ГУАП

КАФЕДРА № 43

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

| | | |
|---|---|---|
| Доцент | | В. Н. Ассаул |
| должность, уч. степень, звание | подпись, дата | инициалы, фамилия |

Вариант _2

# ОТЧЕТ О РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

## по курсу: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

| | | | |
|---|---|---|---|
| СТУДЕНТ ГР. № | 4136 | | Н. С. Бобрович |
| | | подпись, дата | инициалы, фамилия |

Санкт-Петербург 2022

Задание

| Вариант | Номера столбцов | α | γ |
|---|---|---|---|
| 2 | 4, 6, 7 | 0.05 | 0.8 |

| 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|
| 555 | 559 | 567 |
| 572 | 574 | 542 |
| 543 | 565 | 568 |
| 546 | 582 | 568 |
| 562 | 558 | 545 |
| 566 | 576 | 560 |
| 548 | 562 | 556 |
| 563 | 552 | 562 |
| 569 | 557 | 555 |
| 549 | 562 | 552 |
| 567 | 566 | 547 |
| 550 | 552 | 571 |
| 560 | 549 | 544 |
| 553 | 572 | 544 |
| 564 | 538 | 552 |
| 548 | 549 | 543 |
| 543 | 538 | 552 |
| 561 | 547 | 587 |
| 562 | 554 | 548 |
| 560 | 560 | 535 |

1. Ранжировка данных по величине

535, 538, 538, 542, 543, 543, 543, 544, 544, 545, 546, 547, 547, 548, 548, 548, 549, 549, 549, 550, 552, 552, 552, 552, 552, 553, 554, 555, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 560, 560, 560, 561, 562, 562, 562, 562, 562, 563, 564, 565, 566, 566, 567, 567, 568, 568, 569, 571, 572, 572, 574, 576, 582, 587

Размах выборки

, где

*R* - размах выборки;

- максимальное значение выборки;

- минимальное значение выборки.

Размах выборки равен 52.

2. Преобразование ряда

Точечный вариационный ряд

| | |
|---|---|
| | |
| 535 | 1 |
| 538 | 2 |
| 542 | 1 |
| 543 | 3 |

| | |
|---|---|
| 544 | 2 |
| 545 | 1 |
| 546 | 1 |
| 547 | 2 |
| 548 | 3 |
| 549 | 3 |
| 550 | 1 |
| 552 | 5 |
| 553 | 1 |
| 554 | 1 |
| 555 | 2 |
| 556 | 1 |
| 557 | 1 |
| 558 | 1 |
| 559 | 1 |
| 560 | 4 |
| 561 | 1 |
| 562 | 5 |
| 563 | 1 |
| 564 | 1 |
| 565 | 1 |
| 566 | 2 |
| 567 | 2 |

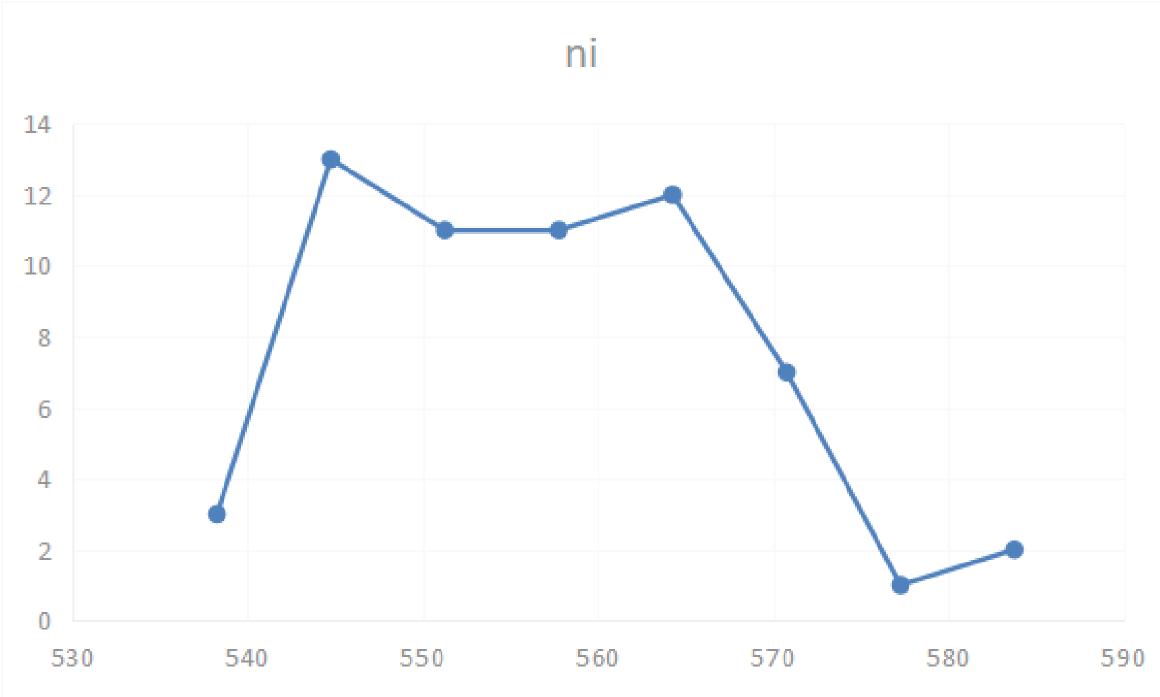
| | |
|---|---|
| 568 | 2 |
| 569 | 1 |
| 571 | 1 |
| 572 | 2 |
| 574 | 1 |
| 576 | 1 |
| 582 | 1 |
| 587 | 1 |

Интервальный ряд с числом интервалов k=8

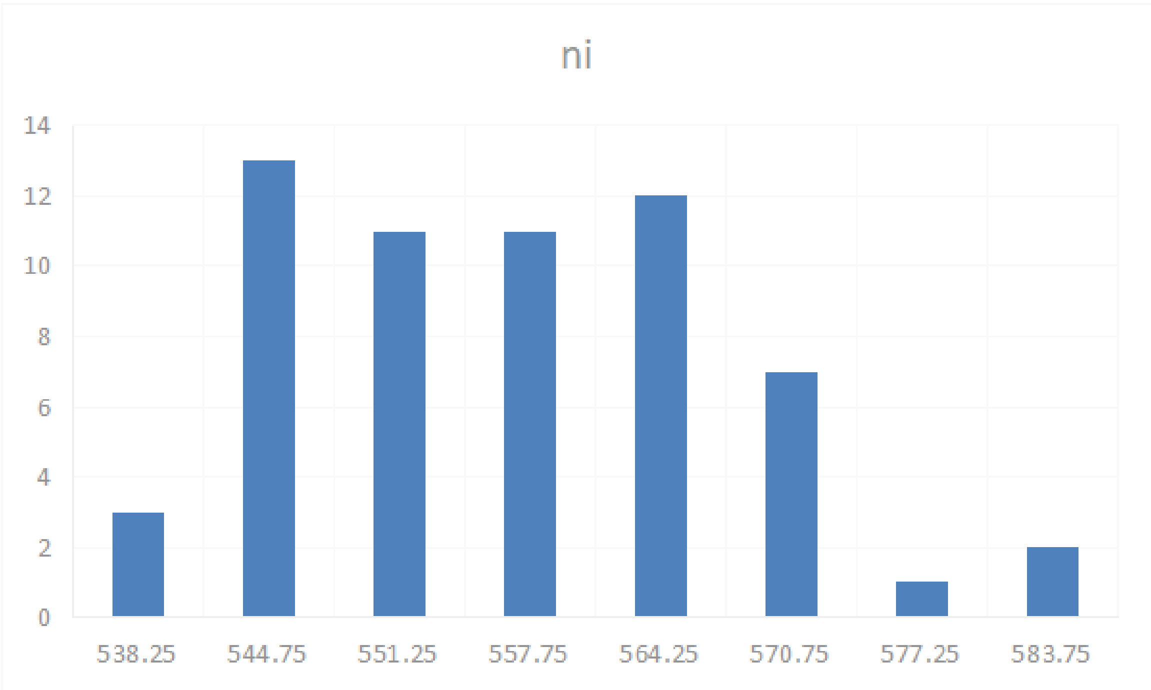
| Номер подинтервала | Граница подинтервала | Варианты | Частоты |
|---|---|---|---|
| 1 | [535, 541.5] | 538.25 | 3 |
| 2 | (541.5, 548] | 544.75 | 13 |
| 3 | (548, 554.5] | 551.25 | 11 |
| 4 | (554.5, 561] | 557.75 | 11 |
| 5 | (561, 567.5] | 564.25 | 12 |
| 6 | (567.5, 574] | 570.75 | 7 |
| 7 | (574, 580.5] | 577.25 | 1 |
| 8 | (580.5, 587] | 583.75 | 2 |

3. Построение полигона и гистограммы

Полигон




Гистограмма




4. Нахождение выборочных моды и медианы

Выборочная мода

Мода ряда чисел - варианта, имеющая наибольшую частоту.

В данном интервальном ряду: 544,75 с 13

Выборочная медиана

Медиана - значение, которое делит вариационный ряд на две части, равные числу вариант $m_e = \frac{X_m + X_{m+1}}{2}$,

где

-$m_e$ выборочная медиана;

- $X_m$ и $X_{m+1}$ варианты, находящиеся в середине числового ряда (в нашем случае X4 и X5) . $m_e = \frac{557{,}75 + 564{,}25}{2} = 561$

5. Нахождение выборочного среднего, дисперсии и СКО

Выборочное среднее $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i x_i$

, где

- $\bar{x}$ выборочное среднее;

-$n_i$ частота варианты;

-$x_i$ варианта.

$\bar{x} = \frac{3*538,25 + 13*544,75 + 11*551,25 + 11*557,75 + 12*564,25 + 7*570,75 + 1*577,25 + 2*583,75}{60} \approx 556,78$

Выборочная дисперсия

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 = \frac{3*538,25^2 + 13*544,75^2 + 11*551,25^2 + 11*557,75^2 + 12*564,25^2 + 7*570,75^2 + 1*577,25^2 + 2*583,75^2 +}{60} \approx 310117,86$

$$D^* = 310117,86 - 309998,40 = 119,46$$

Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{60D^{\cdot}}{n-1} = 122,13$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{119,46} \approx 10,93$$

6. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности с помощью критерия Пирсон на уровне значимости α.

На уровне значимости α проверим гипотезу H0 о нормальном распределении. Используем критерий согласия Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}}$$

Эмпирические частоты известны из предложенного интервального ряда, и осталось найти теоретические.

Теоретические частоты рассчитываются по формуле:

$n_i^{'} = \frac{h * n}{\sigma^*} * f(z_i)$, где

-$n_i^{'}$ теоретическая частота варианты;

-$h$ длина интервала;

- $n$эмпирическая частота;

- $\sigma^*$выборочное СКО;

- $f(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{z^2}{2}}$ функция Гаусса, где

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma^*}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 538,25 | 3 | -1,69 | 0,04 | 0,07 |
| 544,75 | 13 | -1,10 | 0,09 | 0,67 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 551,25 | 11 | -0,51 | 0,14 | 0,92 |
| 557,75 | 11 | 0,09 | 0,16 | 1,04 |
| 564,25 | 12 | 0,68 | 0,13 | 0,90 |
| 570,75 | 7 | 1,28 | 0,07 | 0,29 |
| 577,25 | 1 | 1,87 | 0,03 | 0,02 |
| 583,75 | 2 | 2,47 | 0,01 | 0,01 |

Расчёт $z_i$ для каждого i

$$z_1 = \frac{538{,}25 - 556{,}78}{10{,}93} \approx -1{,}69$$

$$z_2 = \frac{544{,}75 - 556{,}78}{10{,}93} \approx -1{,}10$$

$$z_3 = \frac{551{,}25 - 556{,}78}{10{,}93} \approx -0{,}51$$

$$z_4 = \frac{557{,}75 - 556{,}78}{10{,}93} \approx 0{,}09$$

$$z_5 = \frac{564{,}25 - 556{,}78}{10{,}93} \approx 0{,}68$$

$$z_6 = \frac{570{,}75 - 556{,}78}{10{,}93} \approx 1{,}28$$

$$z_7 = \frac{577{,}25 - 556{,}78}{10{,}93} \approx 1{,}87$$

$$z_8 = \frac{583,75 - 556,78}{10,93} \approx 2,47$$

Расчёт $f(z_i)$ для каждого $z_i$

$$f(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(-1,69)^2}{2}} \approx 0,04$$

$$f(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(-1,10)^2}{2}} \approx 0,09$$

$$f(z_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(-0,51)^2}{2}} \approx 0,14$$

$$f(z_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{0,09^2}{2}} \approx 0,16$$

$$f(z_5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{0,68^2}{2}} \approx 0,13$$

$$f(z_6) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1,28^2}{2}} \approx 0,07$$

$$f(z_7) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1,87^2}{2}} \approx 0,03$$

$$f(z_8) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{2,47^2}{2}} \approx 0,01$$

Расчёт $n_i'$ для каждого i

$$n_1' = \frac{6,5 * 3}{10,93} * 0,04 \approx 0,07$$

$$n_2' = \frac{6,5 * 13}{10,93} * 0,09 \approx 0,67$$

$$n_3' = \frac{6,5 * 11}{10,93} * 0,14 \approx 0,92$$

$$n_4' = \frac{6,5 * 11}{10,93} * 0,16 \approx 1,04$$

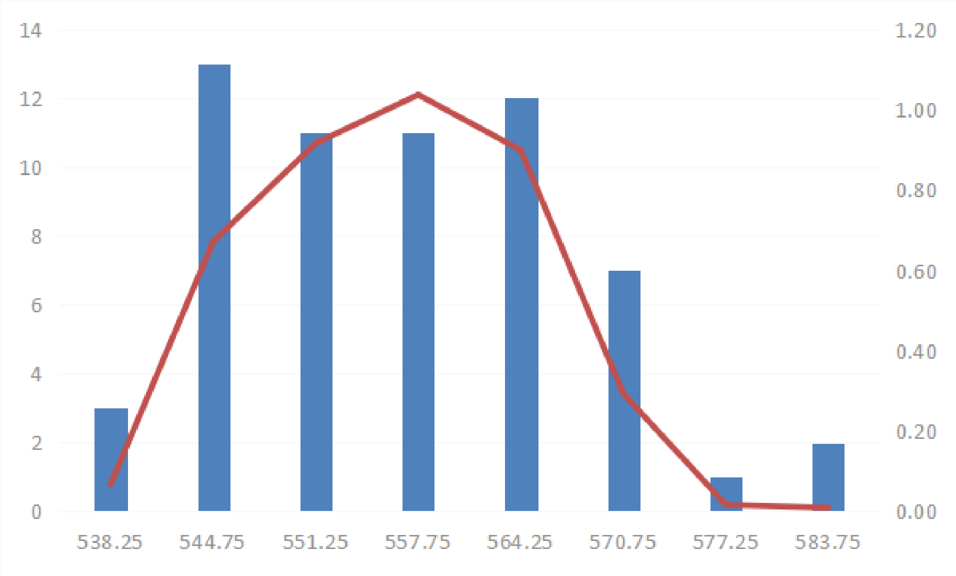
$$n_5' = \frac{6,5 * 12}{10,93} * 0,13 \approx 0,90$$

$$n_6' = \frac{6,5 * 7}{10,93} * 0,07 \approx 0,29$$

$$n_7' = \frac{6,5 * 1}{10,93} * 0,03 \approx 0,02$$

$$n_8' = \frac{6,5 * 2}{10,93} * 0,01 \approx 0,01$$

Построим эмпирическую гистограмму и теоретическую кривую




Оценим, насколько значимо отличаются эмпирические частоты от соответствующих теоретических частот.

Найдём критическое значение $\chi^2_{кр} = \chi^2_{кр}(\alpha;\ k)$ критерия согласия Пирсона. Количество степеней свободы определяется по формуле $k = m - r - 1$, где *m* – количество интервалов, а *r* – количество оцениваемых параметров рассматриваемого закона распределения.

В нашем случае интервалов m = 8.

У нормального закона мы оцениваем r = 2 параметра.

Получается, что $k = 8 - 2 - 1 = 5$ - искомое количество степеней свободы, и для уровня значимости $\alpha = 0.05$ имеем:

$$\chi^2_{кр} = \chi^2_{кр}(0{,}05;\ 5)\ \approx\ 11{,}1$$

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{набл}\ =\ \sum_{i=1}^{m}\frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$$

$$\chi^2_{набл}\ =\ \frac{(3-0{,}07)^2}{0{,}07} + \frac{(13-0{,}67)^2}{0{,}67} + \frac{(11-0{,}92)^2}{0{,}92} + \frac{(11-1{,}04)^2}{1{,}04} + \frac{(12-0{,}90)^2}{0{,}90} + \frac{(7-0{,}29)^2}{0{,}29} + \frac{(1-0{,}02)^2}{0{,}02} + \frac{(2-0{,}01)^2}{0{,}01}\ =\ 1350{,}46$$

Сравниваем табличное и полученное значения критерия:

$$\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр};\quad 1350{,}6\ > 11{,}1$$

Вывод: получив такое неравенство в итоге, мы можем сделать вывод о том, что на уровне значимости 0,05 гипотеза H0 о нормальном распределении отвергнута.

7. Нахождение доверительного интервала для математического ожидания генеральной совокупности надёжностью γ

При известной дисперсии найти доверительный интервал можно по формуле:

$$\begin{cases} p\left(\bar{x} - \frac{\sigma_\xi \widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}} < m_\xi < \bar{x} + \frac{\sigma_\xi \widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}}\right) \approx 2\Phi(\widetilde{x_\gamma}); \\ 2\Phi(\widetilde{x_\gamma}) = \gamma \end{cases}$$

, где

$\bar{x}$- среднее выборочное;

$\sigma_\xi$- выборочная дисперсия;

$\widetilde{x_\gamma}$ - число, при котором = (в нашем случае, согласно таблице функции Лапласа, ≈ 1,29);

$m_\xi$ - математическое ожидание.

Левая граница интервала:

$$\bar{x} - \frac{\sigma_\xi \widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}} = 556{,}78 - \frac{10{,}93 * 1{,}29}{\sqrt{60}} \approx 554{,}96$$

Правая граница интервала:

$$\bar{x} + \frac{\sigma_\xi \widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}} = 556{,}78 + \frac{10{,}93 * 1{,}29}{\sqrt{60}} \approx 558{,}60$$

Вывод: с вероятностью 0,8 выполняется неравенство $554{,}96 < \mathrm{m}_\xi < 558{,}60$, то есть математическое ожидание попадает в интервал (554.96, 558.60) с надёжностью 0,8

При неизвестной дисперсии найти доверительный интервал можно по формуле:

$$\begin{cases} p\left(\bar{x} - \frac{s\widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}} < m_\xi < \bar{x} + \frac{s\widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}}\right) \approx 2\Phi(\widetilde{x_\gamma}); \\ 2\Phi(\widetilde{x_\gamma}) = \gamma \end{cases}$$

, где

$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2}$ - исправленное выборочное среднее квадратичное отклонение

$$s = \sqrt{\frac{3*(538{,}25-556{,}78)^2+13*(544{,}75-556{,}78)^2+11*(551{,}25-556{,}78)^2+11*(557{,}75-556{,}78)^2+ 12*(564{,}25-556{,}78)^2+7*(570{,}75-556{,}78)^2+1*(577{,}25-556{,}78)^2+2*(583{,}75-556{,}78)^2+}{59}} \approx 11{,}02$$

Левая граница интервала:

$$\bar{x} - \frac{s\widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}} = 556{,}78 - \frac{11{,}02 * 1{,}29}{\sqrt{60}} \approx 554{,}94$$

Правая граница интервала:

$$\bar{x} + \frac{s\widetilde{x_\gamma}}{\sqrt{n}} = 556{,}78 + \frac{11{,}02 * 1{,}29}{\sqrt{60}} \approx 558{,}61$$

Вывод:

с вероятностью 0,8 выполняется неравенство $554{,}94 < m_\xi < 558{,}61$, то есть математическое ожидание попадает в интервал (554.94, 558.61) с надёжностью 0,8