

1 Grundlegende Datenstrukturen

1.1 Stacks

Abstrakter Datentyp Stack

- `new S()` • Erzeugt neuen (leeren) Stack
- `s.isEmpty()` • Gibt an, ob Stack `s` leer ist
- `s.pop()` • Gibt oberstes Element vom Stack `s` zurück und löscht es vom Stack
 - Gibt Fehlermeldung aus, falls der Stack leer ist
- `s.push(k)` • Schreibt `k` als neues oberstes Element auf Stack `s`

Abstrakter Aufbau LIFO-Prinzip - Last in, First out

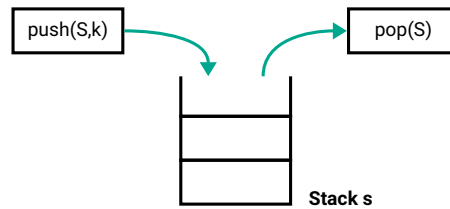
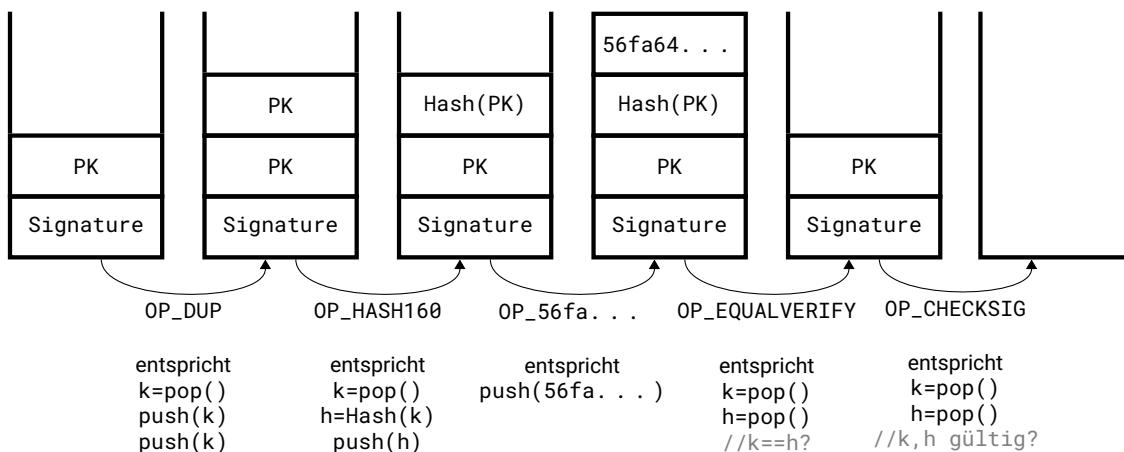


ABBILDUNG 1: Abstrakter Aufbau eines Stacks

Beispiel Bitcoin

```
scriptPubKey:  
OP_DUP OP_HASH160 56fa64a8bd7852d2c58095fa9a2fcd52d2c580b65d35549d  
OP_EQUALVERIFY OP_CHECKSIG
```



Stacks als Array

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S	12	47	17	98	72				

ABBILDUNG 2: Beispiel: Stack als Array

`s.top` zeigt immer auf oberstes Element

`pop()` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach links bewegt

`push(k)` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach rechts bewegt

Stacks als Array - Methoden, falls maximale Größe bekannt

new(S)

```
1 S.A[ ]=ALLOCATE(MAX);  
2 S.top=-1;
```

isEmpty(S)

```
1 IF S.top<0 THEN  
2   return true;  
3 ELSE  
4   return false;
```

pop(S)

```
1 IF isEmpty(S) THEN  
2   error "underflow";  
3 ELSE  
4   s.top=s.top-1;  
5   return S.A[S.top+1];
```

push(S)

```
1 IF S.top==MAX-1 THEN  
2   error "overflow";  
3 ELSE  
4   S.top=S.top+1;  
5   S.A[S.top]=k;
```

Stacks mit variabler Größe - Einfach

- Falls `push(k)` bei vollem Array \Rightarrow Vergrößerung des Arrays
- Erzeugen eines neuen Arrays mit Länge + 1 und Umkopieren aller Elemente
- Durchschnittlich $\Omega(n)$ Kopierschritte pro `push`-Befehl

Stacks mit variabler Größe - Verbesserung

Idee – Stacks mit Variabler Größe

- Wenn Grenze erreicht, Verdopplung des Speichers und Kopieren der Elemente
- Falls weniger als ein Viertel belegt, schrumpfe das Array wieder

Methoden: `RESIZE(A, m)` reserviert neuen Speicher der Größe `m` und kopiert `A` um

new(S)

```
1 S.A[ ]=ALLOCATE(1);
2 S.top=-1;
3 S.memsize=1;
```

isEmpty(S)

```
1 IF S.top<0 THEN
2     return true;
3 ELSE
4     return false;
```

pop(S)

```
1 IF isEmpty(S) THEN
2     error "underflow";
3 ELSE
4     S.top=S.top-1;
5     IF 4*(S.top+1)==S.memsize THEN
6         S.memsize=S.memsize/2;
7         RESIZE(S.A, S.memsize);
8     return S.A[S.top+1];
```

push(S)

```
1 S.top=S.top+1;
2 S.A[S.top]=k;
3 IF S.top+1>=S.memsize THEN
4     S.memsize=2*S.memsize;
5     RESIZE(S.A, S.memsize);
```

