Liv1 Block 2, 2024

Obligatorisk opgave

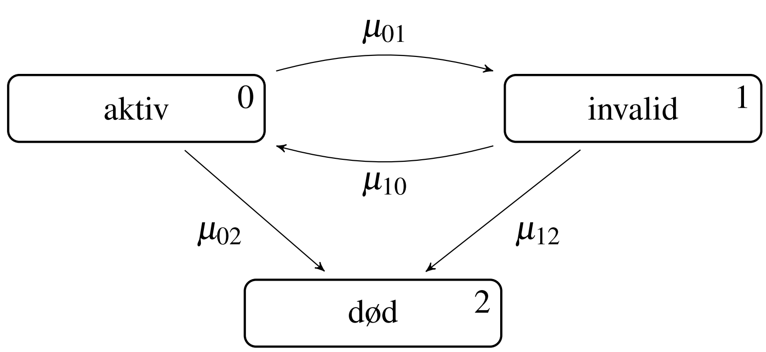
Ansvarlige: M. Bladt & J. Ahmad *1. december 2024*

Om opgaven

- Afleveres senest søndag d. 12.01.2025 kl. 22:00.
- Uploades til et link på Absalon eller sendes i pdf format til en instruktor.
- Kan besvares individuelt, eller i grupper på op til 3 personer.
- Vil blive evalueret som bestået/ikke bestået, og er et indstillingskrav for at gå til eksamen.

Opgaveformuleringen

I denne opgave skal vi udregne priser og reserver for et gennemsnitsrenteprodukt i invalidemodellen med reaktivering illustreret i Figur 1.



Figur 1: Invalidemodellen med reaktivering for den forsikredes tilstand $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ med tilstandsrum $E = \{0, 1, 2\}$.

Vi har følgende situation. En person med alder 30 (i dag, til tid 0) er aktiv på arbejdsmarkedet og vil gerne tegne et gennemsnitsrenteprodukt i et livsforsikringsselskab med følgende produktsammensætning:

1. Opsat livrente, en løbende årlig betaling på kr. 400.000 sålænge forsikret er i live, startende fra alder 65.

2. Invaliderente, en løbende årlig betaling på kr. 400.000 sålænge forsikret er invalid, med udløb ved alder 65.

Den forsikrede ønsker at betale for dækningerne med en årlig løbende præmie på π indtil alder 65 med såkaldt præmiefritagelse ved invaliditet. Det betyder med andre ord, at forsikrede betaler π sålænge forsirede er aktiv indtil alder 65.

Livsforsikringsselskabet anvender følgende førsteordensgrundlag $(r^\star, \boldsymbol{\Lambda}^\star)$ til at prisfastætte kontrakten:

- En konstant rente på 1%, dvs. $r^\star(t) = 0.01$ for alle $t \geq 0$.
- Overgangsintensiteter

$$\mu_{01}^\star(t) = \left(0.0004 + 10^{4.54+0.06(t+30)-10}\right)\mathbb{1}_{(t\leq 35)}$$

$$\mu_{10}^\star(t) = 2.0058 \cdot \mathrm{e}^{-0.117(t+30)}\mathbb{1}_{(t\leq 35)}$$

$$\mu_{02}^\star(t) : \texttt{mort1.csv}$$

$$\mu_{12}^\star(t) = \mu_{02}^\star(t)\big(1 + \mathbb{1}_{(t\leq 35)}\big)$$

- Der ses bort fra omkostninger på førsteordensgrundlaget

I filen `mort1.csv` fås dødelighedsintensiteter for hvert heltalsalder $1, 2, \ldots, 125$. For at opnå en tilsvarende kontinuert funktion, som de øvrige intensiteter, kan man passende foretage lineær interpolation mellem punkterne. Dette kan fx. foretages i R via `approxfun` funktionen på følgende måde:

```
m1 <- read.csv("mort1.csv", sep = ";", dec = ",")
m1fun <- approxfun(m1$Alder, m1$mu, rule = 2)
mu02star <- function(t){ m1fun(t+30) }
```

I hele opgaven betragtes tid $t = 0$ som 'i dag' hvor forsikrede har alder 30, som giver anledning til ovenstående intensiteter i tidsdimensionen. Derudover antages det, at der eksisterer en maksimal kontrakttid på 80 (ved alder 110), dvs. $n = 80$ kan betragtes om et udløbstidspunkt for kontrakten.

Bemærk:
Vi henleder opmærksomheden på, at en større del af opgaven er relateret til gennemsnitsrente, og at også notation derfor vil være præget af dette. Alle reserver vil derfor have tilføjet et superscript $\circ$ selvom det i de første mange opgaver reelt set er overflødig notation.

(a) Opskriv betalingsprocessen $\mathrm{d}B^\circ(t)$ bestående af de til tid-0 garanterede betalinger, samt dens tilhørende matrix funktioner $\boldsymbol{b}^\circ(t)$ og $\boldsymbol{B}^\circ(t)$. Opskriv desuden rewardmatrix funktionen $\boldsymbol{R}^{\star,\circ}(t)$ på første orden. Afhænger den af 1. ordens gundlaget?

