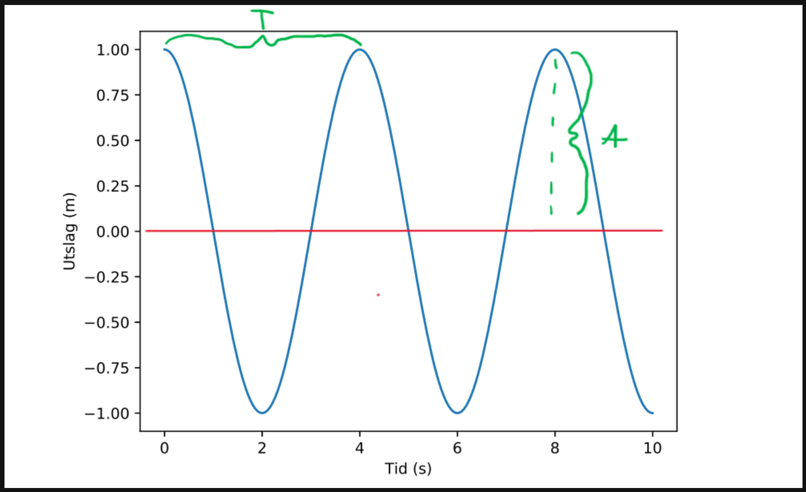
FYS2130 - Oblig 1

Oskar Idland

Oppgave 1

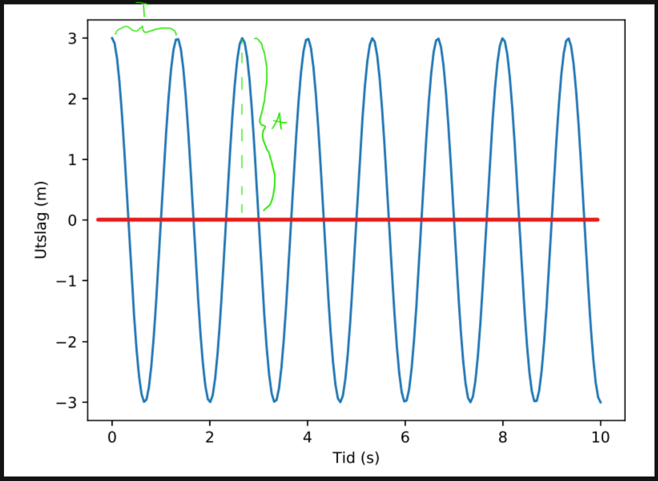
a)



Figur 1: Oppgave 1a

Vi finner amplituden A ved å se hvor høyt over likevektslinjen (ved y = 0) bølgetoppen kommer. Dette er $A = 1$ m. Periodetiden T er hvor lang tid bølgen bruker på å gjennomføre én hel oscillasjon. Ettersom x-aksen er tid i sekunder trenger vi bare å se på avstanden på grafen. Her ser vi at $T = 4$.

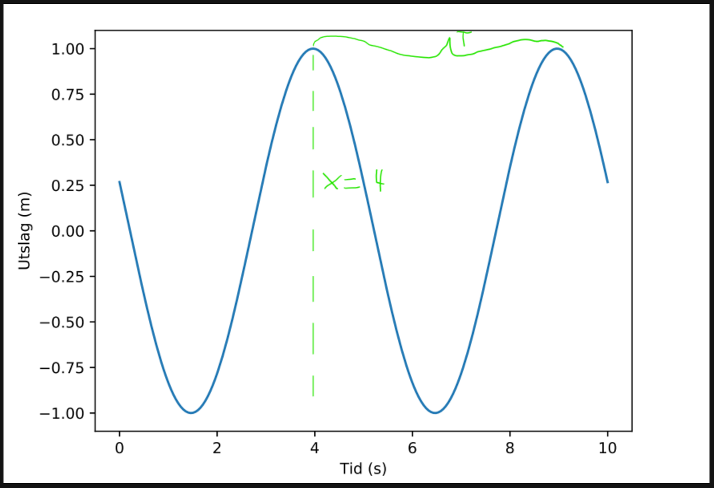
b)



Figur 2: Oppgave 1b

Vi finner amplituden A på samme måte og frekvensen $f = \frac{1}{T}$, finner $A = 3$ og $f = \frac{3}{4}$

c)



Figur 3: Oppgave 1c

Vi vet at vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$. Vi må først finne f. Vi bruker samme metode som i b og finner periodetiden $T = 5$ som gir frekvens $f = \frac{1}{5}$ og $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{5}$. For å finne faseforskyvningen starter vi med å se på funksjonen når $t = 0$. Da er $y = 0.25$. Vi løser dette for det generelle tilfellet.

$$0.25 = \cos(\phi)$$

$$\phi = \arccos(0.25)$$

Oppgave 2

a)

For en harmonisk bevegelse kan posisjonen beskrives med en cosinus funksjon på formen

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Da blir naturligvis

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Videre bruker vi at $\Sigma F = ma = m\ddot{x}$ og at $\Sigma F = -kx$ for en fjær.