Im Durchschnitt für jeder der mindestens n Befehle $\Theta(1)$ Umkopierschritte

1.2 Verkettete Listen

Aufbau

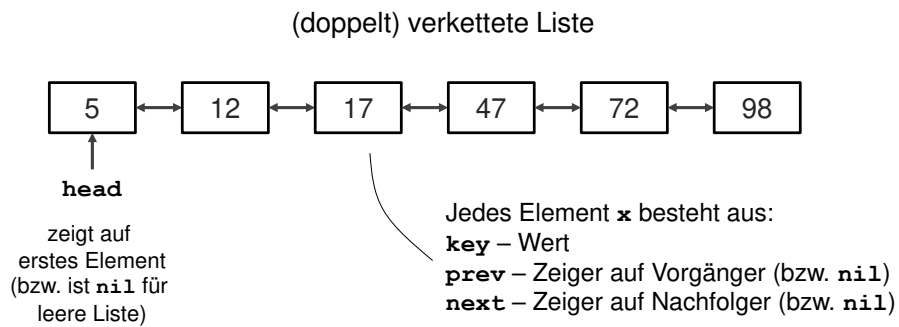


ABBILDUNG 3: Aufbau Verkettete Liste

Verkettete Listen durch Arrays

Entspricht doppelter Verkettung zwischen 45 und 12

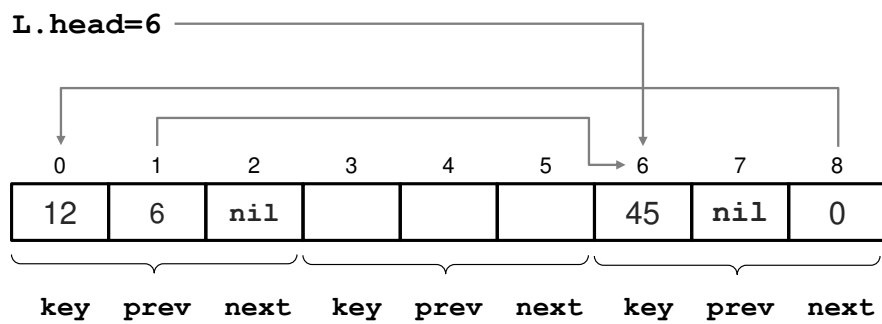


ABBILDUNG 4: Beispiel Verkettete Liste durch Arrays

1.2.1 Elementare Operationen auf Listen

Suche nach Element

search(L,k) // Returns pointer to k in L (or nil)

```
1 current = L.head;  
2 WHILE current != nil AND current.key != k DO  
3   current = current.next;  
4 return current;
```

Laufzeit beträgt im Worst Case $\Theta(n) \Rightarrow$ Keine Überprüfung, ob Wert bereits in Liste, sonst $\Theta(n)$

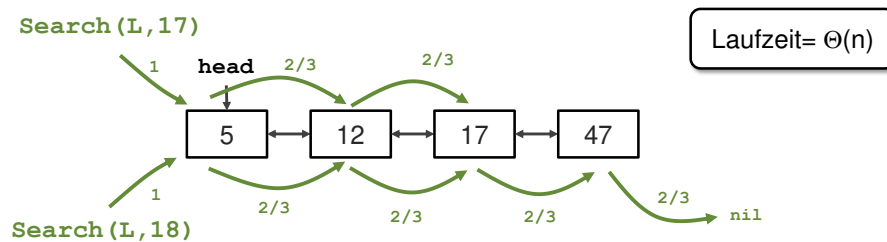


ABBILDUNG 5: Grafische Darstellung einer Suche in Listen

Einfügen eines Elements am Kopf der Liste

insert(L,x)

```
1 insert(L,x)  
2 x.next = L.head;  
3 x.prev = nil;  
4 IF L.head != nil THEN  
5   L.head.prev = x;  
6 L.head = x;
```

Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da Einfügen am Kopf

Löschen eines Elements aus Liste

delete(L,x)

```
1 IF x.prev != nil THEN  
2   x.prev.next = x.next  
3 ELSE  
4   L.head = x.next;  
5 IF x.next != nil THEN  
6   x.next.prev = x.prev;
```

Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da hier Pointer auf Objekt gegeben
Löschen eines Wertes k mithilfe von Suche beträgt $\Omega(n)$

