1 Advanced Designs

1.1 Dynamische Programmierung

- **Anwendung**

  Anwendung, wenn sich Teilprobleme überlappen

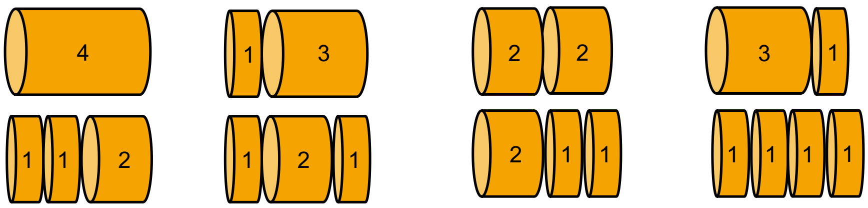
  1. Wir charakterisieren die Struktur einer optimalen Lösung
  2. Wir definieren den Wert einer optimalen Lösung rekursiv
  3. Wir berechnen den Wert einer optimalen Lösung (meist bottom-up Ansatz)
  4. Wir konstruieren eine zugehörige optimale Lösung aus berechneten Daten

- **Stabzerlegungsproblem**

  Ausgangsproblem: Stangen der Länge n cm sollen so zerschnitten werden, dass der Erlös r_n maximal ist, indem die Stange in kleinere Stäbe geschnitten wird.

Länge i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis p_i	0	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

  Beispiel: Gesamtstange hat Länge 4. Welchen Erlös kann man max. erhalten?



  Optimaler Erlös: zwei 2cm lange Stücke $(5 + 5 = 10)$

  – Aufteilung der Stange:
    * Stange mit Länge n kann auf 2^{n-1} Weisen zerlegt werden
    * Position i: Distanz vom linken Ende der Stange
    * Aufteilung in k Teilstäbe $(1 \leq k \leq n)$
    * optimale Zerlegung: $n = i_1 + i_2 + ... + i_k$
    * maximaler Erlös: $r_n = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_k}$
    * z.B.: $r_4 = 10$ (siehe oben)

– Rekursive Top-Down Implementierung:

CUT-ROD(p,n) // p Preis-Array, n Stangenlänge

```
IF n == 0
    return 0;
q = −∞;
FOR i = 1 TO n  // nicht Start bei 0, sonst kein Rekursionsschritt
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n - i));
return q;
```

– Stabzerlegung via Dynamischer Programmierung:

  * Ziel:
    Mittels dynamischer Programmierung wollen wir `CUT-ROD` in einen effizienten Algorithmus verwandeln.
  * Bemerkung:
    Naiver rekursiver Ansatz ist **ineffizient**, da dieser immer wieder diesselben Teilprobleme löst.
  * Ansatz:
    Jedes Teilproblem nur einmal lösen. Falls die Lösung eines Teilproblems nochmal benötigt wird, schlagen wir diese nach.
  * Dynamische Programmierung wird zusätzlichen Speicherplatz benutzen um Laufzeit einzusparen.
  * Reduktion von exponentieller auf polynomielle Laufzeit.

– Rekursiver Top-Down-Ansatz mit Memoisation:

  * Idee: Speicherung der Lösungen der Teilprobleme
  * Laufzeit: $\Theta(n^2)$

MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)

```
Let r[0...] be new array
FOR i = 0 TO n
    r[i] = −∞
return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r) // r new Array

```
IF r[n] ≥ 0                          // Abfrage ob vorhanden
    return r[n]
IF n == 0
    q = 0
ELSE
    q = −∞
    FOR i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n - i, r))
r[n] = q                              // Abspeichern
return q
```

- Bottom-Up Ansatz:
  - Laufzeit: $\Theta(n^2)$
  - Sortieren der Teilprobleme nach ihrer Größe und lösen in dieser Reihenfolge
  - Alle Teilprobleme kleiner als das momentane Problem sind bereits gelöst

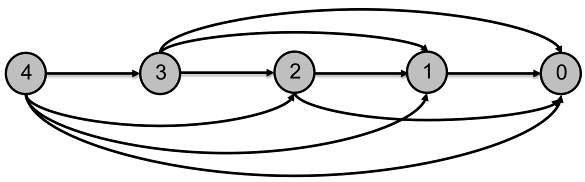
BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```
Let r[0...n] be a new array
r[0] = 0
FOR j = 1 TO n
    q = −∞
    FOR i = 1 TO j
        q = max(q, p[i] + r[j - i])
    r[j] = q
return r[n]
```

EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```
Let r[0...n] and s[0...n] be  new arrays
r[0] = 0, s[0] = 0
FOR j = 1 TO n
    q = −∞
    FOR i = 1 TO j
        IF q < p[i] + r[j-i]
            q = p[i] + r[j - i]
            s[j] = i
    r[j] = q
return r and s
```

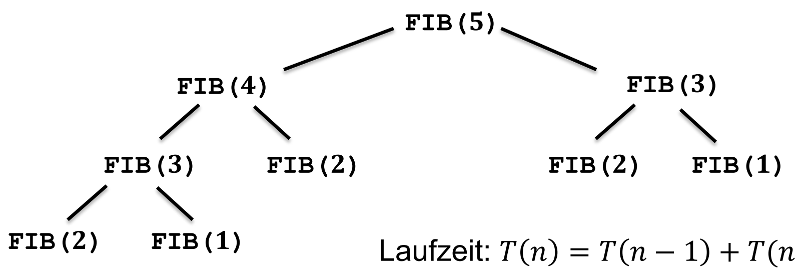
  - Teilproblemgraph ($i \to j$ bedeutet, dass Berechnung von r_i den Wert r_j benutzt)



- **Fibonacci-Zahlen**
  - $F_1 = F_2 = 1$
  - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
  - Naiver rekursiver Algorithmus:

FIB(n)

```
IF n ≤ 2
    f = 1;
ELSE
    f = FIB(n-1) + FIB(n-2);
return f;
```



Laufzeit: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$
$\implies \Theta(2^n)$

Gleiche Teilprobleme werden wieder mehrmals gelöst

- Rekursiver Algorithmus mit Memoisation
  * Wieder Abspeichern von Teilproblemen um Laufzeit einzusparen
  * Laufzeit: $\Theta(n)$

MEMOIZED-FIB(n)

```
Let m[0...n-1] be a new array
FOR i = 0 TO n - 1
    m[i] = 0
return MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)
```

MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)

```
IF m[n-1] != 0
    return m[n-1];      // Auslesen von gespeicherten Werten
IF n ≤ 2
    f = 1;
ELSE
    f = MEMOIZED-FIB-AUX(n-1, m) + MEMOIZED-FIB-AUX(n-2, m);
m[n-1] = f;
return f;
```

- Bottom-Up Algorithmus
  * Hier wieder Berechnen aller Teilprobleme von unten beginnend

BOTTOM-UP-FIB(n)

```
Let m[0...n] be a new array
FOR i = 1 TO n
    IF i ≤ 2
        f = 1;
    ELSE
        f = m[i-1] + m[i-2];
    m[i] = f;
return m[n];
```

1.2 Greedy-Algorithmus

- **Idee**
  - Trifft stets die Entscheidung, die in diesem Moment am besten erscheint
  - Trifft **lokale** optimale Entscheidung (evtl. nicht global die Beste)
- **Aktivitäten-Auswahl-Problem**
  - Definition
    - 11 anstehende Aktivitäten $S = \{a_1, ..., a_{11}\}$
    - Startzeit s_i und Endzeit f_i, wobei $0 \leq s_i < f_i < \infty$
    - Aktivität a_i findet im halboffenen Zeitintervall $[s_i, f_i)$ statt
    - Zwei Aktivititäten sind kompatibel, wenn sich deren Zeitintervalle nicht überlappen

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

Aktivitäten: $\{a_3, a_9, a_{11}\}$
Aktivitäten: $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$
Aktivitäten: $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$

  - Ansatz mittels dynamischer Programmierung
    - Menge von Aktivitäten, die starten nachdem a_i endet und enden, bevor a_j startet
      $S_{ij} = \{a \in S, a = (s, f) : s \geq f_i, f < s_j\}$
    - Definiere maximale Menge A_{ij} von paarweise kompatiblen Aktivitäten in S_{ij}.
      $c[i, j] = |A_{ij}|$
    - Optimale Lösung für Menge S_{ij} die Aktivitäten a_k enthält:
      $c[i, j] = max_{a_k \in S_{ij}}\{c[i, k] + c[k, j] + 1\}$ (0, falls $S_{ij} = \emptyset$)
  - Greedy-Wahl
    - lokal die beste Wahl
    - Auswahl der Aktivität mit geringster Endzeit (möglichst viele freie Ressourcen)
    - Also hier Teilprobleme, die nach a_1 starten
    - $S_k = \{a_i \in S : s_i \geq f_k\}$: Menge an Aktivitäten, die starten, nachdem a_k endet
    - Optimale-Teilstruktur-Eigenschaft
      Wenn a_1 in optimaler Lösung enthalten ist, dann besteht optimale Lösung zu ursprünglichem Problem aus Aktivität a_1 und allen Aktivitäten zur einer optimalen Lösung des Teilproblems S_1

- Rekursiver Greedy-Algorithmus
  * Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert
  * Laufzeit: $\Theta(n)$

RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)

