1 Grundlegende Datenstrukturen

1.1 Stacks

Abstrakter Datentyp Stack

`new S()`	• Erzeugt neuen (leeren) Stack
`s.isEmpty()`	• Gibt an, ob Stack `s` leer ist
`s.pop()`	• Gibt oberstes Element vom Stack `s` zurück und löscht es vom Stack • Gibt Fehlermeldung aus, falls der Stack leer ist
`s.push(k)`	• Schreibt `k` als neues oberstes Element auf Stack `s`

Abstrakter Aufbau **LIFO**-Prinzip - Last in, First out

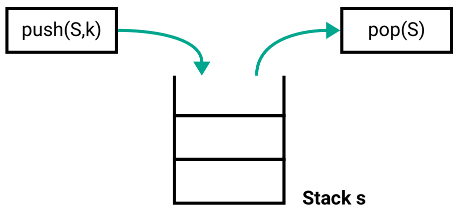
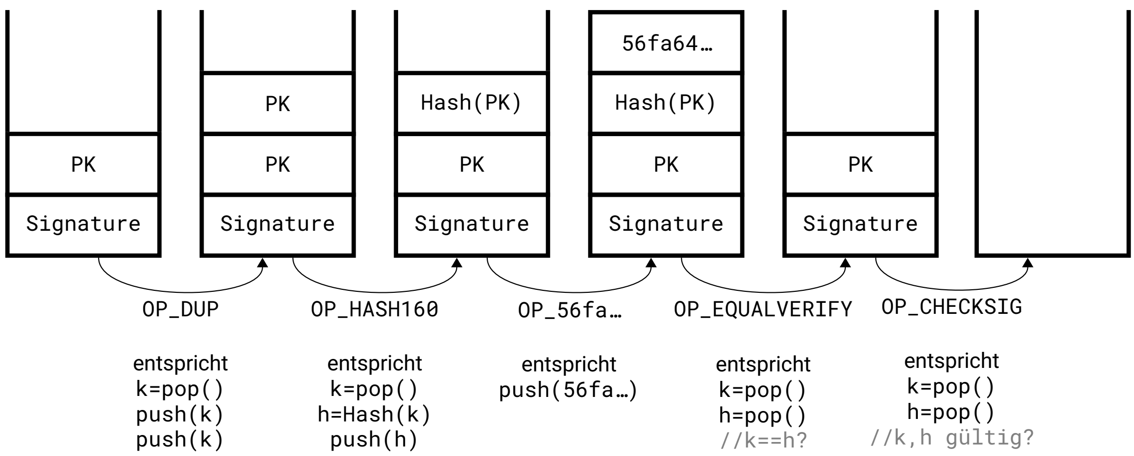


Abbildung 1: Abstrakter Aufbau eines Stacks

Beispiel Bitcoin

```
scriptPubKey:
OP_DUP OP_HASH160 56fa64a8bd7852d2c58095fa9a2fcd52d2c580b65d35549d
OP_EQUALVERIFY OP_CHECKSIG
```



Stacks als Array

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S	12	47	17	98	72				

Abbildung 2: Beispiel: Stack als Array

`s.top` zeigt immer auf oberstes Element

`pop()` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach links bewegt

`push(k)` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach rechts bewegt

Stacks als Array - Methoden, falls maximale Größe bekannt

new(S)

```
S.A[]=ALLOCATE(MAX);
S.top=-1;
```

isEmpty(S)

```
IF S.top<0 THEN
  return true;
ELSE
  return false;
```

pop(S)

```
IF isEmpty(S) THEN
  error "underflow";
ELSE
  s.top=s.top-1;
  return S.A[S.top+1];
```

push(S)

```
IF S.top==MAX-1 THEN
  error "overflow";
ELSE
  S.top=S.top+1;
  S.A[S.top]=k;
```

Stacks mit variabler Größe - Einfach

- Falls `push(k)` bei vollem Array $\Rightarrow$ VergöSSerung des Arrays
- Erzeugen eines neuen Arrays mit Länge + 1 und Umkopieren aller Elemente
- Durchschnittlich $\Omega(n)$ Kopierschritte pro `push`-Befehl

Stacks mit variabler Größe - Verbesserung

Idee — Stacks mit Variabler Größe

- Wenn Grenze erreicht, Verdopplung des Speichers und Kopieren der Elemente
- Falls weniger als ein Viertel belegt, schrumpfe das Array wieder

Methoden: `RESIZE(A,m)` reserviert neuen Speicher der Größe `m` und kopiert `A` um

new(S)

```
S.A[]=ALLOCATE(1);
S.top=-1;
S.memsize=1;
```

isEmpty(S)

```
IF S.top<0 THEN
    return true;
ELSE
    return false;
```

pop(S)

```
IF isEmpty(S) THEN
    error "underflow";
ELSE
    S.top=S.top-1;
    IF 4*(S.top+1)==S.memsize THEN
        S.mensize=s.memsize/2;
        RESIZE(S.A,S.memsize);
    return S.A[S.top+1];
```

push(S)

```
S.top=S.top+1;
S.A[S.top]=k;
IF S.top+1>=S.memsize THEN
    S.memsize=2*S.memsize;
    RESIZE(S.A,S.memsize);
```