Vereinfachung per Wächter/Sentinels

Ziel ist die Eliminierung der Spezialfälle für Listenanfang/-ende

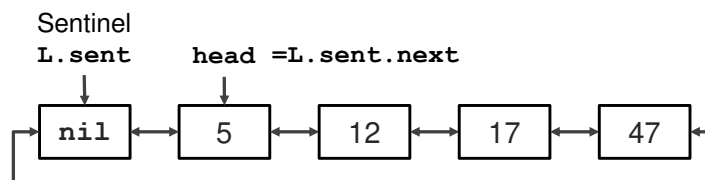


ABBILDUNG 6: Beispiel Sentinel

Löschen mit Sentinels:

deleteSent(L,x)

```
1 x.prev.next = x.next;  
2 x.next.prev = x.prev;
```

1.3 Queues

Abstrakter Datentyp Queue

- `new Q()` • Erzeuge neue (leere) Queue
- `q.isEmpty()` • Gibt an, ob Queue q leer ist
- `q.dequeue()` • Gibt vorderstes Element aus q zurück und löscht es auf Queue
 - Fehlermeldung, falls Queue leer ist
- `q.enqueue(k)` • Schreibt k als neues hinterstes Element auf q
 - Fehlermeldung, falls Queue voll ist

Abstrakter Aufbau

FIFO-Prinzip / First in, First out

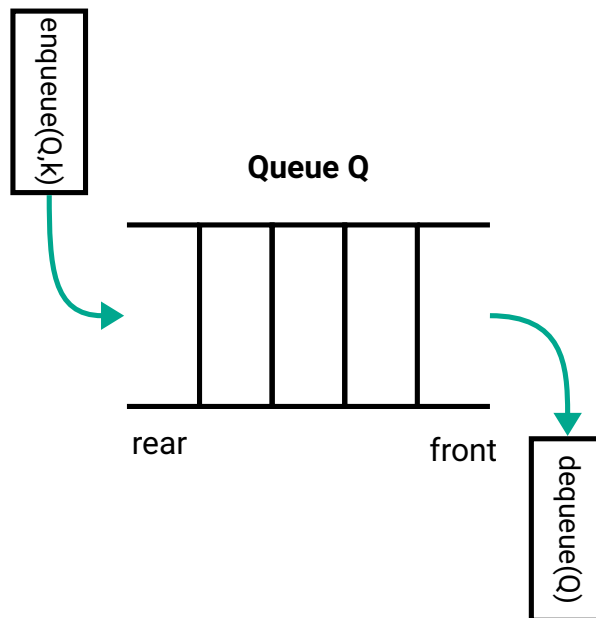


ABBILDUNG 7: Beispiel FIFO

Queues als (virtuelles) zyklisches Array

Bekannt: Maximale Elemente gleichzeitig in Queue

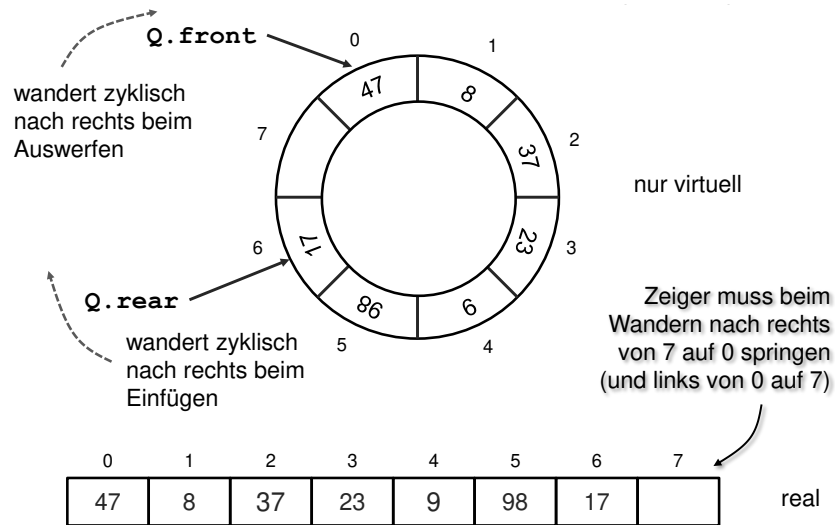


ABBILDUNG 8: Beispiel Queue als Zyklisches Array

Problem, falls **Q.rear** und **Q.front** auf selbes Element zeigen

- Speichere Information, ob Schlange leer oder voll, in boolean **empty**
- Alternativ: Reserviere ein Element des Arrays als Abstandshalter

Methoden für zyklisches Array:

new(Q)

```
1 Q.A[ ]=ALLOCATE(MAX);
2 Q.front=0;
3 Q.rear=0;
4 Q.empty=true;
```

isEmpty(Q)

```
1 return Q.empty;
```

dequeue(Q)

```
1 IF isEmpty(Q) THEN
2     error "underflow";
3 ELSE
4     Q.front=Q.front+1 mod MAX;
5     IF Q.front==Q.rear THEN
6         Q.empty=true;
7     return Q.A[Q.front-1 mod MAX];
```

enqueue(Q,k)

```
1 IF Q.rear==Q.front AND !Q.isEmpty
2 THEN error "overflow";
3 ELSE
4     Q.A[Q.rear]=k;
5     Q.rear=Q.rear+1 mod MAX;
6     Q.empty=false;
```

