FYS2140 - Midtveiseksamen

Kandidat: 15502

Oppgave 1

a)

Forventningsverdien $\langle Q \rangle$ til en fysisk størrelse Q er den gjennomsnittlige verdien vi måler over tid ved veldig mange målinger av flere partikler i samme tilstand ψ. $\langle Q \rangle$ er gitt ved følgende formel:

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi \ \mathrm{d}x \tag{1}$$

b)

Hvis vi måler samme partikkel flere ganger hurtig etter hverandre vil vi få samme resultat hver gang ettersom bølgefunksjonen allerede er kollapset. Metode 1 er derfor den beste løsningen ettersom vi får en fordeling av forskjellige posisjoner vi videre kan finne snittet av.

c)

1. Vi vet fra Ehrenfest's teorem at $\langle p \rangle = m\frac{d\langle x \rangle}{\mathrm{d}t}$. Hvis $\langle x \rangle = 0$ må naturligvis $\langle p \rangle = 0$ og påstanden er <u>sann</u>

2. Påstanden er i strid med Ehrenfest's teorem. $\lim_{\langle x \rangle \to 0} \langle p \rangle = 0$. Påstanden er <u>falsk</u>.

3. Det følger fra Heisenberg's usikkerhetsprinsipp at hvis $\sigma_x = 0$ må $\sigma_p \to \infty$. Påstanden er derfor <u>sann</u>.

4. Hvis $\left\langle x^2 \right\rangle = 0$ må $x = 0$ for å unngå at $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ skal bli imaginær. Hvis $\langle x \rangle = 0$ må $\langle p \rangle = 0$. For å opprettholde Heisenberg's usikkerhetsprinsipp må $\sigma_p \to \infty$ når $\sigma_x = 0$. $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle + \langle p \rangle^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$ som betyr $\left\langle p^2 \right\rangle \to \infty$. Påstanden er <u>falsk</u>

d)

Vi ser på følgende utrykk:

$$\hat{H}\psi_n = E\psi_n \tag{2}$$

For å finne standardavviket til forventningsverdien til energien gjør vi følgende:

$$\langle E \rangle = \int \psi^* E \psi \ \mathrm{d}x = \int \psi^* \hat{H} \psi \ \mathrm{d}x = \hat{H} \int \psi^* \psi \ \mathrm{d}x = \hat{H} \underbrace{\int |\Psi|^2 \ \mathrm{d}x}_{1} = \hat{H} \tag{3}$$

Dette gjentar vi for $\left\langle E^2 \right\rangle$.

$$\left\langle E^2 \right\rangle = \int \psi^* E^2 \psi \ \mathrm{d}x = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi \ \mathrm{d}x = \hat{H}^2 \int \psi^* \psi \ \mathrm{d}x = \hat{H}^2 \underbrace{\int |\Psi|^2 \ \mathrm{d}x}_{1} = \hat{H}^2 \tag{4}$$

Videre finner vi standardavviket

$$\sigma_E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{\hat{H}^2 - \hat{H}^2} = 0 \tag{5}$$

e)

Hvis en partikkel er i egentilstanden for operatoren $\hat{Q}$ vil standardavviket være 0. Dette er fordi den eneste mulige resultatet ved måling av Q er egenverdien til operatoren $\hat{Q}$.

Oppgave 2

a)

Bohr's atommodell antar at elektronbanene er bestemt av angulært momentum som er kvantisert. Da blir også energien kvantisert. De Broglies hypotese bekrefter dette ved å si at elektroner både har bølgeegenskaper og partikkelegenskaper. Hypotesen sier videre at bevegelsesmengden er kvantisert $\rightarrow$ energien er kvantisert.

b)

Energien til elektronet er gitt ved

$$E = \underbrace{-\frac{k_e e^2}{r}}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2} m_e v^2}_{E_k} \tag{6}$$

Vi kan skrive om dette til

$$E = -\frac{k_e e^2}{r} + \frac{1}{2} m_e \frac{k_e e^2}{m_e} \frac{1}{r} \tag{7}$$

Ettersom vi er ute etter fordelingen av energien kan vi se bort i fra like konstanter.

$$E = \underbrace{-C(r)}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2} C(r)}_{E_k} \quad , \quad C(r) = \frac{k_e e^2}{r} = \frac{k_e e^2}{a_0 n^2} \tag{8}$$

