Hausübung 2 – Leon Knauf

Herleitung der DGLs

Durch Maschen- und Knotenregeln ergeben sich folgende Formeln:

$$(i)\; i = i_R + i_C$$

$$(ii)\; u_{Bat} = u_{Last} + u_R$$

Setzt man nun für $i_R = \frac{u_{Last}}{R_{Last}}$ und für $i\_c = C_{Last} * \frac{du_{Last}}{dt}$ in (i) ein ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$i = \frac{u_{Last}}{R_{Last}} + C_{Last} * \frac{du_{Last}}{dt}$$

$$\frac{du_{Last}}{dt} = \frac{i}{C_{Last}} - \frac{u_{Last}}{R_{Last} * C_{Last}}$$

Zusammen mit $i = \frac{u_R}{R_{Bat}}$ und $u_R = u_{Bat} - u_{Last}$ ergibt sich:

$$\frac{du_{Last}}{dt} = \frac{u_{Bat} - u_{Last}}{R_{Bat} * C_{Last}} - \frac{u_{Last}}{R_{Last} * C_{Last}}$$

$$\frac{du_{Last}}{dt} = \frac{u_{Bat}}{R_{Bat} * C_{Last}} - \frac{u_{Last}}{R_{Bat} * C_{Last}} - \frac{u_{Last}}{R_{Last} * C_{Last}}$$

$$\frac{du_{Last}}{dt} = \frac{u_{Bat}}{R_{Bat} * C_{Last}} - \frac{u_{Last}}{C_{Last}}\left[\frac{1}{R_{Last}} + \frac{1}{R_{Bat}}\right]$$

$$\frac{du_{Last}}{dt} = \frac{u_{Bat}}{R_{Bat}*C_{Last}} - \frac{u_{Last}}{C_{Last}*R_P} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{R_P} = \left[\frac{1}{R_{Last}} + \frac{1}{R_{Bat}}\right] \quad \text{bzw.} \quad R_P = \frac{R_{Last}*R_{Bat}}{R_{Last}+R_{Bat}}$$

$$\boxed{(1)\, \frac{du_{Last}}{dt} = \frac{u_{Bat}}{\tau_{C1}} - \frac{u_{Last}}{\tau_{C2}} \quad \text{mit} \quad \tau_{C1} = R_{Bat} * C_{Last};\;\; \tau_{C2} = C_{Last} * R_P}$$

Die zweite Differentialgleichung ergibt sich, in dem man für $u_R = i * R_{Bat}$ und für $i = -C_{Bat} * \frac{du_{Bat}}{dt}$ in (ii) eingibt:

$$u_{Bat} = u_{Last} + i * R_{Bat} = u_{Last} - C_{Bat} * \frac{du_{Bat}}{dt} * R_{Bat}$$

$$[u_{Bat} - u_{Last}] * -\frac{1}{C_{Bat} * R_{Bat}} = \frac{du_{Bat}}{dt}$$

$$\boxed{(2)\, \frac{du_{Bat}}{dt} = \frac{1}{\tau_B} * [u_{Last} - u_{Bat}] \quad \text{mit} \quad \tau_B = C_{Bat} * R_{Bat}}$$

Umformung in Matrixschreibweise

Beide DGLs werden in eine Koeffizientenschreibweise gebracht, bei der die Reihenfolge der abhängigen Variablen (u_{Last} und u_{Bat}) gleich ist.

$$(1)\,\frac{du_{Last}}{dt} = -\frac{u_{Last}}{\tau_{C2}} + \frac{u_{Bat}}{\tau_{C1}} = -\frac{1}{\tau_{C2}} * u_{Last} + \frac{1}{\tau_{C1}} * u_{Bat}$$

$$(2)\,\frac{du_{Bat}}{dt} = \frac{u_{Last}}{\tau_B} - \frac{u_{Bat}}{\tau_B} = \frac{1}{\tau_B} * u_{Last} - \frac{1}{\tau_B} * u_{Bat}$$

Nun wird die Gleichung in eine Koeffizientenmatrix und eine Variablenmatrix aufgeteilt:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{Last}}{dt} \\ \frac{du_{Bat}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_{C2}} & \frac{1}{\tau_{C1}} \\ \frac{1}{\tau_B} & -\frac{1}{\tau_B} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{Last} \\ u_{Bat} \end{bmatrix}$$