FYS2140 - Oblig 4

Oskar Idland

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1

Det er flere av svarene som er delvis korrekte.

A: Ser strengt tatt ikke veldig fysisk ut, men vi kan selvsagt tolke grafen for å hente ut informasjon vi kan bruke i den virkelige verden.

B: Kvantemekanikken er akkurat hva vi trenger for å tolke en denne type bølgefunksjon.

C: Bølgefunksjonen *kan* beskrive en stor partikkel, men det er informasjon vi ikke har.

D: Bølgefunksjonen *kan* beskrive en liten partikkel, men det er informasjon vi ikke har.

E: Siste alternativ er hva jeg tolker som det mest korrekte svaret. Bølgefunksjonen viser oss at det er mest sannsynlig å finne en partikkel ved $x = 50$

Oppgave 2

a) Bølgefunksjonen Ψ er en kompleks funksjon som beskriver en partikkels kvantemekaniske tilstander som posisjon, bevegelsesmengde, tid og spin. Ettersom funksjonen er kompleks vil dens amplitude ikke ha noe direkte fysisk tolkning.

Den reelle funksjonen $|\Psi|^2$ er kvadratet av bølgefunksjonen. Denne funksjonen er alltid et positivt tall, og beskriver sannsynligheten for å finne en partikkel i et punkt, eller område hvis integrert, til en hver tid.

$x(t)$ er en klassisk funksjon som beskriver nøyaktig posisjonen til en hver tid.

b) Via Ψ kan vi få informasjon om hvilke kvantemekaniske tilstander det den beskriver vil ha samt hvor sannsynlig det er å finne en partikkel i et punkt eller områder.

Via $x(t)$ kan vi få informasjon om nøyaktig posisjonen til en partikkel til en hver tid.

Oppgave 3

A: Forventningsverdien til $\langle x \rangle$ er bare den gjennomsnittsverdien vi måler over en stor mengde målinger. Det er ikke gitt at det er en mulig mulig verdi for posisjon. Hvis $\langle x \rangle$ er en mulig verdi, vil hvis det også være den mest sannsynlige.

B: Sannsynligheten for å måle forventningsverdien, kan være null. Dette er ikke uvanlig når mulig verdier er diskrete.

C: Det stemmer at $\langle x \rangle$ er gjennomsnittet vi hadde målt over en stor mengde målinger.

B Regneoppgaver

Oppgave 4

a) For å normalisere Ψ må vi løse $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, dx = 1$.

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t} \cdot Ae^{-\lambda|x|}e^{i\omega t} = A^2 e^{-2\lambda|x|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\lambda|x|} \, \mathrm{d}x = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda|x|} \, \mathrm{d}x = 1$$

$$A^2 \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{2\lambda x} \, \mathrm{d}x}_{\frac{1}{2\lambda}} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda x} \, \mathrm{d}x}_{\frac{1}{2\lambda}} \right) = 1$$

$$A^2 \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\lambda}$$

b) Forventningsverdien til x finner vi ved å bruke den normaliserte bølgefunksjonen.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda x e^{-2\lambda|x|} \, \mathrm{d}x$$

Ettersom en funksjonen er symmetrisk om $x = 0$, men med motsatt fortegn vil integralet bli lik null. Da følger det at

$$\underline{\underline{\langle x \rangle = 0.}}$$

Forventningsverdien til x^2 er gitt ved

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda x^2 e^{-2\lambda|x|} \, \mathrm{d}x.$$

Ettersom funksjonen er symmetrisk om $x = 0$ vil integralet bli likt på begge sider. Vi tar for oss det positive intervallet for $0 \leq x \leq \infty$, og ganger med to.

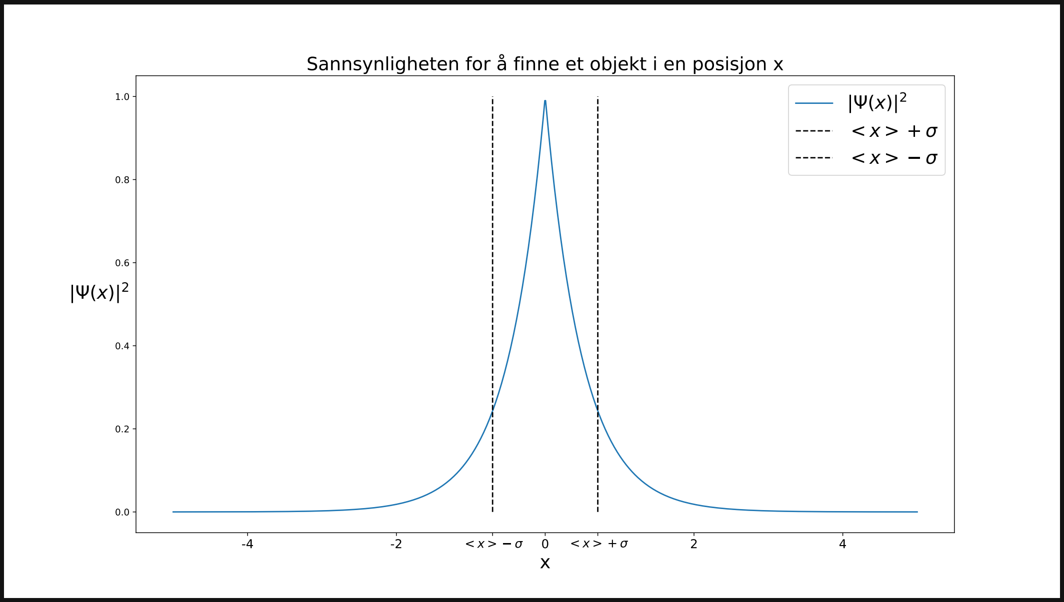
$$2\lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2\lambda x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\underline{\underline{\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda^2}}}$$

c) Vi finner standardavviket σ på følgende måte.

