

FYS2140 - Kvantefysikk

Oskar Idland

Innhold

I	Historisk Utvikling	3
1	Bruddet med Klassisk Fysikk	4
1.1	Hva er Kvantemekanikk?	4
1.1.1	Energikvantisering	4
1.1.2	Bølge-Partikkel-dualitet	4
1.1.3	Egentilstand og superposisjon	4
1.1.4	Heisenberg's uskarphetsrelasjon	5
1.1.5	Paulis eksklusjonsprinsipp	5
1.2	Enheter i Kvantefysikk	5
1.2.1	Lengde	5
1.2.2	Energi	5
1.2.3	Masse	6
1.2.4	Andre Konstanter	6
1.2.5	Coulomb-potensialet	6
1.2.6	Nyttige Tabeller	6
1.3	Planck's Kvantiseringshypotese	8
1.3.1	Utleddning av Wiens Forskyvningslov	12
2	Lysets Partikkelegenskaper	13
2.1	Fotoelektrisk Effekt	13
2.2	Röntgen-Stråling	13
II	Forelesning Notater	14
3	Lysets Partikkelegenskaper	15
3.1	02 Forelesnings Notater	16
3.1.1	Definisjoner	16
3.2	03 Forelesning Notater	17
3.2.1	Fotoelektrisk Effekt	17

3.3	04 Forelesnings Notater	21
3.3.1	Compton-Spredning	21
4	Bohr's Atommodell	25
4.1	05 Forelesnings Notater	26
4.1.1	Bohr's Atommodell	26
4.1.2	Franck-Hertz eksperimentet	28
5	Materiens Bølgeegenskaper	30
5.1	06 Forelesnings Notater	31
5.2	07 Forelesnings notater	34
5.2.1	Oppdagelsen av Schrödinger-ligningen	34
5.3	08 Forelesnings Notater	38
5.3.1	Tidsavhengige bølgeligninger	38
5.3.2	Bølgepakke for fri partikkel	38
5.3.3	Generell løsning av bølgepakke av planbølger	39
5.3.4	Tolkninger	39
5.4	09 Forelesnings Notater	40
5.4.1	Forventningsverdi og Standardavvik for Partikler	41
5.5	10 Forelesnings Notater	42
5.5.1	Potensialet til uendelig dyp brønn	42
5.6	11 Forelesnings Notater	46
6	Formalisme	49
6.1	17 Forelesnings Notater	50
6.1.1	Postulat	50
6.1.2	Teorier rundt bølgefunksjonen	53
6.1.3	Anvendelser	53
6.1.4	Kommutatorer	53
6.1.5	Uskarphetsrelasjoner	53

Del I

Historisk Utvikling

Kapittel 1

Bruddet med Klassisk Fysikk

1.1 Hva er Kvantemekanikk?

Kvantemekanikk forsøker å beskrive fysiske systemer på kvante nivå. Her står Schrödinger's likning sentralt.

1.1.1 Energikvantisering

Energi i Kvantemekanikken er ikke en kontinuerlig størrelse. Den har diskrete verdier. Dette kalles energikvantisering. Dette gjelder både fotoner og elektroner.

1.1.2 Bølge-Partikkel-dualitet

Vi vet ikke helt hva er partikkel er, men det vi vet er at de har egenskaper som minner om partikler og bølger. Dette kalles bølge-partikkel-dualiteten. Vi kan skyte ut fotoner i små energi pakker eller kvanter hvor de vil oppføre seg som partikler, men som en ser i dobbelspalteeksperimentet kan de likevel oppføre seg som bølger på samme tid. Da trenger vi Schrödinger's bølgeligning.

1.1.3 Egentilstand og superposisjon

En partikkel med kvantisert energien ϵ_n befinner seg i en tilstand som er beskrevet av bølgefunksjonen ψ_n . Dette kalles en energi-egentilstand. En partikkel kan være i flere energi-egentilstander samtidig. Dette kalles superposisjon. Vi kan tenke på Schrödinger's katt som en partikkel som er i en superposisjon av to energi-egentilstander, død og levende. Da får vi følgende:

$$\psi = c_{\text{død}} \cdot \psi_{\text{død}} + c_{\text{levende}} \cdot \psi_{\text{levende}} \quad (1.1)$$

Hvis vi måler tilstanden til katten vil vi få én av de to tilstandene. Enten død eller levende. Da ender vi opp i det som kalles *egentilstand* fra bølgefunksjonen/superposisjon. Sannsynligheten for at katten er død er da $|c_{\text{død}}|^2$ og Sannsynligheten for at katten er levende er $|c_{\text{levende}}|^2$. Det eneste Kvantemekanikken kan fortelle oss er sannsynligheten for at katten er i en tilstand, ikke om den er i den tilstanden eller ikke, før vi måler det.

1.1.4 Heisenberg's uskarphetsrelasjon

I klassisk mekanikk er foreksempel posisjon \mathbf{x} og bevegelsesmengde \mathbf{p} uavhengig størrelser. I Kvantemekanikken impliserer via Heisenberg's uskarphetsrelasjon at en ikke kan observere begge til en vilkårlig presisjon. Dette uttrykkes via følgende formel

$$\Delta \mathbf{p} \Delta \mathbf{x} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.2)$$

hvor $\Delta \mathbf{x}$ er usikkerheten i posisjon og $\Delta \mathbf{p}$ er usikkerheten i bevegelsesmengde. Dette er bare en merkbart på atomært nivå, men gjelder teknisk sett alltid.

1.1.5 Paulis eksklusjonsprinsipp

To fermioner (f.eks elektroner, protoner, kvarker og nøytrinoer) kan ikke finnes seg i samme tilstand (dvs. samme energi samme sted). Dette ser vi i atomer hvor elektronene fyller opp skall slik at nye elektroner må fylle opp et nytt skall.

1.2 Enheter i Kvantefysikk

1.2.1 Lengde

For å unngå ekstremt små eller store tall bruker vi litt smarte enheter. Kvantefysikken operer på størrelser fra 10^{-8} til 10^{18} m. Nanometer (nm) er 10^{-9} m, femtometer (fm) er 10^{-15} m og ångstrøm (Å) er 10^{-10} m / 0.1nm.

1.2.2 Energi

For energi brukes til vanlig Joule, men energien i kvantemekanikken er så liten som 10^{-19} J. Da bruker vi eV (elektronvolt) som er $1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Dette kommer fra at 1J er likt med 1C · 1V. Da er 1 eV den kinetiske energien et elektron får når den akselereres gjennom en potensialdifferensen på 1V.

1.2.3 Masse

Istedet for å bruke kg for å måle masse kan vi heller bruke MeV/c^2 . Dette kommer fra likningen $E = mc^2$. Ser vi på hvileenergien til med enheten eV får vi

$$E_0^{\text{elektron}} = m_e c^2 = 5.11 \cdot 10^5 \text{ eV} \quad (1.3)$$

Løser vi dette for massen m_e får vi

$$m_e = E_0^{\text{elektron}}/c^2 = 0.511 \text{ MeV}/c^2 \quad (1.4)$$

1.2.4 Andre Konstanter

Placks konstant

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4.135 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \quad (1.5)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eVs} \quad (1.6)$$

$$hc = 1240 \text{ eV nm} (\text{MeV fm}) \quad (1.7)$$

$$\hbar c = 197.3 \text{ eV nm} (\text{MeV fm}) \quad (1.8)$$

Noen ganger kan det lønne seg å gange en brøk med c oppe og nede for å få inn konstanten $\hbar c$. Utrykket under hadde medført veldig små størrelser (10^{-34} og 10^{-31}) og dermed ville det blitt vanskelig å regne med.

$$\frac{h}{m_e c} = \frac{hc}{m_e c^2} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{0.511 \cdot 10^6} \approx 0.002 \text{ nm} \quad (1.9)$$

1.2.5 Coulomb-potensialet

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{k_e e^2}{2}, \quad k_e e^2 = 1.44 \text{ eV nm} \quad (1.10)$$

1.2.6 Nyttige Tabeller

Tabell 1.1: Standard metrisk notasjon for tierpotenser

Potens	prefiks	symbol	Potens	prefiks	symbol
10^{-1}	desi	d	10^1	deka	da
10^{-2}	centi	c	10^2	hekto	h
10^{-3}	milli	m	10^3	kilo	k
10^{-6}	mikro	μ	10^6	mega	M
10^{-9}	nano	n	10^9	giga	G
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-18}	atto	a	10^{18}	exa	E

Figur 1.1

Tabell 1.2: Nyttige konstanter

Konstant	symbol	verdi
Lyshastighet	c	2.998×10^8 m/s
Permittivitet i vakuum	ϵ_0	8.854×10^{-12} F/m
Elektronladning	e	1.602×10^{-19} C
Coulombs konstant	$k_e = 1/4\pi\epsilon_0$	8.988×10^9 Nm ² /C ²
	$k_e e^2$	1.440 eVnm
Plancks konstant	h	6.626×10^{-34} Js = 4.136×10^{-15} eVs
	$\hbar = h/2\pi$	1.055×10^{-34} Js = 6.582×10^{-16} eVs
	hc	1240 eVnm
	$\hbar c$	197.3 eVnm
Finstrukturkonstant	$\alpha = k_e e^2 / \hbar c$	1/137.036
Bohr-radius	$a_0 = \hbar^2 / m_e k_e e^2$	0.05292 nm
Hydrogenatomets grunntilstand	$-k_e e^2 / 2a_0$	-13.61 eV
Elektronets gyromagnetiske faktor	g_e	2.002
Kjernemagneton	$\mu_N = eh/2m_p$	3.152×10^{-14} MeV/T
Gravitasjonskonstant	G_N	6.674×10^{-11} Nm ² /kg ²
Boltzmanns konstant	k_B	1.381×10^{-23} J/K = 8.617×10^{-5} eV/K