Queues durch einfach verkettete Listen

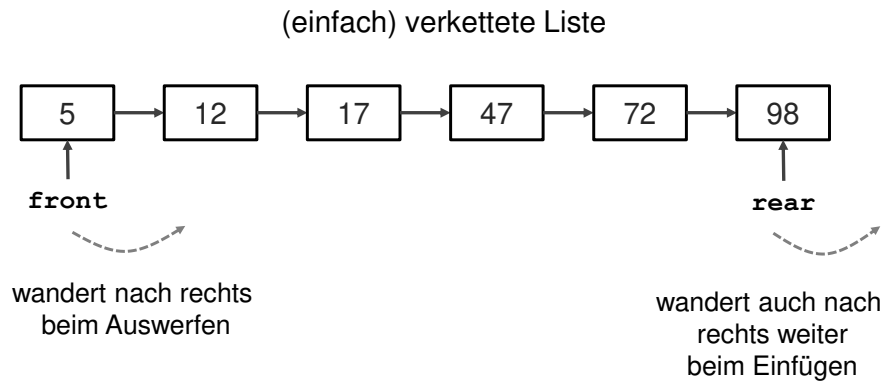


ABBILDUNG 9: Beispiel Queue durch einfach verkettete Liste

Methoden:

new(Q)

```
1 Q.front=nil;  
2 Q.rear=nil;
```

isEmpty(Q)

```
1 IF Q.front==nil THEN  
2   return true;  
3 ELSE  
4   return false;
```

dequeue(Q)

```
1 IF isEmpty(Q) THEN  
2   error "underflow";  
3 ELSE  
4   x=Q.front;  
5   Q.front=Q.front.next;  
6   return x;
```

enqueue(Q,k)

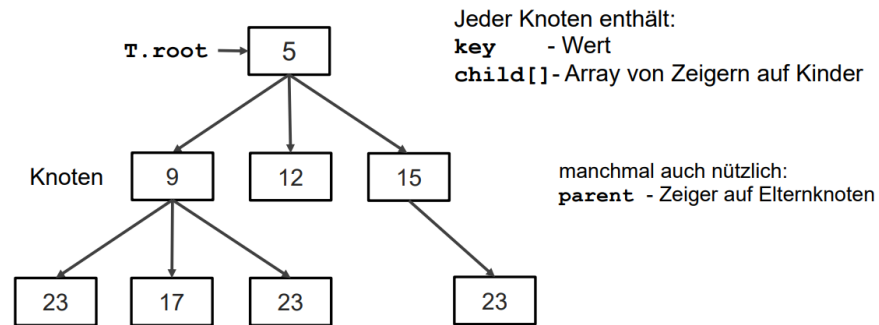
```
1 IF isEmpty(Q) THEN  
2   Q.front=x;  
3 ELSE  
4   Q.rear.next=x;  
5   x.next=nil;  
6   Q.rear=x;
```

Laufzeit:

- Enqueue: $\Theta(1)$
- Dequeue: $\Theta(1)$

1.4 Binäre Bäume

Bäume durch verkettete Listen

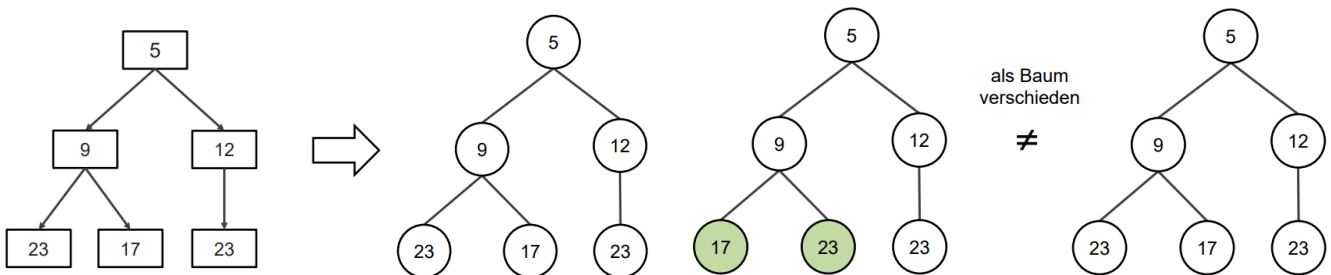


Baum-Bedingung: Baum ist leer oder...
 es gibt einen Knoten r („Wurzel“), so dass jeder Knoten v von der Wurzel aus
 per eindeutiger Sequenz von **child**-Zeigern erreichbar ist:
 $v = r.child[i_1].child[i_2] \dots child[i_m]$