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow -m\omega^2 x = -kx$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

b)

Setter in $k = 8$, $m = 2$.

$$\omega = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$$

Da ser vi at x blir følgende

$$x = A\cos(2t + \phi)$$

For å løse for A bruker vi at $x(0) = 0.4$

$$0.4 = A\cos(\phi) \Rightarrow A = \frac{0.4}{\cos(\phi)}$$

Vi setter dette inn i $\dot{x}(0) = -2$

$$-2 = -2\left(\frac{0.4}{\cos\phi}\right)\sin(\phi)$$

$$1 = 0.4\tan(\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1.19, \quad A = \frac{0.4}{\cos\left(\arctan\left(\frac{5}{2}\right)\right)} \approx 1.08$$

Da får vi et utrykk for x på formen

$$x = 1.08 \cdot \cos(2t + 1.19)$$

c)

Bruker Hook's lov for den potensielle energien.

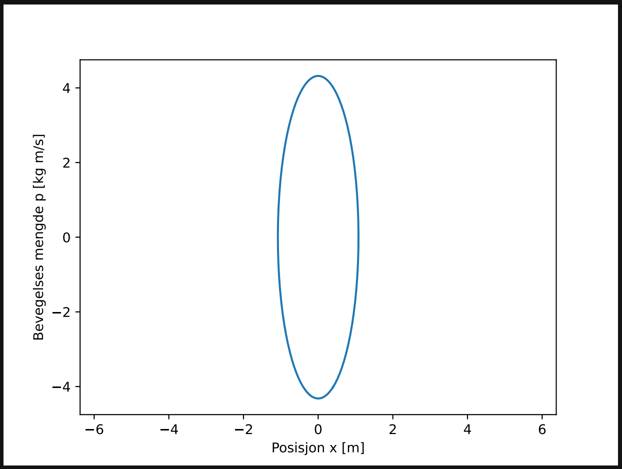
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 4\left(1.08 \cdot \cos(2t + 1.19)\right)^2 = 4.67 \cdot \cos^2(2t + 1.19)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 4.67\sin^2(2t + 1.19)$$

$$E = E_p + E_k = 4.67 \cdot \cos^2(2t + 1.19) + 4.67\sin^2(2t + 1.19)$$

$$E = 4.67 \text{ J}$$

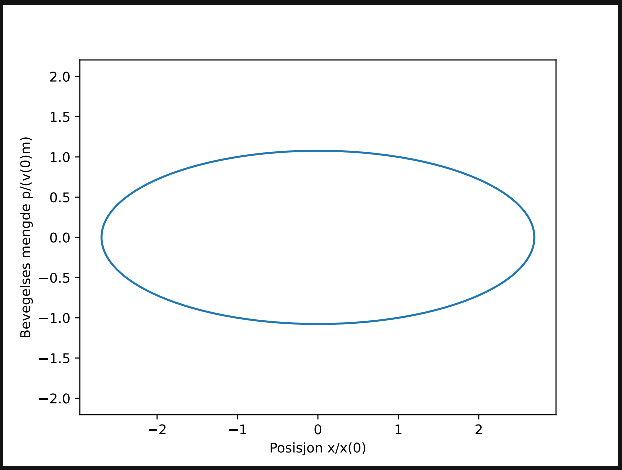
Løsningen viser at den mekaniske energien er konstant og dermed bevart.



Figur 4: Plot av posisjon og bevegelsesmengde

d)

Som vi ser i figur 5 Blir formen mye flatere når vi skalerer med x_0 og v_0.



Figur 5: Plot av posisjon og bevegelsesmengde gjort dimensjonsløse ved å skalere med x_0 og v_0

Oppgave 3

a)

Vi bruker det generelle uttrykket for en harmonisk bevegelse.

