

1 Advanced Designs

1.1 Dynamische Programmierung

Anwendung

Anwendung, wenn sich Teilprobleme überlappen:

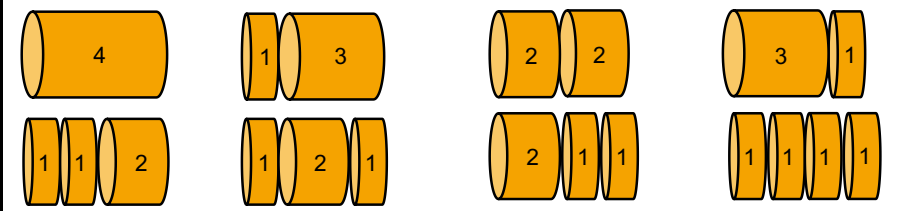
1. Wir charakterisieren die Struktur einer optimalen Lösung
2. Wir definieren den Wert einer optimalen Lösung rekursiv
3. Wir berechnen den Wert einer optimalen Lösung (meist bottom-up Ansatz)
4. Wir konstruieren eine zugehörige optimale Lösung aus berechneten Daten

1.1.1 Stabzerlegungsproblem

Ausgangsproblem: Stangen der Länge n cm sollen so zerschnitten werden, dass der Erlös r_n maximal ist, indem die Stange in kleinere Stäbe geschnitten wird.

Länge i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis p_i	0	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Beispiel: Gesamtstange hat Länge 4. Welchen Erlös kann man max. erhalten?



Optimaler Erlös: zwei 2cm lange Stücke ($5 + 5 = 10$)

Aufteilung der Stange

- Stange mit Länge n kann auf 2^{n-1} Weisen zerlegt werden
- Position i : Distanz vom linken Ende der Stange
- Aufteilung in k Teilstäbe ($1 \leq k \leq n$)
- optimale Zerlegung: $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$
- maximaler Erlös: $r_n = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$
- z.B.: $r_4 = 10$ (siehe oben)

Rekursive Top-Down Implementierung

CUT-ROD(p,n) // p Preis-Array, n Stangenlänge

```
1 IF n == 0
2   return 0;
3 q = -∞;
4 FOR i = 1 TO n // nicht Start bei 0, sonst kein Rekursionsschritt
5   q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n - i));
6 return q;
```

Stabzerlegung via Dynamischer Programmierung:

Ziel Mittels dynamischer Programmierung wollen wir CUT-ROD in einen effizienten Algorithmus verwandeln.

Bemerkung Naiver rekursiver Ansatz ist **ineffizient**, da dieser immer wieder dieselben Teilprobleme löst.

Ansatz Jedes Teilproblem nur einmal lösen. Falls die Lösung eines Teilproblems nochmal benötigt wird, schlagen wir diese nach.

- Reduktion von exponentieller auf polynomielle Laufzeit.
- Dynamische Programmierung wird zusätzlichen Speicherplatz benutzen um Laufzeit einzusparen.

Rekursiver Top-Down-Ansatz mit Memoisation:

Idee – Rekursiver Top-Down-Ansatz mit Memoisation Speicherung der Lösungen der Teilprobleme

Laufzeit: $\Theta(n^2)$

MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)

```
1 Let r[0...] be new array
2 FOR i = 0 TO n
3   r[i] = -∞
4 return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r) // r new Array

```
1 IF r[n] ≥ 0 // Abfrage ob vorhanden
2   return r[n]
3 IF n == 0
4   q = 0
5 ELSE
6   q = -∞
7   FOR i = 1 to n
8     q = max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n - i, r))
9 r[n] = q // Abspeichern
10 return q
```

Bottom-Up Ansatz:

- Laufzeit: $\Theta(n^2)$
- Sortieren der Teilprobleme nach ihrer Größe und lösen in dieser Reihenfolge
- Alle Teilprobleme kleiner als das momentane Problem sind bereits gelöst

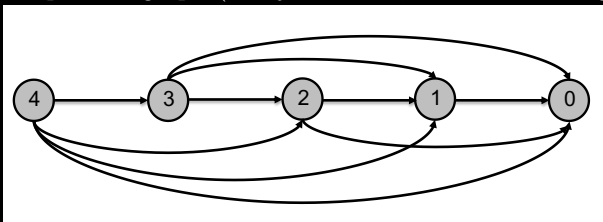
BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```
1 Let r[0...n] be a new array
2 r[0] = 0
3 FOR j = 1 TO n
4     q = -∞
5     FOR i = 1 TO j
6         q = max(q, p[i] + r[j - i])
7     r[j] = q
8 return r[n]
```

EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```
1 Let r[0...n] and s[0...n] be new arrays
2 r[0] = 0, s[0] = 0
3 FOR j = 1 TO n
4     q = -∞
5     FOR i = 1 TO j
6         IF q < p[i] + r[j-i]
7             q = p[i] + r[j - i]
8             s[j] = i
9     r[j] = q
10 return r and s
```

Teilproblemgraph ($i \rightarrow j$ bedeutet, dass Berechnung von r_i den Wert r_j benutzt)



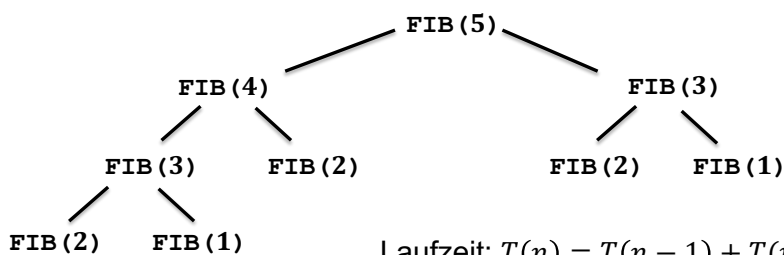
Fibonacci-Zahlen

- $F_1 = F_2 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Naiver rekursiver Algorithmus:

FIB(n)

```
1 IF n ≤ 2
2     f = 1;
3 ELSE
4     f = FIB(n-1) + FIB(n-2);
5 return f;
```



Laufzeit: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$
 $\Rightarrow \Theta(2^n)$

Gleiche Teilprobleme werden wieder mehrmals gelöst

Rekursiver Algorithmus mit Memoisation:

- Wieder Abspeichern von Teilproblemen um Laufzeit einzusparen
- Laufzeit: $\Theta(n)$

MEMOIZED-FIB(n)

```
1 Let m[0...n-1] be a new array
2 FOR i = 0 TO n - 1
3     m[i] = 0
4 return MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)
```

MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)

```
1 IF m[n-1] != 0
2     return m[n-1];           // Auslesen von gespeicherten Werten
3 IF n ≤ 2
4     f = 1;
5 ELSE
6     f = MEMOIZED-FIB-AUX(n-1, m) + MEMOIZED-FIB-AUX(n-2, m);
7 m[n-1] = f;
8 return f;
```

Bottom-Up Algorithmus:

Hier wieder Berechnen aller Teilprobleme von unten beginnend

BOTTOM-UP-FIB(n)

```
1 Let m[0...n] be a new array
2 FOR i = 1 TO n
3     IF i ≤ 2
4         f = 1;
5     ELSE
6         f = m[i-1] + m[i-2];
7     m[i] = f;
8 return m[n];
```

1.2 Greedy-Algorithmus

Idee — Greedy-Algorithmus

- Trifft stets die Entscheidung, die in diesem Moment am besten erscheint
- Trifft **lokale** optimale Entscheidung (evtl. nicht global die Beste)

1.2.1 Aktivitäten-Auswahl-Problem

Definition — Aktivitäten-Auswahl-Problem

- 11 anstehende Aktivitäten $S = \{a_1, \dots, a_{11}\}$
- Startzeit s_i und Endzeit f_i , wobei $0 \leq s_i < f_i < \infty$
- Aktivität a_i findet im halboffenen Zeitintervall $[s_i, f_i)$ statt
- Zwei Aktivitäten sind kompatibel, wenn sich deren Zeitintervalle nicht überlappen

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

Aktivitäten: $\{a_3, a_9, a_{11}\}$
Aktivitäten: $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$
Aktivitäten: $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$

Ansatz mittels dynamischer Programmierung

- Menge von Aktivitäten, die starten nachdem a_i endet und enden, bevor a_j startet
 $S_{ij} = \{a \in S, a = (s, f) : s \geq f_i, f < s_j\}$
- Definiere maximale Menge A_{ij} von paarweise kompatiblen Aktivitäten in S_{ij} .
 $c[i, j] = |A_{ij}|$
- Optimale Lösung für Menge S_{ij} die Aktivitäten a_k enthält:
 $c[i, j] = \max_{a_k \in S_{ij}} \{c[i, k] + c[k, j] + 1\}$ (0, falls $S_{ij} = \emptyset$)

Greedy-Wahl

- lokal die beste Wahl
- Auswahl der Aktivität mit geringster Endzeit (möglichst viele freie Ressourcen)
- Also hier Teilprobleme, die nach a_1 starten
- $S_k = \{a_i \in S : s_i \geq f_k\}$: Menge an Aktivitäten, die starten, nachdem a_k endet
- Optimale-Teilstruktur-Eigenschaft
Wenn a_1 in optimaler Lösung enthalten ist, dann besteht optimale Lösung zu ursprünglichem Problem aus Aktivität a_1 und allen Aktivitäten zur einer optimalen Lösung des Teilproblems S_1

Rekursiver Greedy-Algorithmus

Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert

Laufzeit: $\Theta(n)$

RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)

