**Задание:**

3 Бобрович Николай Сергеевич

Имеются 3 пункта поставки однородного груза , , и 5 пунктов потребления этого груза , , , , . На пунктах () груз находится соответственно в количествах , , условных единиц. В пункты () требуется доставить соответственно единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из в определена матрицей . Решить задачу тремя методами (северо-западного угла, минимальной стоимости и методом Фогеля) и найти такой план закрепления потребителей и поставщиков, чтобы общие затраты на перевозки были минимальны.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 330 |
|  | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 300 |
|  | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | 270 |
|  | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

**Решение: (метод минимальной стоимости)**

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.  
∑a = 330 + 300 + 270 = 900  
∑b = 120 + 200 + 310 + 190 + 80 = 900  
Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

Этап I. Поиск первого опорного плана.  
1. Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.  
Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.  
Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.  
Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.  
Искомый элемент равен c14=3. Для этого элемента запасы равны 330, потребности 190. Поскольку минимальным является 190, то вычитаем его.  
x14 = min(330,190) = 190.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | **3** | 8 | **330 - 190 = 140** |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 300 |
| 7 | 14 | 10 | x | 9 | 270 |
| 120 | 200 | 310 | **190 - 190 = 0** | 80 |  |

Искомый элемент равен c21=3. Для этого элемента запасы равны 300, потребности 120. Поскольку минимальным является 120, то вычитаем его.  
x21 = min(300,120) = 120.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 |
| **3** | 7 | 5 | x | 6 | **300 - 120 = 180** |
| x | 14 | 10 | x | 9 | 270 |
| **120 - 120 = 0** | 200 | 310 | 0 | 80 |  |

Искомый элемент равен c23=5. Для этого элемента запасы равны 180, потребности 310. Поскольку минимальным является 180, то вычитаем его.  
x23 = min(180,310) = 180.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 |
| 3 | x | **5** | x | x | **180 - 180 = 0** |
| x | 14 | 10 | x | 9 | 270 |
| 0 | 200 | **310 - 180 = 130** | 0 | 80 |  |

Искомый элемент равен c12=6. Для этого элемента запасы равны 140, потребности 200. Поскольку минимальным является 140, то вычитаем его.  
x12 = min(140,200) = 140.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | **6** | x | 3 | x | **140 - 140 = 0** |
| 3 | x | 5 | x | x | 0 |
| x | 14 | 10 | x | 9 | 270 |
| 0 | **200 - 140 = 60** | 130 | 0 | 80 |  |

Искомый элемент равен c35=9. Для этого элемента запасы равны 270, потребности 80. Поскольку минимальным является 80, то вычитаем его.  
x35 = min(270,80) = 80.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | x | 3 | x | 0 |
| 3 | x | 5 | x | x | 0 |
| x | 14 | 10 | x | **9** | **270 - 80 = 190** |
| 0 | 60 | 130 | 0 | **80 - 80 = 0** |  |

Искомый элемент равен c33=10. Для этого элемента запасы равны 190, потребности 130. Поскольку минимальным является 130, то вычитаем его.  
x33 = min(190,130) = 130.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | x | 3 | x | 0 |
| 3 | x | 5 | x | x | 0 |
| x | 14 | **10** | x | 9 | **190 - 130 = 60** |
| 0 | 60 | **130 - 130 = 0** | 0 | 0 |  |

Искомый элемент равен c32=14. Для этого элемента запасы равны 60, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.  
x32 = min(60,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | x | 3 | x | 0 |
| 3 | x | 5 | x | x | 0 |
| x | **14** | 10 | x | 9 | **60 - 60 = 0** |
| 0 | **60 - 60 = 0** | 0 | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |  |
| A1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| A2 | 3[120] | 7 | 5[180] | 9 | 6 | 300 |
| A3 | 7 | 14[60] | 10[130] | 11 | 9[80] | 270 |
|  | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.  
2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является невырожденным.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 6\*140 + 3\*190 + 3\*120 + 5\*180 + 14\*60 + 10\*130 + 9\*80 = 5530