Im Durchschnitt für jeder der mindestens `n` Befehle $\Theta(1)$ Umkopierschritte

1.2 Verkettete Listen

Aufbau

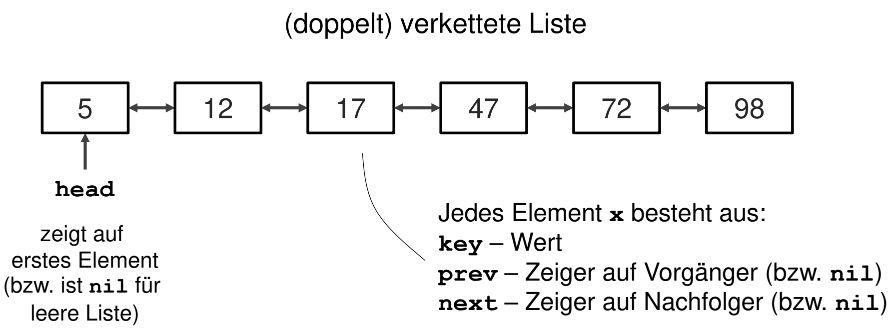


Abbildung 3: Aufbau Verkettete Liste

Verkettete Listen durch Arrays

Entspricht doppelter Verkettung zwischen 45 und 12

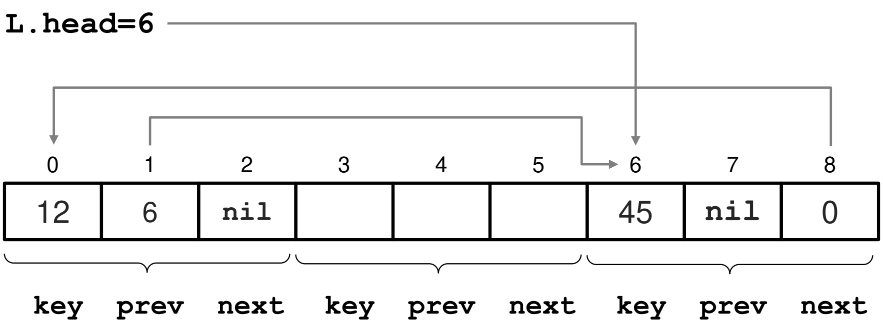


Abbildung 4: Beispiel Verkettete Liste durch Arrays

1.2.1 Elementare Operationen auf Listen

Suche nach Element

search(L,k) // Returns pointer to k in L (or nil)

```
current = L.head;
WHILE current != nil AND current.key != k DO
  current = current.next;
return current;
```

Laufzeit beträgt im Worst Case $\Theta(n) \Rightarrow$ Keine Überprüfung, ob Wert bereits in Liste, sonst $\Theta(n)$

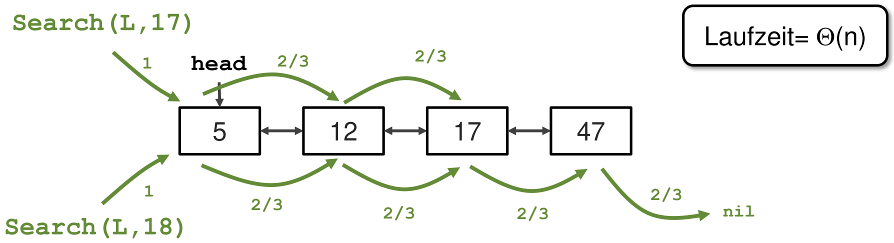


Abbildung 5: Grafische Darstellung einer Suche in Listen

Einfügen eines Elements am Kopf der Liste

insert(L,x)

```
insert(L,x)
x.next = l.head;
x.prev = nil;
IF L.head != nil THEN
    L.head.prev = x;
L.head = x;
```

Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da Einfügen am Kopf

Löschen eines Elements aus Liste

delete (L,x)

```
IF x.prev != nil THEN
  x.prev.next = x.next
ELSE
  L.head = x.next;
IF x.next != nil THEN
  x.next.prev = x.prev;
```

Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da hier Pointer auf Objekt gegeben
Löschen eines Wertes k mithilfe von Suche beträgt $\Omega(n)$

Vereinfachung per Wächter/Sentinels

Ziel ist die Eliminierung der Spezialfälle für Listenanfang/-ende

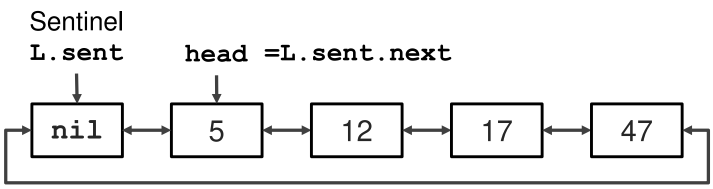


Abbildung 6: Beispiel Sentinel

Löschen mit Sentinels:

deleteSent(L,x)

```
x.prev.next = x.next;
x.next.prev = x.prev;
```

1.3 Queues

Abstrakter Datentyp Queue

`new Q()`	• Erzeuge neue (leere) Queue
`q.isEmpty()`	• Gibt an, ob Queue `q` leer ist
`q.dequeue()`	• Gibt vorderstes Element aus `q` zurück und löscht es auf Queue • Fehlermeldung, falls Queue leer ist
`q.enqueue(k)`	• Schreibt `k` als neues hinterstes Element auf `q` • Fehlermeldung, falls Queue voll ist

Abstrakter Aufbau

FIFO-Prinzip / First in, First out

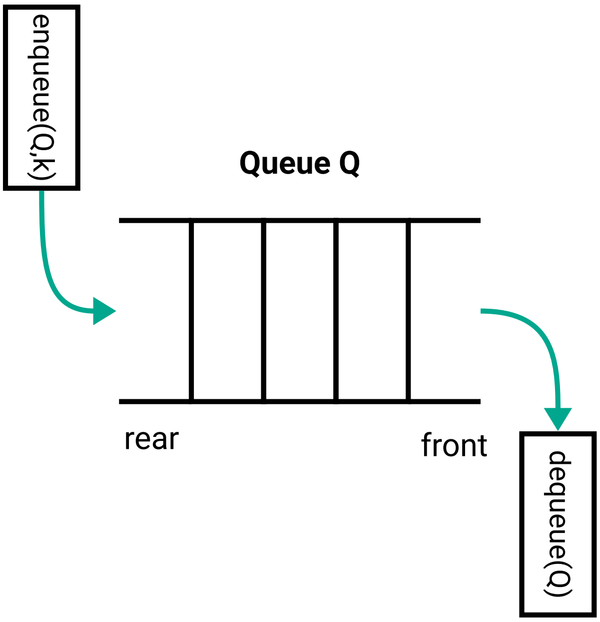


Abbildung 7: Beispiel FIFO

Queues als (virtuelles) zyklisches Array

Bekannt: Maximale Elemente gleichzeitig in Queue

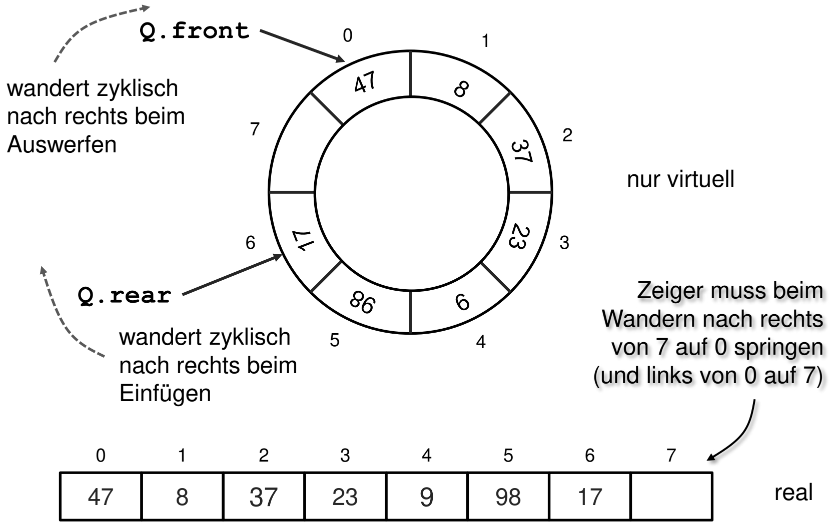


Abbildung 8: Beispiel Queue als Zyklisches Array

Problem, falls `Q.rear` und `Q.front` auf selbes Element zeigen

- Speichere Information, ob Schlange leer oder voll, in boolean `empty`
- Alternativ: Reserviere ein Element des Arrays als Abstandshalter

Methoden für zyklisches Array:

new(Q)

```
Q.A[]=ALLOCATE(MAX);
Q.front=0;
Q.rear=0;
Q.empty=true;
```

isEmpty(Q)

```
return Q.empty;
```

dequeue(Q)

```
IF isEmpty(Q) THEN
    error "underflow";
ELSE
    Q.front=Q.front+1 mod MAX;
    IF Q.front==Q.rear THEN
        Q.empty=true;
    return Q.A[Q.front-1 mod MAX];
```

enqueue(Q,k)

```
IF Q.rear==Q.front AND !Q.isEmpty
THEN error "overflow";
ELSE
    Q.A[Q.rear]=k;
    Q.rear=Q.rear+1 mod MAX;
    Q.empty=false;
```