```
1 // s Anfangszeitenarray, f Endzeitenarray,
2 // k Index von Teilproblem, n Größe Anfangsproblem
3 m = k + 1;
4 WHILE m ≤ n and s[m] < f[k] // Suche nach erster Kompatibilität
5     m = m + 1;
6 IF m ≤ n
7     // Ausgabe des Elements und Berechnung weiterer Aktivitäten
8     return {am} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, m, n)
9 ELSE
10    return ∅
```

Iterativer Greedy-Algorithmus

Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert

Laufzeit: $\Theta(n)$

GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)

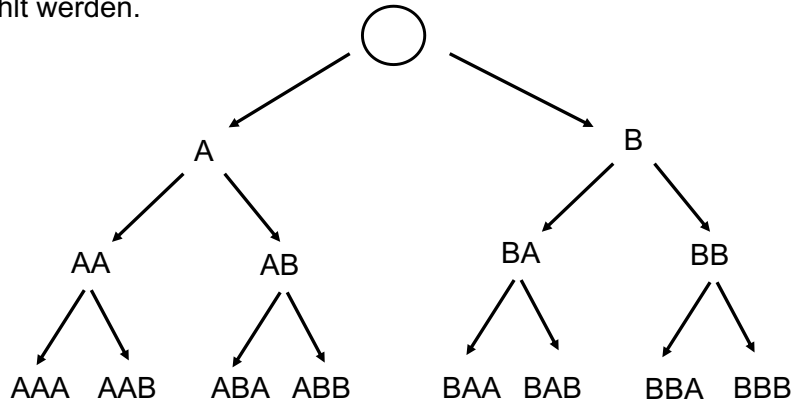
```
1 n = s.length;
2 A = {a1};
3 k = 1; // Index des zuletzt hinzugefügten Elements in A
4 FOR m = 2 TO n
5     IF s[m] ≥ f[k] // Findet zuerst endende Aktivität in Menge
6         A = A ∪ {am}; // Fügt diese hinzu, falls kompatibel
7         k = m;
8 return A;
```

1.3 Backtracking

Suchbaum - Baum der Möglichkeiten

Darstellung aller für ein Problem bestehenden Möglichkeiten

Problem: Aus den Buchstaben A, B soll dreimal nacheinander einer gewählt werden.



Der Suchraum ist die Menge aller für ein Problem bestehende Möglichkeiten.

Idee – Backtracking

- Lösung finden via Trial and error
- Schrittweises Herantasten an die Gesamtlösung
- Falls Teillösung inkorrekt → Gehe einen Schritt zurück und probiere eine andere Möglichkeit
- Voraussetzung:
 - Lösung setzt sich aus Komponenten zusammen (Sudoku, Labyrinth,..)
 - Mehrere Wahlmöglichkeiten für jede Komponente
 - Teillösung kann auf Korrektheit getestet werden

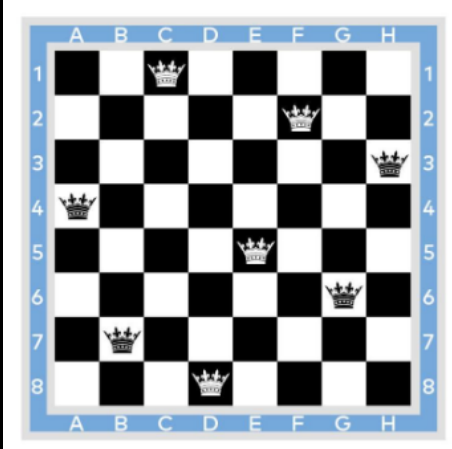
Allgemeiner Backtracking-Algorithmus

BACKTRACKING(A, s)

```
1 IF alle Komponenten richtig gesetzt
2   return true;
3 ELSE
4   WHILE auf aktueller Stufe gibt es Wahlmöglichkeiten
5     wähle einen neuen Teillösungsschritt
6     Teste Lösungsschritt gegen vorliegende Einschränkungen
7     IF keine Einschränkung THEN
8       setze die Komponente
9     ELSE
10      Auswahl(Komponente) rückgängig machen
11      BACKTRACKING(A, s + 1)
```

Damenproblem

Auf einem Schachbrett der Größe $n \cdot n$ sollen n Damen so positioniert werden, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Damen so aufzustellen, dass keine Damen eine andere schlägt.



- $n = 8$: 4 Milliarden Positionierungen
- Optimierte Suche: In jeder Zeile/Spalte nur eine Dame
- Reduziert Problem auf 40.000 Positionierungen (ohne Diagonale)

Abbildung 1: Beispielhafte Darstellung des Damenproblems

PLACE-QUEENS(Q,r) // Q Array von Damenpositionen, r Index der ersten leeren Zeile