(b) Argumentér for, at den årlige præmierate π, fastsat ved ækvivalensprincippet på første orden til tid 0, kan udregnes via ligning (2.19) i noterne, og opstil udtrykket svarende til dette eksempel.

(c) Udregn præmieraten π numerisk via udtrykket i **(b)**.

(d) Udregn de partielle reserver $\boldsymbol{V}^{*,\circ}(t) = \{V_{ij}^{*,\circ}(t)\}_{i,j\in E}$ svarende til 1. ordens grundlaget, og rapportér værdierne til tiderne $t = 20$ og $t = 35$ i en tabel. Udregn de tilsvarende tilstandvise reserver, $\boldsymbol{V}^{*,\circ}(t)\boldsymbol{e} = \{V_i^{\star,\circ}(t)\}_{i\in E}$, og rapportér disse til samme tidspunkter.

(e) Opstil Thiele's differentialligning for de tilstandsvise førsteordensreserver $V_i^{\star,\circ}(t)$ med π fundet i **(c)**. Plot reserverne $V_0^{\star,\circ}(t)$ og $V_1^{\star,\circ}(t)$, og sammenlign deres udvikling med deres differentialligninger.

(f) Udregn standard afvigelsen for de fremtidige betalinger med ækvivalenspræmien π fundet i **(c)**.

Da alle kontraktuelle betalinger samt reserver på første orden nu er fastsat, er det tid til at opgøre markedsværdien af kontrakten, dvs. reserver på tredjeorden. Selskabet anvender i den forbindelse følgende tredjeordensgrundlag $(r, \boldsymbol{\Lambda})$ (markedsværdigrundlag):

- Rente, $r(t)$: Finanstilsynets rentekurve pr. 21. november 2024 (`rente.csv`)
- Overgangsintensiteter:

$$\mu_{02}(t) : \text{Finanstilsynets benchmark dødelighed fra 2024 (}\texttt{ftmort.csv}\text{)}$$

$$\mu_{01}(t) = 10^{5.662015+0.033462(t+30)-10}\mathbb{1}_{(t\leq 35)}$$

$$\mu_{10}(t) = 4.0116\cdot \mathrm{e}^{-0.117(t+30)}\mathbb{1}_{(t\leq 35)}$$

$$\mu_{12}(t) = \left(0.010339 + 10^{5.070927+0.05049(t+30)-10}\right)\mathbb{1}_{(t\leq 35)} + \mu_{02}(t)\mathbb{1}_{(t>35)}$$

- Der ses bort fra omkostninger på tredjeordensgrundlaget

Rentekurven angives i filen `rente.csv` på heltalstidspunkter, og der kan således foretages interpolation på linje med ovenstående for $\mu_{02}^{\star}$; bemærk dog, at der i den endelige funktion *ikke* skal skubbes med alderen 30. For Finanstilsynets benchmarkdødelighed anvendes samme metode som med $\mu_{02}^{\star}$ til at opnå funktionen for μ_{02}.

(g) Udregn risikosummerne på første orden, $RS_{ij}^{\star,\circ}(t)$, og illustrér numerisk at førsteordensgrundlaget er valgt på den sikre side i forhold til tredjeordensgrundlaget.

(h) Udregn overgangssandynlighedsmatricen på tredje orden, $\boldsymbol{P}(0,s)$ for $s \in [0,80]$. Plot de tre sandsynligheder fra aktiv-tilstanden, p_{0j}, $j \in E$, og rapportér værdierne i en tabel for tiderne $s = 20$ og $s = 35$.

(i) Udregn de tilstandsvise forventede cash flows $\boldsymbol{a}^\circ(0,s)$. Plot de to cash flows $a_0^\circ(0,s)$ og $a_1^\circ(0,s)$ og rapportér deres værdier for tidspunkterne $s = 20$ and $s = 35$ i en tabel.

(j) Udregn markedsværdien af kontrakten på tegningstidspunktet, $V_0^\circ(0)$.

Den negative markedsværdi på tegningstidspunktet indikerer, at den forsigtige prisfastsættelse leder til, at produktet skaber et systematisk overskud hvis alt går vel. Antag at selskabet udloder dividender fra dette overskud gennem et andenordensgrundlag $(r^\delta, \boldsymbol{\Lambda}^\delta)$, hvor overgangsintensiteterne fastsættes som en andel af de tilsvarende tredjeordensintensiteter:

$$\mu_{ij}^\delta(t) = \alpha_{ij}(t)\mu_{ij}(t),$$

hvor $\alpha_{ij}(t)$ er en tids- og overgangsafhængig faktor som selskabet (mere eller mindre) frit kan vælge.

(k) Hvilke betingelser skal der gælde for $r^\delta(t)$ og $\alpha_{ij}(t)$ for at selskabet kan sikre et positivt overskud?