```
// s Anfangszeitenarray, f Endzeitenarray,
// k Index von Teilproblem, n Größe Anfangsproblem
m = k + 1;
WHILE m ≤ n and s[m] < f[k]  // Suche nach erster Kompatibilität
    m = m + 1;
IF m ≤ n
    // Ausgabe des Elements und Berechnung weiterer Aktivitäten
    return {a_m} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,m,n)
ELSE
    return ∅
```

- Iterativer Greedy-Algorithmus
  * Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert
  * Laufzeit: $\Theta(n)$

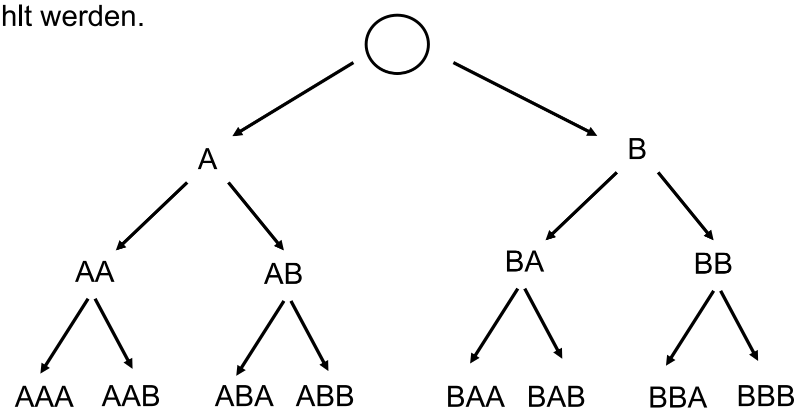
GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)

```
n = s.length;
A = {a_1};
k = 1;            // Index des zuletzt hinzugefügten Elements in A
FOR m = 2 TO n
    IF s[m] ≥ f[k]        // Findet zuerst endende Aktivität in Menge
        A = A ∪ {a_m};   // Fügt diese hinzu, falls kompatibel
        k = m;
return A;
```

1.3 Backtracking

- **Suchbaum - Baum der Möglichkeiten**
  - Darstellung aller für ein Problem bestehenden Möglichkeiten

Problem: Aus den Buchstaben A, B soll dreimal nacheinander einer gewählt werden.



Der Suchraum ist die Menge aller für ein Problem bestehende Möglichkeiten.

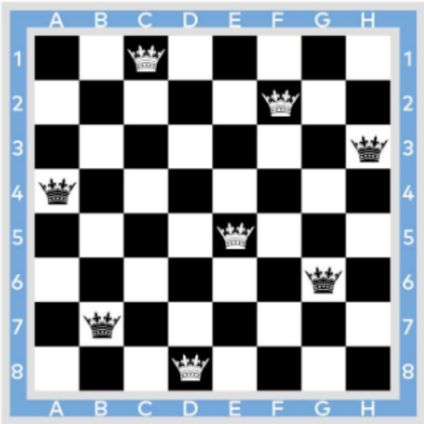
- **Backtracking - Idee**
  - Lösung finden via Trial and error
  - Schrittweises Herantasten an die Gesamtlösung
  - Falls Teillösung inkorrekt → Gehe einen Schritt zurück und probiere eine andere Möglichkeit
  - Voraussetzung:
    * Lösung setzt sich aus Komponenten zusammen (Sudoku, Labyrinth,..)
    * Mehrere Wahlmöglichkeiten für jede Komponente
    * Teillösung kann auf Korrektheit getestet werden
- **Allgemeiner Backtracking-Algorithmus**

BACKTRACKING(A, s)

```
IF alle Komponenten richtig gesetzt
    return true;
ELSE
    WHILE auf aktueller Stufe gibt es Wahlmöglichkeiten
        wähle einen neuen Teillösungsschritt
        Teste Lösungsschritt gegen vorliegende Einschränkungen
        IF keine Einschränkung THEN
            setze die Komponente
        ELSE
            Auswahl(Komponente) rückgängig machen
        BACKTRACKING(A, s + 1)
```

- **Damenproblem**

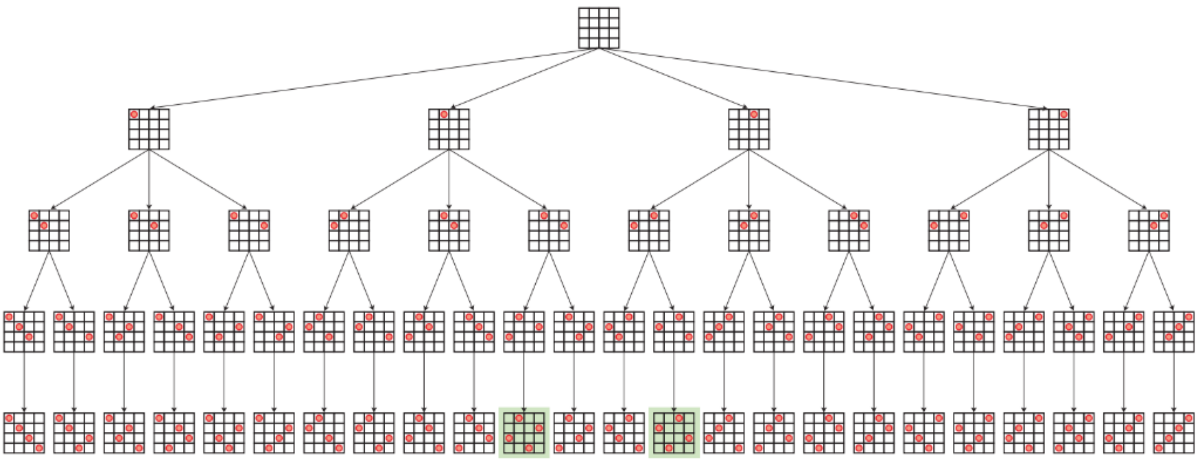
  Auf einem Schachbrett der Größe $n \cdot n$ sollen n Damen so positioniert werden, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Damen so aufzustellen, dass keine Damen eine andere schlägt.



  * $n = 8$: 4 Milliarden Positionierungen
  * Optimierte Suche: In jeder Zeile/Spalte nur eine Dame
  * Reduziert Problem auf 40.000 Positionierungen (ohne Diagonale)

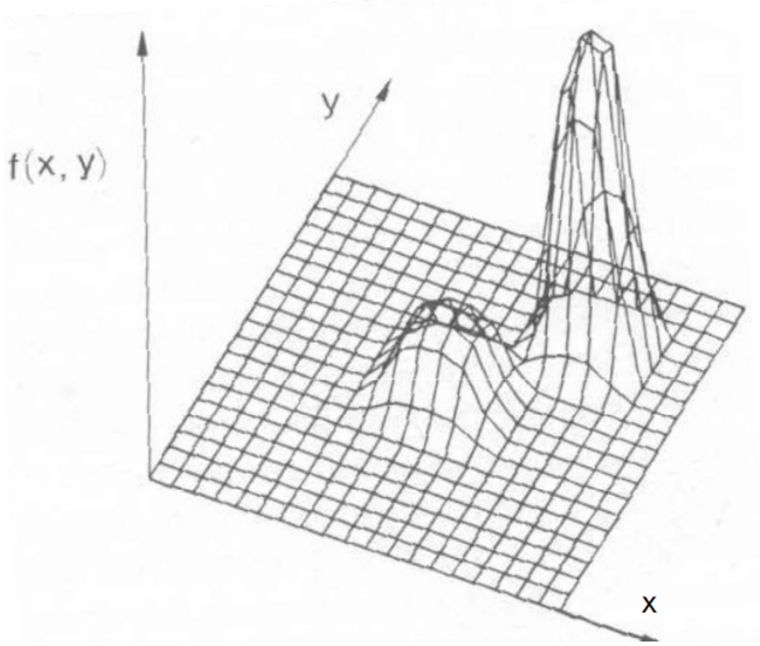
PLACE-QUEENS(Q,r) // Q Array von Damenpositionen, r Index der ersten leeren Zeile

```
IF r == n
    return Q;
ELSE
    FOR j = 0 TO n - 1 // Mögliche Positionierungen
        legal = true;
        FOR i = 0 TO r - 1  // Evaluation der mgl. Bedrohungen
            IF (Q[i] == j) OR (Q[i == j + r - i]) OR (Q[i] == j - r + i)
                legal = false;
        IF legal == true
            Q[r] = j;
            PLACE-QUEENS(Q, r + 1)
```



1.4 Metaheuristiken

- **Optimierungsproblem**



  * Lösungsstrategien:
    - Exakte Methode
    - Approximationsmethode
    - Heuristische Methode
  * Einschränkungen
    - Antwortzeit
    - Problemgröße

  ⇒ exkludieren oft exakte Methoden

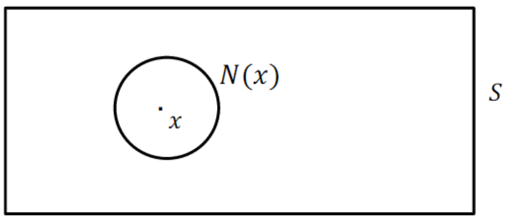
- **Heuristik**
  - Technik um Suche zur Lösung zu führen
  - Metaheuristik (Higher-Level-Strategie)
    * soll z.B. Hängenbleiben bei lokalem Maxima verhindern
  - Leiten einer Suche
    (a) Finde eine Lösung (z.B. mit Greedy-Algorithmus)
    (b) Überprüfe die Qualität der Lösung
    (c) Versuche eine bessere Lösung zu finden
      * Herausfinden in welcher Richtung bessere Lösung evtl. liegt
      * ggf. Wiederholung dieses Prozesses
  - Finden einer besseren Lösung
    * Modifikation der Lösung durch erlaubte Operationen
    * Dadurch erhalten wir Nachbarschaftslösungen

    ⇒ Suche nach besseren Lösungen in der Nachbarschaft

- **Rucksackproblem**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	79	32	47	18	26	85	33	40	45
Größe	85	26	48	21	22	95	43	45	55

  - Rucksack hat eine Kapazität von 101, 9 verschiedene Gegenstände
  - Ziel: Höchster Wert der Gegenstände im Rucksack
  - Beispiellösung: Gegenstand 3 + 5 (Wert 73, Größe 70)
  - Nachbarschaftslösungen:
    * Gegenstände 2,3 und 5: Wert 105, Größe 96
    * Gegenstände 1,3 und 5: Wert 152, Größe 155 (Gewichtsüberschreitung problematisch)
    * Gegenstand 3: Wert 47, Größe 48



Nachbarschaft:

* Suchraum S kann sehr groß sein
* Einschränkung des Suchraums in der Nähe der Startlösung x
* Distanzfunktion $d : SxS \to \mathbb{R}$
* Nachbarschaft: $N(x) = \{y \in S : d(x, y) \leq \epsilon\}$

- **Zufällige Suche**
  - Idee und Ablauf
    * Suche nach globalem Optimum
    * Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
    * Wahl einer neuen zufälligen Lösung in jeder Iteration
    * Falls die neue Lösung besseren Wert liefert $\Rightarrow$ als neue **aktuelle** Lösung setzen
    * Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen auffindbar oder Zeit vorbei
  - Code

RANDOM-SEARCH

```
best <- irgendeine initiale zufällige Lösung
REPEAT
    S <- zufällige Lösung // von "best" unabhängig
    IF (Quality(S) > Quality(best)) THEN
        best <- S
UNTIL best ist die ideale Lösung oder Zeit ist vorbei
return best
```

  - Nachteile
    * Potentiell lange Laufzeit
    * Laufzeit abhängig von der initialen Konfiguration
  - Vorteile
    * Algorithmus **kann** beim globalen Optimum terminieren

- **Bergsteigeralgorithmus**
  - Idee und Ablauf
    - Nutzung einer iterativen Verbesserungstechnik
    - Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
    - Auswahl einer neuen Lösung aus Nachbarschaft in jeder Iteration
    - Falls diese besseren Wert liefert, überschreiben der **aktuellen** Lösung
    - Falls nicht, Wahl einer anderen Lösung aus Nachbarschaft
    - Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen auffindbar oder Zeit vorbei
  - Code

HILL-CLIMBER

```
T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
best <- S
REPEAT
    time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
    REPEAT
        wähle R aus der Nachbarschaft von S
        IF Quality(R) > Quality(S) THEN
            S <- R
    UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
        best <- S
    S <- irgendeine zufällige Lösung
UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
return best
```

- Nachteile
  * Algorithmus terminiert in der Regel bei lokalem Optimum
  * Keine Auskunft, inwiefern sich lokale Lösung von Globaler unterscheidet
  * Optimum abhängig von Initialkonfiguration
- Vorteile
  * Einfach anzuwenden

- **Iterative lokale Suche**
  - Idee und Ablauf
    * Suche nach anderen lokalen Optima bei Fund eines lokalen Optimas
    * Lösungen nur in der Nähe der "Homebase"
    * Entscheidung, ob neue oder alte Lösung
    * Bergsteigeralgo zu Beginn, danach aber großen Sprung um anderes Optimum zu finden
  - Code

ITERATIVE-LOCAL-SEARCH

```
T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
H <- S      // Wahl des Homebasepunktes
best <- S
REPEAT
    time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
    REPEAT
        wähle R aus der Nachbarschaft von S
        IF Quality(R) > Quality(S) THEN
            S <- R
    UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
        best <- S
    H <- NewHomeBase(H,S)
    S <- Perturb(H)
UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
return best
```

    * Perturb:
      · ausreichend weiter Sprung (außerhalb der Nachbarschaft)
      · Aber nicht soweit, dass es eine zufällige Wahl ist
    * NewHomeBase:
      · wählt die neue Startlösung aus
      · Annahme neuer Lösungen nur, wenn die Qualität besser ist

- **Simulated Annealing**
  - Idee und Ablauf
    - Wenn neue Lösung besser, dann wird diese immer gewählt
    - Wenn neue Lösung schlechter, wird diese mit gewisser Wahrscheinlichkeit gewählt: $Pr(R, S, t) = e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$
    - Der Bruch ist negativ, da R schlechter ist als S
  - Code

SIMULATED-ANNEALING

```
t <- Temperatur, initial eine hohe Zahl
S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
best <- S
REPEAT
    wähle R aus der Nachbarschaft von S
    IF Quality(R) > Quality(S) oder zufälliges
                Z ∈ [0,1] < e^((Quality(R)−Quality(S))/t) THEN
            S <- R
    dekrementiere t
    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
        best <- S
UNTIL best ist die ideale Lösung oder Temperatur ≤ 0
return best
```

  - Tabu-Search
    - Idee und Ablauf
      - Speichert alle bisherigen Lösungen und Liste und nimmt diese nicht nochmal
      - Kann sich jedoch wieder von der optimalen Lösung entfernen
      - Tabu List hat maximale Größe, falls voll, werden älteste Lösungen gelöscht
    - Code

TABU-SEARCH

```
l <- maximale Grö\ss{}e der Tabu List
n <- Anzahl der zu betrachtenden Nachbarschaftslösungen
S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
best <- S
L <- { } Tabu List der Länge l
Füge S in L ein
REPEAT
    IF Length(L) > l THEN
        Entferne ältestes Element aus L
    wähle R aus Nachbarschaft von S
    FOR n - 1 mal DO
        Wähle W aus Nachbarschaft von S
        IF W ∉ L und (Quality(W) > Quality(R)) oder R ∈ L) THEN
            R <- W
    IF R ∉ L THEN
        S <- R
        Füge R in L ein
    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
        best <- S
UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
return best
```

- **Populationsbasierte Methode**
  - Bisher: Immer nur Betrachtung einer einzigen Lösung
  - Hier: Betrachtung einer Stichprobe von möglichen Lösungen
  - Bei der Bewertung der Qualität spielt die Stichprobe die Hauptrolle
  - z.B. Evolutionärer Algorithmus
- **Evolutionärer Algorithmus**
  - Idee und Ablauf
    - Algorithmus aus der Klasse der Evolutionary Computation
    - generational Algorithmus: Aktualisierung der gesamten Stichprobe pro Iteration
    - steady-state Algorithmus: Aktualisierung einzelner Kandidaten der Probe pro Iteration
    - Resampling-Technik: Generierung neuer Strichproben basierend auf vorherigen Resultaten
  - Abstrakter Code (Allgemeiner Breed und Join)

ABSTRACT-EVOLUTIONARY-ALGORITHM

```
P <- generiere initiale Population
best <- ⊡ // leere Menge
REPEAT
    AssesFitness(P)
    FOR jedes individuelle P_i ∈ P DO
        IF best = ⊡ oder Fitness(P_i) > Fitness(best) THEN
            best <- P_i
    P <- Join(P, Breed(P))
UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
return best
```

    - Breed: Erstellung neuer Stichprobe mithilfe Fitnessinformation
    - Join: Fügt neue Population der Menge hinzu
  - Initialisierung der Population
    - Initialisierung durch zufälliges Wählen der Elemente
    - Beeinflussung der Zufälligkeit bei Vorteilen möglich
    - Diversität der Population (alle Elemente in Population einzigartig)
    - Falls neue zufällige Wahl eines Individuums
      - Entweder Vergleich mit allen bisherigen Individuen ($O(n^2)$)
      - Oder besser: Nutzen eines Hashtables zur Überprüfung auf Einzigartigkeit ($O(n)$)

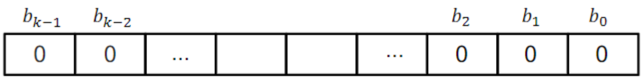
- Evolutionsstrategien - Ideen
  * Generiere Population zufällig
  * Beurteile Qualität jedes Individuums
  * Lösche alle bis auf die μ besten Individuen
  * Generie $\frac{\lambda}{\mu}$-viele Nachfahren pro bestes Individuum
  * Join Funktion: Die Nachfahren ersetzen die Individuen
- Algorithmus der Evolutionsstrategie

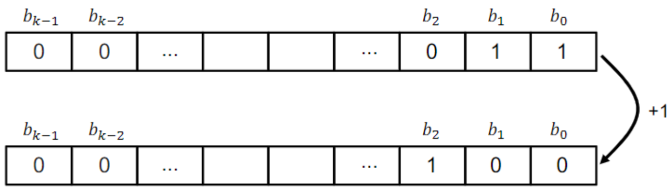
(μ, λ)-EVOLUTION-STRATEGY

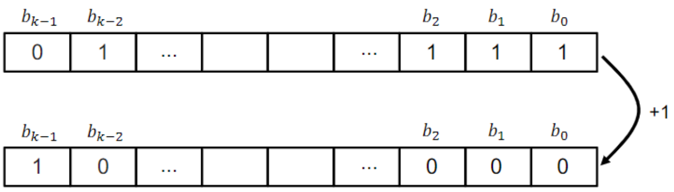
```
μ <- Anzahl der Eltern (initiale Lösung)
λ <- Anzahl der Kinder
P <- {}
FOR λ-oft DO
    P <- {neues zufälliges Individuum}
best <- ⊡
REPEAT
    FOR jedes individuelle P_i ∈ P DO
        AssesFitness(P_i)
        IF best = ⊡ oder Fitness(P_i) > Fitness(best) THEN
            best <- P_i
    Q <- die μ Individueen deren Fitness() am Grö\ss{}ten ist
    P <- {}
    FOR jedes Element Q_j ∈ Q DO
        FOR λ/μ-oft DO
            P <- P ∪ {MUTATE(Q_j)}
UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
return best
```

1.5 Amortisierte Analyse

- **Kosten von Operationen**
  - Bisher: Betrachtung von Algorithmen, die Folge von Operationen auf Datenstrukturen ausführen
  - Abschätzung der Kosten von n Operationen im Worst-Case
  - Dies liefert die obere Schranke für die Gesamtkosten der Operationenfolge
  - Nun: **Amortisierte Analyse**: Genauere Abschätzung des Worst Case
  - Voraussetzung: Nicht alle Operationen in der Operationenfolge gleich teuer
  - z.B. eventuell abhängig vom aktuellen Zustand der Datenstruktur
  - Amortisierte Analyse garantiert die mittlere Performanz jeder Operation im Worst-Case
- **Beispiel Binärzähler**
  - Eigenschaften
    - k-Bit Binärzähler hier als Array
    - Codierung der Zahl als $x = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$
    - Initialer Array für $x = 0$:



  - Inkrementieren eines Binärzählers
    - Erhöhe x um 1
    - Beispiel: $x = 3$
    - `INCREMENT` kostet 3, da sich drei Bitpositionen ändern
    - 

  - Teuerste INCREMENT-Operation
    - `INCREMENT` flippt $k-1$ Bits von 1 zu 0 und 1 Bit von 0 auf 1
    - Kosten nicht konstant, stark abhängig von Datenstruktur
    - 

  - Traditionelle Worst-Case Analyse
    - Worst-Case Kosten von n `INCREMENT`-Operationen auf k-Bit Binärzähler
    - Anfangswert $x = 0$
    - Schlimmster Kostenfall: $INCREMENT$-Operation hat k Bitflips
    - n-mal inkrementieren sorgt für Kosten: $T(n) \leq n \cdot k \in O(kn)$

- **Aggregat Methode - Beispiel Binärzähler**
  - Eigenschaften
    - ∗ Methode für Amortisierte Analyse
    - ∗ Sequenz von n-Operationen kostet Zeit $T(n)$
    - ∗ Durchschnittliche Kosten pro Operation $\frac{T(n)}{n}$
    - ∗ Ziel: $T(n)$ genau berechnen, **ohne** jedes Mal Worst-Case anzunehmen
    - ∗ Ansatz: Aufsummation der **tatsächlich** anfallenden Kosten aller Operationen
  - Durchführung

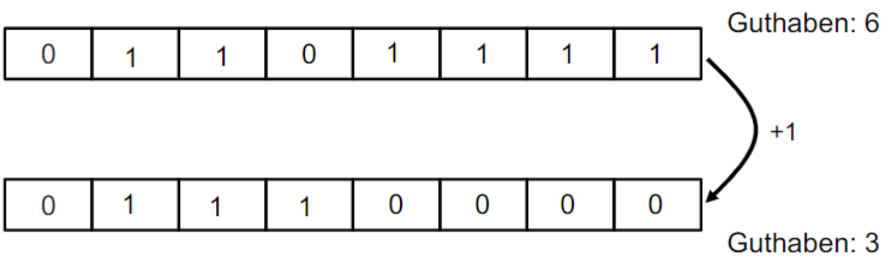
b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	2	3
0	0	0	1	1	1	4
0	0	1	0	0	3	7
0	0	1	0	1	1	8

b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten
0	0	1	0	1		8
0	0	1	1	0	2	10
0	0	1	1	1	1	11
0	1	0	0	0	4	15
0	1	0	0	1	1	16
0	1	0	1	0	2	18

b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten
0	1	0	1	0		18
0	1	0	1	1	1	19
0	1	1	0	0	3	22