```

1 IF r == n
2   return Q;
3 ELSE
4   FOR j = 0 TO n - 1 // Mögliche Positionierungen
5     legal = true;
6     FOR i = 0 TO r - 1 // Evaluation der mgl. Bedrohungen
7       IF (Q[i] == j) OR (Q[i] == j + r - i) OR (Q[i] == j - r + i)
8         legal = false;
9     IF legal == true
10      Q[r] = j;
11      PLACE-QUEENS(Q, r + 1)

```

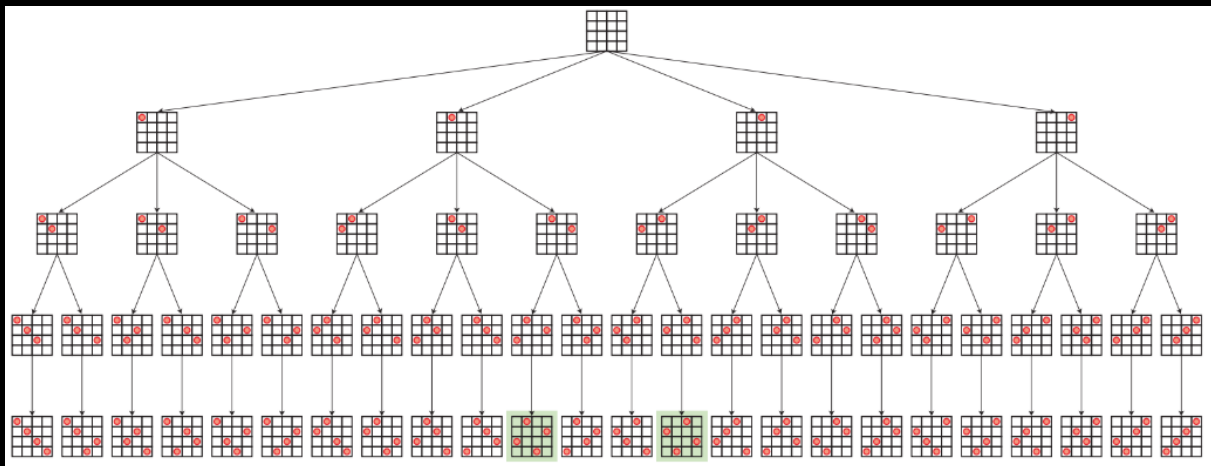


Abbildung 2: Mögliche Pfade von Place-Queens

1.4 Metaheuristiken

Optimierungsproblem

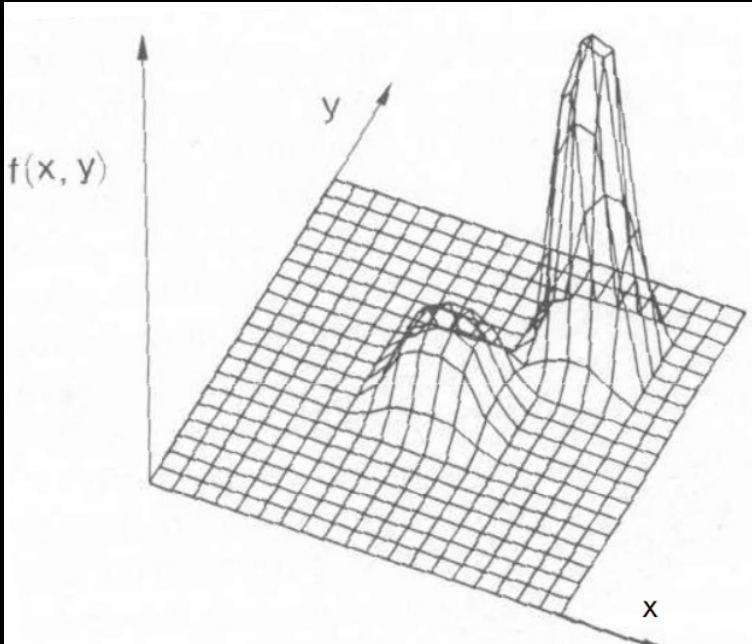


Abbildung 3: Beispiel Optimierungsproblem

- Lösungsstrategien:
 - Exakte Methode
 - Approximationsmethode
 - Heuristische Methode
 - Einschränkungen
 - Antwortzeit
 - Problemgröße
- ⇒ exkludieren oft exakte Methoden

Heuristik

- Technik um Suche zur Lösung zu führen
 - Metaheuristik (Higher-Level-Strategie)
 - soll z.B. Hängenbleiben bei lokalem Maxima verhindern
 - Leiten einer Suche
 1. Finde eine Lösung (z.B. mit Greedy-Algorithmus)
 2. Überprüfe die Qualität der Lösung
 3. Versuche eine bessere Lösung zu finden
 - Herausfinden in welcher Richtung bessere Lösung evtl. liegt
 - ggf. Wiederholung dieses Prozesses
 - Finden einer besseren Lösung
 - Modifikation der Lösung durch erlaubte Operationen
 - Dadurch erhalten wir Nachbarschaftslösungen
- ⇒ Suche nach besseren Lösungen in der Nachbarschaft

Rucksackproblem

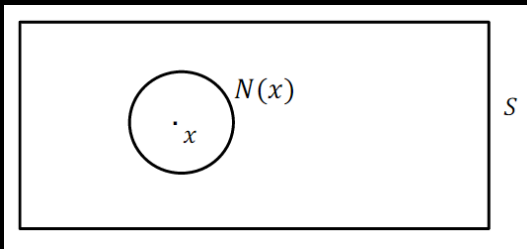
Ziel: Höchster Wert der Gegenstände im Rucksack

Beispiel:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	79	32	47	18	26	85	33	40	45
Größe	85	26	48	21	22	95	43	45	55

Abbildung 4: Beispielgegenstände für Rucksackproblem

- Rucksack hat eine Kapazität von 101, 9 verschiedene Gegenstände
- Beispiellösung: Gegenstand 3 + 5 (Wert 73, Größe 70)
- Nachbarschaftslösungen:
 - Gegenstände 2,3 und 5: Wert 105, Größe 96
 - Gegenstände 1,3 und 5: Wert 152, Größe 155 (Gewichtsüberschreitung problematisch)
 - Gegenstand 3: Wert 47, Größe 48



Nachbarschaft:

- Suchraum S kann sehr groß sein
- Einschränkung des Suchraums in der Nähe der Startlösung x
- Distanzfunktion $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$
- Nachbarschaft: $N(x) = \{y \in S : d(x, y) \leq \epsilon\}$

Zufällige Suche

Idee – Zufällige Suche

- Suche nach globalem Optimum
- Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
- Wahl einer neuen zufälligen Lösung in jeder Iteration
- Falls die neue Lösung besseren Wert liefert \Rightarrow als neue **aktuelle** Lösung setzen
- Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen auffindbar oder Zeit vorbei

Code:

RANDOM-SEARCH

