FYS2140 - Oblig 5

Oskar Idland

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1

1.

2.

3. Når vi måler posisjonen til partikkelen nøyaktig vil bevegelsesmengden ha uendelig høy usikkerhet.

4. Ny målingen av posisjon en veldig kort tid etter forrige vil gi samme svar som tidligere ettersom bølgefunksjonen allerede er kollapset.

5. Vi kan ikke vite hvor elektronet var rett før første måling, ettersom den ikke har posisjon før bølgefunksjonen kollapser under måling. Vi kan bare vite en sannsynlighet for hvor den kunne ha vært.

6. Når vi gjør eksperimentet på nytt får vi ikke nødvendigvis samme posisjon ettersom vi kollapser en ny bølgefunksjon.

Oppgave 2

A: Denne påstanden beskriver Heisenberg's usikkerhetsprinsipp på en god måte, men bommer på at usikkerheten kommer i hvordan vi gjør målinger. Det stemmer ikke. Dette er en kvalitet som er innebygd i Kvantefysikken.

B: Usikkerhetsprinsippet hevder ingenting om hva slags utstyr som trengs for å måle posisjon og bevegelsesmengde.

C: Dette er den mest korrekte påstanden, ettersom den helt korrekt beskriver årsaken til usikkkerhetsprinsnippet.

B Regneoppgaver

Oppgave 3

a)

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i\left(n^2\pi^2\hbar/2ma^2\right)t}$$

$$\Psi_n^*(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{i\left(n^2\pi^2\hbar/2ma^2\right)t}$$

$$\Psi^*\Psi = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

I. Finner først forventningsverdien av posisjonen $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_0^a \Psi^* x \Psi \, \mathrm{d}x = \int_0^a x \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \frac{1}{a}\int_0^a x \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\right) \, \mathrm{d}x$$

Vi ser i Rottmann (2019, s, 144 nr. 123) at

$$\int x\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}\cos(kx) + \frac{x}{k}\sin(kx)$$

Vi setter $k = \dfrac{2n\pi}{a}$ i utrykket.

$$\langle x\rangle = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2\underbrace{\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)}_{1\text{ for }n\in\mathbb{N}} + \frac{xa}{2n\pi}\underbrace{\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)}_{0\text{ for }n\in\mathbb{N}}\right)\Bigg|_0^a$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2 + \left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2\right)$$

$$\underline{\underline{\langle x\rangle = \frac{1}{2}a}}$$

II. Vi finner så forventningsverdien til posisjonen kvadrert $\left\langle x^2\right\rangle$

$$\left\langle x^2\right\rangle = \int_0^a \Psi^* x^2\Psi\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\left(1-\cos\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\right)\ \mathrm{d}x$$

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{1}{3}a^2 - \int_0^a x^2\cos\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\ \mathrm{d}x$$

Vi ser i Rottmann (2019, s, 144 nr. 124) at

$$\int x^2\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{k^2}x\cos(kx) - \frac{2-k^2x^2}{k^3}\sin(kx)$$

og setter inn $k = \dfrac{2n\pi}{a}$.

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{1}{3}a^2 - \left(\frac{2a^2}{4n^2\pi^2}x\underbrace{\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)}_{1\text{ for }n\in\mathbb{N}} - \frac{2-(2n\pi/a)^2x^2}{(2n\pi/a)^3}\underbrace{\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)}_{0\text{ for }n\in\mathbb{N}}\right)\Bigg|_0^a$$

$$\underline{\underline{\left\langle x^2\right\rangle = a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)}}$$

III. Vi finner så forventningsverdien til bevegelsesmengden $\langle p\rangle$ Ettersom $\langle x\rangle$ er uavhengig av tid er dette raskt å finne.

$$\underline{\underline{\langle p\rangle = m\langle\dot{x}\rangle = 0}}$$

IV. Vi finner så forventningsverdien til bevegelsesmengden kvadrert $\left\langle p^2\right\rangle$

$$\left\langle p^2\right\rangle = \int_0^a \Psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi\ \mathrm{d}x = -\hbar^2\int_0^a \Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = -\hbar^2 \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sin \frac{n\pi}{a}x\right) \ \mathrm{d}x$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \hbar^2 \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \ \mathrm{d}x$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \hbar^2 \frac{2}{a} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \ \mathrm{d}x$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \hbar^2 \frac{2}{a} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)}{\frac{4n\pi}{a}}\right)\Bigg|_0^a}_{a/2}$$

$$\underline{\underline{\left\langle p^2 \right\rangle = \left(\frac{\hbar n\pi}{a}\right)^2}}$$

