Oblig 10

Oskar Idland

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1

a)

Svaret er alternativ C: 0.
Bølgefunksjonen er gitt som en superposisjon av to bølgefunksjoner med verdi for kvantetallet $m = 0$. Det gir oss en verdi for $L_z = m\hbar = 0$. Da er sannsynligheten for å måle z-komponenten av angulærmomentet til å være $3\hbar$ lik null.

b)

Nei det kan vi ikke. Det er fordi at ψ_{200} og ψ_{300} ikke har samme energi pga forskjellig kvantetall n. Vi må skrive det på følgende måte.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{200} e^{-iE_2 t/\hbar} + \psi_{300} e^{-iE_3 t/\hbar} \right)$$

c)

Energien E_{nm} i utrykket for den tidsavhengige faktoren er ikke avhengig av kvantetallet l. Da vil energien til ψ_{210} og ψ_{200} være den samme og vi kan skrive det på følgende måte.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{210} + \psi_{200} \right) e^{-iE_{20} t/\hbar}$$

d)

Vi får samme tidsutvikling når egentilstandene deler kvantetallene n og m. Det er fordi det tidsavhengige leddet er på formen

$$e^{-iE_{nm} t/\hbar} \quad , \quad E_{nm} = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{eB}{2m_e} m\hbar$$

Vi ser også ut fra utrykket at energien E_{mn}, bare er avhengig av m, ***gitt at*** elektronet er i et magnetfelt.

B Regneoppgaver

Oppgave 2

a)

b)

Energien E_n er representert ved operatoren $\hat{H}_0$. Angulærmomentet L er representert ved operatoren $\hat{L}$. Angulærmomentets orientering i $z-$retning er representert ved operatoren $\hat{L}_z$.

c)

Energien og spinnet har skarpe fysiske størrelser, ettersom de er gitt ved skarpe verdier n, l & m.

d)

$$\hat{H}_0 \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

$$H_0 \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi_{nlm} e^{-iE_{nm}t/\hbar}$$

$$H_0 \Psi(\vec{r}, t) = E_{mn} \psi_{nlm} e^{-iE_{nm}t/\hbar}$$

Vi vet at H_0 er energien så dette kan strykes fra begge sider.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi_{nlm} e^{-iE_{nm}t/\hbar}$$

e)

Vi sjekker at integralet til funksjonens absoluttverdi kvadrert faktisk er 1.

$$\int_0^\infty |\Phi(\vec{r})|^2 \; \mathrm{d}r = \frac{1}{2l+1} \int_0^\infty \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} \psi *_{nlm_l} \psi_{nlm_l'}(\vec{r}) \; \mathrm{d}^3\vec{r}$$

$$\frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

Fra definisjonen av Kronecker-delta vet vi at produktet bare er 1 når $n = n', l = l'$ og $m = m'$. Ettersom n og l alltid er like, blir det alltid 1. Vi summerer over alle m og m', så vi får $2l + 1$.

$$\frac{1}{2l+1}(2l+1) = 1$$

f)

Vi setter bølgefunksjonen inn i Shrödingerligningen.

$$H_0 \Psi = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi$$

$$H_0 \Psi = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$\underbrace{H_0}_{E_n} \Psi = E_n \Phi(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

g)

$$\left\langle \hat{H}_0 \right\rangle = \left\langle \Psi \middle| \hat{H}_0 \Psi \right\rangle = \int_0^\infty \Psi^* E_n \Psi \, \mathrm{d}r = E_n \int_0^\infty \Psi^* \Psi \, \mathrm{d}r = E_n$$

Ettersom energien er skarpt bestemt er den også forventningsverdien til energien. Dette gjelder også angulærmomentet, L^2. Ettersom L_z er gitt av m og Φ er en lineærkombinasjon av forskjellige verdier for m, må vi regne ut denne selv

$$\left\langle L^2 \right\rangle = L^2$$

$$\langle L_z \rangle = \left\langle \Psi \middle| \hat{L}_z \Psi \right\rangle = \int_0^\infty \Psi^* m\hbar \Psi \, \mathrm{d}r = \int_0^\infty m\hbar \left| \Phi(\vec{r}) \right|^2 \, \mathrm{d}r$$

Vi kjenner igjen dette fra oppgave e) og setter inn $m\hbar$ i summen.

$$\int_0^\infty m\hbar \left| \Phi(\vec{r}) \right|^2 \, \mathrm{d}r = \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} m\hbar \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

Tidligere når vi summerte over Kronecker-deltaene fikk vi $2l+1$. Denne ganger summerer vi også over m som går fra $-l$ til l. Summene vil altså kansellere hverandre og summen blir 0

$$\langle L_z \rangle = 0$$

h)

For skarpe verdier vil forventningsverdien alltid være 0. Det vil si at

$$\sigma_{\hat{L}} = \sigma_{\hat{H}_0} = 0$$

For L_z må vi først finne $\left\langle L_z^2 \right\rangle$.

$$\left\langle L_z^2 \right\rangle = \left\langle \Psi \middle| \hat{L}_z^2 \Psi \right\rangle = \int_0^\infty \Psi^* m^2 \hbar^2 \Psi \, \mathrm{d}r = \int_0^\infty m^2 \hbar^2 \left| \Phi(\vec{r}) \right|^2 \, \mathrm{d}r$$

Vi skriver igjen om til en sum, men ettersom vi kvadrerer alle m vil ikke de negative l-verdiene kansellere de positive.

$$\int_0^\infty m^2 \hbar^2 \left| \Phi(\vec{r}) \right|^2 \, \mathrm{d}r = \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} m^2 \hbar^2 \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

Denne summen finner vi i Rottmann, som gir oss en forventningsverdi.

$$\left\langle L_z^2 \right\rangle = \hbar^2 \left(\frac{2}{3} l^3 + l^2 + \frac{1}{3} l \right)$$

Vi finner så spredningen σ_{L_z}.

$$\sigma_{L_z} = \sqrt{\langle L_z^2 \rangle - \langle L_z \rangle^2} = \sqrt{\hbar^2 \left(\frac{2}{3} l^3 + l^2 + \frac{1}{3} l \right) - 0} = \hbar \sqrt{\frac{2}{3} l^3 + l^2 + \frac{1}{3} l}$$

i)

Alle verdiene for m_l har lik sannsynlighet for å bli målt. ettersom det er $2l+1$ verdier for m_l er sannsynligheten for å måle en bestemt verdi $\frac{1}{2l+1}$.

j)

Nei, denne målingen er ikke avhengig av tid.

k)

Vi vet at $E_{nm} = \dfrac{E_1}{n^2} + \dfrac{e}{2m} B\hat{L}_z$.

l)

Ettersom Φ er en superposisjon av flere $m_l \in [-l, l]$, er den ikke en energi-tilstand for $\hat{H}$ ettersom energien E_{nm} er gitt ved m_l.