Figur 1.2

Tabell 1.3: Masser til viktige partikler

Partikkel	i kg	i MeV/c ²	i u = 1.661 × 10 ⁻²⁷ kg
elektron	9.109 × 10 ⁻³¹ kg	0.511 MeV/c ²	0.000549 u
proton	1.672 × 10 ⁻²⁷ kg	938.3 MeV/c ²	1.007277 u
nøytron	1.675 × 10 ⁻²⁷ kg	939.6 MeV/c ²	1.008665 u
hydrogen	1.673 × 10 ⁻²⁷ kg	938.8 MeV/c ²	1.007825 u

Figur 1.3

Tabell 1.4: Nyttige forhold for partikler.^a

Bølgeegenskaper for frie tilstander		
For $m \geq 0$, både relativistisk og ikke-relativistisk		
Energi	$E = h\nu = \hbar\omega$	
Beregningsmengde og bølgetall ^b	$p = \hbar k = h/\lambda$	$k = 2\pi/\lambda$
Vinkelfrekvens og frekvens	$\omega = 2\pi\nu$	$\nu = c/\lambda$
<hr/>		
Partikkelegenskaper for frie tilstander		
For $m = 0$, kun relativistisk		
Energi og hastighet ^b	$E = pc$	$v = c$
For $m > 0$, relativistisk		
Energi	$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	
Beregningsmengde ^b	$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}$	
For $m > 0$, ikke-relativistisk ^c		
Energi inkl. hvileenergi	$E = \frac{mv^2}{2} + mc^2$	
Beregningsmengde ^b	$p = mv$	

^a Merk de lignende symbolene for hastighet v og frekvens ν .

^b Merk at bevegelsesmengde $p = |\mathbf{p}|$, bølgetall $k = |\mathbf{k}|$, og hastighet $v = |\mathbf{v}|$ også har retning.

^c Tommelfingerregel: Bruk relativistisk når $v/c > 1\%$.

Figur 1.4

1.3 Planck's Kvantiseringshypotese

Kvantisering betyr i kvantefysikken at en fysisk størrelse bare antar diskrete verdier. Eksempler på dette er elektrisk ladning, hvor fri ladning er et heltallig N multiplum av antall frie elektroner. Energi kan også kvantifiseres og var definerende for bruddet med klassisk fysikk. Klassisk fysikk klarer ikke å forklare frekvensfordelingen til elektromagnetisk stråling fra et legeme ved en gitt temperatur. Dette kan være sola eller en vanlig stekeplate.

Definisjoner

- **Termisk stråling:** Elektromagnetisk stråling sendt ut av et materiale ved en temperatur T . Alle legemer emitterer og absorber denne strålingen
- Ved en gitt temperatur T er vi interessert i å finne fordelingen av emittert stråling som funksjon av den elektromagnetiske strålingen sin frekvens ν eller bølgelengde λ . Forholdet mellom frekvens ν og bølgelengde λ er gitt ved

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (1.11)$$

- **Frekvensfordeling**

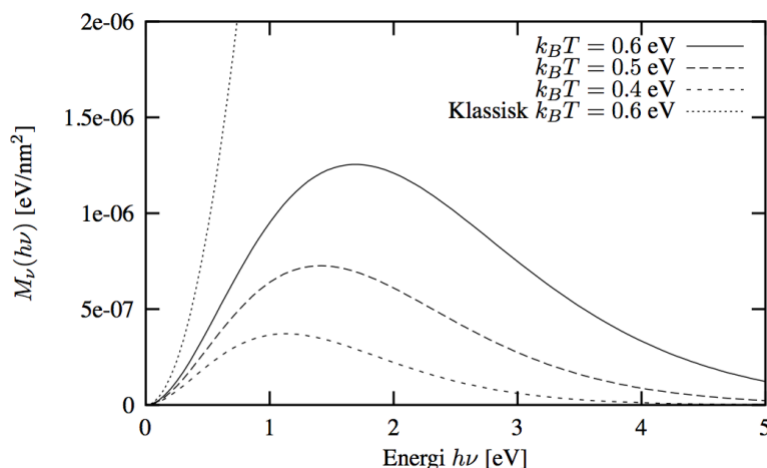
$$M_\nu(T) \quad (1.12)$$

Kalles spektralfordelingen eller fordelingsfunksjonen for frekvensspektret beskriver mengden utstrålt energi fra en gjenstand ved temperatur T per areal per tid per frekvensenhet.

- Integrert over alle frekvenser

$$M(T) = \int_0^\infty M_\nu(T) d\nu \quad (1.13)$$

får vi totalt utstrålt energi per sekund per areal ved en gitt temperatur T . Enhetene bli følgende: $M(T) = J/m^2s = W/m^2$. Dette kalles radians.



Figur 1.5: Frekvensfordelingen fra Planck's kvantiseringspostulat. Merk den klassiske kurven som øker alt for mye ikke matcher observert frekvens

- Vår utfordring er å finne frem til en forklaring for den eksperimentell formen til $M_\nu(T)$

Den klassiske versjonen å se på dette var via et sort legeme som er tenkt til å ikke reflektere noe av strålingen den mottar, alt blir absorbert. Dette ble det eksperimentert og resultatet ser man i figur 1.5. Basert på måledata kom en fram til at radiansen til et sort legeme kan skrives som

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (1.14)$$

hvor σ er en konstant. Dette kalles Stefan-Boltzmanns lov. Wiens forskyvningslov beskriver sammenhengen mellom temperaturer og bølgelengden λ_{\max} .

$$\lambda_{\max} T = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ mK} \quad (1.15)$$

Nå skal vi se hva som skjer når vi bruker resultatene fra klassisk fysikk.

$$M_\nu(T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle E \rangle \quad (1.16)$$

hvor $\langle E \rangle$ er gjennomsnittsennergien per svingemode til det elektromagnetiske feltet i hulrommet til det sorte legeme.

$$\langle E \rangle = k_B T \quad (1.17)$$

hvor k_B er Boltzmanns konstant. For å finne radiansen setter vi inn uttrykket for $\langle E \rangle$ og integrerer.

$$M(T) = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} k_B T \, d\nu \quad (1.18)$$

Dette er lett å se at energien går mot uendelig og matcher ikke med de eksperimentelle resultatene. En formel som matcher bedre kan ikke divergere. Feilen er at $\langle E \rangle$ er ikke stemmer. Hvis en ser på strålingen som et stort antall kvantiserte enheter med energi ϵ_n

$$\epsilon_n = nh\nu \quad (1.19)$$

der h er Planck's konstant og n er et heltall. Planck utledet et alternativt uttrykk for $\langle E \rangle$.

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (1.20)$$

Som gir

$$M_\nu(T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (1.21)$$

Som samsvarer med eksperiment. Viktig å få med seg er at $\langle E \rangle \rightarrow k_B T$ når $T \rightarrow \infty$ eller $\lambda \rightarrow \infty$ aka $\nu \rightarrow 0$ som er hvor klassisk mekanikk er gyldig. For å få litt mer elegante uttrykk å unngå store eller små tall ganger vi inn h .

$$M_\nu(T) = \frac{2\pi}{h^2 c^2} \frac{(h\nu)^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (1.22)$$

Vi setter in $x = h\nu$

$$M_x(T) = \frac{2\pi}{h^2 c^2} \frac{x^3}{e^{x/k_B T} - 1} \quad (1.23)$$

Vi vet at $hc = 1240 \text{ eV nm}$

$$M_x(T) = \frac{2\pi}{1240^2} \frac{x^3}{e^{x/k_B T} - 1} \quad (1.24)$$

Hvor M_x har enheter eV / nm^2 . For å utlede Stefan-Boltzmanns lov via Planck's uttrykk bruker vi den originale formelen og setter in x vi fant tidligere.

$$M(T) = \int_0^\infty M_\nu(T) d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \quad (1.25)$$

$$M(T) = \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\frac{\pi^4}{15}} \quad (1.26)$$

$$M(T) = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} = 5.676 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (1.27)$$

Den viktigste forskjellen var at Planck regnet ut den midlere verdien $\langle E \rangle$ med diskrete verdier for energi og ikke kontinuerlige verdier. Han hadde dataen foran seg og prøvde å finne en modell som passet.

Plank's Hypotese

Enhver fysisk størrelse som utviser enkle harmoniske svingninger har energier som tilfredsstiller

$$E_n(\nu) = nh\nu, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.28)$$

hvor ν er frekvensen til svingningene og h er en universell konstant.

Kvantefysikken gjelder alltid, men klassisk fysikk kan brukes når energiskalaen er stor nok ettersom det ikke er merkbart.