0	1	1	0	1	1	23
0	1	1	1	0	2	25
0	1	1	1	1	1	26

  - · Bisher noch kein Worst-Case
  - · Nächste Operation hätte max. Kosten
  - · Jede 2. Operation minimale Kosten
  - · In jeder Operation ändert sich b_0
  - · In jeder 2. ändert sich b_1 etc
  - Genauere Kostenanalyse
    - ∗ Nun in der Lage $T(n)$ genau auszurechnen
    - ∗ Bei n Operationen ändert sich das Bit b_i genau $\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$-mal
    - ∗ Bits b_i mit $i > log_2\ n$ ändern sich nie
    - ∗ Über alle k Bits aufsummieren liefert:
      $T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor = n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2n \in O(n)$
    - ∗ Obere Schranke: $T(n) \leq 2n$
    - ∗ Kosten jeder `INCREMENT`-Operation im Durchschnitt: $\frac{2n}{n} = 2 \in O(1)$

- **Account Methode - Beispiel Binärzähler**
  - Eigenschaften
    - Besteuerung einiger Operationen, so dass sie Kosten anderer Operationen mittragen
    - Zuweisung von höherern Kosten (Amortisierte Kosten), als ihre tatsächlichen Kosten sind
    - **Guthaben**: Differenz zwischen amortisierten und tatsächlichen Kosten
    - Nutzung dieses Guthabens für Operationen bei denen amortisiert $<$ tatsächlich gilt
    - Guthaben darf nicht negativ werden:
      Summe amortisierte Kosten $>$ Summe tatsächliche Kosten
  - Wahl der Amortisierten Kosten - Binärzähler
    - Setzen eines Bits von $0 \rightarrow 1$ zahlt 2 Einheiten ein / Bezeichnung f_i
    - Setzen eines Bits von $1 \rightarrow 0$ zahlt 0 Einheiten ein / Bezeichnung e_i
    - Tatsächliche Kosten t_i: Anzahl der Bitflips bei der $i-ten$ `INCREMENT`-Operation
      $t_i = e_i + f_i$
    - Amortisierte Kosten betragen: $a_i = 0 \cdot e_i + 2 \cdot f_i$
  - Kostenbeispiel
    - Jede Bitflip Operation kostet zusätzlich 1 Einheit
    - Setzen Bit $0 \rightarrow 1$: Zahlt 2 ein, kostet aber $1 \rightarrow +1$ Guthaben
    - Setzen Bit $1 \rightarrow 0$: Zahlt 0 ein, kostet aber $1 \rightarrow$ -1 Guthaben



  - Obere Schranken der Kosten
    - Guthaben auf dem Konto entspricht der Anzahl der auf 1 gesetzten Bits
    - Kosten: $T(n) \sum_{i=1}^{n} t_i \leq v \sum_{i=1}^{n} a_i$, für ein konstantes v
    - Nun Abschätzung dieser Formel zum Erhalten einer oberen Schranke
    - Beobachtung: Bei jeder `INCREMENT` höchstens ein neues Bit von 0 auf 1
    - Für alle i gilt damit $f_i \leq 1$
    - Amortisierte Kosten jeder Operation höchstens $2 \cdot f_i \leq 2$
    - Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^{n} t_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 2n \in O(n)$

- **Potential-Methode - Beispiel Binärzähler**
  - Eigenschaften
    - Betrachtung welchen Einfluss die Operationen auf die Datenstruktur haben
    - Potentialfunktion $\phi(i)$: Hängt vom aktuellen Zustand der Datenstruktur nach i-ter Operation ab
    - Ausgangspotential sollte vor jeglicher Operation nicht negativ sein: $\phi(0) \geq 0$
  - Amortisierte Kosten
    - Amortisierte Kosten der i-ten Operation: (Summe tatsächliche Kosten + Potentialänderung)

      $a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1)$
    - Summe der amortisierten Kosten:

      $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}(t_i + \phi(i) - \phi(i-1)) = \sum_{i=1}^{n} t_i + \phi(n) - \phi(0)$
    - Wenn für jedes i gilt $\phi(i) \geq \phi(0)$:

      Summe der amor. Kosten ist gültige obere Schranke an Summe der tatsächlichen Kosten
  - Potential-Methode anhand des Binärzählers
    - $\phi(i)$: Anzahl der 1-en im Array nach i-ter `INCREMENT`-Operation

      $\rightarrow \phi(i)$ nie negativ und $\phi(0) = 0$
    - Angenommen i-te Operation setzt e_i Bits von 1 auf 0, dann hat diese Operation Kosten $t_i \leq e_i + 1$
    - Neues Potential: $\phi(i) \leq \phi(i-1) - e_i + 1 \Leftrightarrow \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i$
    - Amortisierte Kosten der i-ten `INCREMENT`-Operation:

      $a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i + 1 + 1 - e_i = 2$
    - Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^{n} t_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 2n \in O(n)$