

1 Graph Algorithms

1.1 Graphen

- **(Endlicher) gerichteter Graph**

- (endlicher) gerichteter Graph $G = (V, E)$
- besteht aus (endlicher) Knotenmenge V
- besteht aus (endlicher) Kantenmenge $E \subseteq V \times V$
- $(u, v) \in E$: Kanten von Knoten u zu v
- Kanten haben eine Richtung

- **Ungerichtete Graphen**

- (endlicher) ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- besteht aus (endlicher) Knotenmenge V
- besteht aus (endlicher) Kantenmenge $E \subseteq V \times V$, sodass $(u, v) \in E \Leftrightarrow (v, u) \in E$
- Kanten haben keine Richtung

- **Pfadfinder**

- Knoten v ist von Knoten u erreichbar, wenn es von u aus einen Pfad über n Knoten nach v
- u ist immer von u per leerem Pfad ($k=1$) erreichbar
- Länge des Pfades = $k - 1$ = Anzahl Kanten

- **Zusammenhängende Graphen**

- Ungerichtet: Zusammenhängend wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist
- Gerichtet: **Stark** zusammenhängend, wenn obiges auch gemäß Kantenrichtung gilt

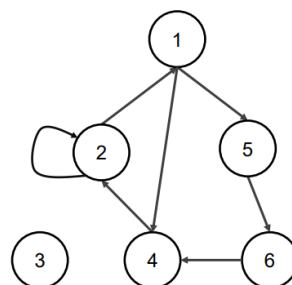
- **Bäume und Subgraphen**

Graph G ist ein Baum, wenn V leer ist oder wenn es einen Knoten in V gibt, von dem aus jeder andere Knoten eindeutig erreichbar ist (Wurzel).
Graph $G' = (V', E')$ ist Subgraph von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

- **Darstellung von Graphen**

- Als Adjazenzmatrix (1, wenn Kante von i zu j bzw. 0, wenn keine Kante)
- Bei ungerichteten Graphen ist Matrix spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen
- Speicherbedarf: $\Theta(|V|^2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- Auch darstellbar als Array mit verketteten Listen
- Speicherbedarf: $\Theta(|V| + |E|)$

- **Gewichtete Graphen**

- gewichteter gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- besitzt zusätzlich Funktion $w : E \rightarrow R$
- Angabe des Gewichts einer Kante u nach v durch $w((u, v))$

1.2 Breadth-First Search (BFS)

- **Idee**

- Besuche zuerst alle unmittelbaren Nachbarn, dann deren Nachbarn, usw.
- Anwendung: Webcrawling, Garbage Collection,..

- **Algorithmus**

```
BFS(G,s) //G=(V,E) s = source node in V

1 BFS(G,s) //G=(V,E) s = source node in V
2
3 FOREACH u in V-{s} DO
4     u.color = WHITE;           // Weiß = noch nicht besucht
5     u.dist = +∞                // Setzen der Distanzen auf Unendlich
6     u.pred = nil;             // Setzen der Vorgänger auf nil
7 s.color = GRAY;               // Anfang bei Startnode
8 s.dist = 0;
9 s.pred = nil;
10 newQueue(Q);
11 enqueue(Q,s);
12 WHILE !isEmpty(Q) DO
13     u = dequeue(Q);
14     FOREACH v in adj(G,u) DO
15         IF v.color == WHITE THEN
16             v.color == GRAY;
17             v.dist = u.dist+1;
18             v.pred = u;
19             enqueue(Q,v);
20     u.color = BLACK;           // Knoten abgearbeitet
```

Farben:

- * WHITE: Knoten noch nicht besucht
- * GRAY: Knoten in Queue für nächsten Schritt
- * BLACK: Knoten ist fertig

- Laufzeit: $O(|V| + |E|)$
- Nach Algorithmus steht in v die kürzeste Distanz von s nach v

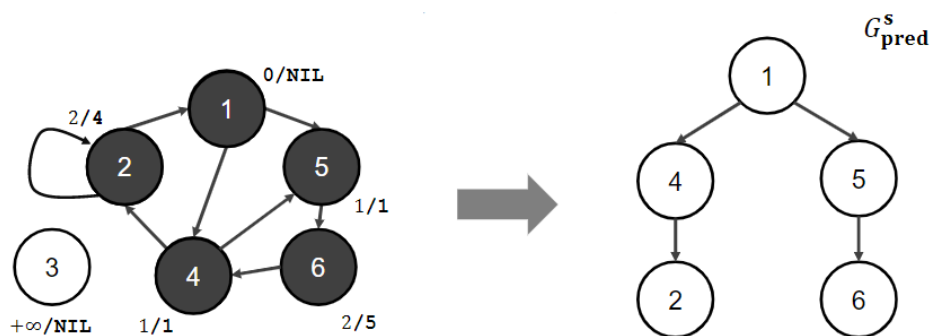
- Kürzeste Pfade ausgeben

```
print-path(G,s,v) // Assumes that BFS(G,s) has already been executed
```

```

1 IF v == s THEN
2   print s;
3 ELSE
4   IF v.pred == nil THEN
5     print "no path from s to v"
6   ELSE
7     print-path(G,s,v.pred);
8     print v;
```