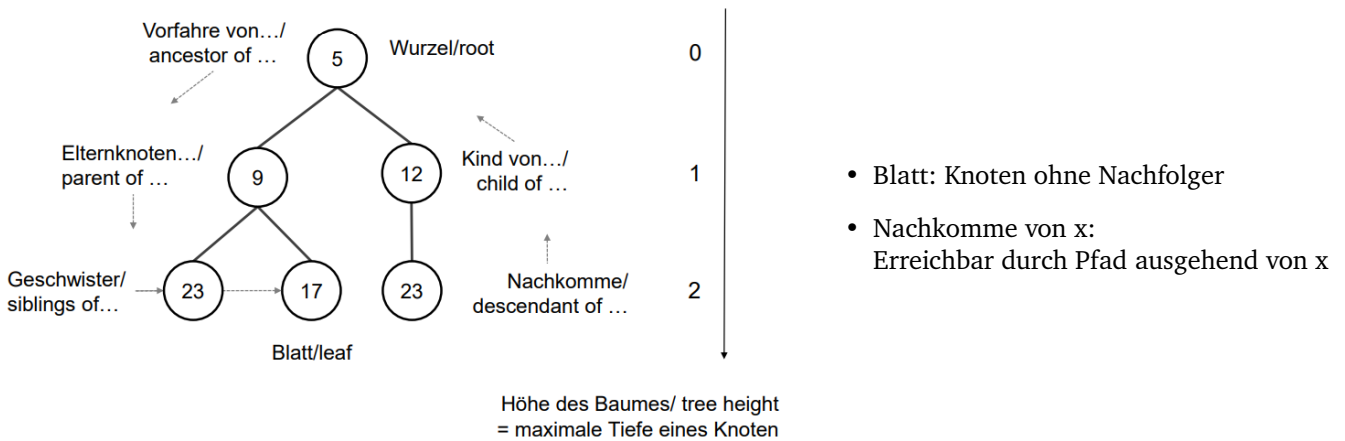
ABBILDUNG 10: Binärbaum-Beispiel

Bäume sind „azyklisch“ (also „keine Schleifen zwischen Knoten“)

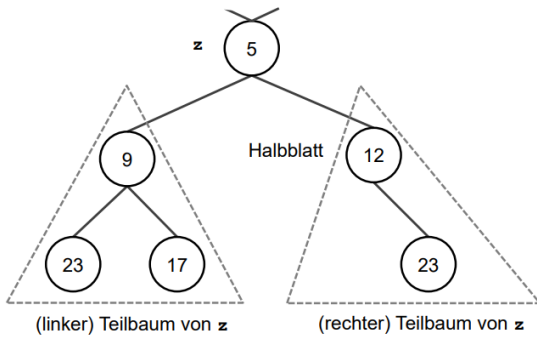
Darstellung als (ungerichteter) Graph



Allgemeine Begrifflichkeiten



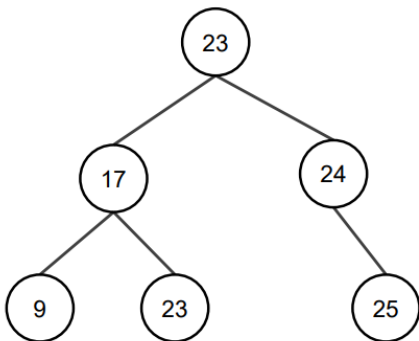
Begrifflichkeiten Binärbaum



- Jeder Knoten hat maximal zwei Kinder
left=child[0] und right=child[1]
- Ausgangsgrad jedes Knoten ist ≤ 2
- Höhe leerer Baum per Konvention -1
- Höhe (nicht-leerer) Baum:
 $\max\{\text{Höhe aller Teilbäume der Wurzel}\} + 1$
- Halbblatt: Knoten mit nur einem Kind

Traversieren von Bäumen

- Darstellung eines Baumes mithilfe einer Liste der Werte aller Knoten
- Laufzeit bei n Knoten: $T(n) = O(n)$
- Nutzung der Preorder für das Kopieren von Bäumen
 1. Preorder betrachtet Knoten und legt Kopie an
 2. Preorder geht dann in Teilbäume und kopiert diese
- Nutzung der Postorder für das Löschen von Bäumen
 1. Postorder geht zuerst in Teilbäume und löscht diese
 2. Betrachten des Knoten erst danach und dann Löschung dieses



inorder(T.root) ergibt

9 17 23 23 24 25

preorder(T.root) ergibt

23 17 9 23 24 25

postorder(T.root) ergibt

9 23 17 25 24 23

Code:

inorder(x)

```

1 IF x != nil THEN
2   inorder(x.left);
3   print x.key;
4   inorder(x.right);

```

preorder(x)

```

1 IF x != nil THEN
2   print x.key;
3   preorder(x.left);
4   preorder(x.right);

```

postorder(x)

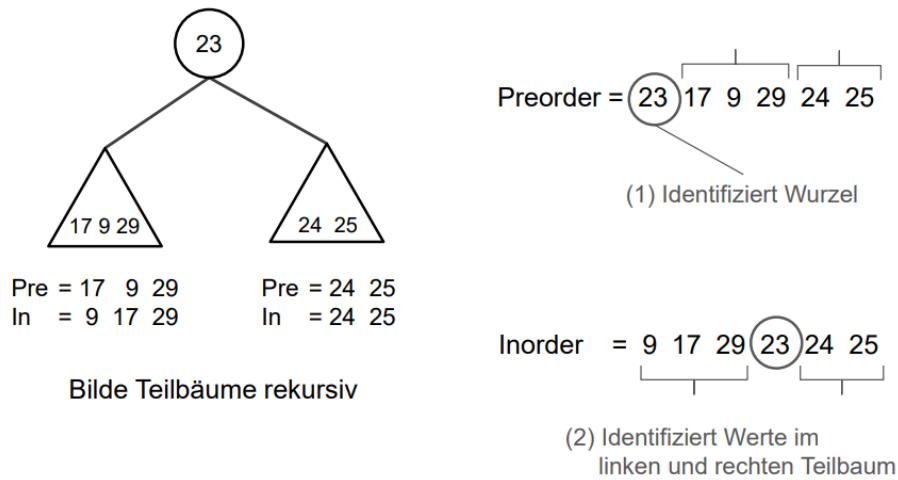
```

1 IF x != nil THEN
2   postorder(x.left);
3   postorder(x.right);
4   print x.key;

```

Eindeutige Bestimmbarkeit von Bäumen

- Nur In-, Pre-, Postorder reichen nicht zur eindeutigen Bestimmbarkeit von Bäumen
⇒ Preorder/Postorder + Inorder + eindeutige Werte sind notwendig



1.4.1 Abstrakter Datentyp Baum

Abstrakter Aufbau:

- `new T()` • Erzeugt neuen Baum namens `t`
- `t.search(k)` • Gibt Element `x` in Baum `t` mit `x.key == k` zurück
- `t.insert(k)` • Fügt Element `x` in Baum `t` hinzu
- `t.delete(x)` • Löscht `x` aus Baum `t`

Suche nach Elementen Starte mit `search(T.root, k)` Code:

`search(x,k)`

```
1 IF x == nil THEN return nil;  
2 IF x.key == k THEN return x;  
3 y = search(x.left, k);  
4 IF y != nil THEN return y;  
5 return search(x.right, k);
```

Laufzeit = $\Theta(n)$ (Jeder Knoten maximal einmal, jeder Knoten im schlechtesten Fall)

Einfügen von Elementen

Hier wird als Wurzel eingefügt (Achtung: Erzeugt linkslastigen Baum) Code:

```
insert(T,x) // x.parent == x.left == x.right == nil;
```

```
1 IF T.root != nil THEN
2   T.root.parent = x;
3   x.left = T.root;
4   T.root = x;
```

Laufzeit = $\Theta(1)$

Löschen von Elementen

Hier: Ersetze x durch Halbblatt ganz rechts

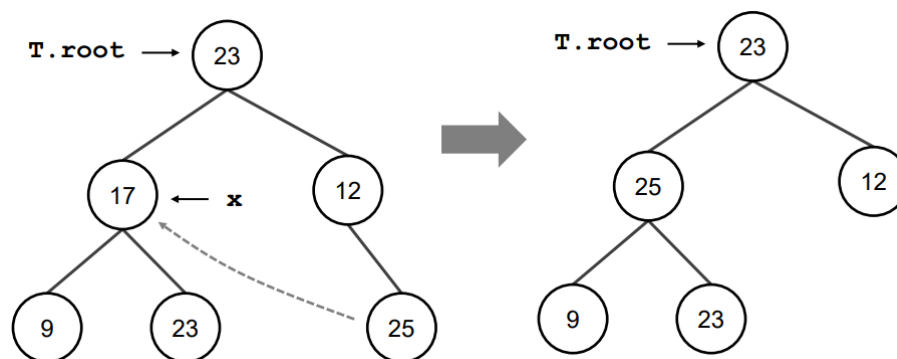


ABBILDUNG 11: Löschen des Knoten 17

```
connect(T,y,w) // Connects w to y.parent
```

```

1  v = y.parent;
2  IF y != T.root THEN
3      IF y == v.right THEN
4          v.right = w;
5      ELSE
6          v.left = w;
7  ELSE
8      T.root = w;
9  IF w != nil THEN
10     w.parent = v;

```

Laufzeit = $\Theta(1)$

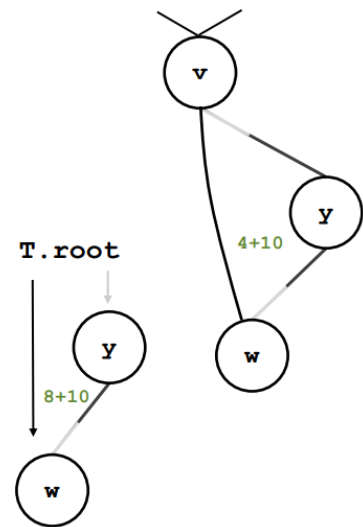


ABBILDUNG 12: Beispiel Connect-Algorithmus
Binärbaum

Delete-Algorithmus:

```
delete(T,x) // assumes x in T
```

```

1  y = T.root;
2  WHILE y.right != nil DO
3      y = y.right;
4  connect(T,y,y.left);
5  IF x != y THEN
6      y.left = x.left;
7      IF x.left != nil THEN
8          x.left.parent = y;
9      y.right = x.right;
10     IF x.right != nil THEN
11         x.right.parent = y;
12     connect(T,x,y);

```

Laufzeit = $\Theta(h)$ (Höhe des Baumes, $h = n$ möglich)