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2} - 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$$

d) Vi finner sannsynligheten for å finne en partikkel utenfor et område ved å bruke 68-95-99.7 regelen. Ettersom partikkelen er i intervallet $x_2 \leq x \leq x_1$ som er i intervallet $-\sigma \leq x \leq \sigma$, vet vi at det er 68.3 % sannsynlighet for at partikkelen befinner seg i dette området. Da er det 100% - 68.3% = 31.7% sannsynlighet for at partikkelen befinner seg utenfor dette området.



Figur 1: Oppgave 4.c

Oppgave 5

a) Vi finner A på samme måte som i oppgave 4. Ettersom funksjonen er symmetrisk om $x = 0$ vil integralet bli likt på begge sider. Vi tar for oss det positive intervallet for $0 \leq x \leq \infty$, og ganger med to.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, \mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \, \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-a(mx^2/\hbar + it)} \cdot e^{-a(mx^2/\hbar - it)} \, \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2a(mx^2/\hbar)} \, \mathrm{d}x$$

Vi ser i Rottmann (2019 s, 155 nr. 49) at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Hvis vi substituerer inn $\lambda = \dfrac{2am}{\hbar}$ i dette uttrykket får vi følgende.

$$A^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}} = 1 \Rightarrow A^2 \sqrt{\frac{h}{4am}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt[4]{\frac{4am}{h}}$$

b) Vi finner potensialet ved å løse Schrödingerligningen for V

$$V(x) = \Psi^{-1} \left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)$$

$$\Psi^{-1} = A^{-1} e^{a(mx^2/\hbar + it)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar A \left(-ie^{-a(mx^2/\hbar+it)}\right) = A\hbar e^{-a(mx^2/\hbar+it)}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\hbar^2}{2m} A \left(-2amx/\hbar\right)^2 e^{-a(mx^2/\hbar+it)} = 2Ama^2x^2 e^{-a(mx^2/\hbar+it)}$$

$$V(x) = A^{-1} e^{a(mx^2/\hbar+it)} \left(A\hbar e^{-a(mx^2/\hbar+it)} + 2Ama^2x^2e^{-a(mx^2/\hbar+it)}\right)$$

$$V(x) = 2ma^2x^2\hbar$$

c) Vi finner forventningsverdien $\langle x \rangle$ ved samme metode som i oppgave 4.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi \ \mathrm{d}x$$

Vi kan se at funksjonen er symmetrisk om $x = 0$ og at funksjonen x er symmetrisk, men med motsatt fortegn om $x = 0$. Derfor vil integralet av produktene deres bli null. Da vet vi at

$$\underline{\underline{\langle x \rangle = 0}}$$

Vi finner forventningsverdien $\langle x^2 \rangle$ ved samme metode som i oppgave 4. Her ser vi at begge funksjoner er symmetriske om $x = 0$, så vi kan ta integralet fra 0 til ∞ og gange med to.

$$\left\langle x^2 \right\rangle = 2\int_0^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi \ \mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} x^2 A^2 e^{-2a(mx^2/\hbar)} \ \mathrm{d}x$$

Vi ser i Rottmann (2019 s, 155 nr. 50) at

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^k \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}} \underbrace{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}_{\left(\frac{k+1}{2}-1\right)!}$$

Vi setter inn $\lambda = \dfrac{2am}{\hbar}$ og $k = 2$ i dette uttrykket og får følgende.

$$\sqrt{\frac{4am}{\hbar}} \left(\frac{2am}{\hbar}\right)^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}_{\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \sqrt{\frac{4am}{\hbar}} \left(\frac{2am}{\hbar}\right)^{-3/2} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{am\pi}{\hbar}\left(\frac{2am}{\hbar}\right)^{-3}}}}$$

Alt her er feil. Ikke hvordan man finner forventet bevegelsesmengde For å finne forventningsverdien til bevegelsesmengden p må vi løse følgende

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* p \Psi \ \mathrm{d}x = p\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a(mx^2/\hbar)} \ \mathrm{d}x$$

Integralet er symmetrisk om $x = 0$ så vi kan ta integralet fra 0 til ∞ og gange med to. Vi ser igjen i Rottmann (2019 s, 155 nr. 49) at

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Vi setter inn $\lambda = \dfrac{2am}{\hbar}$ og får

$$\langle p \rangle = \underline{\underline{p\sqrt{\frac{h}{4am}}}}$$

Ettersom integralet er uavhengig av p kan vi skrive $\left\langle p^2 \right\rangle$ som følgende

$$\left\langle p^2 \right\rangle = p\,\langle p \rangle = \underline{\underline{p^2\sqrt{\frac{h}{4am}}}}$$

d) Vi finner standardavvikene σ_x og σ_p ved å løse følgende ligninger.

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{am\pi}{\hbar}\left(\frac{2am}{\hbar}\right)^{-3}}}}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \underline{\underline{\sqrt{p^2\sqrt{\frac{h}{4am}} - p^2\frac{h}{4am}}}}$$

Dette svaret gir ikke helt mening. Mest sannsynlig er noe galt i integralene mine. Vi vet at σ_p skal alltid være større eller lik null. Det kan vi ikke garantere i vårt svar. hvis ikke $0 \leq \dfrac{h}{4am} \leq 1$