1.3.1 Utledning av Wiens Forskyvningslov

Kapittel 2

Lysets Partikkelegenskaper

2.1 Fotoelektrisk Effekt

2.2 Röntgen-Stråling

Del II

Forelesning Notater

Kapittel 3

Lysets Partikkelegenskaper

3.1 02 Forelesnings Notater

3.1.1 Definisjoner

Sort legeme

Et sort legemet absorberer alt av stråling og vil ved lave temperaturer se helt sort ut. Ved høyere temperaturer vil den gløde.

Frekvensfordeling $M_\nu(T)$

Funksjonen som viser fordelingen av forskjellige temperaturer i et sort legeme.

Radians $M(T)$

Total mengde energi et sort legemet stråler ut.

$$M(T) = \int_0^\infty M_\nu(T) \, d\nu \quad (3.1)$$

Stående bølge

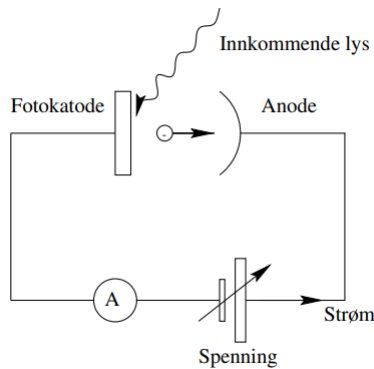
En stående bølge er en bølge som ikke beveger seg.

3.2 03 Forelesning Notater

Sentrale Kunnskaper

- Beskrive den fotoelektriske effekten og
- Hvordan Einsteins teori forklarer de tre ekps. observasjonene. Forstå hva det betyr at et materialet har arbeidsfunksjon w_0 . Håndtere og beregne $K_{\max} = h\nu - w_0$
- Beskrive hvordan Röntgen-stråling-eksp. støtter Einsteins teori.

3.2.1 Fotoelektrisk Effekt



Figur 3.1: Oppsett av den fotoelektriske effekten

Spenningen V fra Anoden til Fotokatoden skaper et elektrisk felt fra Anoden til Fotokatoden. Her går det ikke noe strøm. Hvis vi sender elektromagnetisk stråling på Fotokatoden får vi en fotostrøm strøm gjennom kretsen. Dette må bety at strålingen frigjør elektroner i materialet.

Intensiteten til lyset defineres som $I = \frac{E}{As}$ hvor E er energi, s er tid og A er areal. Intensitet måles i W/m^2

Den kinetiske energien K til et elektron er definert ved overflaten til materialet til Fotokatoden.

Det elektriske feltet vil akselererer elektronene som fører til en økning i kinetisk energi gitt ved

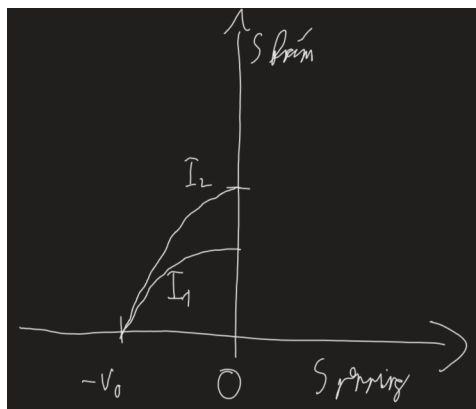
$$K + eV.$$

Illustrert i figur 3.1, har vi en positiv spenning ved Anoden. Hvis vi snur dette til en negativ spenning $-V$. Da vil elektronene ha en kinetisk energi

$K_{\text{overflate}}$, som motvirkes av det elektriske feltet. Elektronene vil da gå tilbake til materialet. Hvis den kinetiske energien er høy nok kan elektronene nå frem til Anoden i andre enden. Da blir den kinetiske energien $K = K_{\text{overflate}} - |eV|$. Da må naturligvis $K_{\text{overflate}} \geq eV$. Dette fenomenet ble avdekket tre observasjoner.

Observasjon 1

For å undersøke strømmen som funksjon av spenningen setter vi en konstant intensitet og frekvens på lyset. Når vi minker spenningen vil strømmen også minke ettersom elektronene krever mer kinetisk energi for å nå Anoden. Til slutt vil strømmen ta fullstendig slutt når vi setter på en spenning $-V_0$. Ved denne spenningen er $K < |eV_0|$. Vi setter da $K_{\text{maks}} = |eV_0|$. Strømmen med dette oppsette er notert ved I_1 sett i figur 3.2

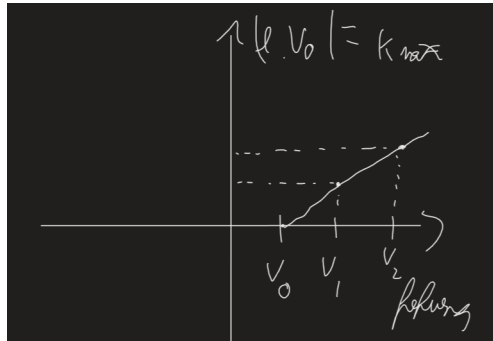


Figur 3.2: Eksperimentelle resultater av fotoelektrisk effekt

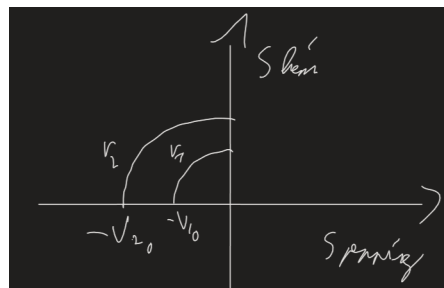
Nå kommer det som kræsjer med klassisk fysikk. Hvis vi øker intensiteten på strålingen forventer vi at elektronene får høyere kinetisk energi, og flere elektroner blir en del av fotostrømmen. Det stemmer at en får mer strøm I_2 , men strømmen stopper ved samme spenning $-V_0$ som sett i figur 3.2.

Observasjon 2

Neste forsøk som sett i figur 3.3 valgte man å holde intensitet konstant og varierer spenningen ν . Da ser man at max kinetisk energi øker lineært med frekvensen på lyset. K_{max} går mot null når frekvensen går mot $\nu_0 > 0$. Frekvensen dikterer hva som er den maksimale kinetiske energien til elektronene, og dermed størrelsen på spenningen V_0 som sett i figur 3.4.



Figur 3.3: Eksperimentelle resultater av fotoelektrisk effekt med varierende frekvens ν



Figur 3.4: Strøm som en funksjon av spenning

Observasjon 3

En la merke til at fotostrømmen skjer nesten øyeblikkelig. Det betyr at det elektronene ikke krever mye tid for å få en kinetisk energi $K = |eV_0|$. Dette er uavhengig av intensiteten på strålingen.

Oppsummert 1a. Det eksisterer en stoppepotensial V_0 , og ingen elektroner har $K \geq |eV_0|$.

1b. $K_{\text{maks}} = |eV_0|$ uavhengig av intensiteten på strålingen.

2a. K_{maks} øker lineært med frekvensen på strålingen.

2b. K_{maks} går mot null når frekvensen går mot $\nu_0 > 0$

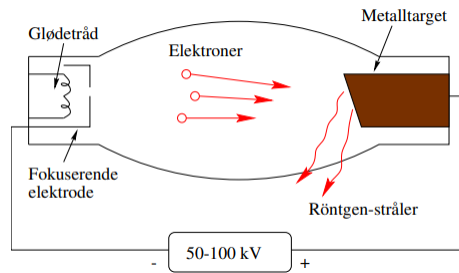
3. Fotostrømmen skjer nesten øyeblikkelig.

Einsteins Forklaring

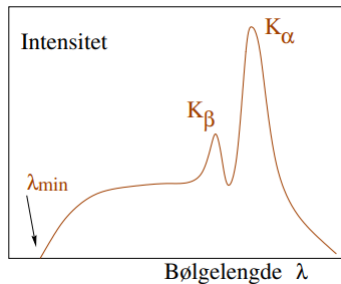
Einstein så på lyset som små energi pakker i stedet for et kontinuerlig bølgefelt. Hvert foton vil da ha en energi $E = h\nu$. Fotonene vil frigjøre elektronene i materialet. Dette vil da gi elektronene en energi $E = h\nu$, som kan være nok

til å komme på utsiden av materialet. Det krever litt energi så elektronet vil ha en kinetisk energi $K = h\nu - \omega$, der ω er energien tapt på vei til overflaten. Da vil $K_{\text{maks}} = h\nu - \omega_0$ ettersom ω_0 er den minste energien som kreves for å løsribe det svakest bunnende elektronet. ω_0 er arbeidsfunksjonen. Dette er i et ideelt tilfelle hvor elektronene ikke kolliderer med hverandre eller går i andre retninger enn rett mot Anoden. Det viktigste å få med seg er hvordan Einstein forklarer at K_{maks} er uavhengig av intensiteten på strålingen, bare frekvensen.

Röntgen-Stråling



Figur 3.5: Oppsett av röntgenstråling eksperimentet



Figur 3.6: Intensitet fordeling ved Röntgenstråling

Dette er det motsatte av fotoelektrisk effekt. Her skytes elektroner på et materialet som skyter ut fotoner. Den maksimale energien et utstrålt foton kan ha er gitt ved

$$E_{\text{maks}} = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

3.3 04 Forelesnings Notater

3.3.1 Compton-Spredning

Sentrale kunnskaper

- Beskrive de fysiske modellene
- Vite at fotoner har bevegelsesmengde
- fotoner kolliderer med frie elektroner, eller med tunge atomer
- Brakk-diffraksjon
- Utlede formel for compton-bølgelengde λ_c
- Beskrive hvordan fotonet tilordnes både partikkel- og bølge-egenskaper.
- Formler for energi og bevegelsesmengde

Oblig 1 denne uken

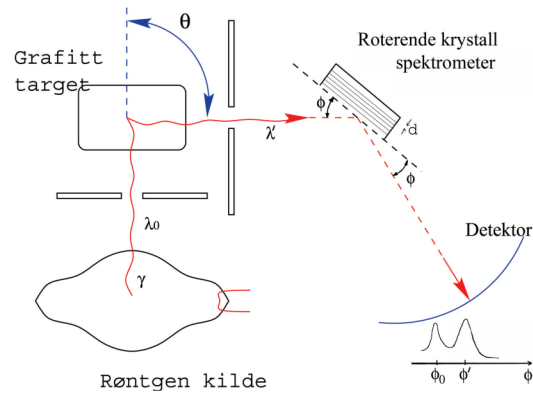
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \epsilon f(x)$$

Repetisjon

- Elektromagnetiske bølger består av energipakker (fotoner)
- Et foton:
- Har en bølgelengde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ og energi $E = h\nu$
- Oppfører seg også som en partikkel

Oppsett

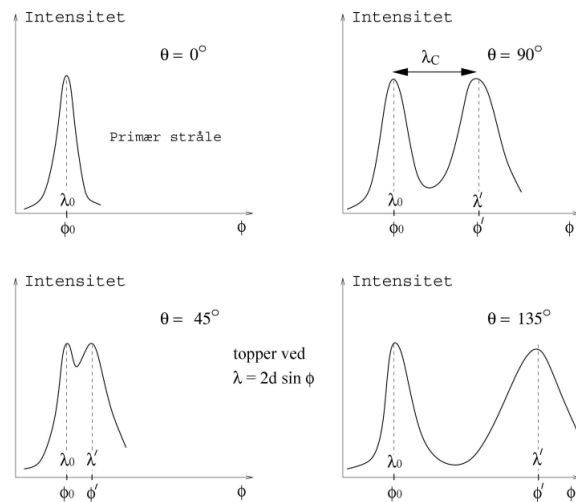
Vi sender Röntgenstråling med energi $E_0 = h\nu = hc/\lambda_0$ en hvis bølgelengde, på et mål laget av grafitt. Det kolliderer med elektronene i materialet, og skyter ut et nytt foton med ca. samme bølgelengde og energi. Dette fotonet kolliderer i krystall spektrometeret. Krystallen har flere lag som fotonet kan kollidere med. Flere fotoner kan da ha konstruktiv interferens med hverandre gitt ved $n\lambda = 2d \sin \phi$, der d er tykkelsen på krystallen, n er et heltall og at ϕ er innfallsvinkelen. Noen ganger kommer det et fotonet med større bølgelengde og dermed mindre energi. Denne spredningen av fotonene sin energi som sett



Figur 3.7: Oppsett av forsøk for Compton spredning

nederst til høyre i figur 3.7 kalles Compton spredning. En fant også ut at hvis en endrer vinkelen θ fra 90 grader til 45 grader skaper en større spredning som sett i 3.8.

Forklaring



Figur 3.8: Resultat ved compton eksperiment

Einstein forstod at hvis energien til fotonet var redusert måtte det også bety en reduksjon i bevegelsesmengde HVIS en er på fotonet som en partikkel. Han mente fotoner har følgende egenskaper:

1. $E = h\nu = hc/\lambda$

$$2. E = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow v = c, \quad m = 0$$

$$3. E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} \Rightarrow p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$$

Einstein tenkte da at energi og bevegelsesmengde må være bevart. Hvis en tenker at elektronene står stille vil da fotonet ha bevegelsesmengde p_{γ_x} og p_{γ_y} og elektronet bevegelsesmengde $p_e = 0$

Før Foton:

- $E_\gamma = hc/\lambda_0$
- $p_{\gamma_x} = h/\lambda_0$
- $p_{\gamma_y} = 0$

Elektron

- $E_e = m_e c^2$
- $p_e = 0$

Etter Foton:

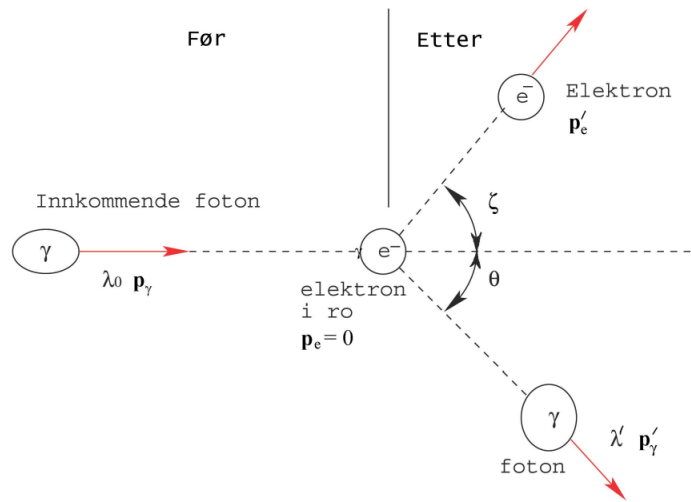
- $E'_\gamma = hc/\lambda'$
- $p'_{\gamma_x} = h/\lambda' \cos \theta$
- $p'_{\gamma_y} = -h/\lambda' \sin \theta$

Elektron:

- $E'_e = \sqrt{p'^2 c^2 + m_e^2 c^4}$
- $p'_{e_x} = p'_e \cos \zeta$
- $p'_{e_y} = p'_e \sin \zeta$

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_e c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + \frac{hc}{\lambda'}$$

$$\left(\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'} + m_e c^2 \right)^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4$$



Figur 3.9: Kollisjon mellom elektron og foton

$$\frac{h^2 c^2}{\lambda_0^2} + \frac{h^2 c^2}{\lambda'^2} - 2 \frac{h^2 c^2}{\lambda_0 \lambda'} + \cancel{m_e^2 c^4} + 2 m_e c^2 \left(\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'} \right) = p^2 c^2 + \cancel{m_e^2 c^4}$$

$$\Delta \lambda = (\lambda' - \lambda_0) = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

Som en konsekvens av ligningen over ser vi at maksimal spredning kommer av en vinkel $\theta = 180^\circ$.

Compton's Bølgelengde defineres som:

$$\lambda_c = \frac{hc}{m_e c^2} = 0.00243 \text{ nm}$$

$$\Delta \lambda_{\max} = 2\lambda_c = 0.0048 \text{ nm}$$

Som vi ser i figur 3.8 ser vi at uavhengig av spredning vil vi få samme λ_0 som tilsvarer en ϕ_0 . Dette er fordi at fotonet også kan treffe store atomer som beveger seg ekstremt lite. Hvilken av toppene tilsvarer hvilken type kollisjon ?

Kapittel 4

Bohr's Atommodell

4.1 05 Forelesnings Notater

4.1.1 Bohr's Atommodell

Balmer's empiriske parametrisering

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 2^2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad B = 3.64.6$$

Rydberg's generaliserte parametrisering

$$\frac{1}{\lambda} = R_h \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i = 2, 3, \dots = \text{initial tilstand} \quad n_f = 1 \dots n_i - 1 = \text{final tilstand}$$

$$\lambda = \underbrace{\frac{4}{R_h}}_B \left(\frac{n^2}{n^2 - 2^2} \right)$$

Thomson's Atommodell

Atomet er en kule med en positiv kjerne og negative ladninger fordelt jevnt rundt kula. Ladningene er like store og har en ladning på $-e$.

Rutherford's Atommodell

Han testet med å skyte α -partikler og målte hvor den endte opp. Hadde atomet vært slik Thomson mente, ville det vært en jevn fordeling av lading i atomet. Det som skjedde var at noen α -partikler endret skarpt retning som hinner til at den positive ladningen er sentrert i midten av atomet. Hvis dette skal stemme kan ikke elektronene være så nære hverandre som først anstatt. Ettersom elektronene vil bli tiltrukket av den positive kjernen må de ha en hastighet for å motvirke de magnetiske kreftene. En ladning som akselerer vil sende ut lyst. Elektronene vil ha sentripetal akselerasjon som vil minke etter som den mister energi i form av lys. Dette var under antagelsen at elektronene sender ut en kontinuerlig mengde lys.

Bohr's Atommodell

Bor mente vi har en positiv kjerne med lading $Q = +e$ og et elektron i bane rundt med lading $-e$.

Antagelser

1. Elektronet beveger seg i sirkulære baner om kjernen. Kraften mellom e^- og kjernen er Coulomb Kraften.
Potensialet til elektronet er $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.
2. Bare visse elektron baner er stabile.
3. Elektromagnetisk stråling sendes ut dersom elektronets tilstand endres fra en bane til en annen.
4. Elektronbanene er bestemt av angulært momentum som er kvantisert. Elektronene har en sirkulær bane med en hastighet og akselerasjon.

Kraften $F = -\frac{dU_e}{dr}$ hvor U_e er elektronets potensielle energi. Videre blir

$$-\frac{dU_e}{dr} = k_e \frac{e^2}{r^2}.$$

Ettersom kraften F er sentripetalakselerasjonen kan vi finne hastigheten.

$$k_e \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Den kinetiske energien E blir da

$$K_e + U_e = \frac{mv^2}{2} - k_e \frac{e^2}{r}$$

Klassisk fysikk Coulomb-vekselvirkning

Potensiell energi

$$U_e = -k_e \frac{e^2}{r}$$

Kraft

$$F_e = k_e \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

Energi

$$E = K_e + U_e = -k_e \frac{e^2}{2r}$$

Spin

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r \times m\vec{v} = rmv = n\hbar.$$

Observerer at $mv^2 = m \frac{n^2 \hbar^2}{r^2 m^2} = k_e \frac{e^2}{r}.$

$$mv^2 = \frac{1}{r} = k_e \frac{e^2 m}{n^2 \hbar^2}.$$

$$E = -k_e e^2 \frac{e^4 m c^2}{2 \hbar^2 c^2 n^2}$$

. Setter in verdier for hydrogen atom $E_n = -\frac{(1.44 \text{ eVnm})^2 0.511 \text{ MeV}}{2 (197.3 \text{ eVnm})^2} \frac{1}{n} = -13.61 \frac{1}{n^2} \text{ eV}$

som gir energien til et elektron i et hydrogen atom avhengig av skallet $n = 1, 2, 3, \dots$

$$E_f - E_i = -13.6 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ eV} = E_\gamma = h\nu = hc/\lambda$$

$$\frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{-13.5}{hc}}_{R_h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Denne modellen viser at lysets sender ut diskrete energier.

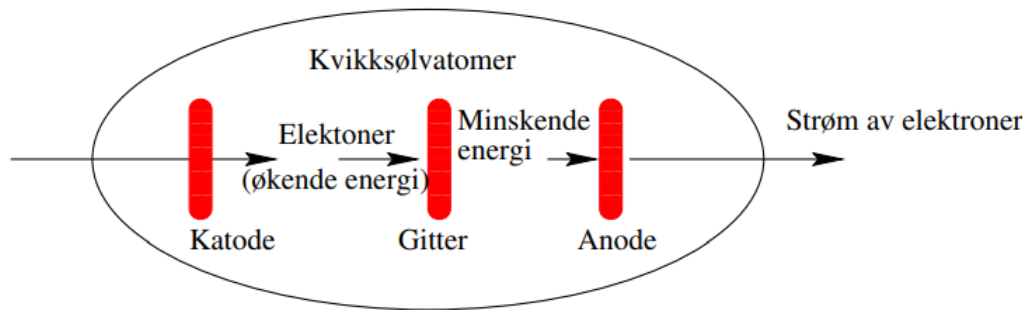
En observerte at atomene i atmosfæren absorberte lys med en bestemt frekvens. Dette var i samsvar med Bohr's atommodell.

4.1.2 Franck-Hertz eksperimentet

Ved gitteret er det positivt potensialet som blir negativt mot katoden og anoden. Den totale spenning V er gitt ved

$$V = V_{KG} - IV_{GA}I$$

Elektronene Reiser fra Katoden og mister litt energi over gitteret. Mister de for mye energi vil de ikke kunne komme seg til anoden. Hvis spenningen øktes vil kollisjonen i gitteret ha mindre effekt og det øker sjansen for å komme seg til anoden. Dette varer frem til spesifikk spenninger hvor vi ser en dip i



Figur 4.1: Franck Hertz eksperimentet

antall elektroner som når frem til anoden. Dette er fordi at elektronene får nok energi til å eksitere elektronene i atomene i gitteret, og mister dermed ekstremt mye mer energi enn vanlig. Noen elektroner vil likevel kunne både eksitere og komme seg til anoden. Ved å øke spenningen enda mer vil vi på nytt se en reduksjon av strøm ettersom elektronene eksiterer enda et elektron i et nytt atom i gitteret. De eksiterte elektronene vil falle ned til sin grunntilstand i et lavere skall og vil sende ut energien i form av lys.

Oppsummering

- Antar eksistensen av stasjonære tilstander
- Antar at elektronet i de sirkulære banene, og da er angulærmomentum kvantisert med $L = mvr = n\hbar$
- Lyktes spektakulært med å forutsi atomspekteret og de kjemiske egenskapene til enkle atomer
- Idéen om elektronbaner blir modifisert av kvantemekanikken

Kapittel 5

Materiens Bølgeegenskaper

5.1 06 Forelesnings Notater

Sentrale Kunnskaper

- Beskrive de Broglies hypotese og forstå hvordan de Broglies teori bidrar til Bohr's atommodell
- Beskrive resultatene fra dobbelspalte-eksperimentet
- Beskrive hvordan eksperiment viser på partikkel- og bølge-egenskaper til materien
- Forstå sannsynligheten til treff, og interferensmønster på skjermen bak.
- Beskrive interferensfenomenet i Davisson-Germer eksperimentet og Thomson-diffraksjon.

de Broglies hypotese og atom

Hypotese Hvis lys/fotoner oppfører seg som både bølge og partikkel må det samme gjelde materie.

Da må materie ha en energi E og en bevegelsesmengde ρ . Vi ser på dette i kontekst av elektroner

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \omega = 2\pi\nu \text{ (vinkelfrekvens)}$$

$$\rho = \frac{h}{\lambda} = \hbar k, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ (bølgetall)}$$

$$n\lambda = \underbrace{2\pi r}_{\text{omkrets}}$$

Det betyr at omkretsen til sirkelen er en multippel av bølgelengden λ .

Vi slår sammen bølgeversjonen av bevegelsesmengde og partikkel versjonen av bevegelsesmengde.

Bølge

$$\rho = \frac{h}{\lambda} = \hbar k = \frac{h}{2\pi r} n = \hbar n = mv \Rightarrow \hbar n = \underbrace{rmv}_{\text{Ang. momentum}} = L = \hbar n$$

Da er angulært moment også kvantisert.

Vi vet fortsatt ikke nøyaktig *hva* en partikkel er, men bare dets tilstand.

Oppsummering

- Elektronet tilordnes både partikkel- og bølgeegenskaper.
- Forklarer Bohr's kvantisering av angulærmomentum.
- Bølgeegenskapen er en fundamental forskjell mot Bohr's partikkel-lignende elektron.
- Kvantisering av bølgelengden er det som gjør kvantisering av energien mulig.

Dobbeltspalte-eksperimentet

Fenomenet kan bare forklares, ikke begrunnes. Kort oppsummert vil vi se et interferens mønster uavhengig av om vi sender ut bølger, eller kvantiserte energi pakker (fotoner) av elektromagnetisk stråling. Det har ikke noe å si hvor stort mellomrom mellom utskytingen av fotoner. Vi får uansett det samme mønsteret. Hvor hver partikkelen treffer på skjermen bak, er uavhengig av hverandre og helt tilfeldig. Hvorfor dette skjer? Vi vet ikke. Dette kan gjennomføres med vannbølger, lydbølger, elektromagnetisk stråling, eller atomer. Hvis vi setter en sensor foran bare én av spaltene vil partiklene passere ca. halvparten av gangene, men interferens mønstre opphører.

- Enkelt-partikler må dermed *interferere* med seg selv. Som om det passerer gjennom begge spalter samtidig.
- Hver partikkel har en eget innebygd sannsynlighet.
- Vi vet ikke hvilken vei det passerer gjennom spaltene, eller om det er begge samtidig.
- Etter treff, vet vi heller ikke hvilken vei det tok.
- Målingen av banen til partikkelen \Rightarrow interferens opphører.
- Måling endrer sannsynligheten.
- Partikkelen vet ikke selv hvilken vei det skal ta.

Hidden variables - teorien Partikkelen må selv vite hvilken spalte den skal gjennom, og den er da underkastet en deterministisk oppførsel. Vi kjenner bare ikke den underliggende fysikken.

"Gud spiller ikke terning"
- Albert Einstein.

"Slutt å fortelle Gud hva han skal gjøre"
- Niels Bohr.

Sanssynlighetstettheten

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E \cdot \Psi(x)$$

5.2 07 Forelesnings notater

5.2.1 Oppdagelsen av Schrödinger-ligningen

Sentrale kunnskaper

1. Skissere og motivere Schrödinger-ligningen fra Maxwells ligning.
2. Taylors rekkeutvikling spesielt på relativistisk energi.
3. $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$
4. Løse $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Psi(x, t) = 0$
5. Superposisjon: Forstå hvordan man lager en bølgepakke av planbølger, og beregne gruppe- og fase-hastighet

Davisson-Germer-eksp.

Sender inn elektroner i en nikkel krystall, som reflekteres på i en fast vinkel ϕ . Uavhengig om man sendte inn et eller flere elektroner ble det interferens. Da må man kunne se på elektronet som en bølge. Konstruktiv interferens må da være gitt ved

$$n\lambda = 2d \sin(\phi).$$

Thomsons elektrondiffraksjon

Vannbølge Har en intensitet $I = A^2$ hvor A er amplituden.

Elektromagnetisk bølge Har en intensitet $I \propto \epsilon(x, y, t)^2$ hvor ϵ er elektromagnetisk feltstyrke.

Maxwells likninger på flere former

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \epsilon(x, t) = 0$$

$$\nabla \times \epsilon = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \epsilon \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \, dS$$

$$\epsilon(x, t) = \epsilon_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

Kvantemekanisk

$$E_\gamma = h\nu$$

$$I = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x, t) = 0$$

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$I = \frac{\text{Antall fotoner}}{s \cdot A} = |\Psi(x, y, t)|^2$$

Hvis ligningen for intensiteten gjelder for en gruppe fotoner må det også gjelde for et enkelt foton. Fotoner interagerer ikke med hverandre derfor vet vi dette. For et individuelt foton er det derfor slik at bølgefunksjonen kvadrert er sannsynligheten for at et elektron treffer et punkt på skjermen. Hvis vi integrerer dette får vi 1 ettersom vi integrer sannsynligheten. Den er dermed normalisert.

$$\int |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Foton

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x, t) = 0, \quad \Psi(x, t) = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)} = \Psi_0 e^{i(px - Et)/\hbar}, \quad p = \hbar k, \quad E = \hbar \omega$$

$$\left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \left(\underbrace{(-E)^2 - c^2 p^2}_0 \right) \Psi_0 e^{i(px - Et)/\hbar} = 0, \quad E = pc, \quad E^2 = c^2 p^2$$

Partikkel med masse $m > 0$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Antar $\Psi = \Psi_0 e^{i(px - Et)/\hbar}$.

$$\left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 ((-E)^2 - c^2 p^2) \Psi_0 e^{i(px - Et)/\hbar} = 0$$

$$\left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \left(\underbrace{p^2 c^2 + m^2 c^4 - c^2 p^2}_{\neq 0} \right) \Psi_0 e^{i(px - Et)/\hbar} = 0$$

Dette går ikke opp. Vi mangler et ledd med $-m^2 c^4$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar^2} \right) \Psi(x, t) = 0, \quad \Psi(x, t) = \Psi_0 e^{i(px - Et)/\hbar}$$

$$\left(\left(-\frac{iE}{\hbar} \right)^2 - c^2 \left(\frac{ip}{\hbar} \right)^2 + \frac{1}{\hbar} m^2 c^4 \right) \Psi(x, y) = 0$$

$$\left(\underbrace{-\frac{1}{\hbar^2} (p^2 c^2 + (mc^2)^2) + \frac{c^2 p^2}{\hbar^2} + \frac{1}{\hbar^2} m^2 c^4}_0 \right) \Psi(x, t) = 0$$

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} = mc^2 \sqrt{1 + \underbrace{\frac{p^2 c^2}{mc^2}}_x}$$

Kjører Taylor utvikling.

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 c^2}{(mc^2)^2} + \frac{1}{8} \dots \right)$$

$$E = mc^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{E_k} + \underbrace{mc^2}_{E_0}$$

$$p = mv, \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$$

$$E = E_k + E_0, \quad \Psi = \Psi_0 e^{i(px - Et)/\hbar}$$

$$\left(\left(-\frac{iE}{\hbar} \right)^2 - c^2 \left(\frac{ip}{\hbar} \right)^2 + \frac{1}{\hbar} m^2 c^4 \right) \Psi(x, y) = 0$$

Setter inn nytt uttrykk for energi

$$-\frac{1}{\hbar^2} \left(\underbrace{\left(\frac{p^2}{2m} + mc^2 \right)^2}_{\neq 0} - p^2 c^2 + (mc^2)^2 \right) \Psi(x, t) = 0$$

Det fungerer ikke å bare bytte ut uttrykket for energi.

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(px - E_k t - E_0 t)/\hbar}$$

$$\underbrace{e^{-iE_0 t/\hbar}}_{\theta} \underbrace{\Psi_0 e^{i(px - E_k t)/\hbar}}_{\Psi_k} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \right) \theta(t) \Psi_k(x, t) = 0 \\
& \Psi_k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta + 2 \frac{\partial}{\partial t} \theta \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_k - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta \Psi_k + \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \theta \Psi_k \\
& \cancel{\Psi_k \left(\frac{-iE_0}{\hbar} \right)^2 \theta} + 2 \left(\frac{-iE_0}{\hbar} \right) \theta \frac{\partial}{\partial t} \Psi_k + \theta c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_k + \cancel{\frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \theta \Psi_k} \\
& 2 \left(\frac{-iE_0}{\hbar} \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{ip}{\hbar} \right) \Psi_k \\
& 2 \left(\frac{-iE_0}{\hbar} \right) \left(\frac{-iE_0}{\hbar} \right) \Psi_k + \left(\frac{-iE_0}{\hbar} \right)^2 \Psi_k + c^2 \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi_k \\
& -2E_0 E_k \Psi_k - E_k^2 \Psi_k + mc^2 \frac{p^2}{2m} \Psi_k \\
& (-2E_0 E_k - E_k^2 + 2E_0 E_k) \psi_k \neq 0
\end{aligned}$$

Dette går ikke opp. La oss ta bort ledde som ødelegger

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\frac{-iE_0}{\hbar} \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} = 0 \\
& 2 \left(-\frac{imc^2}{\hbar} \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} = 0 \\
& i\hbar \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} = 0
\end{aligned}$$

Dette er Schrödingerligningen for frie partikler

5.3 08 Forelesnings Notater

Sentrale kunnskaper

1. Forholdene i tabell 1.4 i kompendiet
2. Beregne forventningsverdi og standardavvik for diskrete og kontinuerlige variabler
3. Forstå superposisjon som for frie partikler er oppbygget av planbølger
4. Hva som skjer når man måler en superposisjon av tilstander
5. Københavnstolkningen

Den vanlige maxwell likningen fungerer ikke når vi setter inn partikkelegenskapene til fotonet. Vi får et restledd på $(mc^2)^2$ som gjør at den fulle likningen ikke lenger er null. Vi ser at hvis vi legger til en faktor av $-\left(\frac{i}{\hbar}\right)(mc^2)^2$ ved å ta hensyn til hvileenergien før vi deriverer og likningen løser seg.

5.3.1 Tidsavhengige bølgeligninger

Maxwells ligning for klassiske elektromagnetiske bølger (relativistisk)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \epsilon(x, t) = 0$$

Klein-Fock-Godronds relativistiske ligning for frie partikler med masse (spinn løse)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\right) \Psi(x, t) = 0$$

5.3.2 Bølgepakke for fri partikkel

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Psi(x, t) = 0$$

5.3.3 Generell løsning av bølgepakke av planbølger

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

Kan også skrives

$$\Psi = \sum_n c_n e^{i(p_n x - E_n t)/\hbar}$$

$$\psi = \sum_n c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

$$\text{Her er } k_n = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{E}{\hbar}.$$

Superposisjonering av egentilstander En bølgefunksjon er en superposisjon av egentilstander. Hvis vi måler bølgen kollapse den til en enkelt bølge med bestemt energi, bevegelsesmengde og bølgelengde. Hvordan dette skjer vet vi ikke. Konstanten $|c_n|^2$ er sannsynligheten for kollaps til planbølgen med $\lambda_n = 2\pi/k_n$. Da følger det naturlig at $|c_n|^2 = 1$

5.3.4 Tolkninger

Realist Partikkelen hadde en forutsagt bane før måling og det er en skjult variabel som styrer dette. (Har blitt motbevist)

Ortodoks / Københavnstolkningen Bølgefunksjonen er ikke ekte. Målingen fikk den til å kollapse. Målingen påvirker partikkelen, uten den også

Agnostisk Har ikke noe å si ettersom vi må måle uansett

Den mest aksepterte tolkningen er Københavnstolkningen.

5.4 09 Forelesnings Notater

Sentrale kunnskaper

- Forså begrepet sannsynlighetstettheten $|\Psi(x, t)|^2$ for en partikkel og at $|\Psi(x, t)|^2 \delta x$ er sannsynligheten for å finne en partikkel mellom x og $x + \delta x$
- Normalisere bølgefunksjonen $|\Psi(x, t)|^2$ og vise at den er tidsuavhengig.
- Beregning av $\langle x \rangle, \sigma, \dots$
- Beregne posisjon og bevegelsesmengde for en partikkel via bølgefunksjonen

Forventningsverdi

$$\langle j \rangle = \sum_{j=1}^n j \cdot P_N(j)$$

Med et standard avvik σ for et kast $j - \langle j \rangle$ gitt ved

$$\sigma = \sqrt{\langle (j - \langle j \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (j - \langle j \rangle)^2 \cdot P_N(j)} = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2}$$

Viktig om bølgefunksjonen

1. Ψ er en generell løsning for gitt $v(x)$
2. $\Psi \rightarrow 0$ når $x \rightarrow \pm\infty$
3. Ψ og $\frac{d\Psi}{dx}$ må være kontinuerlige
4. $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ er en sannsynlighetstettheten
5. $\int_a^b |\Psi|^2 dx$ er sannsynligheten for å finne en partikkel mellom a og b .
6. $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1$ er avhengig av tid

Hvis Ψ er tidsuavhengig må den deriverte være konstant.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx &= \int \frac{d}{dt} \Psi^* \Psi dx = 0 \\ \int \frac{d}{dt} \Psi^* \Psi dx &= \int \underbrace{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi}_{P} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \Psi^* \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \Psi + \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \Psi^* \Psi = 0 \\
&\quad \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Psi^* - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) = \cancel{\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}} + \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi - \cancel{\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi}
\end{aligned}$$

Setter tilbake inn i P

$$\int \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Psi^* - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx = \frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Psi^* - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

5.4.1 Forventningsverdi og Standardavvik for Partikler

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx \\
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x, t)|^2 dx \\
\sigma_x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}
\end{aligned}$$

Vi skal finne forventet bevegelsesmengde $\langle p \rangle$. Da trenger vi en sannsynlighetsfunksjon $\Phi(p, t)$ for bevegelsesmengde.

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\Phi(p, t)|^2 dp$$

Klassisk fysikk: $p = mv = m \frac{d}{dt} x$ Kvantefysikk: $\langle p \rangle = m \langle v \rangle = m \langle \dot{x} \rangle$

$$\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \int x \Psi^* \Psi dx = m \int x \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \Psi dx = m \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

Dette løses ikke like enkelt siden vi har en faktor av x . Vi må derfor integrere og får da følgende:

5.5 10 Forelesnings Notater

Sentrale kunnskaper

1. Sette opp og utlede løsning til TUSL for uendelig dyp brønn, beregne egentilstandene og forstå ortogonalitet og kronecker delta.
2. Lage superposisjon av egentilstander
3. Forstå figurer der vi kombinerer potensial, energi og bølgefunksjon, beregne $\langle h \rangle$, σ_H og sannsynligheten for å måle n-te tilstand
4. Trig funksjoner, deres integrerte, deriverte og sum

5.5.1 Potensialet til uendelig dyp brønn

$$\hat{Q} \rightarrow \hat{H} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \quad , \quad \Psi_E \equiv \Psi_n(x, t) = \psi_n(x) f_n(t)$$

Vi separerer bølgefunksjonen i to deler, en som er avhengig av posisjon og en som er avhengig av tid.

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad , \quad \varphi_n(t) = E^{-iE_nt/\hbar}$$

Generell bølgefunksjon

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_nt/\hbar}$$

Ettersom vi har separert tid og rom kan vi sette $t = 0$ for å gjøre om eksponenten til 1. Da blir bølgefunksjonen

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1} c_n \psi_n(x) \quad , \quad \sum_n |c_n|^2 = 1 = \int \psi_n^*(x) \psi_n(x, 0) dx$$

$|c_n|^2$ er sannsynligheten for å måle n-te tilstand. Bølgefunksjonen er for abstrakt til å finne energien, men vi kan finne gjennomsnittsenergien $\langle H \rangle$.

$$\langle H \rangle = \int \Psi^*(x, t) \hat{H} \Psi(x, t) dx = \sum_n E_n |c_n|^2$$

Hvis alle tilstandene har samme energi kan dette faktoriseres ut og vi får.

$$\Psi(x, t) = \left(\sum c_n \psi_n(x) \right) e^{-iE_nt/\hbar}$$

$$\langle p \rangle = \int \Psi^*(x, t) \hat{p} \Psi(x, t) dx \neq \sum_n p_n |c_n|^2$$

Det går ikke alltid å summere som vanlig når vi skal finne forventningsverdien til bevegelsesmengden p .

Triks for å spare tid Anta et potensialet som variere, men er konstant i noen intervaller. Da vil TUSL gitt ved

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 \right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n = \underbrace{(E_n - V_0)}_{K_n} \psi_n(x)$$

$$\psi_n(x) = Ae^{ik_n x} + Be^{-ik_n x}$$

$$K_n = E - V_0 = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \Rightarrow k_n = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E_n - V_0)}$$

Dette er mulig ettersom TULS er lokal med hensyn på x . Konstantene A og B er globale for hele funksjonen. Vi har noen forskjellige cenario.

$$1. E > V_0$$

Dette er det vanligste tilfellet. Da vil k_n være reelt og $\psi_n(x)$ er planbølgen.

$$2. E < V_0$$

her er k_n imaginært $\kappa_n = ik_n = \sqrt{-\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$ som er reelt.

$$\psi_n(x) = \underbrace{Ae^{\kappa_n x} + Be^{-\kappa_n x}}_{\text{Reelle eksp. funk.}}$$

Det er bare i et lite område hvor energien E er mindre enn potensiell energi V

$$3. E = V_0 \psi_n(x) = A + Bx$$

Cases

$$V(x) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq a \quad , \quad V(x) = \infty$$

Vi skal finne en bølgefunksjon som er kontinuerlig både i og utenfor brønn. I brønnen er funksjonen

$$\psi_n(x) = Ae^{ik_n x} + Be^{-ik_n x}$$

Utenfor er den 0. Vi løser deretter

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow B = -A$$

Så løser vi for grensene

$$\psi(a) = Ae^{ik_na} - Ae^{-ik_na} = A(e^{ik_na} - e^{-ik_na})$$

Dette kjenner vi igjen som en sinus funksjon.

$$2iA \sin(k_na) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots, \infty$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} n^2$$

Vi normaliserer sinus funksjonen på følgende måte.

$$C \sin(k_na) = 0$$

$$1 = \int \psi_n^* \psi_n \, dx = \int_0^a C \sin(k_n x) \cdot C \sin(k_n x) \, dx = C^2 \int_0^a \sin^2(k_n x) \, dx$$

$$1 = C^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4k_n} \sin(2k_n x) \right) \Big|_0^a = C^2 \left(\frac{a}{2} \right) \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Dette gir bølgefunksjonen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Eigenfunksjonene er ortogonale og produktet vil alltid være 0, hvis ikke de har samme tilstand.

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{if } n = m \\ 0, & \text{if } n \neq m \end{cases}$$

En grei regel er at

$$E_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} \quad , \quad E_2 = E_1 \cdot 2^2 \quad , \quad E_3 = E_1 \cdot 3^2 \quad , \quad E_4 = E_1 \cdot 4^2 \quad , \quad \dots$$

Da kan vi finne bølgefunksjonen

$$\Psi(x, 0) = \sum_n c_n \psi_n(x) = \sum_n c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Typiske eksamensoppgaver

1. å lage $\Psi(x, 0)$ fra egenfunksjoner.
2. Anta $\Psi(x, 0)$ hva er sannsynligheten at vi får n-te tilstand ved måling?
Da må vi beregne c_n . ved $c_n = \int \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) \, dx \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} & \text{når } 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

De første tre tilstandene er mye mer sannsynlig enn resterende og er ofte nok for en god approksimasjon.

Dirac-delta-funksjonen

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & \text{if } x = a \\ 0, & \text{if } x \neq a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) \, dx = f(a)$$

Ortogonale Egenfunksjoner

$$\int \psi_n^*(x) \psi_m(x) \, dx = \delta_{nm}$$

$$\Psi(x, 0) = \sum_n c_n \psi_n(x)$$

$$\psi_m = \sum_n c_n \psi_n \quad , \quad c_n = \begin{cases} 1, & \text{når } m = n \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

$$1 = \int \psi_m^*(x) \psi_m(x) \, dx \stackrel{\text{antar}}{=} \int \psi_m^* \sum_{n \neq m} c_n \psi_n \, dx = \sum_{n \neq m} c_n \underbrace{\int \psi_m^* \psi_n \, dx}_{\delta_{mn}} = 0$$

5.6 11 Forelesnings Notater

Fri partikkel og energi tilstander

Diskrete tilstander

Vi vet at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \, dx = \delta_{mn}$$

Da er spørsmålet hva som gjelder for Kontinuerlige tilstander.

Kontinuerlig variabler

$$\Psi_k(x, 0) = \int c(k) A e^{ikx} \, dk$$

$$c(k) = \int \underbrace{A}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-kx} \Psi(x, 0) \, dx$$

For alle Dirac-ortogonale Ψ_k

$$\int \Psi_k^* \Psi(x, 0) \, dx \Rightarrow dk' = \int c(k') \delta(k - k') \, dk' = c(k)$$

Da er

$$c(k) = \int \Psi_k^* \Psi(x, 0) \, dx$$

$$\langle H \rangle = \int \Psi^*(x, 0) \hat{H} \Psi(x, 0) \, dx = \iint c^*(k') \Psi_k^* \, dk' \hat{H} \int c(k) \Psi_k \, dx$$

$$\iint E_k c^*(k') c(k) \int \underbrace{\Psi_k^*(x) \Psi_k(x) \, dx}_{\delta(k' - k)} \, dk' \, dk$$

$$\int E_k c^*(k) c(k) \, dk = \int E_k |c(k)|^2 \, dk$$

$$\langle H \rangle = \int E_k |c(k)|^2 \, dk$$

Dirac-delta-funksjon

$$\delta(k' - k) = \begin{cases} \infty, & \text{if } k' = k \\ 0, & \text{if not} \end{cases}$$

Fri partikkel og

$$\Psi(x, t) = \Psi_k(x, t)\Phi(x) \quad , \quad \Phi(x) = Ae^{-2\pi g^2(k_0x - \omega_0t)^2} \quad \Psi_k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(k_0x - \omega_0t)}$$

$$\int \psi^* \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2\pi k} e^{-2ay^2} \, dy = \frac{A^2}{2\pi k} \frac{1}{2g} \Rightarrow A = \sqrt{4\pi g k}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-2ay^2} \, dy = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-2ay^2} \, dy = \frac{1}{4a} \frac{1}{2g}$$

$$\Psi(x, t) = \sqrt{2gk} e^{iy - ay^2} = B e^{iy - a^2} \quad , \quad |\Psi(x, t)|^2 = B^2 e^{2ay^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = (i - 2ay) \Psi$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = (-2a + (i - 2ay)^2) \Psi = (-2a + (-1 + 4a^2 y^2 + 4ia y)) \Psi$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \hat{p}^2 = -\hbar^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\langle x \rangle = \int x |\Psi|^2 \, dx = \int \frac{1}{k} (y + \omega) B^2 e^2 - 2ay^2 \frac{dy}{k} = \frac{B^2}{k^2} \omega t \frac{1}{2g}$$

$$\langle x \rangle = \frac{2g}{k} \omega t \frac{1}{2g} = \frac{\omega}{k} t = v \cdot t$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{B^2}{k^3} \int (y^2 + \omega^2 t^2 + 2y\omega t) e^{-2ay^2} \, dy = \frac{B^2}{k^3} \left(\frac{1}{4a} \frac{1}{2g} + \omega^2 t^2 \frac{1}{2g} \right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2g}{k^2} \left(\frac{1}{4 \cdot 2\pi g^2} \frac{1}{2g} \frac{\omega^2 t^2}{2g} / \right) = \frac{1}{k^3} \frac{1}{8\pi g^2} + \frac{\omega^2 t^2}{k^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{k^2} \frac{1}{8\pi g^2} + \frac{\omega^2 t^2}{k^2} - \left(\frac{\omega}{k} t \right)^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{k^2} \frac{1}{8\pi g^2} + \frac{\omega^2 t^2}{k^2} - \frac{\omega^2 t^2}{k^2}} = \frac{1}{kg} \sqrt{\frac{1}{8\pi}}$$

$$\langle p \rangle = m \frac{\partial}{\partial t} \langle x \rangle = m \frac{\omega}{k} = m \cdot v = p = \hbar k$$

$$\langle p \rangle = \int \Psi \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi \frac{dy}{k} = \hbar k$$

$$\begin{aligned}\langle p^2 \rangle &= \hbar^2 k^2 (1 + 2\pi g^2) \\ \sigma_p &= \sqrt{\hbar^2 k^2 + \hbar^2 k^2 2\pi g^2 - \hbar^2 k^2} = \hbar k g \sqrt{2\pi} \\ \sigma_x \sigma_p &= \frac{1}{kg\sqrt{8\pi}} \cdot \hbar k g \sqrt{2\pi} = \frac{\hbar}{\sqrt{4}} = \hbar/2\end{aligned}$$

Dette er Heisenberg's usikkerhetsrelasjon. hvor $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$

Oppsummering av begreper

1. Måler du partiklene kolliderer de forskjellige muligheten for tilstand til kun én tilstand ifølge københavnstolkningen.
2. Problem å normere egenfunksjoner til \hat{p} og \hat{x} . Problematisk å tolke måling av bevegelsesmengde og posisjon.
3. Hvis $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv 0$ har de felles egenfunksjon.

Kapittel 6

Formalisme

6.1 17 Forelesnings Notater

Sentrale Kunnskaper

- Beskrive postulatene til Kvantemekanikken
- Håndtere kommutatorer
- Forstå begrensningene til Schrödingerligningen

6.1.1 Postulat

Postulat 1: Tilstander

Tilstanden til et system bestemmes av en bølgefunksjon $\Psi(x, t)$ som er en løsning av TAsL, og $\Psi(x, t)$ inneholder all informasjon om partikkelen.

$$\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

Postulat 2: Operatoren

For å hente ut en størrelse Q som energi, eller bevegelsesmengde, må jeg ha tilhørende operator. Dette er en Hermitisk operator \hat{Q} .

$$\int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, dx = \int (\hat{Q} \Psi)^* \Psi \, dx$$

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, dx$$

$$\langle Q \rangle^* = \left(\int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, dx \right)^* = \int \Psi (\hat{Q} \Psi)^* \, dx = \int (\hat{Q} \Psi)^* \Psi \, dx$$

I følge definisjonene av en Hermitisk operator, er $\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^*$. Dermed er

$$\int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, dx = \int (\hat{Q} \Psi)^* \Psi \, dx$$

Vi undersøker om $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ er Hermitisk.

$$\int \Psi^* \hat{p} \Psi \, dx = -i\hbar \int \underbrace{\Psi^*}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \Psi}_{v', v=\Psi} \, dx$$

Bruker delvis integrasjon

$$\underbrace{-i\hbar\Psi^*\Psi}_0 \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\hbar) \int \frac{d\Psi^*}{dx} \Psi \, dx$$

$$\int i\hbar \frac{d}{dx} \Psi^* \Psi \, dx = \int \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \Psi \right)^* \Psi \, dx = \int (\hat{p}\Psi)^* \Psi \, dx$$

Vi ser at

$$\int (\hat{p}\Psi)^* \Psi \, dx = \int \Psi^* \hat{p}\Psi \, dx$$

Dermed er \hat{p} Hermitisk. Den Hermitiske operatoren er viktig for utledninger senere.

Vi vet at bølgefunksjonen kan skrives som en sum av dets egenfunksjoner.

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n$$

vi kan også ha en annen bølgefunksjon Φ .

$$\Phi = \sum_n d_n \psi_n$$

Vi kan regne ut

$$\int \Phi^* \hat{Q} \Phi \, dx = \int \left(\sum_m d_m^* \Psi_m^* \right) \hat{Q} \left(\sum_n c_n \psi_n \right) \, dx$$

Definerer

$$\int \Psi_m^* \psi_n \, dx = \delta_{mn} \quad , \quad q_n \psi_n = \hat{Q} \psi_n$$

$$\sum_m \sum_n d_m^* c_n q_n \int \psi_m^* \psi_n \, dx = \sum_m \sum_n d_m^* c_n q_n$$

Postulat 3: Målinger

De eneste mulige resultatene av en måling av observabel q er egenverdiene q til operatoren \hat{Q} .

$$\hat{Q} \psi_n = q_n \psi_n$$

hvor ψ_n er egenfunksjon, q_n er reel og $\sigma_Q = 0$. Dette betyr at forventningsverdien er skarpt bestemt.

Generell Schrödingerligningen og egenverdiligningen

TASL

$$\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

TUSL

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

$$\hat{x}\psi_x = x\psi_x(x), \quad \hat{x} = x, \quad \psi_y(x) = \delta(x - y)$$

$$\hat{p}\psi_p(x) = p\psi_p(x), \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\frac{p}{\hbar}x}$$

Videre kan vi regne ut

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$$

$$\hat{x}\Psi_0 = x_0\Psi_0$$

$$\hat{p}\psi_p = p\psi_p$$

$$\hat{p}\psi_p = -i\hbar \frac{d}{dx} A e^{ipx/\hbar} = p\psi_p$$

Postulat 4: Forventningsverdier

En samling av partikler i samme tilstand Ψ vil ha forventningsverdi (gjennomsnitt av mange målinger) for observabelen Q gitt ved

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, dx$$

Postulat 5: Kompletthet

Vi kan beskrive en bølgefunksjon Ψ som en lineær kombinasjon av egenfunksjoner ψ_n . Hvis operatoren er settet av alle egentilstander til \hat{Q} så er settet komplett.

Postulat 6: Spinn

Halvtallig spinn: fermioner (som elektroner). Heltallig spinn: bosoner (som fotoner).

6.1.2 Teorier rundt bølgefunksjonen

Kvantefysikken beskriver barer hvordan ting oppfører seg, ikke hva det egentlig er. Vi vet hvordan elektroner oppfører seg, men vet ikke hva det er. Vi tenker oss at det er en klinkekule på lik linje med de første atommodellene. Vi bruker en et klassisk perspektiv med partikler og bølger med bølgelengde, som ikke nødvendigvis stemmer. Det er et stort problem med tolkning. Hva er egentlig en bølge, partikkel, superposisjon osv. Likevel gjør den en veldig god jobb med å beskrive det den skal

København tolkningen

Mener partikkelen er en bølge som kollapser ved måling.

GRW

Mener bølgefunksjonen kollapser spontant hele tiden.

6.1.3 Anvendelser

- Vi løser Schrödingerligningen for fri partikkel, partikkel i boks, i brønn, harmonisk oscillator, dirac brønn osv.

6.1.4 Kommutatorer

Definisjon

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Hvis $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ kan \hat{A} og \hat{B} ha felles egenfunksjoner, og vi kan da måe skarpe samtidig for begge operatorene. Dette gjelder ikke om $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$.

$$\hat{A}\Psi_a = a\psi_a, \quad \hat{B}\Psi_b = b\psi_b$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]\Psi = \hat{A}\hat{B}\Psi - \hat{B}\hat{A}\Psi = \hat{A}b\Psi - \hat{B}a\Psi = ba\Psi - ab\Psi = \underbrace{(ba - ab)}_0\Psi$$

6.1.5 Uskarphetsrelasjoner

Oppsummering og forståelse

Postulatene til kvantemekanikken

Kommutatorer

Begrensningene til Schrödingerligningen