Этап II. Улучшение опорного плана.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдём предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u3 + v2 = 14; 6 + u3 = 14; u3 = 8  
u3 + v3 = 10; 8 + v3 = 10; v3 = 2  
u2 + v3 = 5; 2 + u2 = 5; u2 = 3  
u2 + v1 = 3; 3 + v1 = 3; v1 = 0  
u3 + v5 = 9; 8 + v5 = 9; v5 = 1  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=0 | v2=6 | v3=2 | v4=3 | v5=1 |
| u1=0 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 |
| u2=3 | 3[120] | 7 | 5[180] | 9 | 6 |
| u3=8 | 7 | 14[60] | 10[130] | 11 | 9[80] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;2): 3 + 6 > 7; ∆22 = 3 + 6 - 7 = 2 > 0  
(3;1): 8 + 0 > 7; ∆31 = 8 + 0 - 7 = 1 > 0  
max(2,1) = 2  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;2): 7  
Для этого в перспективную клетку (2;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |
| 1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| 2 | 3[120] | 7[+] | 5[180][-] | 9 | 6 | 300 |
| 3 | 7 | 14[60][-] | 10[130][+] | 11 | 9[80] | 270 |
|  | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Цикл приведен в таблице (2,2 → 2,3 → 3,3 → 3,2).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 2) = 60. Прибавляем 60 к объёмам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 60 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |  |
| A1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| A2 | 3[120] | 7[60] | 5[120] | 9 | 6 | 300 |
| A3 | 7 | 14 | 10[190] | 11 | 9[80] | 270 |
|  | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдём предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u2 + v2 = 7; 6 + u2 = 7; u2 = 1  
u2 + v1 = 3; 1 + v1 = 3; v1 = 2  
u2 + v3 = 5; 1 + v3 = 5; v3 = 4  
u3 + v3 = 10; 4 + u3 = 10; u3 = 6  
u3 + v5 = 9; 6 + v5 = 9; v5 = 3  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=2 | v2=6 | v3=4 | v4=3 | v5=3 |
| u1=0 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 |
| u2=1 | 3[120] | 7[60] | 5[120] | 9 | 6 |
| u3=6 | 7 | 14 | 10[190] | 11 | 9[80] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(3;1): 6 + 2 > 7; ∆31 = 6 + 2 - 7 = 1 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 7  
Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |
| 1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| 2 | 3[120][-] | 7[60] | 5[120][+] | 9 | 6 | 300 |
| 3 | 7[+] | 14 | 10[190][-] | 11 | 9[80] | 270 |
|  | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Цикл приведен в таблице (3,1 → 3,3 → 2,3 → 2,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 1) = 120. Прибавляем 120 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 120 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |  |
| A1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| A2 | 3 | 7[60] | 5[240] | 9 | 6 | 300 |
| A3 | 7[120] | 14 | 10[70] | 11 | 9[80] | 270 |
|  | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u2 + v2 = 7; 6 + u2 = 7; u2 = 1  
u2 + v3 = 5; 1 + v3 = 5; v3 = 4  
u3 + v3 = 10; 4 + u3 = 10; u3 = 6  
u3 + v1 = 7; 6 + v1 = 7; v1 = 1  
u3 + v5 = 9; 6 + v5 = 9; v5 = 3  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=1 | v2=6 | v3=4 | v4=3 | v5=3 |
| u1=0 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 |
| u2=1 | 3 | 7[60] | 5[240] | 9 | 6 |
| u3=6 | 7[120] | 14 | 10[70] | 11 | 9[80] |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 6\*140 + 3\*190 + 7\*60 + 5\*240 + 7\*120 + 10\*70 + 9\*80 = 5290

**Анализ оптимального плана:**

Из 1-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (140 ед.), в 4-й магазин (190 ед.)  
Из 2-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (60 ед.), в 3-й магазин (240 ед.)  
Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (120 ед.), в 3-й магазин (70 ед.), в 5-й магазин (80 ед.)

**Решение: (метод северо-западного угла)**

Этап I. Поиск первого опорного плана.

