Oblig 7

Oskar Idland

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1

a)

Vi bruker utrykket for bølgefunksjonen til en fri partikkel som beskrevet i likning 2.95 i Griffiths.

$$\psi(x) = \Psi(x,0) = Ae^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}\cdot 0\right)} = Ae^{ikx}$$

b)

For å utvide dette til den tidsavhengige bølgefunksjonen gjør vi følgende:

$$\Psi(x,t) = Ae^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \ \mathrm{d}x = \text{Ikke definert}$$

d)

Er ikke normaliserbar og kan derfor ikke gi noe fysisk tolkning.

e)

Kvantefysikken løser dette ved å dele opp funksjonen til et multiplum at to funksjoner, ψ som beskriver partikkelens posisjon og ϕ som beskriver partikkelens bevegelsesmengde.

Oppgave 2

a)

Svaret er <u>alternativ B: Bredden avtar</u>

b)

$\Psi(x,0)$ forteller oss alt om partikkelens tilstand, men den beskriver ingen fysisk størrelse. Tar vi kvadratet av dets absolutt verdi får vi sannsynlighets fordelingen for å finne partikkelen i et område x til et annet område $x + \Delta x$ ved tiden $t = 0$. Derfor relaterer Ψ til posisjonen til partikkelen.

c)

Vi vet fra likning 2.95 i Griffiths at $k = \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Ettersom dette er en fri partikkel vet vi at potensialet V er null, som gjør at energien bare er avhengig av kinetisk energi K. Den kinetiske energien er gitt av bevegelsesmengden p til partikkelen.

d)

Forholdet mellom spredningen til funksjonen f som relaterer til partikkelens posisjon og spredningen til funksjonen g som relaterer til partikkelens bevegelsesmengde er invers proporsjonalt som forventet fra Heisenberg's usikkerhetsprinsipp. Det er fordi standardavviket til en størrelse er proporsjonalt med spredningen til den tilhørende funksjonen.

Oppgave 3

a)

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,0) &= Ae^{-a|x|} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \left| Ae^{-a|x|} \right|^2 \, \mathrm{d}x &= 1 \\
\frac{2A^2}{-2a} e^{-2ax} \Big|_0^{\infty} &= 1 \\
\frac{A^2}{a} &= 1 \\
A &= \sqrt{a}
\end{aligned}
$$

Vi får den normaliserte bølgefunksjonen Ψ_n

$$
\underline{\underline{\Psi_n(x,0) = \sqrt{a} e^{-a|x|}}}
$$

b)

Vi bruket likning 2.104 fra Griffiths for $\phi(k)$

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$$

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$$

Vi skriver om siste faktoren på sinus og cosinus form

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \left(cos(kx) - isin(kx)\right) \, \mathrm{d}x$$

Videre endrer vi grensene på integrale

$$\phi(k) = 2\sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \left(\cos(kx) - i\sin(kx)\right) \, \mathrm{d}x$$

Ettersom sinus funksjonen er en odde funksjon vil denne delen av integralet forsvinne. Cosinus leddet skriver vi

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \, \mathrm{d}x$$

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{x(ik-a)} + e^{-x(ik+a)}\right) \, \mathrm{d}x$$

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left(\frac{e^{x(ik-a)}}{ik-a} - \frac{e^{-x(ik+a)}}{ik+a}\right)\Bigg|_{0}^{\infty}$$

Evaluerer integralet og finner felles nevner

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left(-\frac{1}{ik-a} + \frac{1}{ik+a}\right) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{-(ik+a)+(ik-a)}{(ik)^2 - a^2}$$

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{-2a}{-k^2 - a^2}$$

$$\underline{\underline{\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{2a}{k^2 + a^2}}}$$

c)

Vi bruker likning 2.101 fra Griffiths for $\Psi(x,t)$ og setter inn vårt utrykk for $\phi(k)$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} \, \mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2a\sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} \, \mathrm{d}k$$

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{a^3}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} \, \mathrm{d}k$$

d)

I grensene hvor a er veldig liten, vil vi ha en større usikkerhet i hvor partikkelen befinner seg, men vi har god kontroll på dets bevegelsesmengde. Dette er fordi Ψ blir veldig bre, og ϕ blir smal. I grensen hvor a er veldig stor vil vi ha en større usikkerhet i bevegelsesmengden til partikkelen, men vi har god kontroll på hvor den befinner seg. Dette er fordi Ψ blir veldig smal, og ϕ blir bred.

Oppgave 4

$\mathbf{L_1}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_1 = E\psi_1 \quad \Big| \cdot \psi_2$$

$$-\psi_2\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_1 = \psi_2 E\psi_1$$

$\mathbf{L_2}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_2 = E\psi_2 \quad \Big| \cdot \psi_1$$

$$-\psi_1\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_2 = \psi_1 E\psi_2$$

$$L_2 - L_1 = -\psi_1\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_2 + \psi_2\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_1 = \underbrace{\psi_1 E\psi_2 - \psi_2 E\psi_1}_{0}$$

$$-\psi_1\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_2 + \psi_2\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_1 = 0$$

$$\psi_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_1 - \psi_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_2 = 0$$

Ettersom $\psi_2 \neq \psi_1 \neq 0$ må $\psi_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_1$ og $\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_2$ være konstant, slik at deres dobbelt derivert blir 0. Videre vet vi at $\psi \to 0$ ved $\pm\infty$ for normerbare løsninger. Da vet vi at den derivert ikke er hvilken som helst konstant, men må være 0. Da kan vi skrive $\psi_2 = k\psi_1$. Det betyr at løsningene ikke er distinkte.

Oppgave 5

Vi starter med Schrödingerligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = -k^2\psi(x) \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar^2}$$

Videre skriver vi ψ på eksponensial form.

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Vi har at $\psi(x) = \psi(x+L)$

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = Ae^{ik(x+L)} + Be^{-ik(x+L)} = Ae^{ikx}e^{ikL} + Be^{-ikx}e^{-ikL}$$

Dette gjelder for alle x. Videre setter vi $x = 0$ for enkelheten skyld.

$$A + B = Ae^{ikL} + Be^{-ikL}$$

Ettersom vi kunne ha skrevet ψ som en cosinus funksjon vet vi også at ligningen over stemmer for $x = \frac{\pi}{2k}$.

$$Ae^{i\pi/2} + B^{-i\pi/2} = Ae^{ikL} + Be^{-ikL} = 0$$

$$iAe^{ikL} - Be^{-ikL} = iA - iB$$

$$Ae^{ikL} - Be^{-ikL} = A - B$$

$$2Ae^{ikL} = 2A$$

Dette stemmer bare hvis $A = 0$, eller $e^{ikL} = 1$ for $kL = 2n\pi$ der $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Hvis $A = 0$ må $Be^{-ikL} = B$ som gir samme resultat. Det betyr at for hver n er det to løsninger $\psi_n^+ = Ae^{i(2n\pi x/L)}$ og $\psi_n^- = Be^{-i(2n\pi x/L)}$, ved unntak av $n = 0$ der det bare er én løsning. Ved normalisering av $|\psi_\pm|^2$ i intervallet $[0, L]$ får vi $A = B = 1/\sqrt{L}$ hvor alle andre løsninger med samme energi er en lineær kombinasjon av disse. Da få rvi et utrykk for ψ og energi E

$$\psi_\pm \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\pm i(3n\pi x/L)} \quad , \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (2n\pi/L)^2}{2m}$$

Teoremet krever at $\psi \to 0$ ved $\pm\infty$. Dette stemmer ikke i vårt tilfelle og vi kan derfor få to bundne tilstander med samme energi.