

1 NP

Berechnungsprobleme

- Sind alle Probleme in polynomieller Zeit lösbar? ($O(n^k)$)
- Nein \Rightarrow Manche nur in superpolynomieller Zeit lösbar
- Polynomielle Probleme: "einfach"
- Superpolynomielle Probleme: "hart"

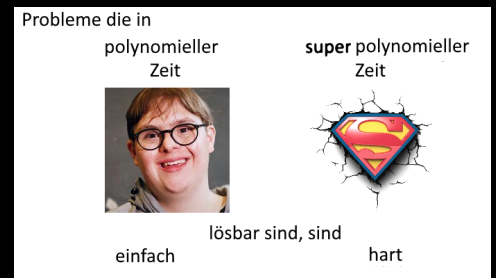


Abbildung 1: NP-Meme

Definition — Klasse P

- Klasse aller Polynomialzeitprobleme
- Problem ist effizient lösbar gdw. es in polynomieller Zeit lösbar ist
- Gilt für Polynome beliebigen Grades (auch n^k)
- Zeitkomplexität n^k mit großem k bedenklich, jedoch fast nie notwendig
- n beschreibt die Länge der Eingabe

Beispiele: Binäre Addition, Kürzeste Wege, Sortieren, ...

Definition — Klasse NP

- Enthält "einfach zu verifizierende" Probleme (polynomieller Zeit)
- Enthält Probleme mit "kurzem Beweis" (Länge polynomiell in Länge der Instanz)
- Also: Klasse aller Probleme, deren Lösung in Polynomialzeit verifizierbar ist
- Beispiele: Soduko, 3D-Matching,...
- Beispiel: Faktorisierungsproblem
 - Jede nicht-Primzahl kann eindeutig als Primzahlprodukt geschrieben werden
 - $35 = 5 \cdot 7$, $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$,...
 - Faktorisieren auf klassischen Computern schwer
 - $n \xrightarrow{\text{schwer}} p, q$
 - $n, p, q \xrightarrow{\text{leicht}} \text{ist } n = p \cdot q?$



- Rucksackproblem auch in polynomieller Laufzeit verifizierbar

Hamilton-Kreis-Problem

Definition – Hamiltonischer Kreis Zyklus, der alle Knoten, aber nicht unbedingt alle Kanten enthält

- Entscheidungsalgorithmus listet alle möglichen Permutationen der Knoten aus G auf
- Prüfung bei jeder Permutation, ob es ein Hamiltonischer Kreis ist
- Laufzeit:
 - Kodierung via Adjazenzmatrix: m Knoten \Rightarrow Matrix mit $n = m \times m$ Einträgen
 - $m!$ mögliche Permutationen der Knoten
 - $\Omega(m!) = \Omega(\sqrt{n}!) = \Omega(2^{\sqrt{n}})$
 - \Rightarrow superpolynomielle Laufzeit (liegt **nie** in $O(n^k)$)
- **Allerdings:** Einfacher, wenn nur Beweis verifiziert werden muss
 - \Rightarrow Test, ob es sich um Permutation der Knoten handelt
 - \Rightarrow Test, ob alle angegebenen Kanten auf Kreis im Graphen existieren
 - \Rightarrow Verifikationsalgorithmus V mit quadratischer Laufzeit
- Verifikationsalgorithmus: $V(x, y) = 1/0$ (1, falls Kreis bzw. 0, falls nicht)
- Damit: Hamilton-Kreis \in NP

Entscheidungsproblem vs Optimierungsproblem

- Optimierungsproblem: Lösung nimmt bestimmten Wert an
- Entscheidungsproblem: Binäre Antwort (Ja/Nein)
- Bei NP Betrachtung von Entscheidungsproblemen
- Optimierungsproblem oft in verwandtes Entscheidungsproblem umwandelbar
- Verwandtes Entscheidungsproblem: dem zu optimierenden Wert wird eine Schranke auferlegt

P versus NP

$$L \in P \quad \longrightarrow \quad L \in NP \quad \longrightarrow \quad P \subseteq NP$$

- Für viele wichtige Probleme ist jedoch unbekannt, ob sie in P (effizient) lösbar sind
- Unbekannt ob $P \neq NP$
- Intuitive Frage: Ist das Finden eines Beweises schwieriger als dessen Überprüfung?
 - \Rightarrow Ja, also $P \neq NP$ gilt
- In den letzten 50 Jahren kein Beweis für $P = NP$
- Eines der wichtigsten offenen Probleme der theoretischen Informatik
- Konsequenzen eines Beweises von $P = NP$:
 - $P = NP$: **dramatisch**, vieles bisher schwieriges einfacher lösbar (Rucksack, Kryptographie)
 - $P \neq NP$: **nicht dramatisch**, mgl. interessante Konsequenzen in Kryptographie

NP-Vollständigkeit

- Problem befindet sich in NP
- Problem ist so "schwer" wie jedes Problem in NP
- Beweis: Zeigen, dass kein effizienter Algorithmus existiert
- Werkzeug: Reduktionen (zum Vergleich verschiedener Probleme)

Definition – NP-Härte/NP-Schwere

- Klassifikation von Problemen als schwierig, trotz fehlender genauer Zuordnung
- Starke Indikatoren, dass Problem L nicht in P ist:
 - L ist mindestens so schwierig, wie alle anderen Probleme in NP
 - Daraus folgt, dass L nur in P, wenn $P = NP$ (unwahrscheinlich)

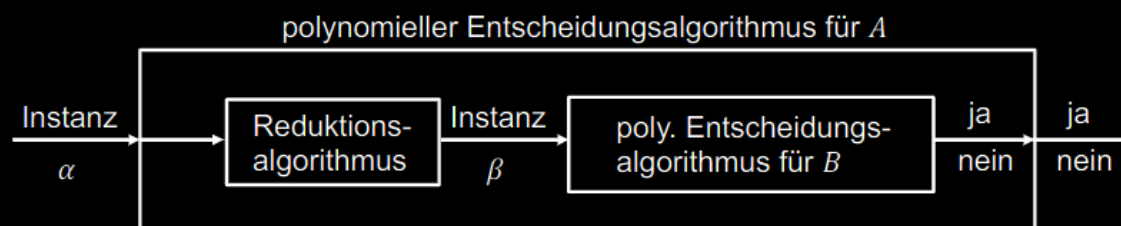
Definition – NP-Schwer Problem L ist **NP-schwer**, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in NP$

Definition – NP-Vollständig Problem L ist **NP-vollständig**, wenn L sowohl NP-schwer als auch in NP ist
z.B.: Hamilton-Kreis ist NP-vollständig

Reduktionen

Idee – Reduktion

- Betrachte Problem A , das wir in polynomieller Zeit lösen wollen
- Bereits bekannt: Problem B (in polynomieller Zeit lösbar)
- Benötigt wird Prozedur, die Instanzen der Probleme ineinander überführt
 - ⇒ Transformation benötigt polynomielle Zeit
 - ⇒ Antworten sind gleich



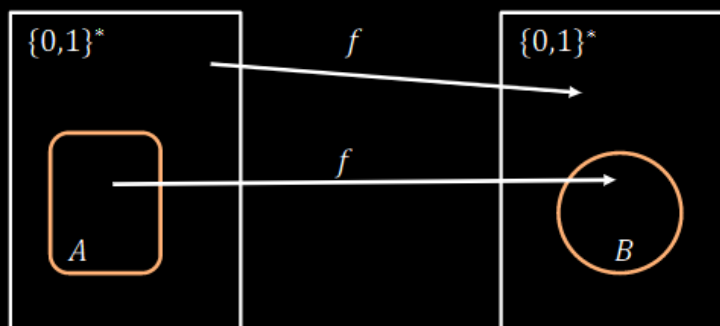
Beispiel:

- Intuitiv: Reduktion von A auf B , wenn Umformulierung möglich
 - ⇒ Jede Instanz A kann leicht in Instanz von B umformuliert werden
 - ⇒ Lösung der Instanz B liefert Lösung von Instanz A
- Reduktion: Lösen von linearen Gleichungen auf quadratische Gleichungen
 - Lineare Gleichung $ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$
 - Quadratische Gleichung $ax^2 + bx + 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}, x = 0$
 - Quadratische Gleichung liefert also auch Lösung für lineare Gleichung

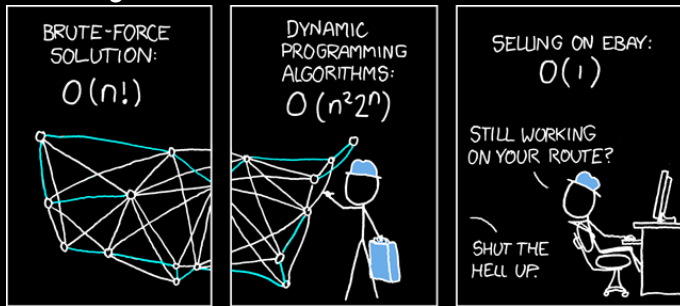
Formale Definition:

A lässt sich auf B in **polynomieller Zeit reduzieren**, mit Schreibweise $A \leq_p B$, wenn eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ existiert, sodass für alle $x \in \{0, 1\}^*$ gilt:
 $x \in A$ genau dann, wenn $f(x) \in B$

Illustration der Polynomialzeitreduktion:

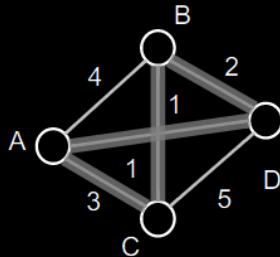


Travelling-Salesman Problem



Beschreibung:

- Reisender plant Rundreise durch mehrere Städte
- Start und Ziel ist eine vorgegebene Stadt
- Jede Stadt nur einmal besuchen
- Ziel: Minimale Reisekosten



Eine optimale Route mit Kosten 7 verläuft von $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

Problem:

- Anzahl der verschiedenen Rundreisen $(n - 1)!$
- Stark nach oben explodierende Zahlen
- Brute-Force für große n praktisch unmöglich
- Es existiert kein effizienter Algorithmus, der das TSP effizient löst
- TSP ist **NP-vollständig**

Beweis NP-Vollständigkeit

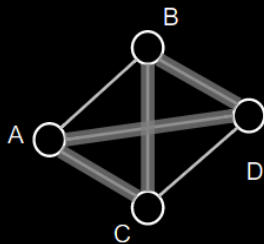
- Zeigen: TSP gehört zu NP und TSP ist NP-schwer

TSP gehört zu NP

- Gegeben: Instanz des Problems TSP, Folge der n Knoten der Tour (Zertifikat)
- Verifikationsalgorithmus überprüft, ob Folge jeden Knoten genau einmal enthält
- Außerdem Aufsummieren der Kantenkosten und überprüfen, ob diese maximal k ist
- Verifikation läuft in polynomieller Laufzeit \Rightarrow gehört zu NP

TSP ist NP-schwer

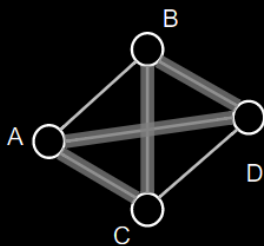
- Wir zeigen $HAM - KREIS \leq_p TSP$
- Start: Instanz von $HAM - KREIS$ mit $G = (V, E)$
- Konstruiere Instanz von TSP
 $\Rightarrow G' = (V, E')$ mit $E' = \{(i, j) : i, j \in V \text{ und } i \neq j\}$
- Definiere Kostenfunktion $c(i, j) = 0$, falls $(i, j) \in E$ / $c(i, j) = 1$, falls $(i, j) \notin E$
- Instanz von TSP ist $\langle G', c, 0 \rangle$ (Konstruktion in polynomieller Zeit) (0: Kosten von 0)
- **Zeige jetzt:** G besitzt hamiltonischen Kreis $\Leftrightarrow G'$ enthält Tour mit Kosten ≤ 0
- \Rightarrow Graph G besitzt einen hamiltonischen Kreis h



Jede Kante von h gehört zu E und daher besitzt laut Kostenfunktion der Graph G' die Kosten 0.

Damit ist h eine Tour in G' mit den Kosten 0.

- \Leftarrow Graph G besitzt eine Tour h' mit Kosten kleiner gleich 0



Die Kosten der Kanten in E' haben die Werte 0 und 1. Die Kosten der Tour betragen exakt 0 und jede Kante muss die Kosten 0 haben.

Damit hat h' nur Kanten von E .

Damit folgt, dass h' ein Hamiltonischer Kreis des Graphen G ist.