Queues durch einfach verkettete Listen

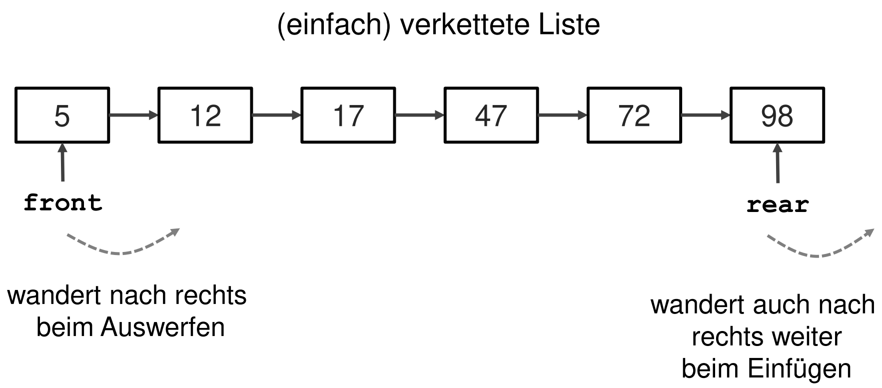


Abbildung 9: Beispiel Queue durch einfach verkettete Liste

Methoden:

new(Q)

```
Q.front=nil;
Q.rear=nil;
```

isEmpty(Q)

```
IF Q.front==nil THEN
    return true;
ELSE
    return false;
```

dequeue(Q)

```
IF isEmpty(Q) THEN
    error "underflow";
ELSE
    x=Q.front;
    Q.front=Q.front.next;
    return x;
```

enqueue(Q,k)

```
IF isEmpty(Q) THEN
    Q.front=x;
ELSE
    Q.rear.next=x;
x.next=nil;
Q.rear=x;
```

Laufzeit:

- Enqueue: $\Theta(1)$
- Dequeue: $\Theta(1)$

1.4 Binäre Bäume

Bäume durch verkettete Listen

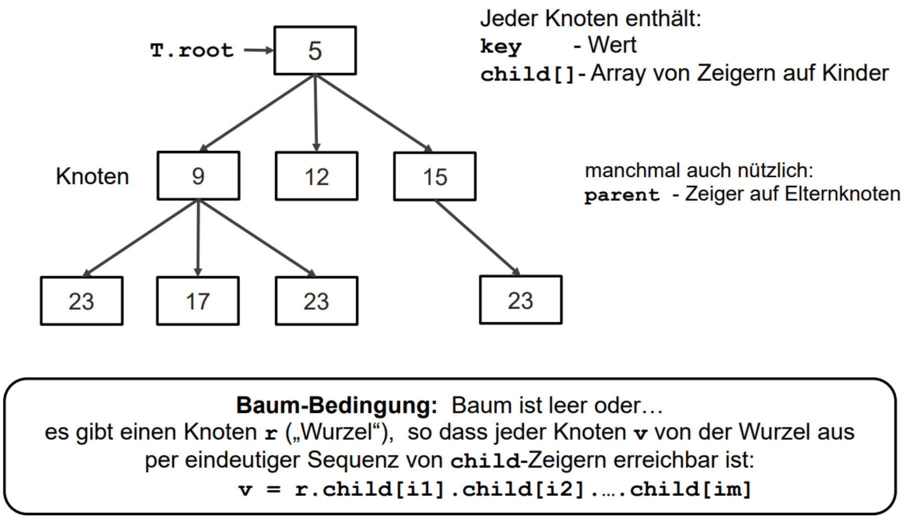
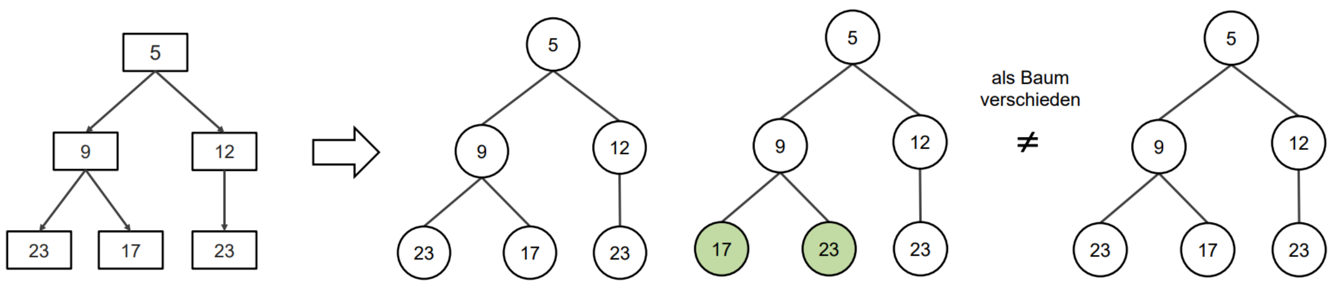


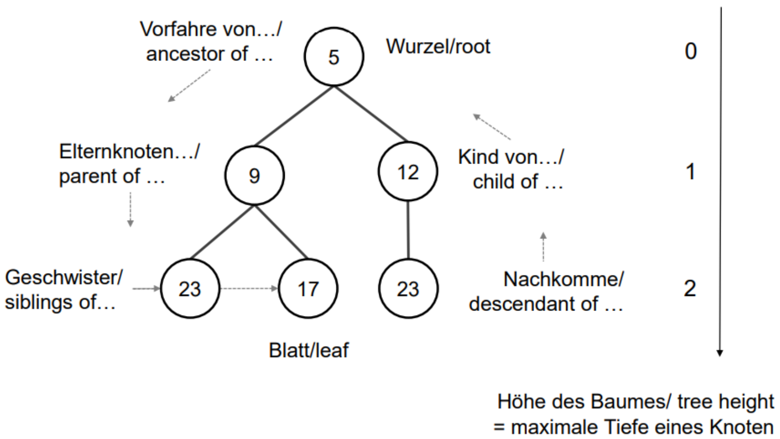
Abbildung 10: Binärbaum-Beispiel

Bäume sind „azyklisch"(also „keine Schleifen zwischen Knoten")

Darstellung als (ungerichteter) Graph

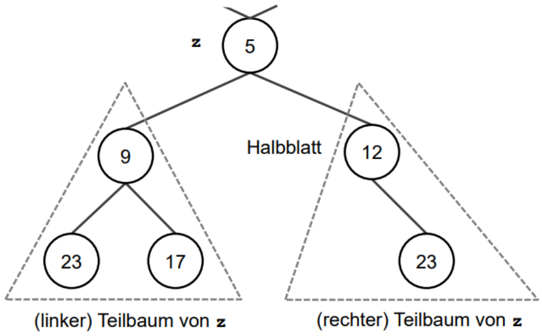


Allgemeine Begrifflichkeiten



- Blatt: Knoten ohne Nachfolger
- Nachkomme von x:
  Erreichbar durch Pfad ausgehend von x

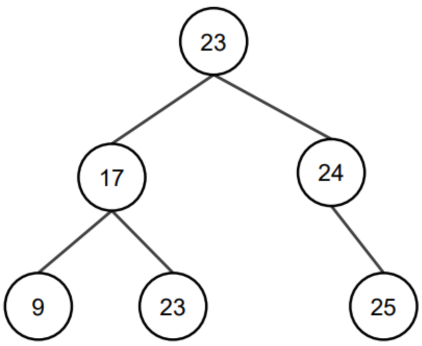
Begrifflichkeiten Binärbaum



- Jeder Knoten hat maximal zwei Kinder `left=child[0]` und `right=child[1]`
- Ausgangsgrad jedes Knoten ist ≤ 2
- Höhe leerer Baum per Konvention -1
- Hohe (nicht-leerer) Baum: max{Höhe aller Teilbäume der Wurzel} $+ 1$
- Halbblatt: Knoten mit nur einem Kind

Traversieren von Bäumen

- Darstellung eines Baumes mithilfe einer Liste der Werte aller Knoten
- Laufzeit bei n Knoten: $T(n) = O(n)$
- Nutzung der Preorder für das Kopieren von Bäumen
  1. Preorder betrachtet Knoten und legt Kopie an
  2. Preorder geht dann in Teilbäume und kopiert diese
- Nutzung der Postorder für das Löschen von Bäumen
  1. Postorder geht zuerst in Teilbäume und löscht diese
  2. Betrachten des Knoten erst danach und dann Löschung dieses



inorder(T.root) ergibt

9 17 23 23 24 25

preorder(T.root) ergibt

23 17 9 23 24 25

postorder(T.root) ergibt

9 23 17 25 24 23

Code:

inorder(x)

```
IF x != nil THEN
    inorder(x.left);
    print x.key;
    inorder(x.right);
```

preorder(x)

```
IF x != nil THEN
    print x.key;
    preorder(x.left);
    preorder(x.right);
```

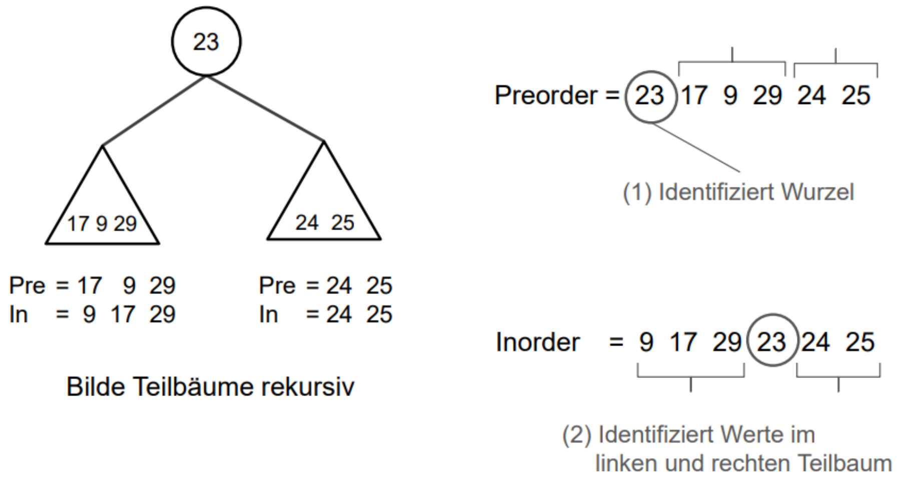
postorder(x)

```
IF x != nil THEN
    postorder(x.left);
    postorder(x.right);
    print x.key;
```