- Abgeleiteter BFS-Baum



- Subgraph $G_{pred}^s = (V_{pred}^s, E_{pred}^s)$ von G :
 - * $V_{pred}^s = \{v \in V | v.pred \neq nil\} \cup \{s\}$
 - * $E_{pred}^s = \{(v.pred, v) | v \in V_{pred}^s - \{s\}\}$
- G_{pred}^s enthält alle von s aus erreichbaren Knoten in G
- Außerdem handelt es sich hier nur um kürzeste Pfade

1.3 Depth-First Search(DFS)

- Idee

- Besuche zuerst alle noch nicht besuchten Nachfolgeknoten
- "Laufe so weit wie möglich weg vom aktuellen Knoten"

- Algorithmus

```
DFS(G)
```

```

1 FOREACH u in V DO
2   u.color = WHITE;
3   u.pred = nil;
4 time = 0; // time hier als globale Variable
5 FOREACH u in v DO
6   IF u.color == WHITE THEN
7     DFS-VISIT(G,u) // Start eines rekursiven Aufrufs
```

DFS-VISIT(G,u)

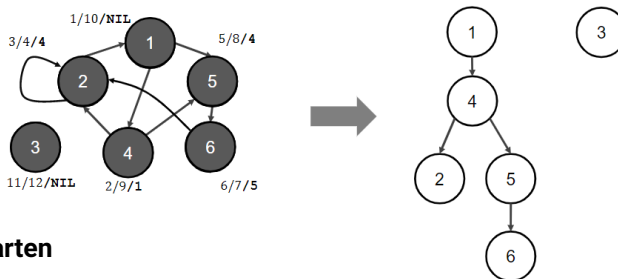
```

1 time = time + 1;
2 u.disc = time;           // discovery time
3 u.color = GRAY;
4 FOREACH v in adj(G,u) DO
5     IF v.color == WHITE THEN
6         v.pred = u;
7         DFS-VISIT(G,v);
8 u.color = BLACK;
9 time = time + 1;
10 u.finish = time;        // finish time

```

• DFS-Wald = Menge von DFS-Bäumen

- Subgraph $G_{pred} = (V, E_{pred})$ von G
- besteht aus $E_{pred} = (v.pred, v) | v \in V, v.pred \neq nil$
- DFS-Baum gibt nicht unbedingt den kürzesten Weg wieder

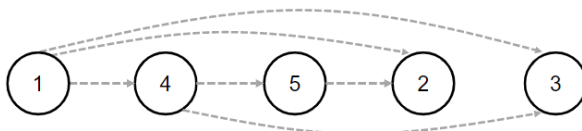


• Kantenarten

- Baumkanten: alle Kanten in G_{pred}
- Vorwärtskanten: alle Kanten in G zu Nachkommen in G_{pred} , die keine Baumkante sind
- Rückwärtskanten: alle Kanten in G zu Vorfahren in G_{pred} , die keine Baumkante sind (inkl. Schleifen)
- Kreuzkanten: alle anderen Kanten in G

• Anwendungen DFS

- Job Scheduling (Job X muss vor Job Y beendet sein)
- Topologisches Sortieren
 - * nur für dag (directed acyclic graph)
 - * Kanten immer nur nach rechts
 - * Sortierung aber nicht eindeutig



TOPOLOGICAL-SORT(G)

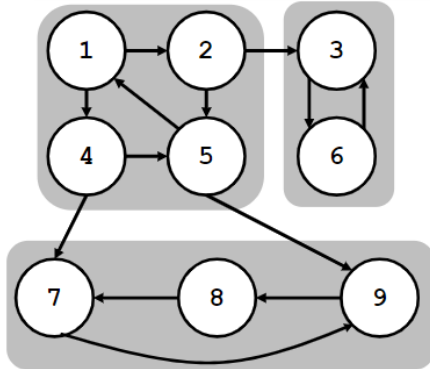
```

1 new LinkedList(L);
2 run DFS(G) but, each time a node is finished, insert in front of L
3 return L.head;

```

- **Starke Zusammenhangskomponenten**

- Knotenmenge $C \subseteq V$, so dass
 - es zwischen zwei Knoten $u, v \in C$ einen Pfad von u nach v gibt
 - und es keine Menge $D \subseteq V$ mit $C \subsetneq D$ gibt, für die obiges auch gilt.