1. Используя метод северо-западного угла, построим первый опорный план транспортной задачи.  
План начинается заполняться с верхнего левого угла.  
Искомый элемент равен c11=12. Для этого элемента запасы равны 330, потребности 120. Поскольку минимальным является 120, то вычитаем его.  
x11 = min(330,120) = 120.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 330 - 120 = 210 |
| x | 7 | 5 | 9 | 6 | 300 |
| x | 14 | 10 | 11 | 9 | 270 |
| 120 - 120 = 0 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Искомый элемент равен c12=6. Для этого элемента запасы равны 210, потребности 200. Поскольку минимальным является 200, то вычитаем его.  
x12 = min(210,200) = 200.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 210 - 200 = 10 |
| x | x | 5 | 9 | 6 | 300 |
| x | x | 10 | 11 | 9 | 270 |
| 0 | 200 - 200 = 0 | 310 | 190 | 80 |  |

Искомый элемент равен c13=7. Для этого элемента запасы равны 10, потребности 310. Поскольку минимальным является 10, то вычитаем его.  
x13 = min(10,310) = 10.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | x | x | 10 - 10 = 0 |
| x | x | 5 | 9 | 6 | 300 |
| x | x | 10 | 11 | 9 | 270 |
| 0 | 0 | 310 - 10 = 300 | 190 | 80 |  |

Искомый элемент равен c23=5. Для этого элемента запасы равны 300, потребности 300. Поскольку минимальным является 300, то вычитаем его.  
x23 = min(300,300) = 300.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 5 | x | x | 300 - 300 = 0 |
| x | x | 10 | 11 | 9 | 270 |
| 0 | 0 | 300 - 300 = 0 | 190 | 80 |  |

Искомый элемент равен c34=11. Для этого элемента запасы равны 270, потребности 190. Поскольку минимальным является 190, то вычитаем его.  
x34 = min(270,190) = 190.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 10 | 11 | 9 | 270 - 190 = 80 |
| 0 | 0 | 0 | 190 - 190 = 0 | 80 |  |

Искомый элемент равен c35=9. Для этого элемента запасы равны 80, потребности 80. Поскольку минимальным является 80, то вычитаем его.  
x35 = min(80,80) = 80.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 5 | x | x | 0 |
| x | x | 10 | 11 | 9 | 80 - 80 = 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 80 - 80 = 0 |  |

