FYS2140 - Oblig 1

Oskar Idland

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Kontinuitet og Kvantisering

a) Størrelser i klassisk fysikk

Bevegelsesmengde p:

Bevegelsesmengde er en kontinuerlig størrelse ettersom hastighet er en kontinuerlig størrelse.

Elektrisk ladning q:

Elektrisk ladning er en diskré størrelse ettersom det er definert ut fra ladningen til et enkelt elektron.

Energi E

Energi er en kontinuerlig størrelse.

b) Størrelser i kvantefysikk

Bevegelsesmengde p:

Bevegelsesmengde er en diskré størrelse ettersom energien til partikler er diskret.

Elektrisk ladning q:

Elektrisk ladning er en diskré størrelse ettersom det er definert ut fra ladningen til et enkelt elektron.

Energi E

Energi er en diskré størrelse

c)

Legg til tegninger til slutt

Oppgave 2 Determinisme og Statistisk Fordeling

a)

For å vite hvor en ball havner etter den har blitt kastet må vi vite dens startposisjon r_0 og dens hastighetsvektor $\vec{v}$. Usikkerheter kan komme fra vår evne til å måle både hastighet og startposisjon. I klassisk fysikk er dette kontinuerlige verdier som vil være umulig å få helt nøyaktig.

(a) 100 baller som kastet likt etter hverandre mot en vegg

(b) 100 elektroner som skytes likt etter hverandre mot en vegg

Figur 1: Forskjellen på baller og elektroner som oppfører seg klassisk og kvantemekanisk

b)

For å vite akkurat hvor den ville havnet måtte vi hatt den eksakte startposisjon r_0 og dets hastighetsvektor $\vec{v}$. I kvantefysikken er det umulig å vite begge to samtidig og dermed umulig å vite nøyaktig hvor den havner. Det eneste vi kan vite er sannsynligheten for hvor partikkelen kan befinne seg og hvilke hastigheter den kan ha. Dette kan gi oss da en sannsynlighet for hvor den kommer til å havne.

c)

B Regneoppgaver

Oppgave 3 Lek med Komplekse Tall

a)

(i) $z = i$

$$z^* = -i$$
$$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$
$$|z|^2 = 1^2 = 1$$
$$zz^* = -ii = 1 = |z|^2$$

(ii) $z = 3 + 4i$

$$z^* = 3 - 4i$$
$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$|z|^2 = 5^2 = 25$$
$$zz^* = (3 + 4i)\,(3 - 4i) = 9 - \cancel{12i} + \cancel{12i} - 16ii = 25 = |z|^2$$

(iii) $z = -3$

$$z^* = -3$$
$$|z| = \sqrt{(-3)^2} = 3$$
$$|z|^2 = 3^2 = 9$$
$$zz^* = -3 \cdot -3 = 9 = |z|^2$$

(iv) $z = 1 + i$

$$z^* = 1 - i$$
$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$|z|^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$zz^* = (1+i)(1-i) = 1 - \cancel{i} + \cancel{i} - i^2 = 1 + 1 = 2 = |z|^2$$

b)

I følgende oppgaver vil vi bruke relasjonen $z_1/z_2 = z_1 z_2^* \, |z_2|^2$

(i) $\frac{3+4i}{1-2i}$

$$z_2^* = 1 + 2i, \quad |z_2|^2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2}^2 = 5$$
$$(3+4i)(1+2i)/5 = \frac{3 + 6i + 4i - 8}{5} = -1 + 2i$$

(ii) $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$ Vi ønsker å bli kvitt røttene og multipliserer med $\sqrt{3} - i$ oppe og nede.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)} \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{4}{(1-i)\cdot 2} = \frac{2}{1-i}$$
$$z_2^* = 1 + i, \quad |z_2|^2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2}^2 = 2$$
$$\frac{2 \cdot (1+i)}{2} = 1 + i$$

c)

I følgende oppgaver bruker vi at $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, hvor $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(i) $z = 2i$

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(ii) $z = -6 + 6\sqrt{3}i$.

$$r = \sqrt{6^2 + 6^2\sqrt{3}^2} = 12 \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{6\sqrt{3}}{-6}\right) = \frac{2}{3}\pi$$
$$z = 12e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

(iii) $z = -1$

$$z = 1e^{i\pi}$$

d)

(i) $z_1 = 2e^{-i\pi}$ og $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 3e^{i\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$

(ii) $z_1 = e^{-i\frac{1}{5}\pi}$ og $z_2 = e^{i\frac{1}{5}\pi}$

$$z_1 z_2 = 1 \cdot 1e^{i\left(\cancel{-\frac{1}{5}\pi}+\cancel{\frac{1}{5}\pi}\right)} = 1$$

Ettersom $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ er å multiplisere med dette det samme som å multiplisere med i som er det samme som å rotere ett komplekst tall med 90° i positiv retning.

Oppgave 4 Derivasjon og et par Viktige Diff. ligninger

a)

(i) $f(x) = Ae^{-ax}$

$$f'(x) = -aAe^{-ax} \quad , \quad f''(x) = a^2Ae^{-ax}$$

(ii) $f(x) = Ae^{iax}$

$$f'(x) = iaAe^{iax} \quad , \quad f''(x) = -a^2Ae^{iax}$$

(iii) $f(x) = \sin(ax)$

$$f'(x) = a\cos(ax) \quad , \quad f''(x) = -a^2\sin(ax)$$

b)

Vi betrakter differensiallikningen

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = bf(x), \qquad f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 3$$

Vi skriver dette på den generelle formen

$$r - b = 0$$

som har løsning $r = b$. Vi kan derfor skrive om løsningen til følgende:

$$f(x) = Ce^{bx}.$$

Deretter setter vi inn initial betingelsene.

$$f(0) = C = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$f'(0) = 1 \cdot b = 3 \Rightarrow b = 3$$

Da har vi løsningen

$$f(x) = e^{3x}$$

c)

Vi betrakter differensiallikningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \varepsilon f(x).$$

Vi skriver dette på den generelle formen

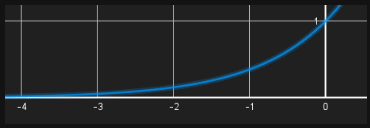
$$r^2 - \varepsilon = 0$$

som har løsningene $r = \pm\sqrt{\varepsilon}$. Vi kan derfor skrive om løsningen til følgende:

$$f(x) = Ae^{\sqrt{\varepsilon}x} + Be^{-\sqrt{\varepsilon}x}.$$

Hvis vi krever at $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ må $A = 0$ ettersom $\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{\varepsilon}x} = \infty$.

Hvis vi krever at $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ må $B = 0$ ettersom $\lim_{x\to-\infty} e^{-\sqrt{\varepsilon}x} = \infty$.



Figur 2: $f(x)$ med $B = 0$ og $A = 1$

d)

Hvis $\varepsilon < 0$ så vil løsningen på ligningen bli kompleks. Da blir løsningen $r = \pm i\sqrt{\varepsilon}$ som gir oss en funksjon $f(x)$

$$f(x) = Ae^{i\left|\sqrt{\varepsilon}\right|x} + Be^{-i\left|\sqrt{\varepsilon}\right|x} = A(\cos(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x) + i\sin(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x)) + B(\cos(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x) - i\sin(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x))$$

$$f(x) = A\cos(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x) + B\cos(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x) + i\left(A\sin(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x) - B\sin(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x)\right)$$

$$f(x) = (A + B)\cos(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x) + i\,(A - B)\sin(\left|\sqrt{\varepsilon}\right| x)$$

Oppgave 5 Litt integralregning

a)

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-4x-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+2\cdot 2x+1\right)}\,\mathrm{d}x$$

Bruker Rottmann (2019 s, 155 (51))

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}$$

$$\pi e^{\frac{2^2-1}{1}} = \pi e^3$$

(ii)

$$\int_0^\infty xe^{-2x^2}\ \mathrm{d}x$$

Bruker Rottmann (2919 s, 155 (50))

$$\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}2^{-\frac{1+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) = \frac{1}{2}2^{-1}\Gamma(1)$$

$$\frac{1}{4}1 = \frac{1}{4}$$

b)

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

Vi konverterer til sfæriske koordinater.

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho\sin(\theta)e^{-2\rho}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\rho$$

$$\int_0^\infty \int_0^\pi 2\pi\rho\sin(\theta)e^{-2\rho}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\rho = \int_0^\infty 4\rho e^{-2\rho}\ \mathrm{d}\rho$$

Vi bruker at

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^{n+1}}n!$$

$$4\pi\frac{1}{2^2}1! = \pi$$