

1 Advanced Designs

1.1 Dynamische Programmierung

- **Anwendung**

Anwendung, wenn sich Teilprobleme überlappen

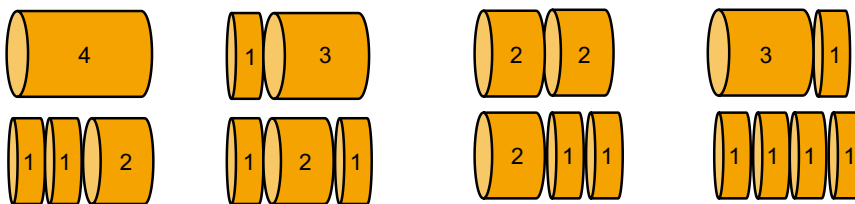
1. Wir charakterisieren die Struktur einer optimalen Lösung
2. Wir definieren den Wert einer optimalen Lösung rekursiv
3. Wir berechnen den Wert einer optimalen Lösung (meist bottom-up Ansatz)
4. Wir konstruieren eine zugehörige optimale Lösung aus berechneten Daten

- **Stabzerlegungsproblem**

Ausgangsproblem: Stangen der Länge n cm sollen so zerschnitten werden, dass der Erlös r_n maximal ist, indem die Stange in kleinere Stäbe geschnitten wird.

Länge i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis p_i	0	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Beispiel: Gesamtstange hat Länge 4. Welchen Erlös kann man max. erhalten?



Optimaler Erlös: zwei 2cm lange Stücke ($5 + 5 = 10$)

– *Aufteilung der Stange:*

- * Stange mit Länge n kann auf 2^{n-1} Weisen zerlegt werden
- * Position i : Distanz vom linken Ende der Stange
- * Aufteilung in k Teilstäbe ($1 \leq k \leq n$)
- * optimale Zerlegung: $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$
- * maximaler Erlös: $r_n = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$
- * z.B.: $r_4 = 10$ (siehe oben)

– Rekursive Top-Down Implementierung:

```
CUT-ROD(p,n) // p Preis-Array, n Stangenlänge
1 IF n == 0
2   return 0;
3 q = -∞;
4 FOR i = 1 TO n // nicht Start bei 0, sonst kein Rekursionsschritt
5   q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n - i));
6 return q;
```

– Stabzerlegung via Dynamischer Programmierung:

* Ziel:

Mittels dynamischer Programmierung wollen wir CUT-ROD in einen effizienten Algorithmus verwandeln.

* Bemerkung:

Naiver rekursiver Ansatz ist **ineffizient**, da dieser immer wieder diesselben Teilprobleme löst.

* Ansatz:

Jedes Teilproblem nur einmal lösen. Falls die Lösung eines Teilproblems nochmal benötigt wird, schlagen wir diese nach.

* Dynamische Programmierung wird zusätzlichen Speicherplatz benutzen um Laufzeit einzusparen.

* Reduktion von exponentieller auf polynomielle Laufzeit.

– Rekursiver Top-Down-Ansatz mit Memoisation:

* Idee: Speicherung der Lösungen der Teilprobleme

* Laufzeit: $\Theta(n^2)$

```
MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)
1 Let r[0...] be new array
2 FOR i = 0 TO n
3   r[i] = -∞
4 return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

```
MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r) // r new Array
1 IF r[n] ≥ 0 // Abfrage ob vorhanden
2   return r[n]
3 IF n == 0
4   q = 0
5 ELSE
6   q = -∞
7   FOR i = 1 to n
8     q = max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n - i, r))
9   r[n] = q // Abspeichern
10 return q
```

– Bottom-Up Ansatz:

- * Laufzeit: $\Theta(n^2)$
- * Sortieren der Teilprobleme nach ihrer Größe und lösen in dieser Reihenfolge
- * Alle Teilprobleme kleiner als das momentane Problem sind bereits gelöst

BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```

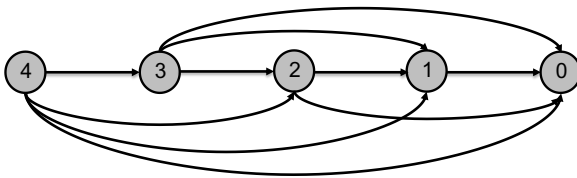
1 Let r[0...n] be a new array
2 r[0] = 0
3 FOR j = 1 TO n
4   q = -∞
5   FOR i = 1 TO j
6     q = max(q, p[i] + r[j - i])
7   r[j] = q
8 return r[n]
```

EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```

1 Let r[0...n] and s[0...n] be new arrays
2 r[0] = 0, s[0] = 0
3 FOR j = 1 TO n
4   q = -∞
5   FOR i = 1 TO j
6     IF q < p[i] + r[j-i]
7       q = p[i] + r[j - i]
8       s[j] = i
9   r[j] = q
10 return r and s
```

* Teilproblemgraph ($i \rightarrow j$ bedeutet, dass Berechnung von r_i den Wert r_j benutzt)



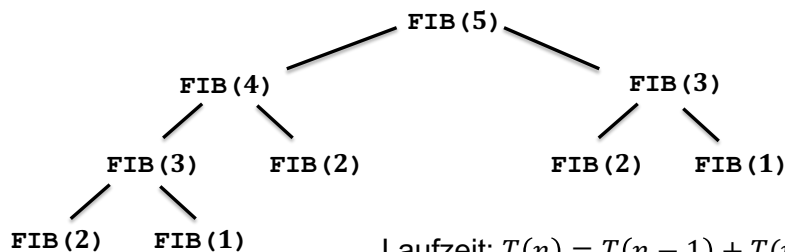
• Fibonacci-Zahlen

- $F_1 = F_2 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Naiver rekursiver Algorithmus:

FIB(n)

```

1 IF n ≤ 2
2   f = 1;
3 ELSE
4   f = FIB(n-1) + FIB(n-2);
5 return f;
```



Laufzeit: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$
 $\Rightarrow \Theta(2^n)$

Gleiche Teilprobleme werden wieder mehrmals gelöst

– Rekursiver Algorithmus mit Memoisation

- * Wieder Abspeichern von Teilproblemen um Laufzeit einzusparen
- * Laufzeit: $\Theta(n)$

MEMOIZED-FIB(n)

```
1 Let m[0...n-1] be a new array
2 FOR i = 0 TO n - 1
3     m[i] = 0
4 return MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)
```

MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)

```
1 IF m[n-1] != 0
2     return m[n-1];           // Auslesen von gespeicherten Werten
3 IF n ≤ 2
4     f = 1;
5 ELSE
6     f = MEMOIZED-FIB-AUX(n-1, m) + MEMOIZED-FIB-AUX(n-2, m);
7 m[n-1] = f;
8 return f;
```

– Bottom-Up Algorithmus

- * Hier wieder Berechnen aller Teilprobleme von unten beginnend

BOTTOM-UP-FIB(n)

```
1 Let m[0...n-1] be a new array
2 FOR i = 1 TO n
3     IF i ≤ 2
4         f = 1;
5     ELSE
6         f = BOTTOM-UP-FIB(n-1) + BOTTOM-UP-FIB(n-2);
7     m[i] = f;
8 return m[n-1];
```

1.2 Greedy-Algorithmus

- **Idee**

- Trifft stets die Entscheidung, die in diesem Moment am besten erscheint
- Trifft **lokale** optimale Entscheidung (evtl. nicht global die Beste)

- **Aktivitäten-Auswahl-Problem**

- *Definition*

- * 11 anstehende Aktivitäten $S = \{a_1, \dots, a_{11}\}$
- * Startzeit s_i und Endzeit f_i , wobei $0 \leq s_i < f_i < \infty$
- * Aktivität a_i findet im halboffenen Zeitintervall $[s_i, f_i)$ statt
- * Zwei Aktivitäten sind kompatibel, wenn sich deren Zeitintervalle nicht überlappen

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

Aktivitäten: $\{a_3, a_9, a_{11}\}$

Aktivitäten: $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$

Aktivitäten: $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$

- *Ansatz mittels dynamischer Programmierung*

- * Menge von Aktivitäten, die starten nachdem a_i endet und enden, bevor a_j startet
 $S_{ij} = \{a \in S, a = (s, f) : s \geq f_i, f < s_j\}$
- * Definiere maximale Menge A_{ij} von paarweise kompatiblen Aktivitäten in S_{ij} .
 $c[i, j] = |A_{ij}|$
- * Optimale Lösung für Menge S_{ij} die Aktivitäten a_k enthält:
 $c[i, j] = \max_{a_k \in S_{ij}} \{c[i, k] + c[k, j] + 1\}$ (0, falls $S_{ij} = \emptyset$)

- *Greedy-Wahl*

- * lokal die beste Wahl
- * Auswahl der Aktivität mit geringster Endzeit (möglichst viele freie Ressourcen)
- * Also hier Teilprobleme, die nach a_1 starten
- * $S_k = \{a_i \in S : s_i \geq f_k\}$: Menge an Aktivitäten, die starten, nachdem a_k endet
- * *Optimale-Teilstruktur-Eigenschaft*
Wenn a_1 in optimaler Lösung enthalten ist, dann besteht optimale Lösung zu ursprünglichem Problem aus Aktivität a_1 und allen Aktivitäten zur einer optimalen Lösung des Teilproblems S_1

– Rekursiver Greedy-Algorithmus

- * Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert
- * Laufzeit: $\Theta(n)$