Далее, согласно алгоритму, ищем элементы среди не вычеркнутых.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 330 |
| 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 300 |
| 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | 270 |
| 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Искомый элемент равен c14=3, но т.к. ограничения выполнены, то x14=0.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 12[120] | 6[200] | 7[10] | 3[0] | 8 | 330 |
| A2 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 | 300 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11[190] | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.  
2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является невырожденным.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 12\*120 + 6\*200 + 7\*10 + 5\*300 + 11\*190 + 9\*80 = 7020  
Этап II. Улучшение опорного плана.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдём предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 12; 0 + v1 = 12; v1 = 12  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u1 + v3 = 7; 0 + v3 = 7; v3 = 7  
u2 + v3 = 5; 7 + u2 = 5; u2 = -2  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3  
u3 + v4 = 11; 3 + u3 = 11; u3 = 8  
u3 + v5 = 9; 8 + v5 = 9; v5 = 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=12 | v2=6 | v3=7 | v4=3 | v5=1 |
| u1=0 | 12[120] | 6[200] | 7[10] | 3[0] | 8 |
| u2=-2 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 |
| u3=8 | 7 | 14 | 10 | 11[190] | 9[80] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;1): -2 + 12 > 3; ∆21 = -2 + 12 - 3 = 7 > 0  
(3;1): 8 + 12 > 7; ∆31 = 8 + 12 - 7 = 13 > 0  
(3;3): 8 + 7 > 10; ∆33 = 8 + 7 - 10 = 5 > 0  
max(7,13,5) = 13  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 7  
Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 12[120][-] | 6[200] | 7[10] | 3[0][+] | 8 | 330 |
| 2 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 | 300 |
| 3 | 7[+] | 14 | 10 | 11[190][-] | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Цикл приведен в таблице (3,1 → 3,4 → 1,4 → 1,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 1) = 120. Прибавляем 120 к объёмам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 120 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 12 | 6[200] | 7[10] | 3[120] | 8 | 330 |
| A2 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 | 300 |
| A3 | 7[120] | 14 | 10 | 11[70] | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдём предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u1 + v3 = 7; 0 + v3 = 7; v3 = 7  
u2 + v3 = 5; 7 + u2 = 5; u2 = -2  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3  
u3 + v4 = 11; 3 + u3 = 11; u3 = 8  
u3 + v1 = 7; 8 + v1 = 7; v1 = -1  
u3 + v5 = 9; 8 + v5 = 9; v5 = 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=-1 | v2=6 | v3=7 | v4=3 | v5=1 |
| u1=0 | 12 | 6[200] | 7[10] | 3[120] | 8 |
| u2=-2 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 |
| u3=8 | 7[120] | 14 | 10 | 11[70] | 9[80] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(3;3): 8 + 7 > 10; ∆33 = 8 + 7 - 10 = 5 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;3): 10  
Для этого в перспективную клетку (3;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 12 | 6[200] | 7[10][-] | 3[120][+] | 8 | 330 |
| 2 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 | 300 |
| 3 | 7[120] | 14 | 10[+] | 11[70][-] | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Цикл приведен в таблице (3,3 → 3,4 → 1,4 → 1,3).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 3) = 10. Прибавляем 10 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 10 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 12 | 6[200] | 7 | 3[130] | 8 | 330 |
| A2 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 | 300 |
| A3 | 7[120] | 14 | 10[10] | 11[60] | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдём предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3  
u3 + v4 = 11; 3 + u3 = 11; u3 = 8  
u3 + v1 = 7; 8 + v1 = 7; v1 = -1  
u3 + v3 = 10; 8 + v3 = 10; v3 = 2  
u2 + v3 = 5; 2 + u2 = 5; u2 = 3  
u3 + v5 = 9; 8 + v5 = 9; v5 = 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=-1 | v2=6 | v3=2 | v4=3 | v5=1 |
| u1=0 | 12 | 6[200] | 7 | 3[130] | 8 |
| u2=3 | 3 | 7 | 5[300] | 9 | 6 |
| u3=8 | 7[120] | 14 | 10[10] | 11[60] | 9[80] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;2): 3 + 6 > 7; ∆22 = 3 + 6 - 7 = 2 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;2): 7  
Для этого в перспективную клетку (2;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 12 | 6[200][-] | 7 | 3[130][+] | 8 | 330 |
| 2 | 3 | 7[+] | 5[300][-] | 9 | 6 | 300 |
| 3 | 7[120] | 14 | 10[10][+] | 11[60][-] | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Цикл приведен в таблице (2,2 → 2,3 → 3,3 → 3,4 → 1,4 → 1,2).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 4) = 60. Прибавляем 60 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 60 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| A2 | 3 | 7[60] | 5[240] | 9 | 6 | 300 |
| A3 | 7[120] | 14 | 10[70] | 11 | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдём предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u2 + v2 = 7; 6 + u2 = 7; u2 = 1  
u2 + v3 = 5; 1 + v3 = 5; v3 = 4  
u3 + v3 = 10; 4 + u3 = 10; u3 = 6  
u3 + v1 = 7; 6 + v1 = 7; v1 = 1  
u3 + v5 = 9; 6 + v5 = 9; v5 = 3  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=1 | v2=6 | v3=4 | v4=3 | v5=3 |
| u1=0 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 |
| u2=1 | 3 | 7[60] | 5[240] | 9 | 6 |
| u3=6 | 7[120] | 14 | 10[70] | 11 | 9[80] |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 6\*140 + 3\*190 + 7\*60 + 5\*240 + 7\*120 + 10\*70 + 9\*80 = 5290

**Анализ оптимального плана:**

Из 1-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (140 ед.), в 4-й магазин (190 ед.)  
Из 2-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (60 ед.), в 3-й магазин (240 ед.)  
Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (120 ед.), в 3-й магазин (70 ед.), в 5-й магазин (80 ед.)

