FYS2140 Kvantefysikk – Vår 2023
Hjemmeeksamen midt i semesteret

Oppgave1 Forventningsverdier og egentilstander

a) Forklar hva forventningsverdien $\langle Q \rangle$ til en fysisk størrelse Q er, og skriv opp det matematiske uttrykket for å beregne en slik forventningsverdi i kvantemekanikken.

b) Hva er den beste framgangsmåten for å måle forventningsverdien $\langle x \rangle$ av 1 og 2 under? Begrunn svaret.

1. Sett opp en serie av mange like partikler i samme tilstand, mål posisjonen til hver av dem og finn gjennomsnittet av målingene.
2. Mål posisjonen til én partikkel i en gitt tilstand veldig mange ganger, og finn gjennomsnittet av målingene.

c) Hvilke(t) av utsagnene under er riktig(e) og hvilke(t) er feil? Begrunn svaret.

1. Hvis $\langle x \rangle$ for en tilstand er lik 0, er også $\langle p \rangle$ lik 0.
2. Hvis $\langle x \rangle$ for en tilstand er veldig liten, er $\langle p \rangle$ veldig stor.
3. Hvis σ_p er lik 0, går σ_x mot uendelig.
4. Hvis $\langle x^2 \rangle$ er lik 0, er også $\langle p^2 \rangle$ lik 0.

d) En egentilstand for energi er en tilstand som tilfredsstiller den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen

$$\hat{H}\,\psi_n = E_n\,\psi_n.$$

Vis at standardavviket til forventningsverdien for energi er lik null hvis partikkelen er i en slik tilstand.

e) Hva kan du si om standardavviket til en vilkårlig fysisk størrelse Q hvis partikkelen er i en egentilstand for operatoren $\hat{Q}$ som representerer den størrelsen?

Oppgave2 Bohrs atommodell

I denne oppgaven skal du studere Bohrs atommodell, samt de Broglies bidrag til modellen. Bruk ikke-relativistisk beregning i oppgaven.

a) Hvilken antagelse i Bohrs atommodell resulterer i at elektronets energinivåer er diskrete? Hvordan bekrefter de Broglies hypotese den antagelsen?

b) Hvor stor del av elektronets totale energi er potensiell energi og hvor stor del er kinetisk energi? Er disse forholdene avhengige av energinivå?

c) Beregn farten v til elektronet i hydrogenatomet for energitilstandene $n = 1$, 2 og 3. Oppgi resultatet i enheten c (lysfart). Kommenter på om det hadde vært nødvendig å regne relativistisk her.

d) Beregn de Broglies bølgelengde for de tre tilstandene i oppgave 3c). Oppgi resultatet i enheten a_0 (Bohr-radius).

Oppgave3 Partikkel i en uendelig dyp brønn

Betrakt et elektron i en uendelig dyp brønn. Potensialet er definert ved

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

Den generelle løsningen til den tidsavhengige Schrödinger-ligningen kan skrives som en lineærkombinasjon av energi-egentilstander

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \tag{2}$$

Se nå på en brønn med bredden $a = \pi$ nm, og en tilstand til elektronet som beskrives av følgende superposisjon av egentilstander med de tre laveste energiene:

$$\Psi_s(x,t) = A \left(1 \, \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + 2 \, \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar} + 3 \, \psi_3(x) e^{-iE_3 t/\hbar} \right).$$

a) Vi har vist at normering av bølgefunksjonen er tidsuavhengig. Bestem koeffisientene c_n gjennom å normere bølgefunksjonen $\Psi_s(x,t)$ ved tiden $t = 0$. Du kan anta at A er reell og positiv.
HINT: Bruk at egentilstandene $\psi_n(x)$ er gjensidig ortonormale.

b) Beregn forventningsverdien $\langle H \rangle$ og standardavviket σ_H for energien til tilstanden $\Psi_s(x,0)$. Oppgi dem i elektronvolt (eV).
HINT: Beregningen kan bli enklere ved å bruke "nyttige konstanter", og at $E_n = E_1 \, n^2$ for partikkel i boks.

c) Bruk $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i$ og $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ til å vise at $2 \sin\alpha \, \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

d) Start fra den generelle løsningen i ligning (2), og vis at sannsynlighetstettheten kan skrives som

$$\begin{aligned} |\Psi(x,t)|^2 &= \sum_n \sum_{m\geq n} c_m^* c_n \, \Omega_{mn}(x,t), \quad \text{der} \\ \Omega_{mn}(x,t) &= \tfrac{2-\delta_{mn}}{a} \Big(\cos\left((m-n)k_1\, x\right) - \cos\left((m+n)k_1\, x\right)\Big) \times \\ & \cos\left((m^2-n^2)\omega_1\, t\right), \end{aligned}$$

og der δ_{mn} er Kronecker-delta.
HINT: Bruk $k_n = k_1 n$, $E_n = E_1 n^2$, resultatet fra c), og merk at $m \geq n$. Dette er en mer generell løsning på eksempel 2.1 i Griffiths og deloppgave 5b) i oblig 5, men utledningen er tilsvarende.

Anta nå at vi har lokalisert elektronet rundt midten av brønnen, $x_0 = a/2$, slik at tilstanden ved tiden $t = 0$ er beskrevet av bølgefunksjonen

$$\Psi_{x_0}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-|x-x_0|/\varepsilon}.$$

Vi antar videre at lokaliseringen er sterk, det vil si at ε er liten, slik at $\Psi_{x_0}(0,0) = \Psi_{x_0}(a,0) \approx 0$ ved brønnens vegger. Det betyr at vi kan integrere over hele rommet, fra $-\infty$ til ∞.

e) Plott $\Psi_{x_0}(x,0)$ for $\varepsilon = 0.01a$. Plott også bølgefunksjonen for grunntilstanden ved $t = 0$. Husk enheter på aksene.

f) Bestem sannsynligheten for at resultatet ved en måling av $\Psi_{x_0}(x,0)$ blir energien til grunntilstanden, og beregn denne sannsynligheten for $\varepsilon = 0.01a$. Hvis en måling gir oss grunntilstandsenergien, hvordan vil elektronets bølgefunksjon se ut like etter målingen?
HINT: Det er lurt å gjøre en variabelsubstitusjon for $x - x_0$.

Oppgave4 Stigeoperatorer

Denne oppgaven handler om stigeoperatorene $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ for en harmonisk oscillator. Ligning 2.68 i Griffiths (2.67 i versjon 2) sier at energitilstandene i en harmonisk oscillator kan skrives som

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_+)^n \, \psi_0,$$

der n er et positivt heltall og ψ_0 er grunntilstanden.

a) Bruk tilsvarende teknikk som i Griffiths til å vise at

$$(\hat{a}_-)^n \, \psi_n = \sqrt{n!}\, \psi_0$$

for $n = 4$.

b) Hva blir $(\hat{a}_-)^n \, \psi_0$?