V. Videre finner vi standardavviket til posisjonen σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = a\sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)}$$

VI. Videre finner vi standardavviket til bevegelsesmengden σ_p

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{\hbar n\pi}{a}$$

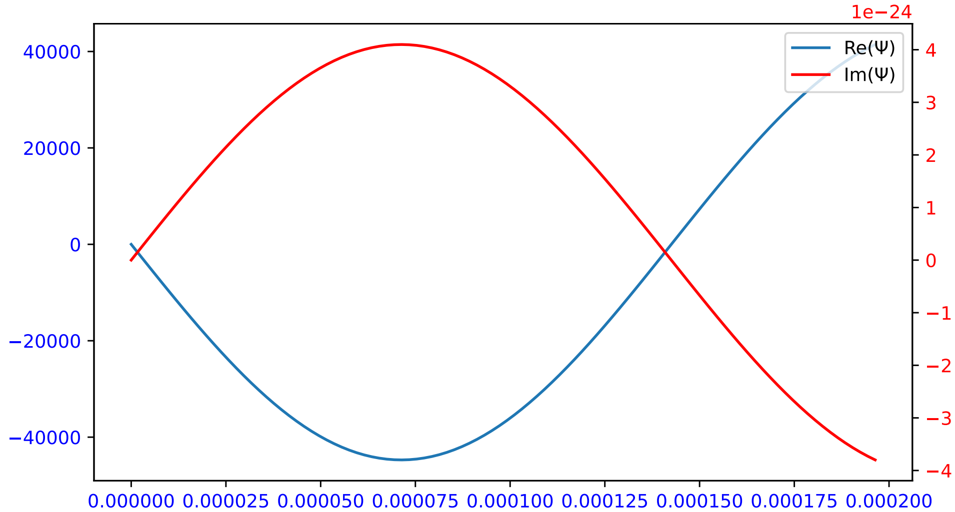
VII. For å se om Heisenberg's usikkerhetsprinsipp er oppfylt ser vi på følgende ligning.

$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

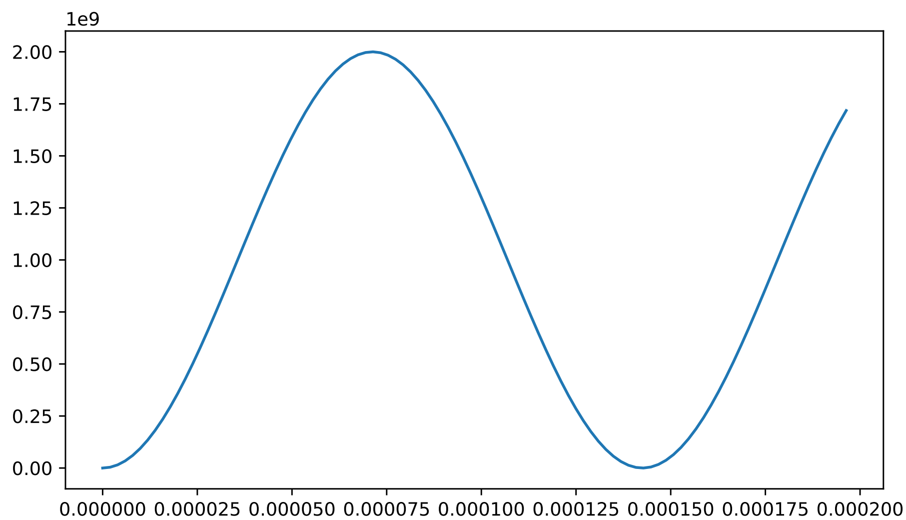
$$a\sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)} \cdot \frac{\hbar n\pi}{a} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\frac{\hbar}{2} \underbrace{\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3} - 2}}_{>1 \text{ for alle } n} \geq \frac{\hbar}{2}$$

b)



Figur 1: Bølgefunksjonen Ψ ved $n = 3$, $a = 1$ nm og $t = 10fs$. Inkluderer reel og imaginær komponent imaginær



Figur 2: Sannsynlighetstettheten for bølgefunksjonen Ψ ved $n = 3$, $a = 1$ nm og $t = 10fs$.

Oppgave 4

a) Vi må løse for forskjellige caser

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A, & \text{if } 0 < x < a/2 \\ 0, & \text{if } a/2 < x < a \end{cases}$$