Eigenschaften:

- * Verschiedene SCC's sind disjunkt
- * Zwei SCC's sind nur in eine Richtung verbunden

- Algorithmus:

- * DFS zweimal laufen lassen

Einmal auf Graph G

Einmal auf Graph $G^T = (V, E^T)$ (transponiert)

- * Dadurch bleiben die SCC's gleich, die Kanten drehen sich aber jeweils um
- * Code:

SCC(G)

```

1  run DFS(G)
2  compute  $G^T$ 
3  run DFS( $G^T$ ) but visit vertices in main loop
4    in descending finish time from 1
5  output each DFS tree from above as one SCC

```

1.4 Minimale Spannbäume

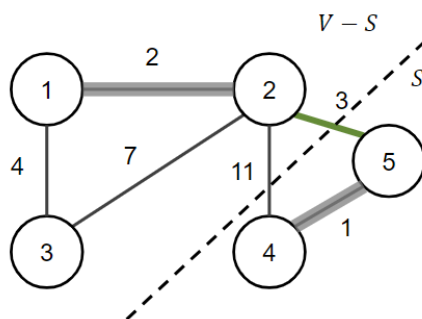
- **Definition**

- Verbindung aller Knoten miteinander
- Minimaler Spannbaum \Rightarrow Minimales Gewicht

- **Allgemeiner Algorithmus**

genericMST(G,w)

```
1 A =  $\emptyset$ 
2 WHILE A does not form a spanning tree for G DO
3   find safe edge {u,v} for A
4   A = A  $\cup$  {{u,v}}
5 return A
```



Terminologie:

- * Schnitt (S, V-S) partitioniert Knoten in zwei Mengen
- * {u,v} überbrückt Schnitt, wenn $u \in S$ und $v \in V - S$
- * Schnitt respektiert $A \subseteq E$, wenn keine Kante {u,v} aus A den Schnitt überbrückt
- * {u,v} leichte Kante für (S, V-S), wenn $w(\{u,v\})$ minimal für alle den Schnitt überbrückenden Kanten
- * {u,v} sicher für A, wenn $A \cup \{\{u,v\}\}$ Teilmenge eines MST

- **Algorithmus von Kruskal**

- Lässt parallel mehrere Unterbäume eines MST wachsen
- In Worten: Suchen der "kleinsten" Kante und Zusammenfügen von Mengen, falls Mengen ungleich sind
- Laufzeit: $O(|E| \cdot \log |E|)$

MST-Kruskal(G,w)

```
1 A =  $\emptyset$ 
2 FOREACH v in V DO
3   set(v) = {v}; // Menge mit sich selbst
4 Sort edges according to weight in nondecreasing order
5 FOREACH {u,v} in E according to order DO
6   IF set(u)  $\neq$  set(v) THEN // Mengen noch nicht verbunden
7     A = A  $\cup$  {{u,v}};
8     UNION(G,u,v); // Zusammenführen der Mengen aller Knoten aus den Sets
9 return A;
```

• Algorithmus von Prim

- Konstruiert einen MST Knoten für Knoten
- Fügt immer leichte Kante zu zusammenhängender Menge hinzu
- Laufzeit: $O(|E| + |V| \cdot \log|V|)$

```

MST-Prim(G,w,r) // r is given root
1  FOREACH v in V DO
2      v.key = +∞;
3      v.pred = nil;
4  r.key = -∞
5  Q = V;
6  WHILE !isEmpty(Q) DO
7      u = EXTRACT-MIN(Q);    // smallest key value
8      FOREACH v in adj(u) DO
9          IF v ∈ Q and w({u,v}) < v.key THEN
10             v.key = w({u,v});
11             v.pred = u;
  
```

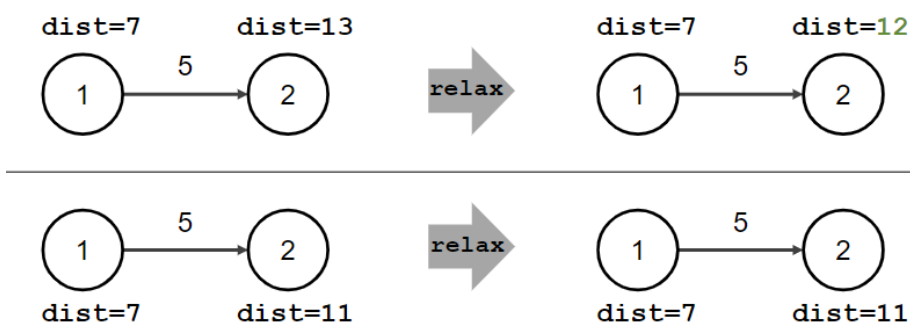
1.5 Kürzeste Wege in (gerichteten) Graphen