Vi ser at den kinetiske energien er -100% av den totale energien og at den potensielle energien er 200% av den totale energien. Dette holder seg konstant for alle energinivåer.

c)

Vi bruker at fra likning 3.8 i kompendiet.

$$v = \frac{n\hbar}{m_e r} \tag{9}$$

Vi bytter ut utrykket vårt for r med Bohr radiusen $a_0 n^2$ og får

$$v_n = \frac{1}{n}\frac{\hbar}{m_e a_0} \tag{10}$$

Videre kan vi regne ut hastigheten for forskjellige n.

$$v_1 = \frac{\hbar}{m_e a_0} \quad , \quad v_2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m_e a_0} \quad , \quad v_3 = \frac{1}{3}\frac{\hbar}{m_e a_0} \tag{11}$$

Setter vi inn at $\frac{\hbar}{m_e a_0} = 0.007314\ c = 7.3 \cdot 10^{-3}\ c$ Da får vi hastighetene gitt som en brøkdel av lyshastigheten c.

$$v_1 = 0.007314\ c \quad , \quad v_2 = 0.003657\ c \quad , \quad v_3 = 0.002438\ c \tag{12}$$

Det vanligste er å begynne å regne relativistisk når hastigheten er større enn 0.1 c. Dette gjelder ikke i vårt tilfelle.

d)

De Broglie bølgelengden er gitt ved

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{13}$$

Bevegelsesmengde p er gitt ved $p = mv$ og setter inn utrykket for hastighet vi fant i likning (10)

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{m_e \frac{\hbar}{m_e a_0 n}} = 2\pi a_0 n \tag{14}$$

$$\lambda_1 = 2\pi a_0 \quad , \quad \lambda_2 = 4\pi a_0 \quad , \quad \lambda_3 = 6\pi a_0 \tag{15}$$

Vi skriver dette om til enheter av a_0

Oppgave 3

a)

For å normalisere bølgefunksjonen må vi løse likningen

$$\int_0^a |\Psi(x,t)|^2 \ \mathrm{d}x = 1 \tag{16}$$

Hvor vi bruker utrykket for Ψ_s for de tre laveste energitilstandene ved $t = 0$.

$$\Psi_s(x,0) = A\left(\psi_1(x) + 2\psi_2(x) + 3\psi_3(x)\right) = \psi_s(x) \tag{17}$$

$$\int_0^a |\psi_s(x)|^2 \ \mathrm{d}x = 1 \tag{18}$$

$$A^2 \int_0^a \left(\psi_1 + 2\psi_2 + 3\psi_3\right)^2 \ \mathrm{d}x = 1 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

Vi bruker at integralet til produktet av egentilstandene er ortonormale slik at integralet av produktet til to egentilstander er 0 for alle ulike egentilstander og 1 for like egentilstander, som beskrevet i likning 2.33 & 2.34 i Griffiths (versjon 3).

$$A^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) = 1 \tag{21}$$

$$14A^2 = 1 \tag{22}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{14}} \tag{23}$$

Videre finner vi koeffisientene til egentilstanden

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \quad , \quad c_2 = \frac{2}{\sqrt{14}} \quad , \quad c_3 = \frac{3}{\sqrt{14}} \tag{24}$$

b)

Vi ser i likning 2.30 fra Griffiths (versjon 3) at energien E_n kan skrives som følgende.

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \tag{25}$$

Vi regner ut E_1 ved å sette inn massen m_e til elektronet samt bredden a til brønnen.

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2 \cdot 0.511 \ [\mathrm{nm}^2 \ \mathrm{MeV} \ / \ \mathrm{c}^2]} = 3.81 \cdot 10^{-2} \ \mathrm{eV} \tag{26}$$

Videre bruker vi at symmetrien mellom summen og at energien kan skrives som $E_n = n^2 E_1$ til å faktorisere like ledd.

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1}^{3} |c_n|^2 E_n \tag{27}$$

$$\langle H \rangle = \frac{3.81 \cdot 10^{-2} \ \mathrm{eV}}{\left(\sqrt{14}\right)^2}\left(1^4 + 2^4 + 3^4\right) = 2.67 \cdot 10^{-1} \ \mathrm{eV} \tag{28}$$

$$\left\langle H^2 \right\rangle = \sum_{n=1}^{3} \psi_n^* E_n^2 \psi_n \tag{29}$$

$$\left\langle H^2 \right\rangle = \sum_{n=1}^{3} \left|c_n\right|^2 E_n^2 \tag{30}$$

Igjen kan vi bruke symmetrien i summen til å faktorisere like ledd.

$$\left\langle H^2 \right\rangle = \left(\frac{3.81 \cdot 10^{-2}\ \text{eV}}{\sqrt{14}}\right)^2 \left(1^6 + 2^6 + 3^6\right) \tag{31}$$

$$\left\langle H^2 \right\rangle = 8.23 \cdot 10^{-2}\ \text{eV} \tag{32}$$

$$\sigma_H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{8.23 \cdot 10^{-2} - (2.67 \cdot 10^{-1})^2} \tag{33}$$

$$\sigma_H = 1.03 \cdot 10^{-1}\ \text{eV} \tag{34}$$

c)

$$2 \sin\alpha \sin\beta = 2\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}\right) \tag{35}$$

$$= 2\left(\frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} - e^{i(\beta-\alpha)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{-4}\right) \tag{36}$$

$$= \frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2} - \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2} \tag{37}$$

Vi bruker at $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$.

$$\frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2} - \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2} = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \tag{38}$$

d)

Vi skriver sannsynlighets tettheten på sin alternative form.

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) \tag{39}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m^* \psi_m^* x e^{iE_m t/\hbar}\right) \tag{40}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_n c_m^* \psi_n(x) \psi_m^*(x) e^{-iE_n t/\hbar} e^{iE_m t/\hbar} \tag{41}$$

$$\tag{42}$$

Etter å ha stokket om litt faktoriserer vi e-leddene slik at vi får et enkelt utrykk samt bytter ut ψ_n med $\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ samt definerer $k_1 = \frac{n\pi}{a}$.

$$|\Psi(x,t)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_n c_m^* \frac{2}{a}\sin(k_1 x)\sin(k_1 x)e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \tag{43}$$

Vi kan skrive om sinus utrykkene til cosinus slik som vi viste i oppgave c, og bruke at $E_n = n^2 E_1$ for å skrive om eksponentene i e.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_n c_m^* \frac{1}{a}\cos\Big((m-n)k_1 x\Big)\cos\Big((m+n)k_1 x\Big)e^{E_1(m^2-n^2)t/\hbar} \tag{44}$$

For å skrive om summen for at $m \geq n$ må vi gjøre om utrykket for å inkludere tilfellene der $m < n$. (legger til ekstra e). For å korrigere for tilfellet hvor $m = n$ legger vi til $1 - \delta_{mn}/2$. e-leddet kan skrives om slik vi viste i oppgave c.

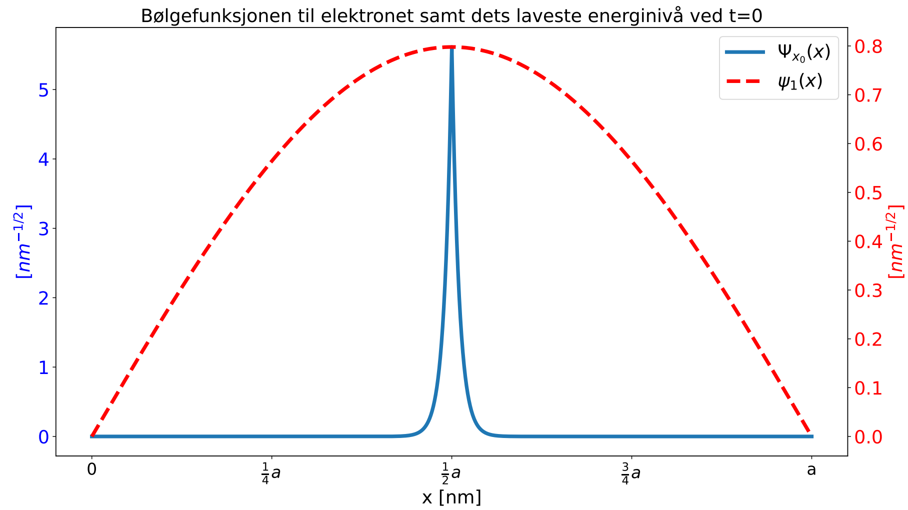
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\geq n}^{\infty} c_n c_m^* \frac{1}{a}\cos\Big((m-n)k_1 x\Big)\cos\Big((m+n)k_1 x\Big)\times \tag{45}$$
$$\left(\frac{e^{iE_1(m^2-n^2)t/\hbar} - e^{iE_1(m^2-n^2)t/\hbar}}{2}\right)(2-\delta_{mn})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\geq n}^{\infty} c_n c_m^* \underbrace{\frac{1}{a}\cos\Big((m-n)k_1 x\Big)\cos\Big((m+n)k_1 x\Big)\cos\big((m^2-n^2)\omega_1 t\big)}_{\Omega_{mn}(x,t)} \tag{46}$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\geq n}^{\infty} c_n c_m^* \Omega_{mn}(x,t) \tag{47}$$