**Решение: (метод Фогеля)**

Этап I. Поиск первого опорного плана.

1. Используя метод Фогеля, построим первый опорный план транспортной задачи. Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строе или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или строке.  
Данный метод состоит в следующем:  
1. на каждой итерации находят разности между двумя наименьшими тарифами во всех строках и столбцах, записывая их в дополнительные столбец и строку таблицы;  
2. находят максимальную разность и заполняют клетку с минимальной стоимостью в строке (столбце), которой соответствует данная разность.  
Находим разности по строкам.  
Для строки N=1 первый минимальный элемент min11 = 3, второй минимальный элемент min21 = 6. Их разность равна d = min21 - min11 = 3.  
Для строки N=2 первый минимальный элемент min12 = 3, второй минимальный элемент min22 = 5. Их разность равна d = min22 - min12 = 2.  
Для строки N=3 первый минимальный элемент min13 = 7, второй минимальный элемент min23 = 9. Их разность равна d = min23 - min13 = 2.  
Находим разности по столбцам.  
Для столбца N=1 первый минимальный элемент min11 = 3. второй минимальный элемент min21 7. Их разность d = min21 - min11 = 4.  
Для столбца N=2 первый минимальный элемент min12 = 6. второй минимальный элемент min22 7. Их разность d = min22 - min12 = 1.  
Для столбца N=3 первый минимальный элемент min13 = 5. второй минимальный элемент min23 7. Их разность d = min23 - min13 = 2.  
Для столбца N=4 первый минимальный элемент min14 = 3. второй минимальный элемент min24 9. Их разность d = min24 - min14 = 6.  
Для столбца N=5 первый минимальный элемент min15 = 6. второй минимальный элемент min25 8. Их разность d = min25 - min15 = 2.  
Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу (4). В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки (1) и столбца (4).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | Разности по строкам |
| A1 | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 330 | 3 |
| A2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 300 | 2 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | 270 | 2 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |  |
| Разности по столбцам | 4 | 1 | 2 | 6 | 2 |  |  |

Искомый элемент равен c14=3. Для этого элемента запасы равны 330, потребности 190. Поскольку минимальным является 190, то вычитаем его.  
x14 = min(330,190) = 190.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 330 - 190 = 140 |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 300 |
| 7 | 14 | 10 | x | 9 | 270 |
| 120 | 200 | 310 | 190 - 190 = 0 | 80 |  |

Находим разности по строкам.  
Для строки N=1 первый минимальный элемент min11 = 6, второй минимальный элемент min21 = 7. Их разность равна d = min21 - min11 = 1.  
Для строки N=2 первый минимальный элемент min12 = 3, второй минимальный элемент min22 = 5. Их разность равна d = min22 - min12 = 2.  
Для строки N=3 первый минимальный элемент min13 = 7, второй минимальный элемент min23 = 9. Их разность равна d = min23 - min13 = 2.  
Находим разности по столбцам.  
Для столбца N=1 первый минимальный элемент min11 = 3. второй минимальный элемент min21 7. Их разность d = min21 - min11 = 4.  
Для столбца N=2 первый минимальный элемент min12 = 6. второй минимальный элемент min22 7. Их разность d = min22 - min12 = 1.  
Для столбца N=3 первый минимальный элемент min13 = 5. второй минимальный элемент min23 7. Их разность d = min23 - min13 = 2.  
Для столбца N=5 первый минимальный элемент min15 = 6. второй минимальный элемент min25 8. Их разность d = min25 - min15 = 2.  
Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу (1). В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки (2) и столбца (1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | Разности по строкам |
| A1 | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 | 1 |
| A2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 300 | 2 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | 270 | 2 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | [-] | 80 |  |  |
| Разности по столбцам | 4 | 1 | 2 | - | 2 |  |  |

Искомый элемент равен c21=3. Для этого элемента запасы равны 300, потребности 120. Поскольку минимальным является 120, то вычитаем его.  
x21 = min(300,120) = 120.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 300 - 120 = 180 |
| x | 14 | 10 | x | 9 | 270 |
| 120 - 120 = 0 | 200 | 310 | [-] | 80 |  |

Находим разности по строкам.  
Для строки N=1 первый минимальный элемент min11 = 6, второй минимальный элемент min21 = 7. Их разность равна d = min21 - min11 = 1.  
Для строки N=2 первый минимальный элемент min12 = 5, второй минимальный элемент min22 = 6. Их разность равна d = min22 - min12 = 1.  
Для строки N=3 первый минимальный элемент min13 = 9, второй минимальный элемент min23 = 10. Их разность равна d = min23 - min13 = 1.  
Находим разности по столбцам.  
Для столбца N=2 первый минимальный элемент min12 = 6. второй минимальный элемент min22 7. Их разность d = min22 - min12 = 1.  
Для столбца N=3 первый минимальный элемент min13 = 5. второй минимальный элемент min23 7. Их разность d = min23 - min13 = 2.  
Для столбца N=5 первый минимальный элемент min15 = 6. второй минимальный элемент min25 8. Их разность d = min25 - min15 = 2.  
Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу (5). В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки (2) и столбца (5).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | Разности по строкам |
| A1 | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 | 1 |
| A2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 180 | 1 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | 270 | 1 |
| Потребности | [-] | 200 | 310 | [-] | 80 |  |  |
| Разности по столбцам | - | 1 | 2 | - | 2 |  |  |

Искомый элемент равен c25=6. Для этого элемента запасы равны 180, потребности 80. Поскольку минимальным является 80, то вычитаем его.  
x25 = min(180,80) = 80.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | 7 | 3 | x | 140 |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 180 - 80 = 100 |
| x | 14 | 10 | x | x | 270 |
| [-] | 200 | 310 | [-] | 80 - 80 = 0 |  |

Находим разности по строкам.  
Для строки N=1 первый минимальный элемент min11 = 6, второй минимальный элемент min21 = 7. Их разность равна d = min21 - min11 = 1.  
Для строки N=2 первый минимальный элемент min12 = 5, второй минимальный элемент min22 = 7. Их разность равна d = min22 - min12 = 2.  
Для строки N=3 первый минимальный элемент min13 = 10, второй минимальный элемент min23 = 14. Их разность равна d = min23 - min13 = 4.  
Находим разности по столбцам.  
Для столбца N=2 первый минимальный элемент min12 = 6. второй минимальный элемент min22 7. Их разность d = min22 - min12 = 1.  
Для столбца N=3 первый минимальный элемент min13 = 5. второй минимальный элемент min23 7. Их разность d = min23 - min13 = 2.  
Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует строке (3). В этой строке минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки (3) и столбца (3).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | Разности по строкам |
| A1 | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 | 1 |
| A2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 100 | 2 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | 270 | 4 |
| Потребности | [-] | 200 | 310 | [-] | [-] |  |  |
| Разности по столбцам | - | 1 | 2 | - | - |  |  |

Искомый элемент равен c33=10. Для этого элемента запасы равны 270, потребности 310. Поскольку минимальным является 270, то вычитаем его.  
x33 = min(270,310) = 270.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | 7 | 3 | x | 140 |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 100 |
| x | x | 10 | x | x | 270 - 270 = 0 |
| [-] | 200 | 310 - 270 = 40 | [-] | [-] |  |

Находим разности по строкам.  
Для строки N=1 первый минимальный элемент min11 = 6, второй минимальный элемент min21 = 7. Их разность равна d = min21 - min11 = 1.  
Для строки N=2 первый минимальный элемент min12 = 5, второй минимальный элемент min22 = 7. Их разность равна d = min22 - min12 = 2.  
Находим разности по столбцам.  
Для столбца N=2 первый минимальный элемент min12 = 6. второй минимальный элемент min22 7. Их разность d = min22 - min12 = 1.  
Для столбца N=3 первый минимальный элемент min13 = 5. второй минимальный элемент min23 7. Их разность d = min23 - min13 = 2.  
Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует строке (2). В этой строке минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки (2) и столбца (3).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | Разности по строкам |
| A1 | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 | 1 |
| A2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 100 | 2 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | [-] | - |
| Потребности | [-] | 200 | 40 | [-] | [-] |  |  |
| Разности по столбцам | - | 1 | 2 | - | - |  |  |

Искомый элемент равен c23=5. Для этого элемента запасы равны 100, потребности 40. Поскольку минимальным является 40, то вычитаем его.  
x23 = min(100,40) = 40.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | x | 3 | x | 140 |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 100 - 40 = 60 |
| x | x | 10 | x | x | [-] |
| [-] | 200 | 40 - 40 = 0 | [-] | [-] |  |

Находим разности по строкам.  
Для строки N=1 первый минимальный элемент min11 = 6, второй минимальный элемент min21 = 6. Их разность равна d = min21 - min11 = 0.  
Для строки N=2 первый минимальный элемент min12 = 7, второй минимальный элемент min22 = 7. Их разность равна d = min22 - min12 = 0.  
Находим разности по столбцам.  
Для столбца N=2 первый минимальный элемент min12 = 6. второй минимальный элемент min22 7. Их разность d = min22 - min12 = 1.  
Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу (2). В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки (1) и столбца (2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | Разности по строкам |
| A1 | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | 140 | 0 |
| A2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 60 | 0 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | [-] | - |
| Потребности | [-] | 200 | [-] | [-] | [-] |  |  |
| Разности по столбцам | - | 1 | - | - | - |  |  |

Искомый элемент равен c12=6. Для этого элемента запасы равны 140, потребности 200. Поскольку минимальным является 140, то вычитаем его.  
x12 = min(140,200) = 140.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | x | 3 | x | 140 - 140 = 0 |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 60 |
| x | x | 10 | x | x | [-] |
| [-] | 200 - 140 = 60 | [-] | [-] | [-] |  |

Находим разности по строкам.  
Для строки N=2 первый минимальный элемент min12 = 7, второй минимальный элемент min22 = 7. Их разность равна d = min22 - min12 = 0.  
Находим разности по столбцам.  
Для столбца N=2 первый минимальный элемент min12 = 7. второй минимальный элемент min22 7. Их разность d = min22 - min12 = 0.  
Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует строке (2). В этой строке минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки (2) и столбца (2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | Разности по строкам |
| A1 | 12 | 6 | 7 | 3 | 8 | [-] | - |
| A2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 60 | 0 |
| A3 | 7 | 14 | 10 | 11 | 9 | [-] | - |
| Потребности | [-] | 60 | [-] | [-] | [-] |  |  |
| Разности по столбцам | - | 0 | - | - | - |  |  |

Искомый элемент равен c22=7. Для этого элемента запасы равны 60, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.  
x22 = min(60,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6 | x | 3 | x | [-] |
| 3 | 7 | 5 | x | 6 | 60 - 60 = 0 |
| x | x | 10 | x | x | [-] |
| [-] | 60 - 60 = 0 | [-] | [-] | [-] |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| A2 | 3[120] | 7[60] | 5[40] | 9 | 6[80] | 300 |
| A3 | 7 | 14 | 10[270] | 11 | 9 | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Сведем все вычисления в одну таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы | d1 | d2 | d3 | d4 | d5 |
| A1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| A2 | 3[120] | 7[60] | 5[40] | 9 | 6[80] | 300 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| A3 | 7 | 14 | 10[270] | 11 | 9 | 270 | 2 | 2 | 1 | 4 | - |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |  |  |  |  |  |
| d1 | 4 | 1 | 2 | 6 | 2 |  |  |  |  |  |  |
| d2 | 4 | 1 | 2 | - | 2 |  |  |  |  |  |  |
| d3 | - | 1 | 2 | - | 2 |  |  |  |  |  |  |
| d4 | - | 1 | 2 | - | - |  |  |  |  |  |  |
| d5 | - | 1 | 2 | - | - |  |  |  |  |  |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является невырожденным.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 6\*140 + 3\*190 + 3\*120 + 7\*60 + 5\*40 + 6\*80 + 10\*270 = 5570  
Этап II. Улучшение опорного плана.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u2 + v2 = 7; 6 + u2 = 7; u2 = 1  
u2 + v1 = 3; 1 + v1 = 3; v1 = 2  
u2 + v3 = 5; 1 + v3 = 5; v3 = 4  
u3 + v3 = 10; 4 + u3 = 10; u3 = 6  
u2 + v5 = 6; 1 + v5 = 6; v5 = 5  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=2 | v2=6 | v3=4 | v4=3 | v5=5 |
| u1=0 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 |
| u2=1 | 3[120] | 7[60] | 5[40] | 9 | 6[80] |
| u3=6 | 7 | 14 | 10[270] | 11 | 9 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(3;1): 6 + 2 > 7; ∆31 = 6 + 2 - 7 = 1 > 0  
(3;5): 6 + 5 > 9; ∆35 = 6 + 5 - 9 = 2 > 0  
max(1,2) = 2  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;5): 9  
Для этого в перспективную клетку (3;5) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| 2 | 3[120] | 7[60] | 5[40][+] | 9 | 6[80][-] | 300 |
| 3 | 7 | 14 | 10[270][-] | 11 | 9[+] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Цикл приведен в таблице (3,5 → 3,3 → 2,3 → 2,5).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 5) = 80. Прибавляем 80 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 80 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u2 + v2 = 7; 6 + u2 = 7; u2 = 1  
u2 + v1 = 3; 1 + v1 = 3; v1 = 2  
u2 + v3 = 5; 1 + v3 = 5; v3 = 4  
u3 + v3 = 10; 4 + u3 = 10; u3 = 6  
u3 + v5 = 9; 6 + v5 = 9; v5 = 3  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=2 | v2=6 | v3=4 | v4=3 | v5=3 |
| u1=0 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 |
| u2=1 | 3[120] | 7[60] | 5[120] | 9 | 6 |
| u3=6 | 7 | 14 | 10[190] | 11 | 9[80] |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(3;1): 6 + 2 > 7; ∆31 = 6 + 2 - 7 = 1 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 7  
Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 | 330 |
| 2 | 3[120][-] | 7[60] | 5[120][+] | 9 | 6 | 300 |
| 3 | 7[+] | 14 | 10[190][-] | 11 | 9[80] | 270 |
| Потребности | 120 | 200 | 310 | 190 | 80 |  |

Цикл приведен в таблице (3,1 → 3,3 → 2,3 → 2,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 1) = 120. Прибавляем 120 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 120 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 6; 0 + v2 = 6; v2 = 6  
u2 + v2 = 7; 6 + u2 = 7; u2 = 1  
u2 + v3 = 5; 1 + v3 = 5; v3 = 4  
u3 + v3 = 10; 4 + u3 = 10; u3 = 6  
u3 + v1 = 7; 6 + v1 = 7; v1 = 1  
u3 + v5 = 9; 6 + v5 = 9; v5 = 3  
u1 + v4 = 3; 0 + v4 = 3; v4 = 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=1 | v2=6 | v3=4 | v4=3 | v5=3 |
| u1=0 | 12 | 6[140] | 7 | 3[190] | 8 |
| u2=1 | 3 | 7[60] | 5[240] | 9 | 6 |
| u3=6 | 7[120] | 14 | 10[70] | 11 | 9[80] |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 6\*140 + 3\*190 + 7\*60 + 5\*240 + 7\*120 + 10\*70 + 9\*80 = 5290

**Анализ оптимального плана:**

Из 1-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (140 ед.), в 4-й магазин (190 ед.)  
Из 2-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (60 ед.), в 3-й магазин (240 ед.)  
Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (120 ед.), в 3-й магазин (70 ед.), в 5-й магазин (80 ед.)