```
RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)

1 // s Anfangszeitenarray, f Endzeitenarray,
2 // k Index von Teilproblem, n Größe Anfangsproblem
3 m = k + 1;
4 WHILE m ≤ n and s[m] < f[k] // Suche nach erster Kompatibilität
5     m = m + 1;
6 IF m ≤ n
7     // Ausgabe des Elements und Berechnung weiterer Aktivitäten
8     return {am} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, m, n)
9 ELSE
10    return ∅
```

– Iterativer Greedy-Algorithmus

- * Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert
- * Laufzeit: $\Theta(n)$

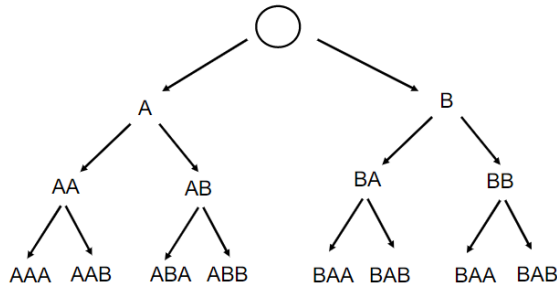
```
GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)

1 n = s.length;
2 A = {a1};
3 k = 1; // Index des zuletzt hinzugefügten Elements in A
4 FOR m = 2 TO n
5     IF s[m] ≥ f[k] // Findet zuerst endende Aktivität in Menge
6         A = A ∪ {am}; // Fügt diese hinzu, falls kompatibel
7         k = m;
8 return A;
```

1.3 Backtracking

- **Suchbaum - Baum der Möglichkeiten**

- Darstellung aller für ein Problem bestehenden Möglichkeiten
- Problem: Dreimal hintereinander der selbe Buchstabe (A,B)



- **Backtracking - Idee**

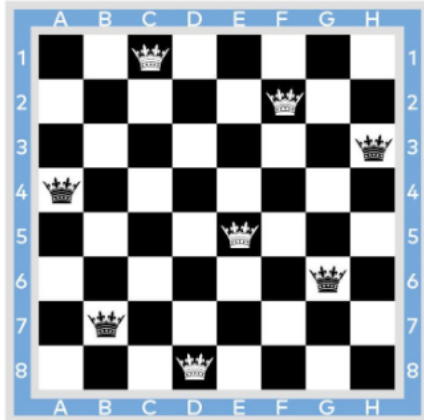
- Lösung finden via Trial and error
- Schrittweises Herantasten an die Gesamtlösung
- Falls Teillösung inkorrekt → Schritt zurück und andere Möglichkeit
- Voraussetzung:
 - * Lösung setzt sich aus Komponenten zusammen (Sudoku, Labyrinth,..)
 - * Mehrere Wahlmöglichkeiten für jede Komponente
 - * Teillösung kann getestet werden

- **Allgemeiner Backtracking-Algorithmus**

```
BACKTRACKING(A, s)
1 IF alle Komponenten richtig gesetzt
2   return true;
3 ELSE
4   WHILE auf aktueller Stufe gibt es Wahlmöglichkeiten
5     wähle einen neuen Teillösungsschritt
6     Teste Lösungsschritt gegen vorliegende Einschränkungen
7     IF keine Einschränkung THEN
8       setze die Komponente
9     ELSE
10      Auswahl(Komponente) rückgängig machen
11      BACKTRACKING(A, s + 1)
```

• Damenproblem

Auf einem Schachbrett der Größe $n \cdot n$ sollen n Damen so positioniert werden, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Damen so aufzustellen, dass keine Damen eine andere schlägt.



* $n = 8$: 4 Milliarden Positionierungen

* Optimierte Suche: In jeder Zeile/Spalte nur eine Dame

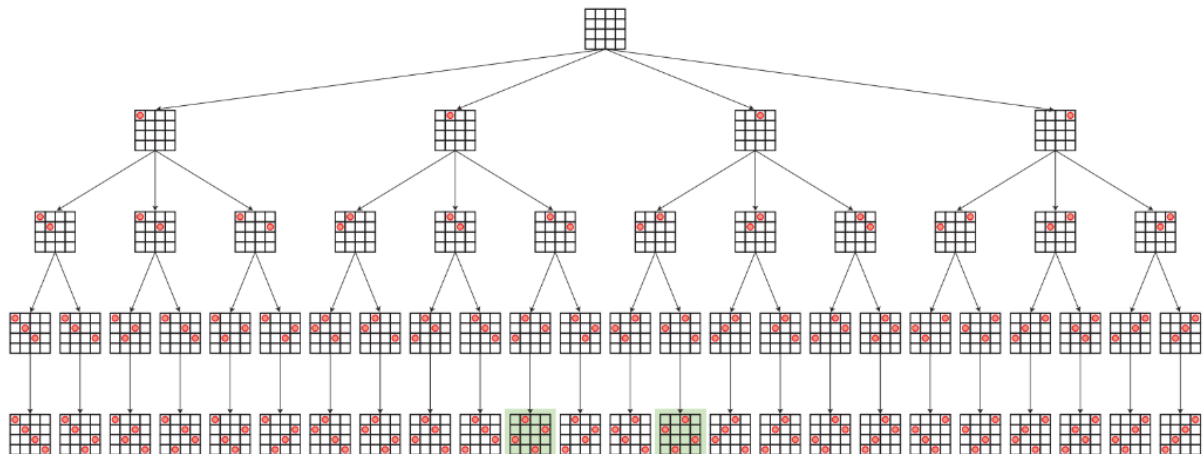
* Reduziert Problem auf 40.000 Positionierungen (ohne Diagonale)

PLACE-QUEENS(Q,r) // Q Array, r Index der ersten leeren Zeile

```

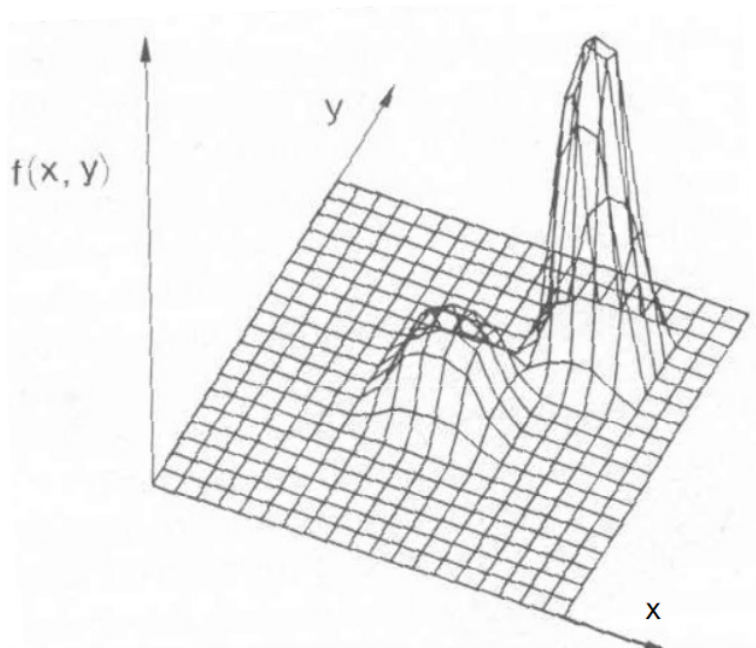
1 IF r == n
2   return Q
3 ELSE
4   FOR j = 0 TO n - 1 // Mögliche Positionierungen
5     legal = true;
6     FOR i = 0 TO r - 1 // Evaluation der mgl. Bedrohungen
7       IF (Q[i] == j) OR (Q[i] == j + r - i) OR (Q[i] == j - r + i)
8         legal = false;
9     IF legal == true
10      Q[r] = j;
11      PLACE-QUEENS(Q, r + 1)

```



1.4 Metaheuristiken

- Optimierungsproblem



- * Lösungsstrategien:

- Exakte Methode
- Approximationsmethode
- Heuristische Methode

- * Einschränkungen

- Antwortzeit
- Problemgröße

⇒ exkludieren oft exakte Methoden

- Heuristik

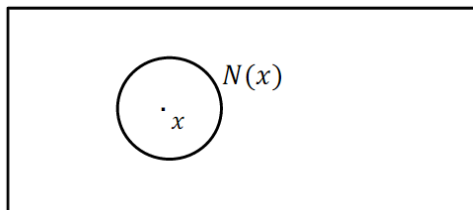
- Technik um Suche zur Lösung zu führen
- Metaheuristik (Higher-Level-Strategie)
 - * soll z.B. Hängenbleiben bei lokalem Maxima verhindern
- *Leiten einer Suche*
 - Finde eine Lösung (z.B. mit Greedy-Algorithmus)
 - Überprüfe die Qualität der Lösung
 - Versuche eine bessere Lösung zu finden
 - * Herausfinden in welcher Richtung bessere Lösung evtl. liegt
 - * ggf. Wiederholung dieses Prozesses
- *Finden einer besseren Lösung*
 - * Modifikation der Lösung durch erlaubte Operationen
 - * Dadurch erhalten wir Nachbarschaftslösungen

⇒ Suche nach besseren Lösungen in der Nachbarschaft

• Rucksackproblem

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	79	32	47	18	26	85	33	40	45
Größe	85	26	48	21	22	95	43	45	55

- Rucksack hat eine Kapazität von 101, 9 verschiedene Gegenstände
- Ziel: Höchster Wert der Gegenstände im Rucksack
- Beispiellösung: 3 + 5 (Wert 73, Größe 70)
- Nachbarschaftslösungen:
 - * 2,3 und 5: Wert 105, Größe 96
 - * 1,3 und 5: Wert 152, Größe 155 (problematisch)
 - * 3: Wert 47, Größe 48



Nachbarschaft:

- * Suchraum S kann sehr groß sein
- * Einschränkung des Suchraums in der Nähe des Punktes
- * Distanzfunktion $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$
- * Nachbarschaft: $N(x) = \{y \in S : d(x, y) \leq \epsilon\}$

• Zufällige Suche

- Idee und Ablauf
 - * Suche nach globalem Optimum
 - * Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
 - * Wahl einer neuen zufälligen Lösung in jeder Iteration
 - * Falls die neue Lösung besseren Wert liefert \Rightarrow neue **aktuelle** Lösung
 - * Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen oder Zeit vorbei
- Code