e)

Vi definerer $\Psi_n(x,0) = \psi_n(x)$ som beskrevet i likning 2.18 i Griffiths (versjon 3). Videre bruker vi uttrykket for $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ som er beskrevet i likning 2.31 i Griffiths (versjon 3). $\Psi_{x_0}(x,0)$ defineres som beskrevet i oppgaven.



Figur 1: Plot av $\Psi_{x_0}(x,0)$ og $\psi_1(x)$

f)

Sannsynligheten for at en måling av $\Psi_{x_0}(x,0)$ i grunntilstanden for $n = 1$ vil være $|c_1|^2$. Fra likning 2.40 i Griffiths (versjon 3) har vi et utrykk for c_n som er gitt ved likning (48)

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \ \Psi(x,0) \ \mathrm{d}x \tag{48}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{1\pi}{a}x\right) \ \Psi(x,0) \ \mathrm{d}x \tag{49}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{a\varepsilon}} \int_0^a \sin(x)\, e^{-|x-x_0|/\varepsilon} \ \mathrm{d}x \tag{50}$$

$$c_1 = 0.2825 \tag{51}$$

Sannsynligheten er da $0.2825^2 = 0.0798 \approx 8.0\%$. Bølgefunksjonen vil etter målingen til grunntilstanden, kollapse til en enkelt verdi.

Oppgave 4

a)

Vi bruker den rekursive formelen fra likning 2.67 fra Griffiths (versjon 3)

$$\psi_n = \frac{\sqrt{n}\psi_{n-1}}{\hat{a}_-} \tag{52}$$

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{1}\psi_0}{\hat{a}_-} = \frac{\psi_0}{\hat{a}_-} \tag{53}$$

$$\psi_2 = \frac{\sqrt{2}\psi_1}{\hat{a}_-} = \frac{\sqrt{2}\psi_0}{(\hat{a}_-)^2} \tag{54}$$

$$\psi_3 = \frac{\sqrt{3}\psi_2}{\hat{a}_-} = \frac{\sqrt{6}\psi_0}{(\hat{a}_-)^3} \tag{55}$$

$$\psi_4 = \frac{\sqrt{4}\psi_3}{\hat{a}_-} = \frac{\sqrt{24}\psi_0}{(\hat{a}_-)^4} \tag{56}$$

Hvis vi stokker om likning (56) får vi

$$(\hat{a}_-)^4 \psi_4 = \sqrt{24}\psi_0 = \sqrt{4!}\psi_0$$

Gjør vi dette for likningene (53) til (55) ser vi et klart mønster som vi kan bruke til å finne et eksplisitt formel for $(\hat{a}_-)^n \psi_n$.

$$(\hat{a}_-)^n \psi_n = \sqrt{n!}\psi_0 \tag{57}$$

b)

Ettersom ψ_0 er det laveste energinivået, vil naturligvis $(\hat{a}_-)\psi_0$ være 0. Videre bruk av operatorene på negative energinivåer (som i utgangspunktet ikke gir mening) vil da naturligvis også gi 0, som vil si at $(\hat{a}_-)^n \psi_0 = 0$. Vi ser også at om vi bruker utrykket for $(\hat{a}_-)^n \psi_n$ derivert i likning (57) får vi $(\hat{a}_-)^n \psi_0 = \sqrt{0!}\psi_0 = \psi_0$.