Eindeutige Bestimmbarkeit von Bäumen

- Nur In-, Pre-, Postorder reichen nicht zur eindeutigen Bestimmbarkeit von Bäumen

  $\Rightarrow$ Preorder/Postorder + Inorder + eindeutige Werte sind notwendig



1.4.1 Abstrakter Datentyp Baum

Abstrakter Aufbau:

`new T()`	• Erzeugt neuen Baum namens `t`
`t.search(k)`	• Gibt Element `x` in Baum `t` mit `x.key == k` zurück
`t.insert(k)`	• Fügt Element `x` in Baum `t` hinzu
`t.delete(x)`	• Löscht `x` aus Baum `t`

Suche nach Elementen Starte mit `search(T.root,k)` Code:

search(x,k)

```
IF x == nil THEN return nil;
IF x.key == k THEN return x;
y = search(x.left,k);
IF y != nil THEN return y;
return search(x.right,k);
```

Laufzeit $= \Theta(n)$ (Jeder Knoten maximal einmal, jeder Knoten im schlechtesten Fall)

Einfügen von Elementen
Hier wird als Wurzel eingefügt (Achtung: Erzeugt linkslastigen Baum) Code:

insert(T,x) // x.parent == x.left == x.right == nil;

```
IF T.root != nil THEN
  T.root.parent = x;
  x.left = T.root;
T.root = x;
```

Laufzeit $= \Theta(1)$

Löschen von Elementen
Hier: Ersetze x durch Halbblatt ganz rechts

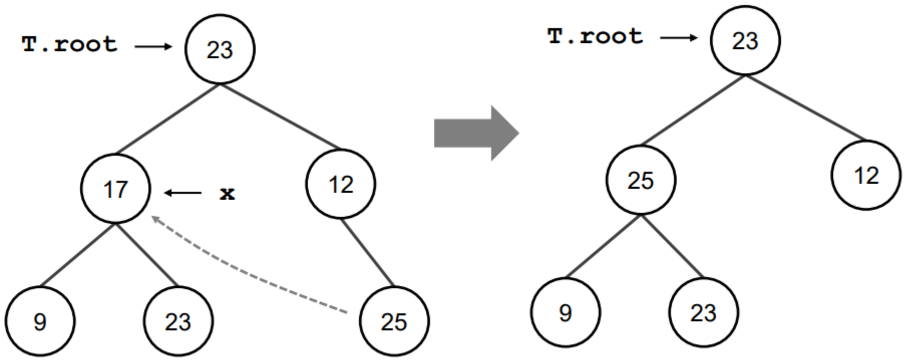


Abbildung 11: Löschen des Knoten 17

`Connect`-Algorithmus:

```
connect(T,y,w) // Connects w to y.parent
v = y.parent;
IF y != T.root THEN
    IF y == v.right THEN
        v.right = w;
    ELSE
        v.left = w;
ELSE
    T.root = w;
IF w != nil THEN
    w.parent = v;
```

Laufzeit $= \Theta(1)$

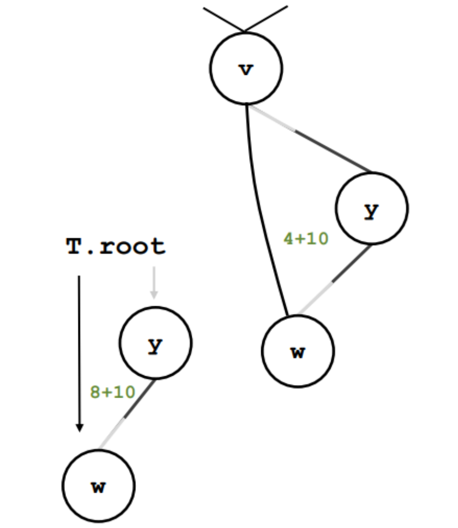


Abbildung 12: Beispiel Connect-Algorithmus Binärbaum

`Delete`-Algorithmus:

```
delete(T,x) // assumes x in T
y = T.root;
WHILE y.right != nil DO
    y = y.right;
connect(T,y,y.left);
IF x != y THEN
    y.left = x.left;
    IF x.left != nil THEN
        x.left.parent = y;
    y.right = x.right;
    IF x.right != nil THEN
        x.right.parent = y;
    connect(T,x,y);
```

Laufzeit $= \Theta(h)$ (Höhe des Baumes, $h = n$ möglich)

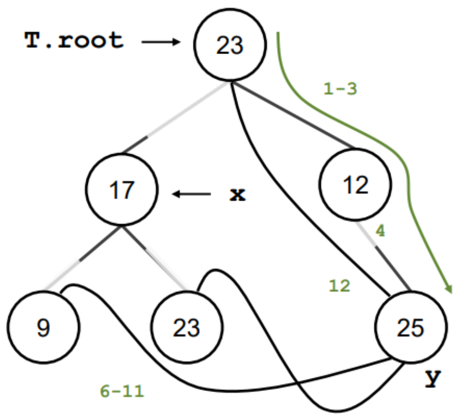


Abbildung 13: Beispiel Delete-Algorithmus Binärbaum

1.5 Binäre Suchbäume

Definition — Binärer Suchbaum

Totale Ordnung auf den Werten

Für alle Knoten z gilt:

Wenn x Knoten im linken Teilbaum von z, dann `x.key` $\leq$ `z.key`

Wenn y Knoten im rechten Teilbaum von z, dann `y.key` $\geq$ `z.key`

Preorder/Postorder + eindeutige Werte $\Rightarrow$ Eindeutige Identifizierung

Suchen im Binären Suchbaum

Code:

search(x,k) // 1. Aufruf: x = root

```
IF x == nil OR x.key == k THEN
  return x;
IF x.key > k THEN
  return search(x.left,k);
ELSE
  return search(x.right,k);
```

Iterativer Code:

iterative-search(x,k)

```
WHILE x != nil AND x.key != k DO
  IF x.key > k THEN
      x = x.left;
  ELSE
      x = x.right;
return x;
```

Laufzeit (beide) $= O(h)$ (Höhe)

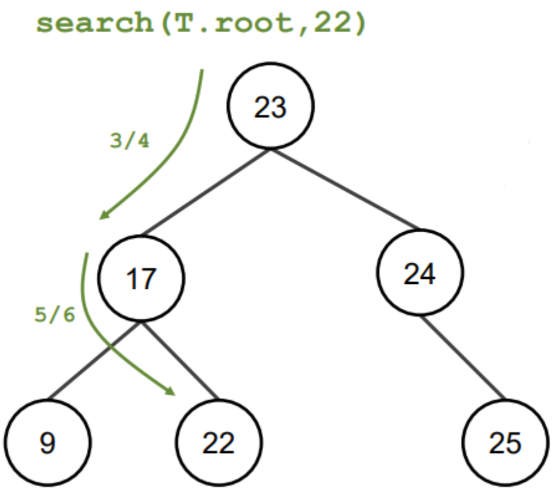


Abbildung 14: Beispiel Search-Algorithmus im Binärbaum

Einfügen im Binary Search Tree
Aufwendiger, da Ordnung erhalten werden muss Code:

```
insert (T,z) // z.left == z.right == nil;
1  x = T.root;
2  px = nil;
3  WHILE x != nil DO
4    px = x;
5    IF x.key > z.key THEN
6        x = x.left;
7    ELSE
8        x = x.right;
9  z.parent = px;
10 IF px == nil THEN
11   T.root = z;
12 ELSE
13   IF px.key > z.key THEN
14       px.left = z;
15   ELSE
16       px.right = z;
```

Laufzeit $= O(h)$

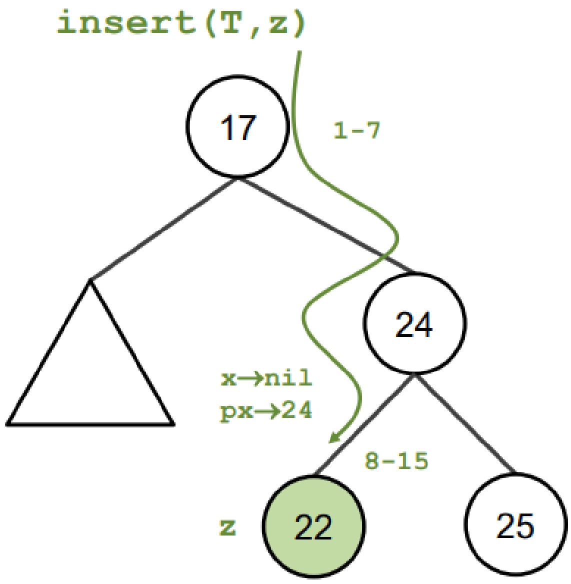


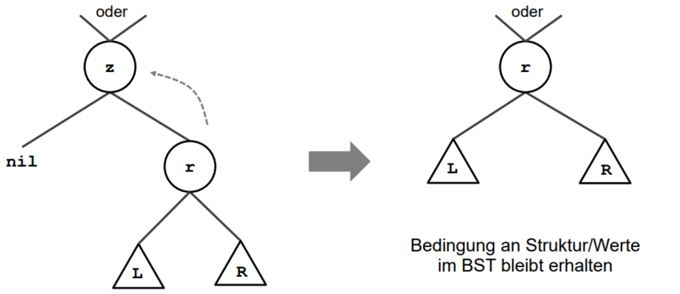
Abbildung 15: Beispiel einfügen in Binären Suchbaum

Löschen im BST

wir Unterscheiden drei verschiedene Fälle:

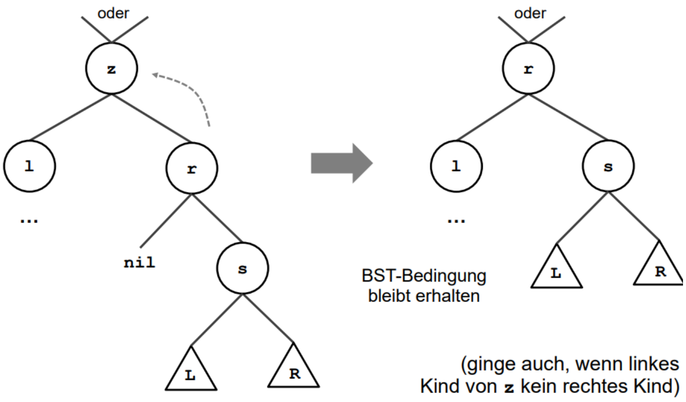
Löschen im BST (I)

zu löschender Knoten **z** hat maximal ein Kind



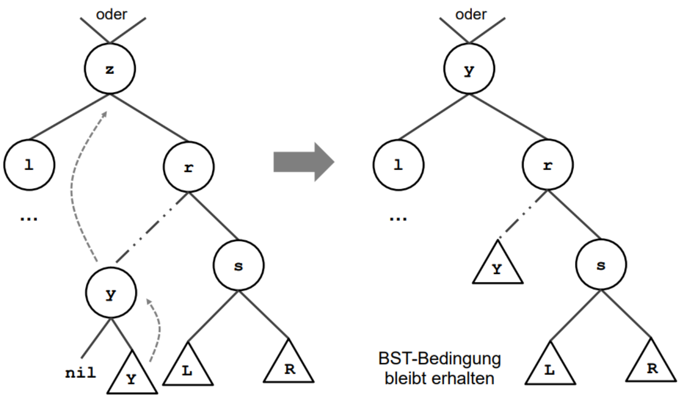
Löschen im BST (II)

rechtes Kind von Knoten **z** hat kein linkes Kind



Löschen im BST (III)

„kleinster" Nachfahre vom rechten Kind von **z**



Code:

transplant(T,u,v) // Hängt Teilbaum v an Parent von u

```
IF u.parent == nil THEN
    T.root = v;
ELSE
    IF u == u.parent.left THEN
        u.parent.left = v;
    ELSE
        u.parent.right = v;
IF v != nil THEN
    v.parent = u.parent;
```

delete(T,z)

```
IF z.left == nil THEN
    transplant(T,z,z.left)
ELSE
    IF z.right == nil THEN
        transplant(T,z,z,left)
    ELSE
        y = z.right;
        WHILE y.left != nil DO y = y.left;
        IF y.parent != z THEN
            transplant(T,y,y.right)
            y.right = z.right;
            y.right.parent = y;
        transplant(T,z,y)
        y.left = z.left;
        y.left.parent = y;
```

Laufzeit $= O(h)$
Laufzeit ist damit besser, wenn viele Suchoperationen und h klein relativ zu n

Höhe eines BST

Best Case

- Vollständiger Baum (Alle Blätter gleiche Tiefe)
- $h = O(log_2 n)$
- Laufzeit $= O(log_2 n)$

Worst Case

- Degenerierter Baum (links- bzw. rechtslastiger Baum)
- $h = n - 1$
- Laufzeit $= \Theta(n)$

Durchschnittliche Höhe

- Erwartete Höhe: $\Theta(log_2 n)$

Suchbäume als Suchindex

- Knoten speichert nur Primärschlüssel und Zeiger auf Daten
- Zusätzliche Indizes möglich, kosten aber Speicherplatz

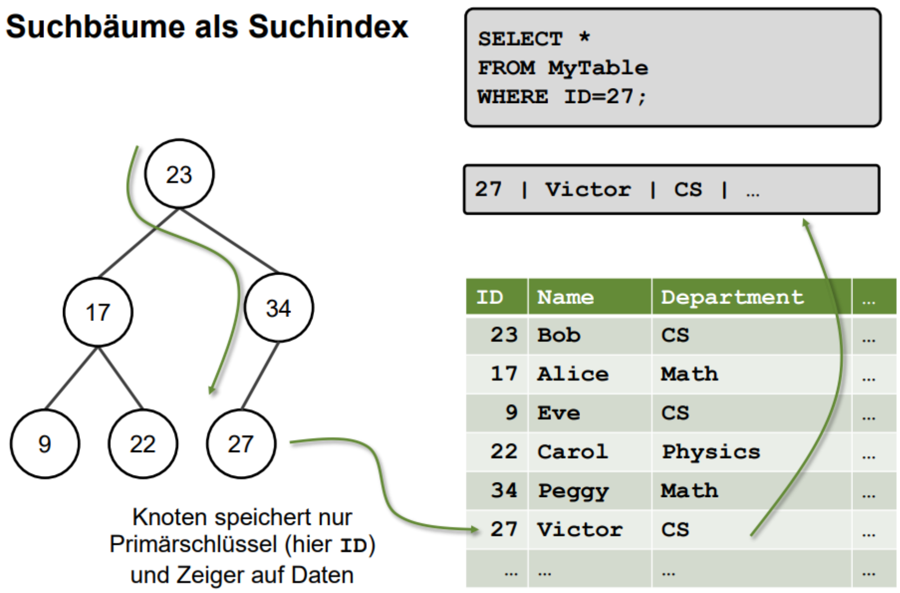


Abbildung 16: Suchbäume als Suchindex