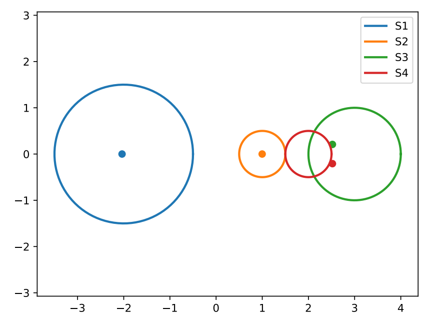
MAT1120 Oblig 1

Oskar Idland

Oppgave 3

a)

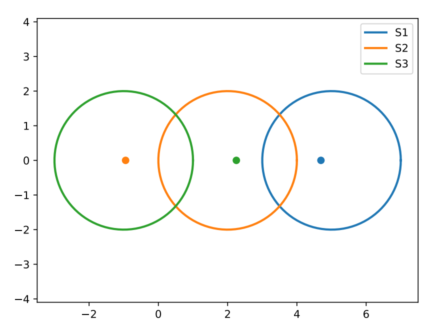
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$$



Figur 1: Plot av egensirklene til matrisen A og dets egenverdier

b)

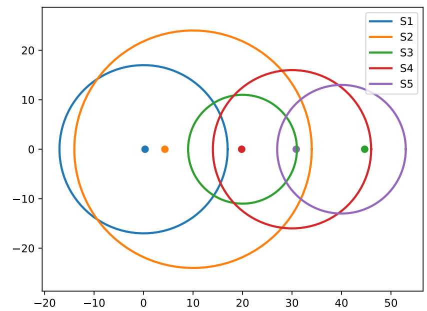
$$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



Figur 2: Plot av egensirklene til matrisen B og dets egenverdier

c)

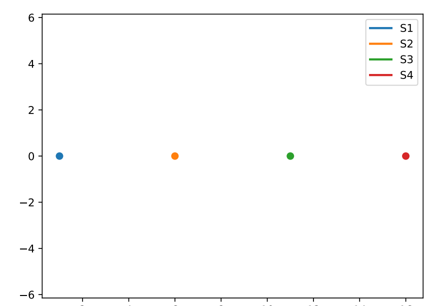
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 & 1 & 6 \\ 7 & 10 & 1 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 20 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 30 & 3 \\ 1 & 7 & 3 & 2 & 40 \end{bmatrix}$$



Figur 3: Plot av egensirklene til matrisen C og dets egenverdier

d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$



Figur 4: Plot av egensirklene sin matrise D og dets egenverdier

Egensirklene har radius $r = 0$ ettersom matrisen ikke har verdier utenom på diagonalen. Egenverdiene er reelle og ligger i sentrum av sirklene.

Oppgave 4

a)

Egenverdiene befinner seg innenfor en av egensirklene.

b)

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Kan skrives som

$$\sum_j a_{ij}v_j = \lambda v_i$$

Hvis vi trekker ut leddet a_{ii} kan vi flytte det til den andre siden av likningen.

$$\sum_{j\neq i} a_{ij}v_j = (\lambda - a_{ii})v_i$$

$$\sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}v_j}{v_i} = \lambda - v_{ii}$$

Vi bruker trekantulikheten

$$|\lambda - a_{ii}| = \left|\sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}v_j}{v_i}\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| = r_j$$

Oppgave 5

Ettersom en $n \times n$ matrise er inverterbar så lenge 0 ikke er en egenverdi, må vi vise at ingen diagonaldominant matrise har egenverdi 0 for å vise at de alltid er inverterbare. Vi beviser dette ved å sette inn $\lambda = 0$ i beviset ført i forrige oppgave.

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Dette strider i mot definisjonen av en diagonaldominant matrise og kan dermed ikke stemme. Konklusjonen er at $\lambda \neq 0$.

Oppgave 6

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Functions
def sirkel(x: float, y: float, r: float, eig: tuple, sirkel_name: str) ->
    None :
    t = np.linspace(0,2*np.pi,100)
    plt.plot(x+r*np.cos(t),y+r*np.sin(t),linewidth=2, label = sirkel_name)
    plt.scatter(eig[0], eig[1])

def egensirkler(matrix: list, filename: str) -> None:
    y = 0
    eigenvalues = np.linalg.eig(matrix)[0]
    for i in range(len(matrix)):
        sirkel_name = f'S{i+1}'
        eigReal, eigImag = eigenvalues[i].real, eigenvalues[i].imag
        x = matrix[i][i]
        r = np.sum(np.absolute(np.matrix(matrix[i]))) - abs(x)
        sirkel(x,y,r,(eigReal, eigImag), sirkel_name)

    plt.axis('equal')
    plt.legend()
    plt.savefig(filename)

#Matrixes

A = [[  -2,    0,  .5,  1],
     [-.25,    1, .25,  0],
     [   0,    0,   3, -1],
     [.125, .125, .25,  2]]

B = [[5, -1, 1],
     [1,  2, 1],
     [1, -1,-1]]

C = [[0,  3,  7,  1,  6],
     [7, 10,  1,  7,  9],
     [1,  8, 20,  1,  1],
     [1,  9,  3, 30,  3],
     [1,  7,  3,  2, 40]]

D = [[ 1, 0,  0,  0],
     [ 0, 6,  0,  0],
     [ 0, 0, 11,  0],
     [ 0, 0,  0, 16]]

# Function calls
egensirkler(A, 'Oppgave_3A_plot.pdf')
egensirkler(B, 'Oppgave_3B_plot.pdf')
egensirkler(C, 'Oppgave_3C_plot.pdf')
egensirkler(D, 'Oppgave_3D_plot.pdf')
```