```

RANDOM-SEARCH
1 best <- irgendeine initiale zufällige Lösung
2 REPEAT
3   S <- zufällige Lösung
4   IF (Quality(S) > Quality(best)) THEN
5     best <- S
6 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Zeit ist vorbei
7 return best
  
```

- Nachteile
 - * Potentiell lange Laufzeit
 - * Laufzeit abhängig von der initialen Konfiguration
- Vorteile
 - * Algorithmus **kann** beim globalen Optimum terminieren

- **Bergsteigeralgorithmus**

- *Idee und Ablauf*

- * Nutzung einer iterativen Verbesserungstechnik
 - * Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
 - * Auswahl einer neuen Lösung aus Nachbarschaft in jeder Iteration
 - * Falls diese besseren Wert liefert, überschreiben der **aktuellen** Lösung
 - * Falls nicht, Wahl einer anderen Lösung aus Nachbarschaft
 - * Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen oder Zeit vorbei

- *Code*

```
HILL-CLIMBER
1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
6     REPEAT
7         wähle R aus der Nachbarschaft von S
8         IF Quality(R) > Quality(S) THEN
9             S <- R
10    UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
11    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
12        best <- S
13    S <- irgendeine zufällige Lösung
14 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
15 return best
```

– Nachteile

- * Algorithmus terminiert in der Regel bei lokalem Optimum
- * Keine Auskunft, inwiefern sich lokale Lösung von Globaler unterscheidet
- * Optimum abhängig von Initialkonfiguration

– Vorteile

- * Einfach anzuwenden

• Iterative lokale Suche

– Idee und Ablauf

- * Suche nach anderen lokalen Optima bei Fund eines lokalen Optimas
- * Lösungen nur in der Nähe der "Homebase"
- * Entscheidung, ob neue oder alte Lösung
- * Bergsteigeralgo zu Beginn, danach aber großen Sprung um anderes Optimum zu finden

– Code

```
ITERATIVE-LOCAL-SEARCH
1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 H <- S           // Wahl des Homebasepunktes
4 best <- S
5 REPEAT
6     time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
7     REPEAT
8         wähle R aus der Nachbarschaft von S
9         IF Quality(R) > Quality(S) THEN
10            S <- R
11     UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
12     IF Quality(S) > Quality(best) THEN
13         best <- S
14     H <- NewHomeBase(H,S)
15     S <- Perturb(H)
16 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
17 return best
```

* Perturb:

- ausreichend weiter Sprung (außerhalb der Nachbarschaft)
- Aber nicht soweit, dass es eine zufällige Wahl ist

* NewHomeBase:

- wählt die neue Startlösung aus
- Annahme neuer Lösungen nur, wenn die Qualität besser ist

• Simulated Annealing

– Idee und Ablauf

- * Wenn neue Lösung besser, dann wird diese immer gewählt
- * Wenn neue Lösung schlechter, wird diese mit gewisser Wahrscheinlichkeit gewählt
$$Pr(R, S, t) = e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$$
- * Der Bruch ist negativ, da R schlechter ist als S

– Code

```
SIMULATED-ANNEALING
1 t <- Temperatur, initial eine hohe Zahl
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     wähle R aus der Nachbarschaft von S
6     IF Quality(R) > Quality(S) oder zufälliges
7          $Z \in [0, 1] < e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$  THEN
8         S <- R
9     dekrementiere t
10    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
11        best <- S
12 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Temperatur  $\leq 0$ 
13 return best
```

– Tabu-Search

* Idee und Ablauf

- Speichert alle bisherigen Lösungen und Liste und nimmt diese nicht nochmal
- Kann sich jedoch von der optimalen Lösung entfernen
- Tabu List hat maximale Größe, falls voll, werden älteste Lösungen gelöscht

* Code

```
TABU-SEARCH
1 l <- maximale Größe der Tabu List
2 n <- Anzahl der zu betrachtenden Nachbarschaftslösungen
3 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
4 best <- S
5 L <- { } Tabu List der Länge l
6 Füge S in L ein
7 REPEAT
8     IF Length(L) > l THEN
9         Entferne ältestes Element aus L
10    wähle R aus Nachbarschaft von S
11    FOR n - 1 mal DO
12        Wähle W aus Nachbarschaft von S
13        IF  $W \notin L$  und  $(Quality(W) > Quality(R))$  oder  $R \in L$  THEN
14            R <- W
15    IF  $R \notin L$  THEN
16        S <- R
17        Füge R in L ein
18    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
19        best <- S
20 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
21 return best
```

- **Populationsbasierte Methode**

- Bisher: Immer nur Betrachtung einer einzigen Lösung
- Hier: Betrachtung einer Stichprobe von möglichen Lösungen
- Bei der Bewertung der Qualität spielt die Stichprobe die Hauptrolle
- z.B. Evolutionärer Algorithmus

- **Evolutionärer Algorithmus**

- *Idee und Ablauf*
 - * Algorithmus aus der Klasse der Evolutionary Computation
 - * *generational Algorithmus*: Aktualisierung der gesamten Stichprobe pro Iteration
 - * *steady-state Algorithmus*: Aktualisierung einzelner Kandidaten der Probe pro Iteration
 - * *Resampling-Technik*: Generierung neuer Stichproben basierend auf vorherigen Resultaten
- *Abstrakter Code (Allgemeiner Breed und Join)*

ABSTRACT-EVOLUTIONARY-ALGORITHM

```
1 P <- generiere initiale Population
2 best <- □ // leere Menge
3 REPEAT
4     AssesFitness(P)
5     FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
6         IF best = □ oder  $\text{Fitness}(P_i) > \text{Fitness}(\text{best})$  THEN
7             best <-  $P_i$ 
8     P <- Join(P, Breed(P))
9 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
10 return best
```

- * *Breed*: Erstellung neuer Stichprobe mithilfe Fitnessinformation
- * *Join*: Fügt neue Population der Menge hinzu
- *Initialisierung der Population*
 - * Initialisierung durch zufälliges Wählen der Elemente
 - * Beeinflussung der Zufälligkeit bei Vorteilen möglich
 - * Diversität der Population (alle Elemente in Population einzigartig)
 - * Falls neue zufällige Wahl eines Individuums
 - Entweder Vergleich mit allen bisherigen Individuen ($O(n^2)$)
 - Oder besser: Nutzen eines Hashtables zur Überprüfung auf Einzigartigkeit ($O(n)$)

– Evolutionsstrategien - Ideen

- * Generiere Population zufällig
- * Beurteile Qualität jedes Individuums
- * Lösche alle bis auf die μ besten Individuen
- * Generiere $\frac{\lambda}{\mu}$ -viele Nachfahren pro bestes Individuum
- * Join Funktion: Die Nachfahren ersetzen die Individuen

– Algorithmus der Evolutionsstrategie

```
( $\mu, \lambda$ )-EVOLUTION-STRATEGY
1  $\mu$  <- Anzahl der Eltern (initiale Lösung)
2  $\lambda$  <- Anzahl der Kinder
3  $P$  <- {}
4 FOR  $\lambda$ -oft DO
5    $P$  <- {neues zufälliges Individuum}
6 best <-  $\square$ 
7 REPEAT
8   FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
9     AssesFitness( $P_i$ )
10    IF best =  $\square$  oder Fitness( $P_i$ ) > Fitness(best) THEN
11      best <-  $P_i$ 
12   Q <- die  $\mu$  Individuen deren Fitness() am Größten ist
13    $P$  <- {}
14   FOR jedes Element  $Q_j \in Q$  DO
15     FOR  $\frac{\lambda}{\mu}$ -oft DO
16        $P$  <-  $P \cup \{\text{MUTATE}(Q_j)\}$ 
17 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
18 return best
```

1.5 Amortisierte Analyse

- **Kosten von Operationen**

- Bisher: Betrachtung von Algorithmen, die Folge von Operationen auf Datenstrukturen ausführen
- Abschätzung der Kosten von n Operationen im Worst-Case
- Dies liefert die obere Schranke für die Gesamtkosten der Operationenfolge
- Nun: **Amortisierte Analyse**: Genauere Abschätzung des Worst Case
- Voraussetzung: Nicht alle Operationen in der Operationenfolge gleich teuer
- z.B. eventuell abhängig vom aktuellen Zustand der Datenstruktur
- Amortisierte Analyse garantiert die mittlere Performanz jeder Operation im Worst-Case

- **Beispiel Binärzähler**

- *Eigenschaften*

- * k -Bit Binärzähler hier als Array
- * Codierung der Zahl als $x = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$
- * Initialer Array für $x = 0$:

b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0

- *Inkrementieren eines Binärzählers*

- * Erhöhe x um 1
- * Beispiel: $x = 3$
- * INCREMENT kostet 3, da sich drei Bitpositionen ändern

b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	0	0	1	1
b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	0	1	0	0

+1

- *Teuerste INCREMENT-Operation*

- * INCREMENT flippt $k - 1$ Bits von 1 zu 0 und 1 Bit von 0 auf 1
- * Kosten nicht konstant, stark abhängig von Datenstruktur

b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
0	1	1	1	1
b_{k-1}	b_{k-2}					b_2	b_1	b_0
1	0	0	0	0

+1

- *Traditionelle Worst-Case Analyse*

- * Worst-Case Kosten von n INCREMENT-Operationen auf k -Bit Binärzähler
- * Anfangswert $x = 0$
- * Schlimmster Kostenfall: INCREMENT-Operation hat k Bitflips
- * n -mal inkrementieren sorgt für Kosten: $T(n) \leq n \cdot k \in O(kn)$

• Aggregat Methode - Beispiel Binärzähler

– Eigenschaften

- * Methode für Amortisierte Analyse
- * Sequenz von n -Operationen kostet Zeit $T(n)$
- * Durchschnittliche Kosten pro Operation $\frac{T(n)}{n}$
- * Ziel: $T(n)$ genau berechnen, **ohne** jedes Mal Worst-Case anzunehmen
- * Ansatz: Aufsummation der **tatsächlich** anfallenden Kosten aller Operationen

– Durchführung

b_4 b_3 b_2 b_1 b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten	b_4 b_3 b_2 b_1 b_0	Schrittkosten	Gesamtkosten
0 0 0 0 0	0	0	0 0 1 0 1		8
0 0 0 0 1	+1	1	0 0 1 1 0	+1	10
0 0 0 1 0	+1	2	0 0 1 1 1	+1	11
0 0 0 1 1	+1	3	0 1 0 0 0	+1	15
0 0 1 0 0	+1	4	0 1 0 0 1	+1	16
0 0 1 0 1	+1	5	0 1 0 1 0	+1	18
0 0 1 1 0					
0 0 1 1 1					
0 1 0 0 0					
0 1 0 0 1					
0 1 0 1 0					
0 1 0 1 1					
0 1 1 0 0					
0 1 1 0 1					
0 1 1 1 0					
0 1 1 1 1					

- Bisher noch kein Worst-Case
- Nächste Operation hätte max. Kosten
- Jede 2. Operation minimale Kosten
- In jeder Operation ändert sich b_0
- In jeder 2. ändert sich b_1 etc

– Genauere Kostenanalyse

- * Nun in der Lage $T(n)$ genau auszurechnen
- * Bei n Operationen ändert sich das Bit b_i genau $\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$ -mal
- * Bits b_i mit $i > \log_2 n$ ändern sich nie
- * Über alle k Bits aufsummieren liefert:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor = n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2n \in O(n)$$
- * Obere Schranke: $T(n) \leq 2n$
- * Kosten jeder INCREMENT-Operation im Durchschnitt: $\frac{2n}{n} = 2 \in O(1)$

• Account Methode - Beispiel Binärzähler

– Eigenschaften

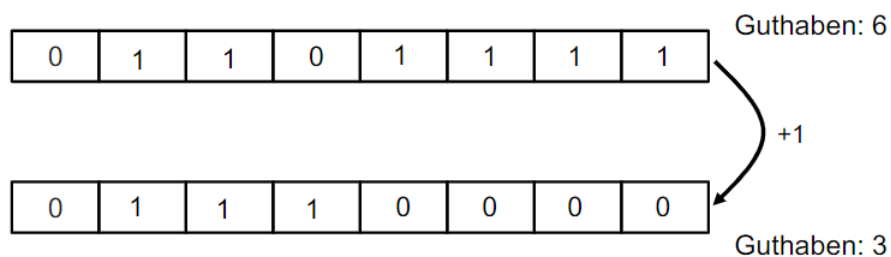
- * Besteuerung einer Operationen, so dass sie Kosten anderer Operationen mittragen
- * Zuweisung von höherer Kosten (Amortisierte Kosten), als ihre tatsächlichen Kosten sind
- * **Guthaben:** Differenz zwischen amortisierten und tatsächlichen Kosten
- * Nutzung dieses Guthabens für Operationen bei denen amortisiert < tatsächlich
- * Guthaben darf nicht negativ werden:
Summe amortisierte Kosten > Summe tatsächliche Kosten

– Wahl der Amortisierten Kosten - Binärzähler

- * Setzen eines Bits von 0 → 1 zahlt 2 Einheiten ein / Bezeichnung f_i
- * Setzen eines Bits von 1 → 0 zahlt 0 Einheiten ein / Bezeichnung e_i
- * Tatsächliche Kosten t_i : Anzahl der Bitflips bei der i -ten INCREMENT-Operation
$$t_i = e_i + f_i$$
- * Amortisierte Kosten betragen: $a_i = 0 \cdot e_i + 2 \cdot f_i$

– Kostenbeispiel

- * Jede Bitflip Operation kostet zusätzlich 1 Einheit
- * Setzen Bit 0 → 1: Zahlt 2 ein, kostet aber 1 → +1 Guthaben
- * Setzen Bit 1 → 0: Zahlt 0 ein, kostet aber 1 → -1 Guthaben



– Obere Schranken der Kosten

- * Guthaben auf dem Konto entspricht der Anzahl der auf 1 gesetzten Bits
- * Kosten: $T(n) \sum_{i=1}^n t_i \leq v \sum_{i=1}^n a_i$
- * Nun Abschätzung dieser Formel zum Erhalten einer oberen Schranke
- * Beobachtung: Bei jeder INCREMENT höchstens ein neues Bit von 0 auf 1
- * Für alle i gilt damit $f_i \leq 1$
- * Amortisierte Kosten jeder Operation höchstens $2 \cdot f_i \leq 2$
- * Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$

• Potential-Methode - Beispiel Binärzähler

– Eigenschaften

- * Betrachtung welchen Einfluss die Operationen auf die Datenstruktur haben
- * Potentialfunktion $\phi(i)$: Hängt vom aktuellen Zustand der Datenstruktur nach i -ter Operation ab
- * Ausgangspotential sollte vor jeglicher Operation nicht negativ sein $\phi(0) \geq 0$

– Amortisierte Kosten

- * Amortisierte Kosten der i -ten Operation: (Summe tatsächliche Kosten + Potentialänderung)

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1)$$

- * Summe der amortisierten Kosten:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (t_i + \phi(i) - \phi(i-1)) = \sum_{i=1}^n t_i + \phi(n) - \phi(0)$$

- * Wenn für jedes i gilt $\phi(i) \geq \phi(0)$:

Summe der amor. Kosten ist gültige obere Schranke an Summe der tatsächlichen Kosten

– Potential-Methode anhand des Binärzählers

- * $\phi(i)$: Anzahl der 1-en im Array nach i -ter INCREMENT-Operation

→ $\phi(i)$ nie negativ und $\phi(0) = 0$

- * Angenommen i -te Operation setzt e_i Bits von 1 auf 0, dann hat diese Operation Kosten $t_i \leq e_i + 1$

- * Neues Potential: $\phi(i) \leq \phi(i-1) - e_i + 1 \Leftrightarrow \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i$

- * Amortisierte Kosten der i -ten INCREMENT-Operation:

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i + 1 + 1 - e_i = 2$$

- * Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$