```
1 best <- irgendeine initiale zufällige Lösung
2 REPEAT
3     S <- zufällige Lösung // von "best" unabhängig
4     IF (Quality(S) > Quality(best)) THEN
5         best <- S
6 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Zeit ist vorbei
7 return best
```

- Nachteile**
- Potentiell lange Laufzeit
 - Laufzeit abhängig von der initialen Konfiguration
- Vorteile**
- Algorithmus **kann** beim globalen Optimum terminieren

Bergsteigeralgorithmus

Idee – Bergsteigeralgorithmus

- Nutzung einer iterativen Verbesserungstechnik
- Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
- Auswahl einer neuen Lösung aus Nachbarschaft in jeder Iteration
- Falls diese besseren Wert liefert, überschreiben der **aktuellen** Lösung
- Falls nicht, Wahl einer anderen Lösung aus Nachbarschaft
- Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen auffindbar oder Zeit vorbei

Code

HILL-CLIMBER

```
1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
6     REPEAT
7         wähle R aus der Nachbarschaft von S
8         IF Quality(R) > Quality(S) THEN
9             S <- R
10    UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
11    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
12        best <- S
13    S <- irgendeine zufällige Lösung
14 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
15 return best
```

- Nachteile**
- Algorithmus terminiert in der Regel bei lokalem Optimum
 - Keine Auskunft, inwiefern sich lokale Lösung von Globaler unterscheidet
 - Optimum abhängig von Initialkonfiguration

- Vorteile**
- Einfach anzuwenden

Iterative lokale Suche

Idee – Iterative lokale Suche

- Suche nach anderen lokalen Optima bei Fund eines lokalen Optimas
- Lösungen nur in der Nähe der "Homebase"
- Entscheidung, ob neue oder alte Lösung
- Bergsteigeralgo zu Beginn, danach aber großen Sprung um anderes Optimum zu finden

Code

ITERATIVE-LOCAL-SEARCH

```
1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 H <- S // Wahl des Homebasepunktes
4 best <- S
5 REPEAT
6   time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
7   REPEAT
8     wähle R aus der Nachbarschaft von S
9     IF Quality(R) > Quality(S) THEN
10      S <- R
11   UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
12   IF Quality(S) > Quality(best) THEN
13     best <- S
14   H <- NewHomeBase(H,S)
15   S <- Perturb(H)
16 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
17 return best
```

- Perturb**
- ausreichend weiter Sprung (außerhalb der Nachbarschaft)
 - Aber nicht soweit, dass es eine zufällige Wahl ist

- NewHomeBase**
- wählt die neue Startlösung aus
 - Annahme neuer Lösungen nur, wenn die Qualität besser ist

Simulated Annealing

Idee – Simulated Annealing

- Wenn neue Lösung besser, dann wird diese immer gewählt
- Wenn neue Lösung schlechter, wird diese mit gewisser Wahrscheinlichkeit gewählt:
$$Pr(R, S, t) = e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$$
- Der Bruch ist negativ, da R schlechter ist als S

SIMULATED-ANNEALING

```
1 t <- Temperatur, initial eine hohe Zahl
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     wähle R aus der Nachbarschaft von S
6     IF Quality(R) > Quality(S) oder zufälliges
7          $Z \in [0, 1] < e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$  THEN
8         S <- R
9     dekrementiere t
10    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
11        best <- S
12 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Temperatur  $\leq 0$ 
13 return best
```

Tabu-Search

Idee – Tabu-Search

- Speichert alle bisherigen Lösungen und Liste und nimmt diese nicht nochmal
- Kann sich jedoch wieder von der optimalen Lösung entfernen
- Tabu List hat maximale Größe, falls voll, werden älteste Lösungen gelöscht

TABU-SEARCH

```
1 l <- maximale Größe der Tabu List
2 n <- Anzahl der zu betrachtenden Nachbarschaftslösungen
3 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
4 best <- S
5 L <- { } Tabu List der Länge l
6 Füge S in L ein
7 REPEAT
8     IF Length(L) > l THEN
9         Entferne ältestes Element aus L
10    wähle R aus Nachbarschaft von S
11    FOR n - 1 mal DO
12        Wähle W aus Nachbarschaft von S
13        IF W  $\notin$  L und (Quality(W) > Quality(R)) oder R  $\in$  L THEN
14            R <- W
15    IF R  $\notin$  L THEN
16        S <- R
17        Füge R in L ein
18    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
19        best <- S
20 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
21 return best
```

Populationsbasierte Methode

- Bisher: Immer nur Betrachtung einer einzigen Lösung
- Hier: Betrachtung einer Stichprobe von möglichen Lösungen
- Bei der Bewertung der Qualität spielt die Stichprobe die Hauptrolle
- z.B. Evolutionärer Algorithmus

Evolutionärer Algorithmus

Idee – Evolutionärer Algorithmus

- Algorithmus aus der Klasse der Evolutionary Computation
- generational Algorithmus: Aktualisierung der gesamten Stichprobe pro Iteration
- steady-state Algorithmus: Aktualisierung einzelner Kandidaten der Probe pro Iteration
- Resampling-Technik: Generierung neuer Stichproben basierend auf vorherigen Resultaten

Abstrakter Code (Allgemeiner Breed und Join):

ABSTRACT-EVOLUTIONARY-ALGORITHM

```
1 P <- generiere initiale Population
2 best <- □ // leere Menge
3 REPEAT
4     AssesFitness(P)
5     FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
6         IF best = □ oder  $\text{Fitness}(P_i) > \text{Fitness}(\text{best})$  THEN
7             best <-  $P_i$ 
8     P <- Join(P, Breed(P))
9 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
10 return best
```

Breed Erstellung neuer Stichprobe mithilfe Fitnessinformation

Join Fügt neue Population der Menge hinzu

Initialisierung der Population

- Initialisierung durch zufälliges Wählen der Elemente
- Beeinflussung der Zufälligkeit bei Vorteilen möglich
- Diversität der Population (alle Elemente in Population einzigartig)
- Falls neue zufällige Wahl eines Individuums
 - Entweder Vergleich mit allen bisherigen Individuen ($O(n^2)$)
 - Oder besser: Nutzen eines Hashtables zur Überprüfung auf Einzigartigkeit ($O(n)$)

Idee – Evolutionsstrategie

- Generiere Population zufällig
- Beurteile Qualität jedes Individuums
- Lösche alle bis auf die μ besten Individuen
- Generiere $\frac{\lambda}{\mu}$ -viele Nachfahren pro bestes Individuum
- Join Funktion: Die Nachfahren ersetzen die Individuen

Algorithmus der Evolutionsstrategie

(μ, λ) -EVOLUTION-STRATEGY

```
1   $\mu$  <- Anzahl der Eltern (initiale Lösung)
2   $\lambda$  <- Anzahl der Kinder
3   $P \leftarrow \{\}$ 
4  FOR  $\lambda$ -oft DO
5       $P \leftarrow \{\text{neues zufälliges Individuum}\}$ 
6  best <-  $\square$ 
7  REPEAT
8      FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
9          AssesFitness( $P_i$ )
10         IF best =  $\square$  oder Fitness( $P_i$ ) > Fitness(best) THEN
11             best <-  $P_i$ 
12     Q <- die  $\mu$  Individuen deren Fitness() am Größten ist
13      $P \leftarrow \{\}$ 
14     FOR jedes Element  $Q_j \in Q$  DO
15         FOR  $\frac{\lambda}{\mu}$ -oft DO
16              $P \leftarrow P \cup \{\text{MUTATE}(Q_j)\}$ 
17 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
18 return best
```


1.5 Amortisierte Analyse

Kosten von Operationen

- Bisher: Betrachtung von Algorithmen, die Folge von Operationen auf Datenstrukturen ausführen
- Abschätzung der Kosten von n Operationen im Worst-Case
- Dies liefert die obere Schranke für die Gesamtkosten der Operationenfolge
- Nun: **Amortisierte Analyse**: Genauere Abschätzung des Worst Case
- Voraussetzung: Nicht alle Operationen in der Operationenfolge gleich teuer
- z.B. eventuell abhängig vom aktuellen Zustand der Datenstruktur
- Amortisierte Analyse garantiert die mittlere Performanz jeder Operation im Worst-Case

Beispiel Binärzähler

Eigenschaften

- k -Bit Binärzähler hier als Array
- Codierung der Zahl als $x = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$
- Initialer Array für $x = 0$:

b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0

Inkrementieren eines Binärzählers

- Erhöhe x um 1
- Beispiel: $x = 3$
- INCREMENT kostet 3, da sich drei Bitpositionen ändern

b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	0	0	1	1
b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	0	1	0	0

Teuerste INCREMENT-Operation

- INCREMENT flippt $k - 1$ Bits von 1 zu 0 und 1 Bit von 0 auf 1
- Kosten nicht konstant, stark abhängig von Datenstruktur

b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	1	1	1	1
b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
1	0	0	0	0

Traditionelle Worst-Case Analyse

- Worst-Case Kosten von n INCREMENT-Operationen auf k -Bit Binärzähler
- Anfangswert $x = 0$
- Schlimmster Kostenfall: INCREMENT-Operation hat k Bitflips
- n -mal inkrementieren sorgt für Kosten: $T(n) \leq n \cdot k \in O(kn)$

Aggregat Methode - Beispiel Binärzähler

Eigenschaften:

- Methode für Amortisierte Analyse
- Sequenz von n -Operationen kostet Zeit $T(n)$
- Durchschnittliche Kosten pro Operation $\frac{T(n)}{n}$
- Ziel: $T(n)$ genau berechnen, **ohne** jedes Mal Worst-Case anzunehmen
- Ansatz: Aufsummation der **tatsächlich** anfallenden Kosten aller Operationen

Durchführung:

b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	2	3
0	0	0	1	1	1	4
0	0	1	0	0	3	7
0	0	1	0	1	1	8

b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten
0	0	1	0	1		8
0	0	1	1	0	2	10
0	0	1	1	1	1	11
0	1	0	0	0	4	15
0	1	0	0	1	1	16
0	1	0	1	0	2	18

b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten
0	1	0	1	0		18
0	1	0	1	1	1	19
0	1	1	0	0	3	22
0	1	1	0	1	1	23
0	1	1	1	0	2	25
0	1	1	1	1	1	26

- Bisher noch kein Worst-Case
- Nächste Operation hätte max. Kosten
- Jede 2. Operation minimale Kosten
- In jeder Operation ändert sich b_0
- In jeder 2. ändert sich b_1 etc

Genauere Kostenanalyse:

- Nun in der Lage $T(n)$ genau auszurechnen