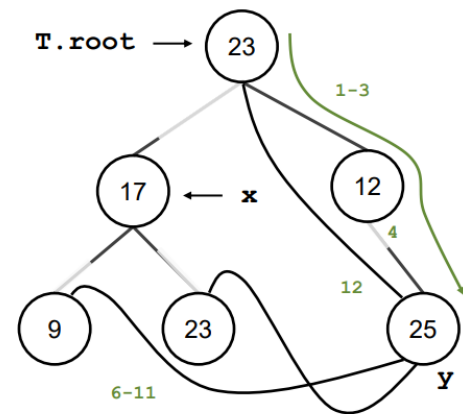


ABBILDUNG 13: Beispiel Delete-Algorithmus
Binärbaum

1.5 Binäre Suchbäume

Definition – Binärer Suchbaum

Totale Ordnung auf den Werten

Für alle Knoten z gilt:

Wenn x Knoten im linken Teilbaum von z , dann $x.key \leq z.key$

Wenn y Knoten im rechten Teilbaum von z , dann $y.key \geq z.key$

Preorder/Postorder + eindeutige Werte \Rightarrow Eindeutige Identifizierung

Suchen im Binären Suchbaum

Code:

```
search(x,k) // 1. Aufruf: x = root
```

```
1 IF x == nil OR x.key == k THEN
2   return x;
3 IF x.key > k THEN
4   return search(x.left,k);
5 ELSE
6   return search(x.right,k);
```

Iterativer Code:

```
iterative-search(x,k)
```

```
1 WHILE x != nil AND x.key != k DO
2   IF x.key > k THEN
3     x = x.left;
4   ELSE
5     x = x.right;
6   return x;
```

Laufzeit (beide) = $O(h)$ (Höhe)

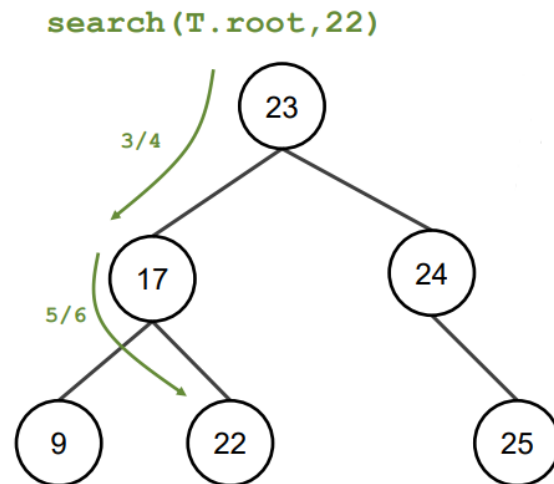


ABBILDUNG 14: Beispiel Search-Algorithmus im Binärbaum

Einfügen im Binary Search Tree

Aufwendiger, da Ordnung erhalten werden muss Code:

```
insert (T,z) // z.left == z.right == nil;
```

```
1  x = T.root;  
2  px = nil;  
3  WHILE x != nil DO  
4    px = x;  
5    IF x.key > z.key THEN  
6      x = x.left;  
7    ELSE  
8      x = x.right;  
9  z.parent = px;  
10 IF px == nil THEN  
11   T.root = z;  
12 ELSE  
13   IF px.key > z.key THEN  
14     px.left = z;  
15   ELSE  
16     px.right = z;
```

Laufzeit = $O(h)$

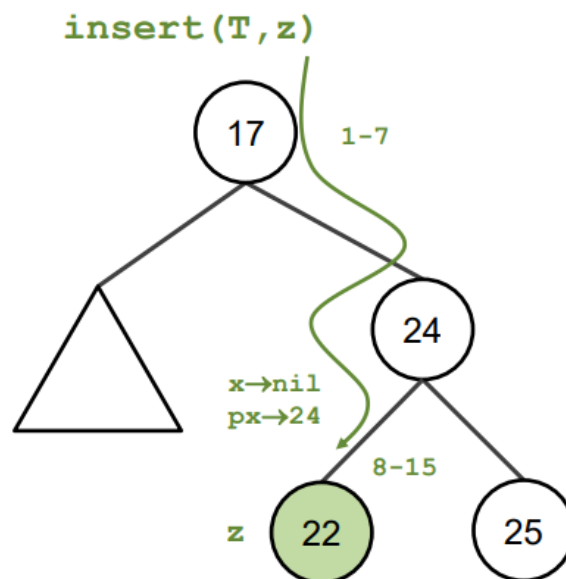


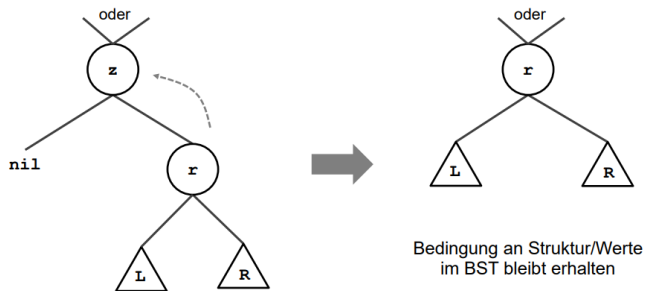
ABBILDUNG 15: Beispiel einfügen in Binären Suchbaum

Löschen im BST

wir Unterscheiden drei verschiedene Fälle:

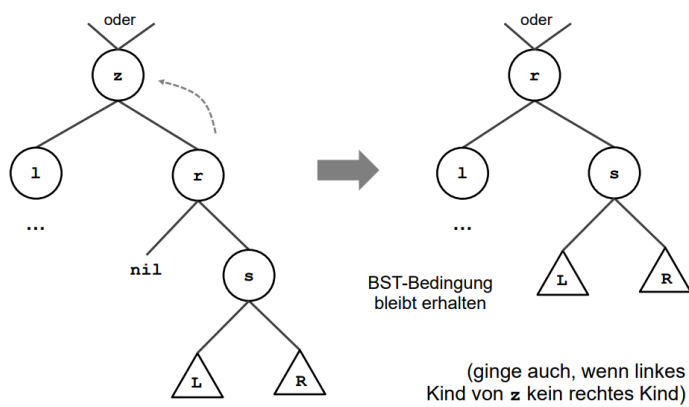
Löschen im BST (I)

zu löschender Knoten z hat maximal ein Kind



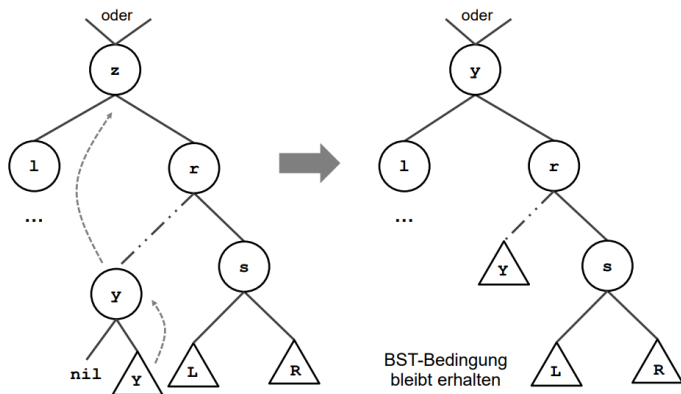
Löschen im BST (II)

rechtes Kind von Knoten z hat kein linkes Kind



Löschen im BST (III)

„kleinster“ Nachfahre vom rechten Kind von z



Code:

```
transplant(T,u,v) // Hängt Teilbaum v an Parent von u
```

```
1 IF u.parent == nil THEN
2   T.root = v;
3 ELSE
4   IF u == u.parent.left THEN
5     u.parent.left = v;
6   ELSE
7     u.parent.right = v;
8 IF v != nil THEN
9   v.parent = u.parent;
```

```
delete(T,z)
```

```
1 IF z.left == nil THEN
2   transplant(T,z,z.left)
3 ELSE
4   IF z.right == nil THEN
5     transplant(T,z,z.left)
6   ELSE
7     y = z.right;
8     WHILE y.left != nil DO y = y.left;
9     IF y.parent != z THEN
10      transplant(T,y,y.right)
11      y.right = z.right;
12      y.right.parent = y;
13      transplant(T,z,y)
14      y.left = z.left;
15      y.left.parent = y;
```

Laufzeit = $O(h)$

Laufzeit ist damit besser, wenn viele Suchoperationen und h klein relativ zu n

Höhe eines BST

- Best Case
- Vollständiger Baum (Alle Blätter gleiche Tiefe)
 - $h = O(\log_2 n)$
 - Laufzeit = $O(\log_2 n)$

- Worst Case
- Degenerierter Baum (links- bzw. rechtslastiger Baum)
 - $h = n - 1$
 - Laufzeit = $\Theta(n)$

- Durchschnittliche Höhe
- Erwartete Höhe: $\Theta(\log_2 n)$

Suchbäume als Suchindex

- Knoten speichert nur Primärschlüssel und Zeiger auf Daten
- Zusätzliche Indizes möglich, kosten aber Speicherplatz

Suchbäume als Suchindex

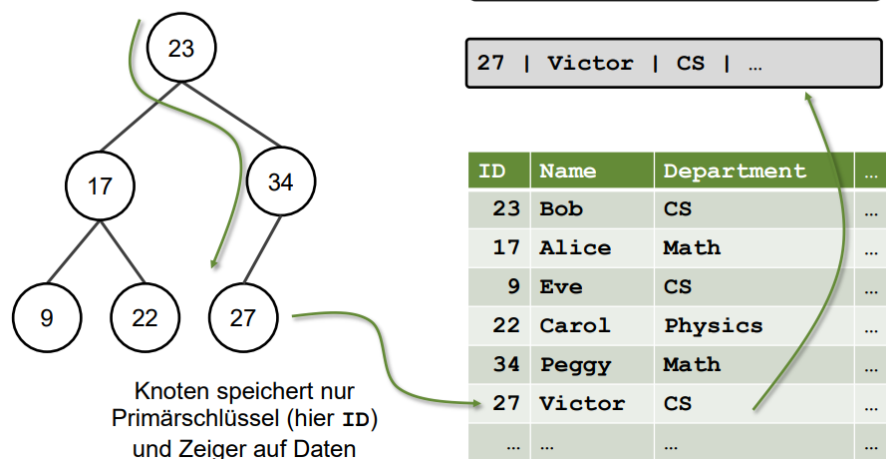


ABBILDUNG 16: Suchbäume als Suchindex