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \quad \dot{x} = -\omega x \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} \Rightarrow m(-\omega^2)x - (\omega)x = -kx(-\omega)x$$

$$m\omega^3 x^2 = k\omega x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(-\omega\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{k\sin^2(\omega t + \phi) + k\cos^2(\omega t + \phi)}_{1}\right) = \frac{k}{2}$$

b)

Finner først ved hvilken tid den kinetiske energien er halvparten av den potensielle.

$$E_k = \frac{1}{2}E_p \Rightarrow k\sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}k\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\tan\left(\underbrace{\omega t + \phi}_{C}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ettersom vi ikke får løst for tiden substituerer vi med C som forteller oss hva som må være i cosinus utrykket for posisjon.

$$x_C = A\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}A$$

Oppgave 4

Vi har følgende konverteringer

$$C\cos(\omega t+\phi) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \text{hvis } A = C\cos\phi \quad \text{og} \quad B = C\sin\phi \tag{1}$$

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = C\cos(\omega t+\phi) \quad \text{når } C = \sqrt{A^2+B^2} \text{ og } \phi = -\arctan\left(\frac{A}{B}\right) \tag{2}$$

$$\Re\left\{Ee^{i(\omega t+\phi)}\right\} = C\cos(\omega t+\phi), \quad \text{når } C = E \tag{3}$$

$$\Re\left\{\mathscr{D}e^{i\omega t}\right\} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \text{når } \mathscr{D} = A - iB \tag{4}$$

1.

a)

$$f(t) = -4\sin(\omega t) = -4\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Re\left\{Ee^{i(\omega t+\phi)}\right\} = C\cos(\omega t+\phi), \text{ når } C = E$$

$$f(t) = -4e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

b)

$$f(t) = 7\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \qquad E = 7 \quad , \quad \phi = -\frac{\pi}{4}$$

Bruker samme teknikk som i forrige oppgave.

$$f(t) = 7\cos\left(\omega t \underbrace{-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}}_{-\frac{3}{4}\pi}\right)$$

$$\Re\left\{7e^{i\left(\omega t - \frac{3}{4}\right)\pi}\right\} \qquad E = 7 \quad , \quad \phi = -\frac{3}{4}\pi$$

c)

Bruker at

$$\Re\left\{\mathscr{D}e^{i\omega t}\right\} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \mathscr{D} = A - iB$$

$$f(t) = \Re\left\{7ie^{(i\omega t)}\right\} = -7\sin(\omega t) = -7\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(t) = \Re\left\{-7e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\right\}, \qquad E = -7 \quad , \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

d)

$$f(t) = 2\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \sin(2\omega t) = \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Bruker samme regel som i oppgave a

$$\Re\left\{e^{i\left(2\omega - \frac{\pi}{2}\right)}\right\}, \qquad E = 1 \quad , \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

2.

Vi bruker at

$$\Re\left\{\mathscr{D}e^{i(\omega t)}\right\} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \text{ når } \mathscr{D} = A - iB$$

og at

$$C\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{når} \quad A = C\cos\phi \quad , \quad B = -C\sin\phi$$

a)

$$f(t) = 7\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 7\cos\left(\omega t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$A = 7\cos\left(-\frac{3}{4}\right) = -7\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad B = -7\sin\left(-\frac{3}{4}\right) = 7\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(t) = -7\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) + 7\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)$$

$$f(t) = \Re\left\{\left(-7\frac{\sqrt{2}}{2} - 7i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i(\omega t)}\right\}, \text{ når} \quad \mathscr{D} = -7\frac{\sqrt{2}}{2} - 7i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b)

Bruker at

$$\Re\left\{Ee^{i(\omega t + \phi)}\right\} = C\cos(\omega t + \phi), \text{ når} \quad C = E$$

$$f(t) = \Re\left\{e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\right\}$$

$$f(t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = C\cos\phi = 0 \quad , \quad B = -C\sin\phi = 1$$

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$f(t) = \Re\left\{ie^{i(\omega t)}\right\}, \qquad \mathscr{D} = -i$$

Oppgave 5

a)

Fordeler

Når en løser problemer numerisk vil en slippe å gå gjennom alle trinnene i en analytisk løsning. Dette vil gjøre at en kan løse problemer som er for omfattende for en analytisk løsning. Det er også like lett å løse styggeproblemer som kan involvere ting som friksjon like lett som mer peneproblemer.

Ulemper

Avrundingsfeil vil kunne oppstå når en løser problemer numerisk. Dette gjelder spesielt når et stykke involverer irrasjonelle, eller veldig små tall tall

b)

Hvis vi har muligheten kan vi sammenligne med den analytiske løsningen. Hvis ikke kan vi bruke symmetrier og fakta vi vet om systemet fra før. Foreksempel at mekanisk energi, eller en annen fysisk størrelse, er konstant.