- Bei n Operationen ändert sich das Bit b_i genau $\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$ -mal
- Bits b_i mit $i > \log_2 n$ ändern sich nie
- Über alle k Bits aufsummieren liefert:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor = n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2n \in O(n)$$

- Obere Schranke: $T(n) \leq 2n$
- Kosten jeder INCREMENT-Operation im Durchschnitt: $\frac{2n}{n} = 2 \in O(1)$

Account Methode - Beispiel Binärzähler

Eigenschaften:

- Besteuerung einiger Operationen, so dass sie Kosten anderer Operationen mittragen
- Zuweisung von höheren Kosten (Amortisierte Kosten), als ihre tatsächlichen Kosten sind
- **Guthaben:** Differenz zwischen amortisierten und tatsächlichen Kosten
- Nutzung dieses Guthabens für Operationen bei denen amortisiert < tatsächlich gilt
- Guthaben darf nicht negativ werden:

Summe amortisierte Kosten > Summe tatsächliche Kosten

Wahl der Amortisierten Kosten - Binärzähler:

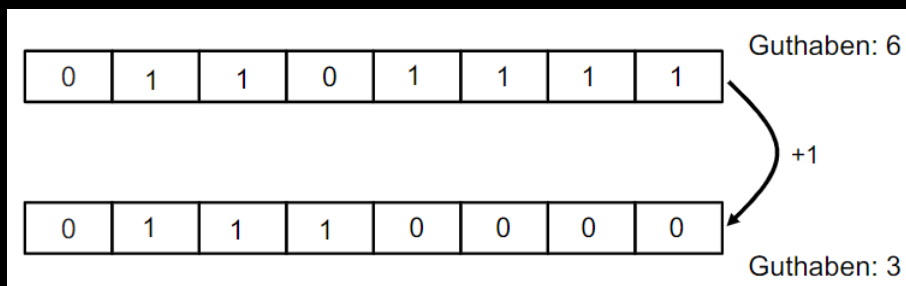
- Setzen eines Bits von 0 → 1 zahlt 2 Einheiten ein / Bezeichnung f_i
- Setzen eines Bits von 1 → 0 zahlt 0 Einheiten ein / Bezeichnung e_i
- Tatsächliche Kosten t_i : Anzahl der Bitflips bei der i -ten INCREMENT-Operation

$$t_i = e_i + f_i$$

- Amortisierte Kosten betragen: $a_i = 0 \cdot e_i + 2 \cdot f_i$

Kostenbeispiel:

- Jede Bitflip Operation kostet zusätzlich 1 Einheit
- Setzen Bit 0 → 1: Zahlt 2 ein, kostet aber 1 → +1 Guthaben
- Setzen Bit 1 → 0: Zahlt 0 ein, kostet aber 1 → -1 Guthaben



Obere Schranken der Kosten:

- Guthaben auf dem Konto entspricht der Anzahl der auf 1 gesetzten Bits
- Kosten: $T(n) \sum_{i=1}^n t_i \leq v \sum_{i=1}^n a_i$, für ein konstantes v
- Nun Abschätzung dieser Formel zum Erhalten einer oberen Schranke
- Beobachtung: Bei jeder INCREMENT höchstens ein neues Bit von 0 auf 1
- Für alle i gilt damit $f_i \leq 1$
- Amortisierte Kosten jeder Operation höchstens $2 \cdot f_i \leq 2$
- Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$

Potential-Methode - Beispiel Binärzähler

Eigenschaften:

- Betrachtung welchen Einfluss die Operationen auf die Datenstruktur haben
- Potentialfunktion $\phi(i)$: Hängt vom aktuellen Zustand der Datenstruktur nach i -ter Operation ab
- Ausgangspotential sollte vor jeglicher Operation nicht negativ sein: $\phi(0) \geq 0$

Amortisierte Kosten:

- Amortisierte Kosten der i -ten Operation: (Summe tatsächliche Kosten + Potentialänderung)

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1)$$

- Summe der amortisierten Kosten:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (t_i + \phi(i) - \phi(i-1)) = \sum_{i=1}^n t_i + \phi(n) - \phi(0)$$

- Wenn für jedes i gilt $\phi(i) \geq \phi(0)$:

Summe der amor. Kosten ist gültige obere Schranke an Summe der tatsächlichen Kosten

Potential-Methode anhand des Binärzählers:

- $\phi(i)$: Anzahl der 1-en im Array nach i -ter **INCREMENT**-Operation

→ $\phi(i)$ nie negativ und $\phi(0) = 0$

- Angenommen i -te Operation setzt e_i Bits von 1 auf 0, dann hat diese Operation Kosten $t_i \leq e_i + 1$
- Neues Potential: $\phi(i) \leq \phi(i-1) - e_i + 1 \Leftrightarrow \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i$
- Amortisierte Kosten der i -ten **INCREMENT**-Operation:

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i + 1 + 1 - e_i = 2$$

- Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$