• Definition

- SSSP - Single-Source Shortest Path
- Von Quelle s ausgehend die kürzesten Pfad zu allen anderen Knoten
- Kürzester Pfad: Pfad mit minimalem Gesamtgewicht von einem zum anderen Knoten
- BFS findet nur minimale Kantenwege (nicht Gewichtswege)
- MST minimiert das Gesamtgewicht des Baumes (nicht zu einzelnen Kanten)
- Negative Kantengewichte sind erlaubt, aber keine Zyklen mit negativem Gesamtgewicht

• Gemeinsame Idee für Algorithmen - Relax

- Verringere aktuelle Distanz von Knoten v , wenn durch Kante (u, v) kürzer erreichbar



```

relax(G,u,v,w)
1  IF v.dist > u.dist + w((u,v)) THEN
2      v.dist = u.dist + w((u,v));
3      v.pred = u;
  
```

• Bellman-Ford-Algorithmus

- Laufzeit: $\Theta(|E| \cdot |V|)$

Bellman-Ford-SSSP(G, s, w)

```

1 initSSSP( $G, s, w$ );
2 FOR  $i = 1$  TO  $|V|-1$  DO
3     FOREACH  $(u, v)$  in  $E$  DO
4         relax( $G, u, v, w$ );
5 FOREACH  $(u, v)$  in  $E$  DO // Prüfung ob negativer Zyklus
6     IF  $v.\text{dist} > u.\text{dist} + w((u, v))$  THEN
7         return false;
8 return true;
```

initSSSP(G, s, w)

```

1 FOREACH  $v$  in  $V$  DO
2      $v.\text{dist} = \infty$ ;
3      $v.\text{pred} = \text{nil}$ ;
4  $s.\text{dist} = 0$ ;
```

• TopoSort für dag

- Erhalten des kürzesten Pfades durch das topologische Sortieren
- Laufzeit: $\Theta(|E| + |V|)$

TopoSort-SSSP(G, s, w) // G muss dag sein

```

1 initSSSP( $G, s, w$ );
2 execute topological sorting
3 FOREACH  $u$  in  $V$  in topological order DO
4     FOREACH  $v$  in adj( $u$ ) DO
5         relax( $G, u, v, w$ );
```

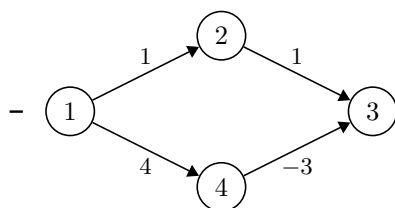
• Dijkstra-Algorithmus

- Voraussetzung: Keine negativen Kantengewichte
- Laufzeit: $\Theta(|V| \cdot \log|V| + |E|)$

Dijkstra-SSSP(G, s, w)

```

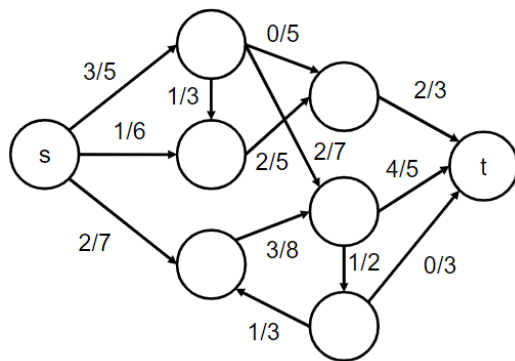
1 initSSSP( $G, s, w$ );
2  $Q = V$ ;
3 WHILE !isEmpty( $Q$ ) DO
4      $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ ; // smallest distance
5     FOREACH  $v$  in adj( $u$ ) DO
6         relax( $G, u, v, w$ );
```



* Beispiel für Problem mit negativen Kantengewichten bei Dijkstra: Dijkstra würde Pfad 1-2-3 liefern, da das Kantengewicht 4 größer als der andere Pfad ist.

1.6 Maximaler Fluss in Graphen

- Idee



- * Kanten haben Flusswert und maximale Kapazität
- * Jeder Knoten (außer s und t) haben den gleichen eingehenden und ausgehenden Fluss
- * Ziel: Finde maximalen Fluss von s nach t
- * s: Source/Quelle
- * t: Target/Senke

- Flussnetzwerk:**

Ein Flussnetzwerk ist ein gewichteter, gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kapazität c , so dass $c(u, v) \geq 0$ für $(u, v) \in E$ und $c(u, v) = 0$ für $(u, v) \notin E$, mit zwei Knoten $s, t \in V$, so dass jeder Knoten von s aus erreichbar ist und t von jedem Knoten aus erreichbar ist. Damit gilt $|E| \geq |V| - 1$.

- Fluss:**

Ein Fluss $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für ein Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Kapazität c und Quelle s und Senke t erfüllt $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ für alle $u, v \in V$, sowie für alle $u \in V - \{s, t\}$:

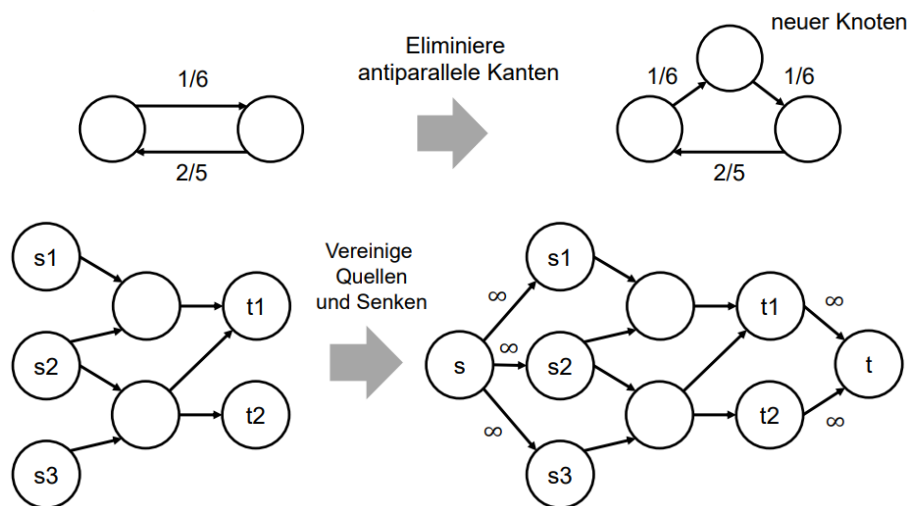
$$\sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} f(v, u) \text{ (ausgehend = eingehend)}$$

- Wert eines Flusses**

Der Wert $|f|$ eines Flusses $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für ein Flussnetzwerk G ist:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t)$$

- Transformationen**



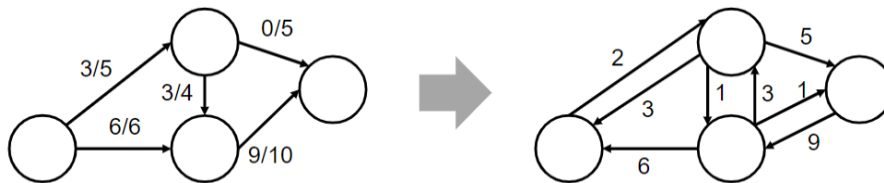
- **Restkapazitätsgraph**

- Wird für Ford-Fulkerson benötigt

- Restkapazität $c_f(u, v)$:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{falls } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{falls } (v, u) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $G_f = (V, E_f)$ mit $E_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$



- Suche eines Pfades von s nach t und Erhöhung aller Flüsse um niedrigsten möglichen Wert auf Pfad

- **Ford-Fulkerson-Algorithmus**

- Idee: Suche Pfad von s nach t , der noch **erweiterbar** ist

- Suche dieses Pfades im Restkapazitätsgraphen G_f (mögliche Zu- und Abflüsse)

- Code:

Ford-Fulkerson(G, s, t, c)

```

1  FOREACH e in E do e.flow = 0;
2  WHILE there is path p from s to t in  $G_{flow}$  DO
3       $c_{flow}(p) = \min \{c_{flow}(u, v) : (u, v) \text{ in } p\}$ 
4      FOREACH e in p DO
5          IF e in E THEN
6              e.flow = e.flow +  $c_{flow}(p)$ ;
7          ELSE
8              e.flow = e.flow -  $c_{flow}(p)$ ;

```

- Die Pfadsuche erfolgt z.B. per BFS oder DFS

- Laufzeit: $O(|E| \cdot u \cdot |f^*|)$

($O(|V| \cdot |E|^2)$ Mit Verbesserung nach Edmonds-Karp)

(wobei f^* maximaler Fluss und Fluss um bis zu $\frac{1}{u}$ pro Iteration wächst)

– Beispiel:

