# Краткие сведения о методах интегрирования простых дифференциальных уравнений. Примеры

У меня нет никаких особых талантов. Я только ужасно любопытен. *Альберт Эйнштейн*

Оглавление

[Краткие сведения о методах интегрирования простых дифференциальных уравнений. Примеры 1](#_Toc144654863)

[ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА 1](#_Toc144654864)

[ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 1](#_Toc144654865)

[МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДУ 1-ГО ПОРЯДКА 3](#_Toc144654866)

[Методы определения общего решения уравнения (2) 5](#_Toc144654867)

[Структура общего решения ЛНДУ 2-го порядка 11](#_Toc144654868)

[ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ДУ 15](#_Toc144654869)

Материал на указанную тему излагается кратко и только в том минимальном объеме, который требуется для выполнения практических и лабораторных работ (по вариационному исчислению, в частности).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка* (ОДУ) для функции *y*аргумента*x*называется соотношение вида

 (1)

где *F*– заданная функция от искомой функции и ее производных; термин «обыкновенные» говорит о том, что искомая функция есть функция одного действительного аргумента.

Не существует общего метода для решения ОДУ (определения искомой функции), но частные формы ОДУ позволяют получить решение в аналитическом (формульном) виде.

ОДУ может не содержать в явном виде аргумент *x,* искомую функцию и любые ее производные, но старшая производная обязана входить в уравнение *n-*го порядка.

**Пример П6.1.** Варианты записи ОДУ следующие:

1)  – уравнение первого порядка;

2)  – уравнение третьего порядка.

3)  – уравнение второго порядка;

4) равносильные формы записи: и 

Функция  называется *частнымрешением* ОДУ *n*-го порядка, если при подстановке в него  оно обращается в тождество.

*Частныерешения* образуются из *общего решения* ОДУ *n*-го порядка  приданием конкретных значений произвольным постоянным  Если общее решение явно не разрешено относительно *y*(*x*)  то решение принято называть *общим интегралом* уравнения (1).

**Пример П6.2.** Приведем варианты записей частных и общих решений ОДУ.

1. Функция  есть решение уравнения 3-го порядка 

2. Функция  есть общее решение ОДУ 

*Начальными условиями* для ОДУ (1) являются выражения:



где – заданные величины.

Задача отыскания частного решения уравнения (1) по начальным условиям называется *задачей Коши*.

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДУ 1-ГО ПОРЯДКА

*Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными *



*Замечание П6.1*. В процессе решения ДУ для всех появляющихся знаменателей предполагается выполнение естественного требования неравенства их нулю. Но далее возникает вопрос: не потеряны ли дополнительные решения при этом? Исследование этого явления необходимо. Поэтому далее решают уравнение , и если оно имеет решение**то тоже будет решением исходного ОДУ.

**Пример П6.3**. Решить уравнение: 

*Решение*. Разделяем переменные:



Интегрируя, получаем  Из уравнений  и  находим  Непосредственной подстановкой этих функций в исходное уравнение убеждаемся, что эти решения – частные решения. Итоговая запись ответа:



**Пример П6.4**. Найти общее решение уравнения 

*Решение*. Разделим переменные и проинтегрируем:



Здесь удобно представить произвольную постоянную как логарифм другой произвольной постоянной. Тогда *общий интеграл* можно записать как 

**1. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.** *Линейным уравнением 1-го порядка* называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной

 (2)

где  и – заданные непрерывные функции от *x.* Если функция**то уравнение

 (3)

называется *линейным однородным уравнением*, а уравнение (2) – *линейным неоднородным уравнением*  соответственно.

Линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) является уравнением с разделяющимися переменными:



Выражение  есть общее решение уравнения (3).

Методы определения общего решения уравнения (2)

*Метод вариации произвольной постоянной* (метод Лагранжа) реализуется идеей нахождения общего решения ЛНДУ *в такой же форме,* как и общее решение ЛОДУ. Поэтому задача заключается в предположении и нахождении этой функции.

**Пример П6.5**. Применение метода Лагранжа.Найти общее решение уравнения 

*Решение*. Решим сначала однородное уравнение:



Теперь будем искать решение неоднородного уравнения в виде

*у = С*(*х*)*е*–2*х*.

Производную  подставляем в исходное уравнение:  где — произвольная постоянная. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения:

*Метод Бернулли*. Ищут решение уравнения (2)в виде произведения двух неизвестных функций  одна из которых ищется в частном «удобном» для нас виде, а вторая – в общем виде.



Сгруппируем

 (4)

и потребуем обращения в нуль круглой скобки (для определения *частного* решения ):



Найденную функцию *v*(*x*) подставим в уравнение (4):



Итоговая запись общего решения (2):



**ПримерП6.6**. Применение метода Бернулли длялинейного дифференциального уравнения(ЛДУ). Решить уравнение

*Решение:* Разделим левую и правую части исходного уравнения на  приходим к линейному неоднородному уравнению: Полагаем  тогда и исходное уравнение принимает вид: который представим согласно используемому методув «вспомогательной» форме 

Положим (почему? – кому вопрос?) можно убрать, перепишем полученное соотношение в виде делим переменные для решения полученного ДУ:получаем: (нам достаточно частного решения).

Подставляем найденное значение в «вспомогательное» уравнение, получим: Решаем полученное уравнение в разделяющихся переменных откуда общее решение

**2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка.** *Дифференциальное уравнение 2-го порядка* имеет вид:

 (5)

Общим решением уравнения (5) является семейство функций, зависящее от двух произвольных постоянных выражение вида есть общий интеграл ДУ 2-го порядка.

*Задача Коши* для ДУ 2-го порядка (5) состоит в отыскании частного решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям: при 

*Линейное дифференциальное уравнение* (*ЛНДУ*) *2-го порядка* имеет следующий вид:

 (6)

где  и  – заданные функции, непрерывные на том промежутке, на котором ищется решение.

Предполагая, что  разделим (6) на  и, после введения новых обозначений для коэффициентов, запишем уравнение в виде

 (7)

**Теорема П6.1.** Уравнение (7) имеет на некотором промежутке единственное решение, удовлетворяющее *начальным условиям* если функции  непрерывны на рассматриваемом промежутке.

Если  то уравнение (7) называется *линейным однородным дифференциальным уравнением* (ЛОДУ).

 (8)

Если  то уравнение (7) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением* (ЛНДУ).

Рассмотрим свойства решений ЛОДУ 2-го порядка (8).

*Линейной комбинацией функций* называется выражение  где  – произвольные числа.

**Теорема П6.2.** Если  и  – решения ЛОДУ (8), то их линейная комбинация  где  – произвольные числа, также будет решением этого уравнения.

Система функций  называется *линейно независимой на некотором промежутке*, если ни одна из этих функций не представляется в виде линейной комбинации всех остальных.

В случае двух функций это означает, что  или  Последнее условие можно переписать в виде  или  Стоящий в числителе этого выражения определитель  называется *определителем Вронского* для функций  и  не равный тождественно нулю для двух линейно независимых функций.

**Теорема П6.3.****Структура общего решения ЛОДУ 2-го порядка.** Если  и – линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения (2.3), то их линейная комбинация  где  и – произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

**Пример П6.7.** Доказать, что функция  где  и – произвольные постоянные, является общим решением ЛОДУ 

*Решение.* Легко убедиться непосредственной подстановкой, что функции  удовлетворяют данному уравнению. Эти функции являются линейно независимыми, так как  Поэтому согласно теореме о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка функция является общим решением данного уравнения.

*ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.* Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

 (9)

где 

Согласно предыдущему результату, общее решение ЛОДУ 2-го порядка легко определяется, если известны два линейно независимых частных решения этого уравнения.

**Метод Л. Эйлера нахождения частных решений уравнения с постоянными коэффициентами.** Частные решения ищутся в виде  Подставляя эту функцию в уравнение (9), после сокращения на  получим алгебраическое уравнение, называемое *характеристическим*:

 (10)

Функция будет решением уравнения (9) только при тех значениях*k*, которые являются корнями характеристического уравнения (10). В зависимости от величины дискриминанта  возможны три случая.

1. Решения  и  будут линейно независимыми, так как  и общее решение уравнения (9)примет вид 
2.  В этом случае и  В качестве второго *линейно независимого решения* берут функцию  Проверим, что эта функция является решением уравнения (9).







в силу 

*Замечание П6.2*. Можно доказать, что для линейного уравнения *n*-го порядка существует *только n линейно независимых решений*, поэтому решения – единственные два частных решения уравнения (9) с указанным свойством ().

Общее решение уравнения (9) имеет вид 

 В данном случае корни характеристического уравнения комплексно-сопряжены:  где  Нетрудно проверить, что линейно независимыми решениями уравнения (9) будут функции  и  Убедимся, что уравнению (9) удовлетворяет, например, функция 





Выражения в обеих скобках в левой части этого равенства тождественно равны нулю, поскольку



Аналогично нетрудно убедиться в том, что и  есть решение уравнения (9). Поскольку  то общее решение  будет иметь вид 

Структура общего решения ЛНДУ 2-го порядка

**Теорема П6.4.** Общее решение ЛНДУ 2-го порядка



представляется в виде суммы общего решения  соответствующего однородного уравнения



и любого частного решения  неоднородного уравнения.

