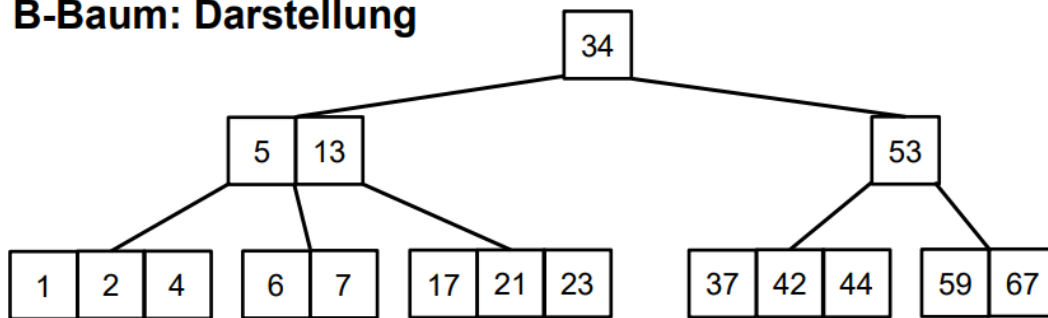
1.5 B-Bäume

- **Definition**

- Jeder B-Baum hat einen angegebenen Grad also z.B. $t = 2$
- Eigenschaften:
 - * Wurzel zwischen $[1, \dots, 2t - 1]$ Werte
 - * Knoten zwischen $[t - 1, \dots, 2t - 1]$ Werte
 - * Werte innerhalb eines Knotens aufsteigend geordnet
 - * Blätter haben alle die gleiche Höhe
 - * Jeder innere Knoten mit n Werten hat $n + 1$ Kinder, sodass gilt:

$$k_0 \leq \text{key}[0] \leq k_1 \leq \text{key}[1] \leq \dots \leq k_{n-1} \leq \text{key}[n] \leq k_n$$

B-Baum: Darstellung



`x.n`

– Anzahl Werte eines Knoten **`x`**

`x.key[0], ..., x.key[x.n-1]`

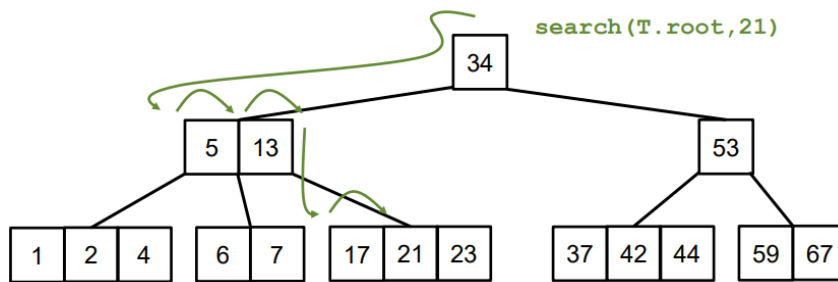
– (geordnete) Werte in Knoten **`x`**

`x.child[0], ..., x.child[x.n]`

– Zeiger auf Kinder in Knoten **`x`**

- Höhe B-Baum: $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$ (Grad t und n Werte)
- B-Baum wird für größere t flacher

- Suche



search(x, k)

```

1 WHILE x != nil DO
2   i = 0;
3   WHILE i < x.n AND x.key[i] < k DO
4     i++;
5   IF i < x.n AND x.key[i] == k THEN
6     return(x, i);
7   ELSE
8     x = x.child[i];
9 return nil;

```

- Einfügen

- Einfügen erfolgt immer in einem Blatt
- Falls das Blatt voll ist, muss jedoch gesplittet werden
- \Rightarrow Beim Durchlaufen des Baumes an jeder notwendigen (voll) Position splitten
- Splitten:
 - * Bricht volle Node auf und fügt mittleren Wert zur Elternnode hinzu
 - * Aus den anderen Werten entstehen nun jeweils eigene Kinder
 - * An der Wurzel splitten erzeugt neue Wurzel und erhöht Baumhöhe um eins
- Ablauf zusammengefasst:
 - (a) Start bei Wurzel, falls kein Platz mehr splitten
 - (b) Durchlaufen des Baumes bis zur richtigen Position und immer, falls voll, splitten
 - (c) Einfügen der Node (fertig)

insert(T, z)

```

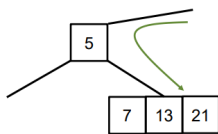
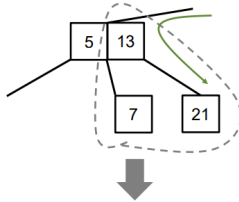
1 Wenn Wurzel schon  $2t-1$  Werte, dann splitte Wurzel
2 Suche rekursiv Einfügeposition:
3   Wenn zu besuchendes Kind  $2t-1$  Werte, splitte es erst
4   Füge z in Blatt ein

```

• Löschen

- Wenn Blatt noch mehr als $t-1$ Werte, kann der Wert einfach entfernt werden
- Allerdings durchlaufen wir hier den Baum auch wieder von oben und stellen gewisse Voraussetzungen her
- Durchlaufen des Baumes von oben und Anwendung der folgenden Algorithmen

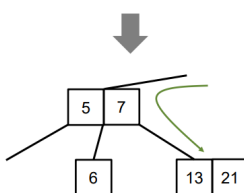
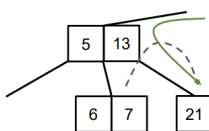
$t = 2$



Allgemeines Verschmelzen:

- * Kind und alle rechten/linken Geschwisterknoten nur $t - 1$ Werte
- * Wenn Elternknoten vorher min. t Werte
- ⇒ keine Änderung oberhalb notwendig

$t = 2$



Allgemeines Rotieren/Verschieben:

- * Kind nur $t - 1$ Werte
- * Geschwister jedoch mehr als $t - 1$ Werte
- * keine Änderung oberhalb notwendig

- Code:

```
delete(T, k)
```

```

1 Wenn Wurzel nur 1 Wert und beide Kinder t-1 Werte,
2 verschmelze Wurzel und Kinder (reduziert Höhe um 1)
3 Suche rekursiv Löschposition:
4     Wenn zu besuchendes Kind nur t-1 Werte,
5     verschmelze es oder rotiere/verschiebe
6 Entferne Wert k im inneren Knoten/Blatt
7 // Ohne Probleme, aufgrund vorheriger Anpassung
```

• Laufzeiten

- Einfügen: $\Theta(\log_t n)$
- Löschen: $\Theta(\log_t n)$
- Suchen: $\Theta(\log_t n)$
- Nur vorteilhaft wenn Daten blockweise eingelesen werden
- \mathcal{O} -Notation versteckt hier konstanten Faktor t für Suche innerhalb eines Knotens