**Решение ЛНДУ 2-го порядка с постоянными  
коэффициентами со специальной правой частью (на примерах)**

**Пример П6.8.** Найти общее решение уравнения 

*Решение.* Для уравнения  составляем характеристическое уравнение:  Откуда получаем  Общее решение однородного уравнения 

Правая часть заданного уравнения  имеет специальный вид, причем  не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде  где *A*, *B* – искомые неопределенные коэффициенты.

Найдем производные первого и второго порядков и подставим их в заданное уравнение:



Сократим обе части на  и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях равенства:



Решение системы:  Тогда  а общее решение заданного уравнения есть



**Пример П6.9.** Решить уравнение 

*Решение.* Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид: Тогда общее решение однородного уравнения  есть

Так как  является корнем характеристического уравнения кратности  то частное решение ищется в виде

Находим неопределненные коэффициенты *A*, *B*, *C* аналогично методике примера 1:Получаем следующее выражение для общего решения:



**Пример П6.10.**Решить уравнение 

*Решение.* Корнями характеристического уравнения для  являются комплексно-сопряженные числа  Общее решение соответствующего ЛОДУ:

Правая часть заданного уравнения имеет специальный вид  где  Число  является корнем характеристического уравнения кратности  поэтому частное решение исходного уравнения можно искать в виде



Для определения *A* и *B* находим  и подставляем в заданное уравнение:



Приравнивая коэффициенты при  и  получаем  Общее решение исходного уравнения:



**Метод вариации произвольных постоянных  
(метод Лагранжа).** Как известно,общее решение линейного однородного уравнения (ЛОДУ) (8) имеет вид:



где  – линейно независимые на некотором интервале *X* решения ЛОДУ, а – произвольные постоянные.

Решение ЛНДУ в форме (7) ищут в виде:



Нетрудно показать, что в таком представлении искомые функции  должны удовлетворять системе



Пусть решение системы  и  После интегрирования:



где произвольные постоянные.

Общее решение ЛНДУ (7):



**Пример П6.11.** Решить уравнение: 

*Решение.* Соответствующее данному ЛНДУ однородное уравнение  Интегрируя его, получим общее решение:



Согласно методу Лагранжа имеем систему уравнений:



откуда получаем 

Общее решение исходного уравнения 

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ДУ

**Пример П6.12**. Решить дифференциальное уравнение

*Решение.*Данное уравнение является неполным дифференциальным уравнением первого порядка типа  решение которого ищется в виде 



*Ответ:*

**Пример П6.13**. Решить дифференциальное уравнение

*Решение:* Данное уравнение является неполным дифференциальным уравнением первого порядка типа  решение которого ищется в виде Так как  то исходное уравнение можно записать в виде: Интеграл можно найти, используя метод замены переменной: пусть тогда  и интеграл при условии определится в виде

Производим обратную замену переменой и решение исходного уравнения: Проверяем отброшенное значение  для чего подставим в исходное уравнение:  откуда делаем вывод, что данное значение также является корнем уравнения.

*Ответ:*

**Пример П6.14**. Найти общее решение дифференциального уравнения  и частное решение при условии 

*Решение:* Исходное уравнение относится к типу неполных дифференциальных уравнений  Представим производную как дифференциал и проведем преобразования уравнения:



Интегрируем левую и правую части данного уравнения:

 обозначив  получаем окончательный вид решения исходного уравнения: 

Найдем частное решение при заданном условии :  откуда  и частное решение принимает вид 

*Ответ:* общее решение  частное решение 

**Пример П6.15*.*** Найти общее решение дифференциального уравнения  и частное решение при условии 

*Решение:* Сделаем преобразования исходного уравнения:



Интегрируем отдельно левую и правую часть уравнения:  Интеграл в левой части уравнения является табличным, а для нахождения интеграла в правой части используем метод замены переменой:



Решение исходного уравнения:

 или 

Найдем частное решение при 

 тогда 

*Ответ.*Общее решение: частное решение:

**Пример П6.16**. Решить однородное дифференциальное уравнение 

*Решение.*Преобразуем исходное уравнение: разделим левую и правую часть на *x* (при условии ), тогда



Введем новую переменную  тогда  Преобразуем исходное уравнение и при условии  получаем:



Заменим постоянную  и возвратимся к исходным переменным:



Проверяем отброшенные значения на предмет дополнительных решений: поскольку то  тогда, когда 

*Ответ:*

**Пример П6.17**. Найти общее решение уравнения 

*Решение.*Решение ищем в виде  тогда  Подставляемполученные выражения в исходное уравнение, получаем:  откуда следует соответствующее *характеристическое уравнение* для исходного уравнения: его решения которого есть корни: 

Согласно утверждению 2 теоремы 3, решение ДУ в этом случае имеет вид: