

# La curva normal y la curva normal estándar

Oscar Centeno Mora

# Índice

1

Introducción

4

La curva normal  
estándar

2

Variable aleatoria

5

Cálculo de  
probabilidades en la  
normal estándar

3

La curva normal

6

Ejemplos de cálculos  
de probabilidad

# Índice

7

La estandarización

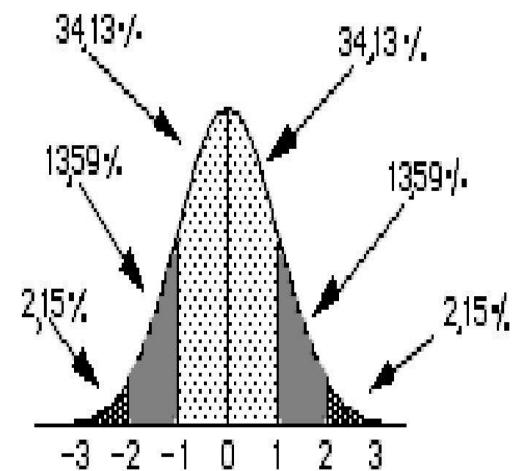
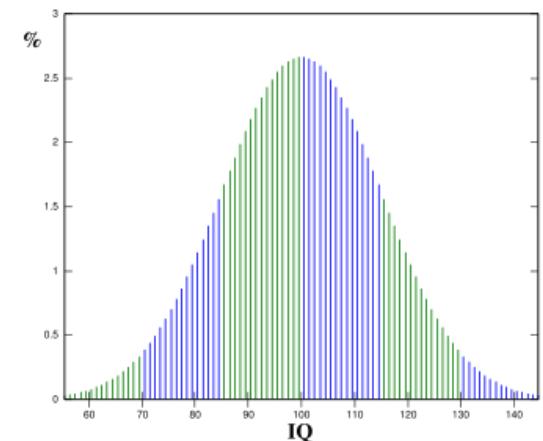
# Índice

1

Introducción

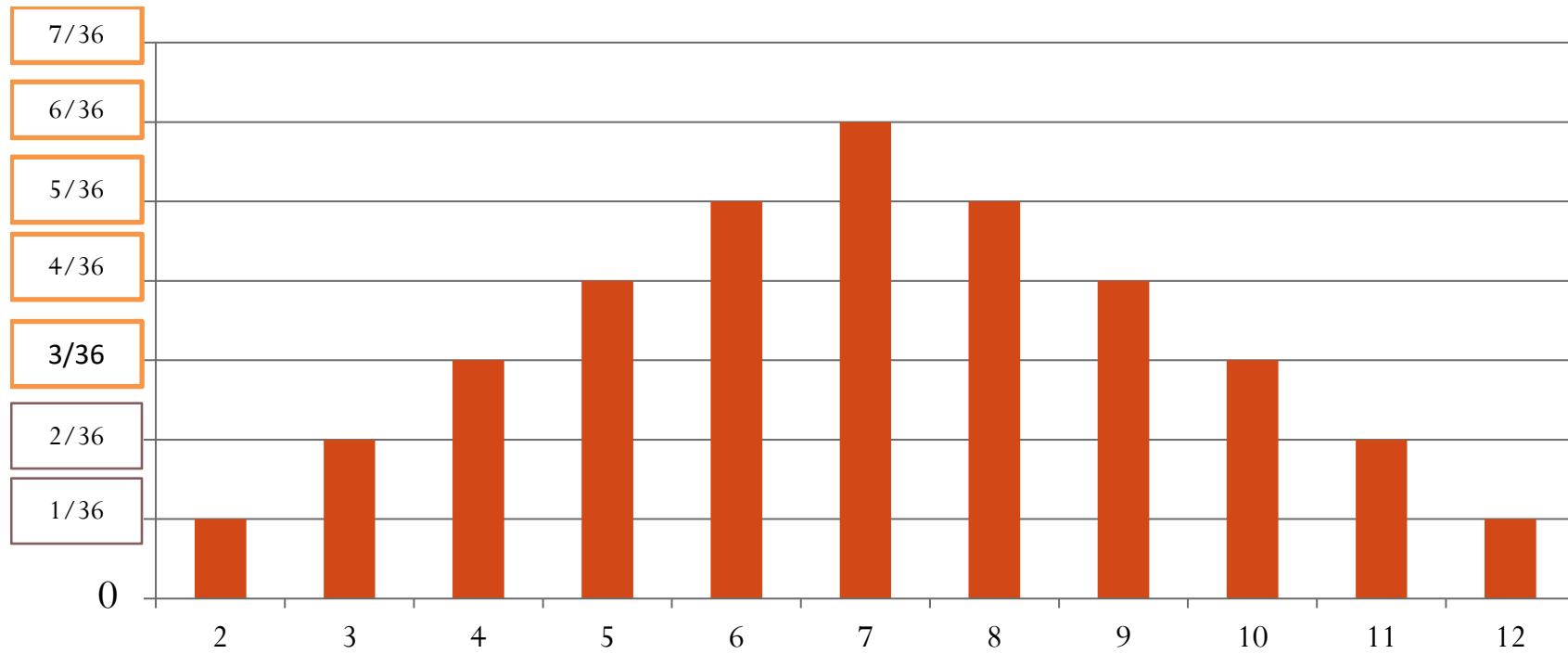
# Introducción

- Si se graficara la distribución de la mayoría de los hechos que suceden en la vida, estos suelen tener una distribución normal.
- No importa si se trata de una variable discreta (como los resultados de un dado), o de una variable continua (edades, pesos, etc.): la distribución de los resultados siempre se distribuirá de forma normal, siempre y cuando se tengan diversas “observaciones”.
- Dado que la “distribución” de casi todos los hechos tiende a agruparse en el centro, y pierde densidad en las colas, de ahí el nombre de distribución **normal**.



# Introducción

- Ejemplificando lo anterior: si jugáramos con dados una cantidad considerablemente grande de veces (superior 40-30), la distribución de datos sería aproximadamente la siguiente:



# Introducción

- Dado el siguiente cuadro de probabilidad del experimento de jugar con dos dados:

x	f(x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
Total	1

- Como se observa, el obtener el resultado

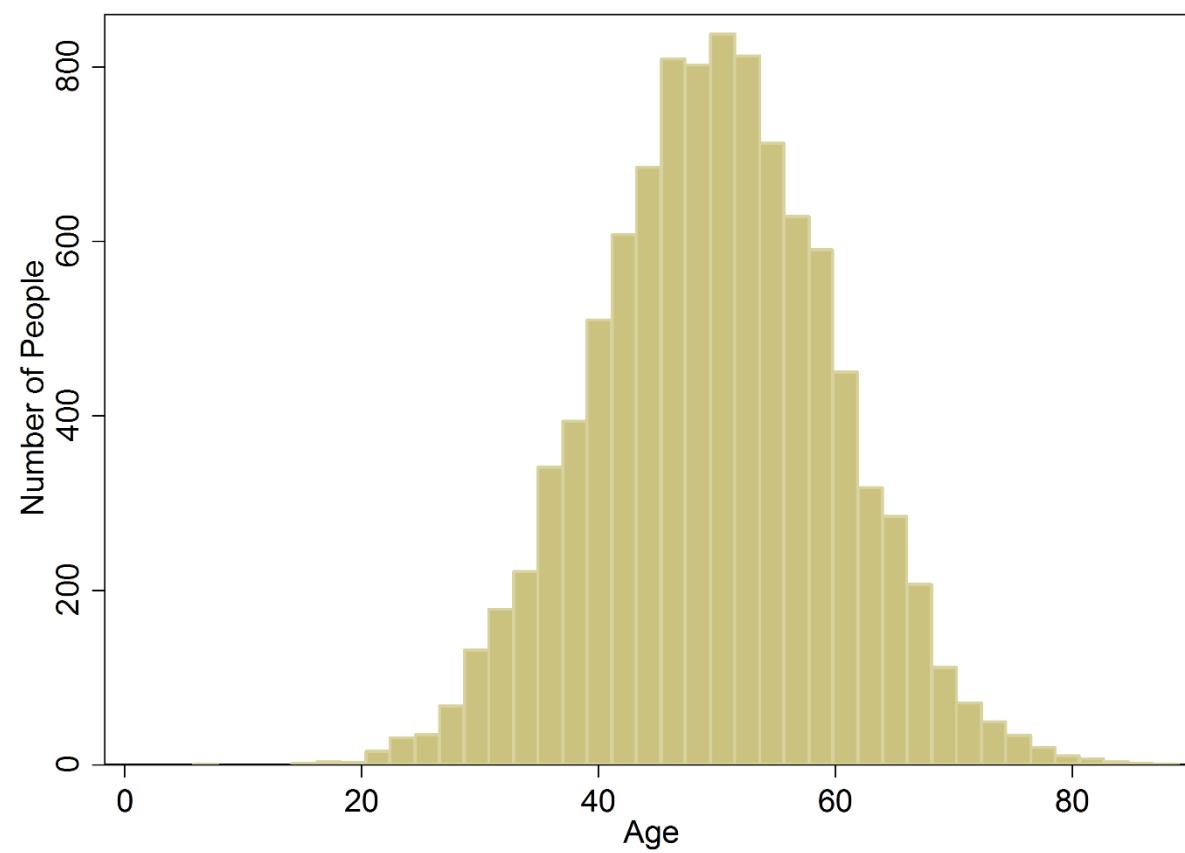
“7”, es el evento más probable.

- Luego el obtener “6” y “8” es el segundo más y así consecutivamente.

- Si se jugara un gran numero de veces, la distribución de los resultados sería tan normal como se mostró en la filmina anterior.

# Introducción

- Para el caso continuo: supongamos la distribución de edades de la población de Costa Rica.



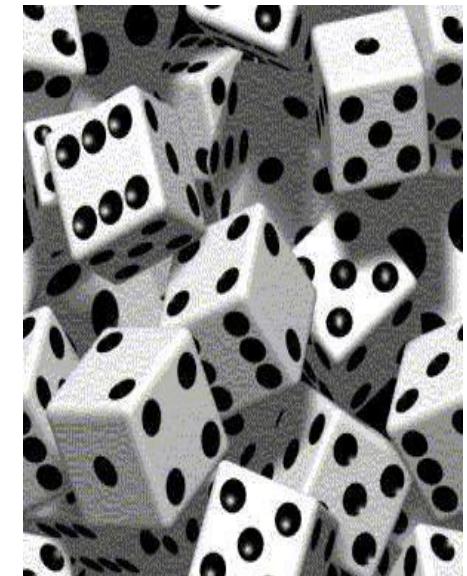
# Introducción

- Vemos que los datos, sin importar la localización u otros factores, suelen tener la forma normal o de campana (la campana de Gauss...).
- Aunque esta vez la forma de la distribución no sea tan normal como para el caso de los dados, el ascenso y el descenso y sobre todo su forma de campana permiten confirmar la presencia de una distribución normal.
- La comprobación de la normalidad se puede llevar a cabo mediante pruebas matemáticas o pruebas gráficas..

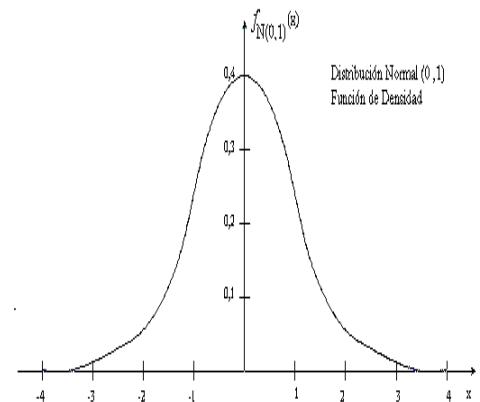


# Introducción

- Esto es, sin duda alguna, el hecho más importante que ha ocurrido en la estadística: permite relacionar la estadística probabilística con la inferencial.
- El poner unir las probabilidades con ciertos criterios y métodos inferenciales hizo el gran avance en la estadística en el siglo XIX.
- Sin embargo, para hacer esto se requería que los datos provinieran de una distribución normal. Por eso es que en este capítulo analizaron la curva normal, y se introducirá brevemente ciertos criterios de inferencia estadística.



Fundamentos de la Probabilidad y Estadística



# Índice

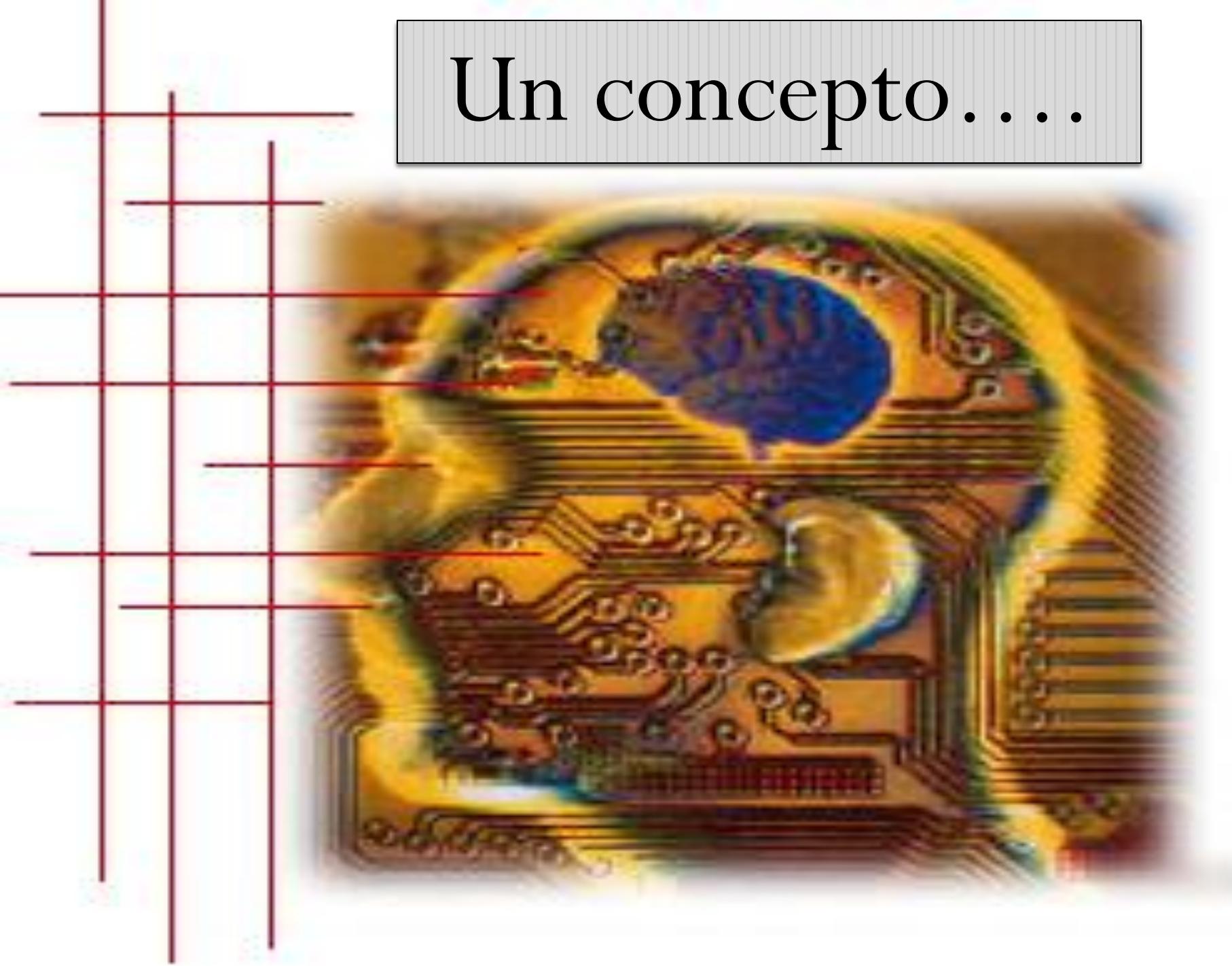
1

Introducción

2

Variable aleatoria

Un concepto . . .



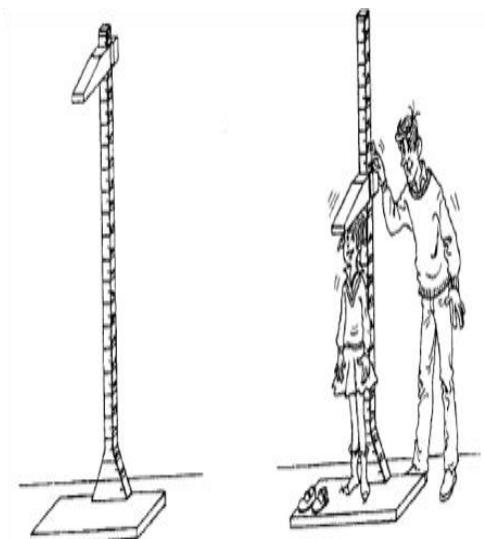
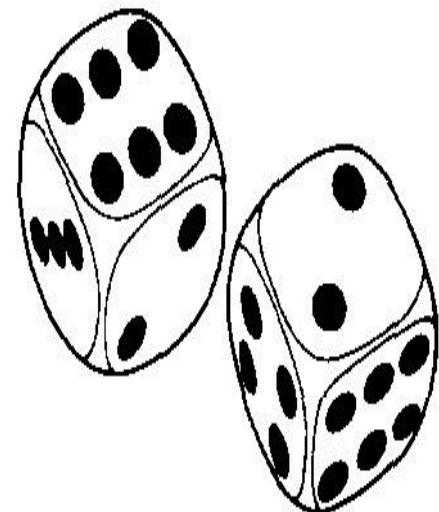
# Variable Aleatoria

- “Cuando los valores que puede asumir una variable depende del azar, es decir, no pueden predecirse con exactitud, se dice que es una variable aleatoria o al azar”  
Gómez, M. 2002.
- Estas pueden ser discretas como continuas.

1. El tirar dos dados:

-No se puede saber con anterioridad el resultado exacto del resultado (si va a salir un 12, 6, 4 o cualquier de los posibles resultados).

-Al entrevistar a alguien y preguntar la edad, peso, frecuencia con que va al médico, no es algo que normalmente se sepa, y la información suele ser aleatoria.



# Índice

1

Introducción

2

Variable aleatoria

3

La curva normal

# La curva normal

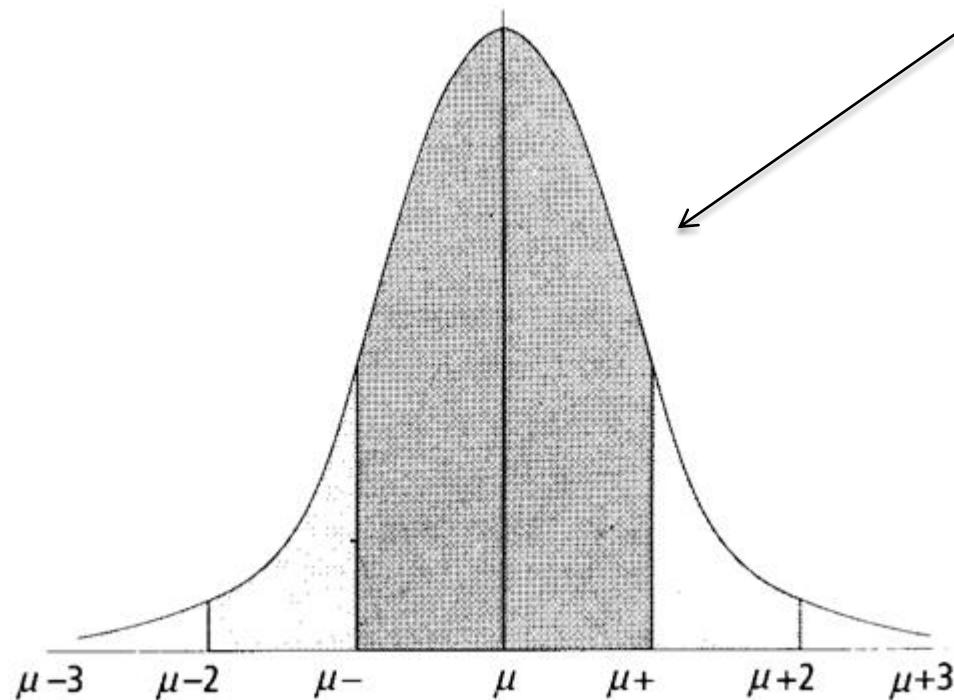
- Es uno de los primeros modelos utilizados y alrededor del cual se ha desarrollado casi toda la teoría y la práctica de la estadística.
- La *curva normal* también recibe el nombre de *normal de error*, ya que los errores en las mediciones y en las observaciones corrientemente se distribuyen siguiendo un patrón en común (la forma de campana antes vista).
- La expresión algebraica de la curva normal es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$x$  = variable aleatorio en consideración  
 $\sigma$  = desviación estándar de la variable  $x$   
 $\mu$  = media aritmética de la variable  $x$

# La curva normal

- Una representación de la curva normal, con sus parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  es la siguiente:



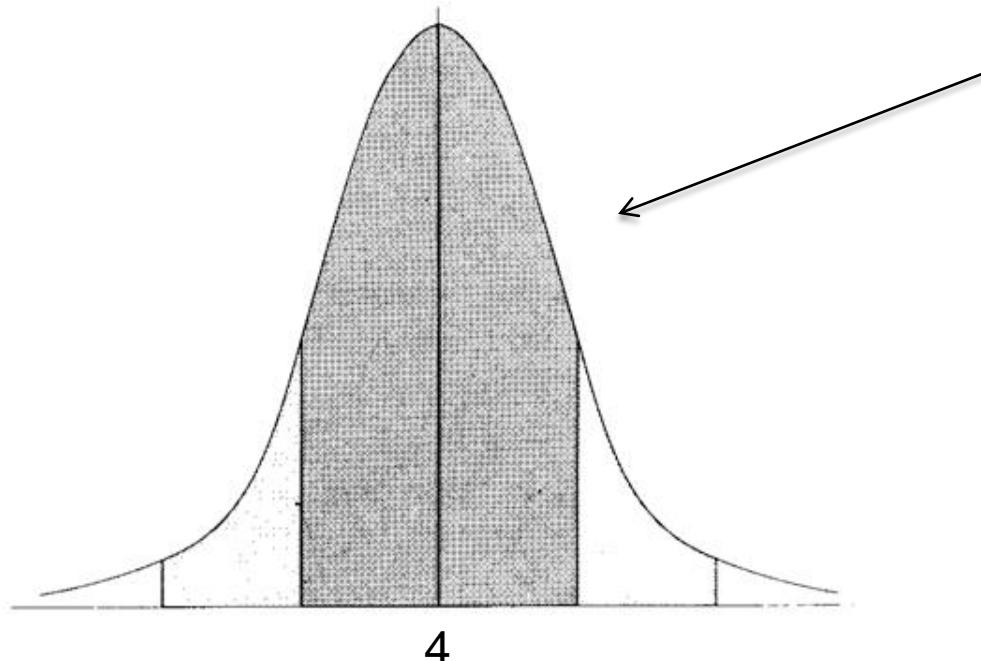
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

# La curva normal

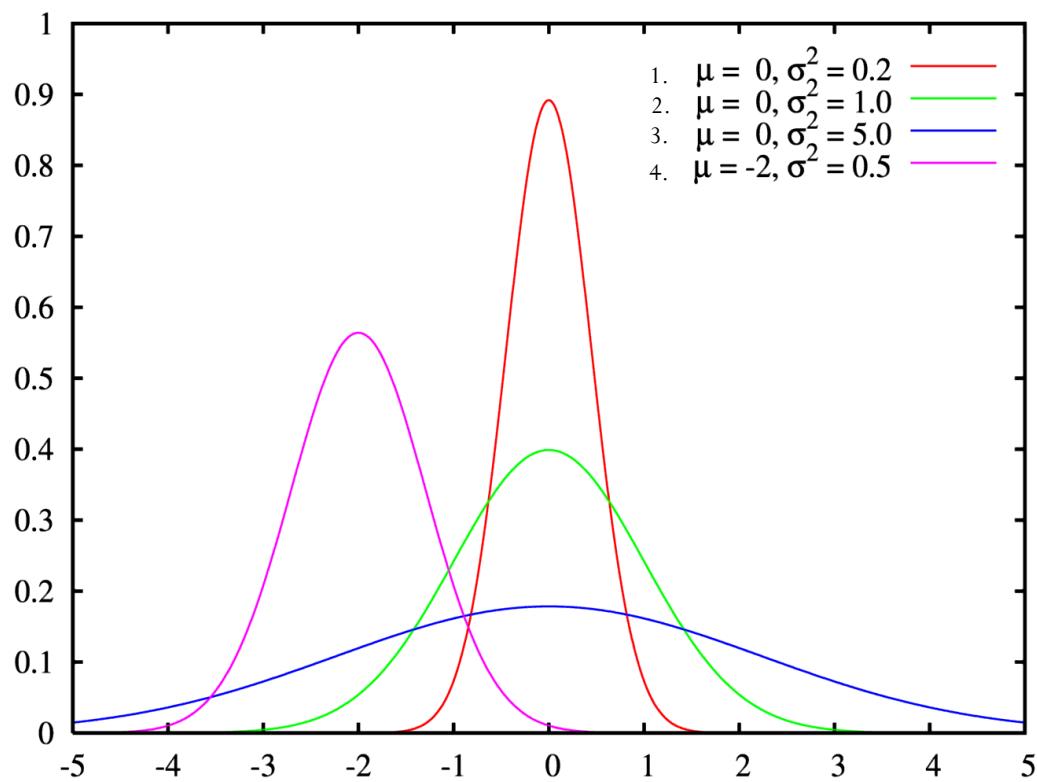
- Conociendo los valores de los parámetros ( $\mu$  y  $\sigma$ ), la curva normal estándar queda completamente definida. Por ejemplo, si la desviación estándar es 2 y el promedio 4, la expresión algebraica y su representación serían:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{2}\right)^2}$$



# La curva normal

- Como la curva normal está en función de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ , su posición central y su forma van a estar en función de estos parámetros.



1. Distribución normal con promedio centrado y muy poca variabilidad
2. Distribución normal con promedio centrado con cierta variabilidad.
3. Distribución normal con promedio centrado con demasiada variabilidad.
4. Distribución normal con promedio no centrado con poca variabilidad.

# Características de la curva normal

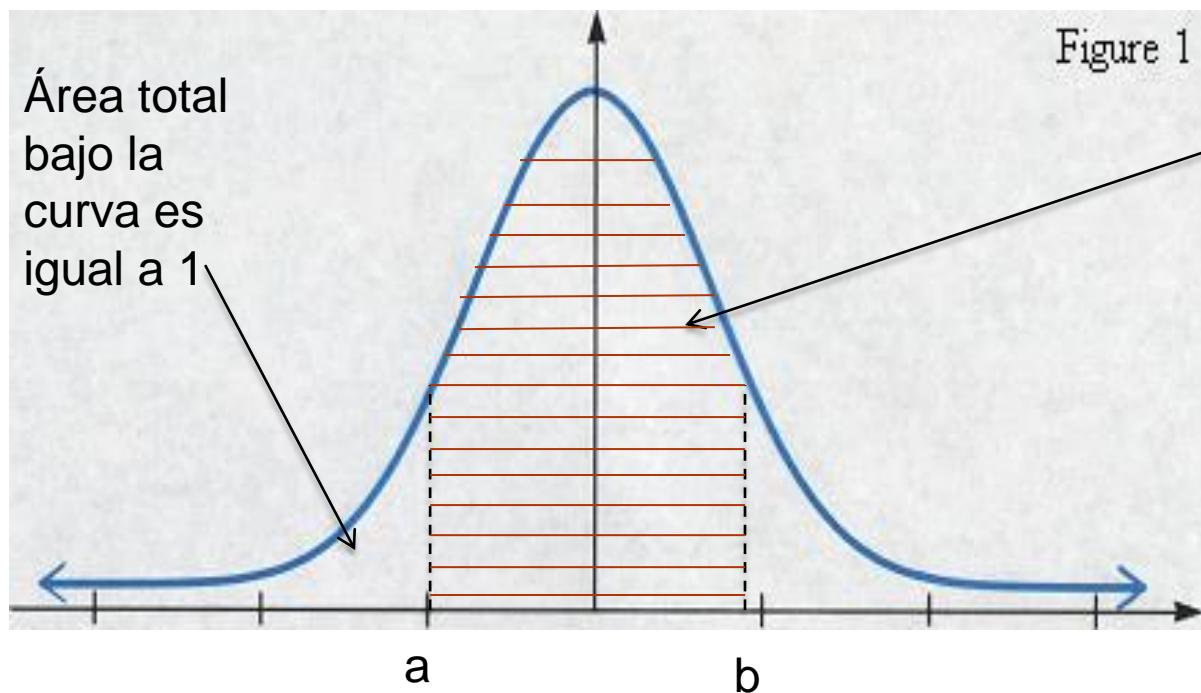
- La popularidad de la curva normal no sólo reside en que la mayoría de los eventos tienen la distribución de campana antes vista, sino también por sus 5 características:

1. *El área total bajo la curva es igual a 1.*
2. *La distribución es simétrica respecto al promedio.*
3. *El promedio, moda y media valen lo mismo.*
4. *Queda perfectamente determinada cuando se conoce  $\mu$  y  $\sigma$ .*
5. *La curva está definida desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ .*



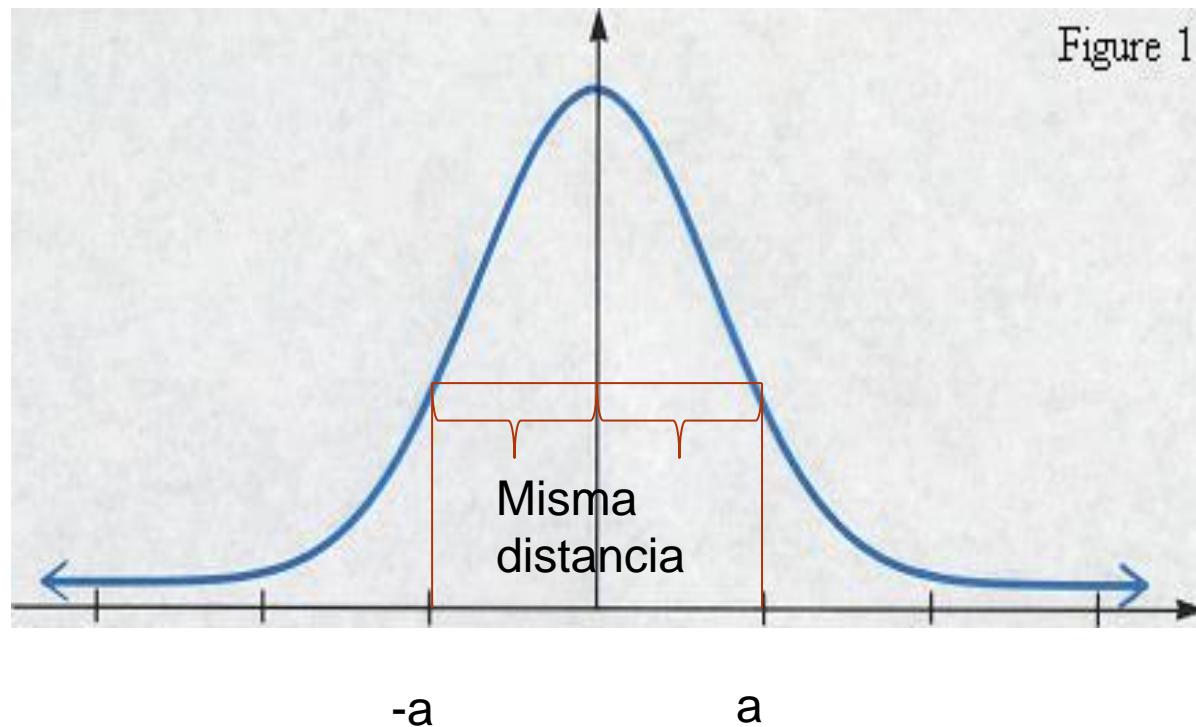
# Características de la curva normal

1. “*El área total bajo la curva y la absisa es igual a 1*”. La definición anterior produce que si se calculan intervalos de el área, entonces estaríamos hablando de valores entre  $0 \leq \text{Valor} \leq 1$  (probabilidad)



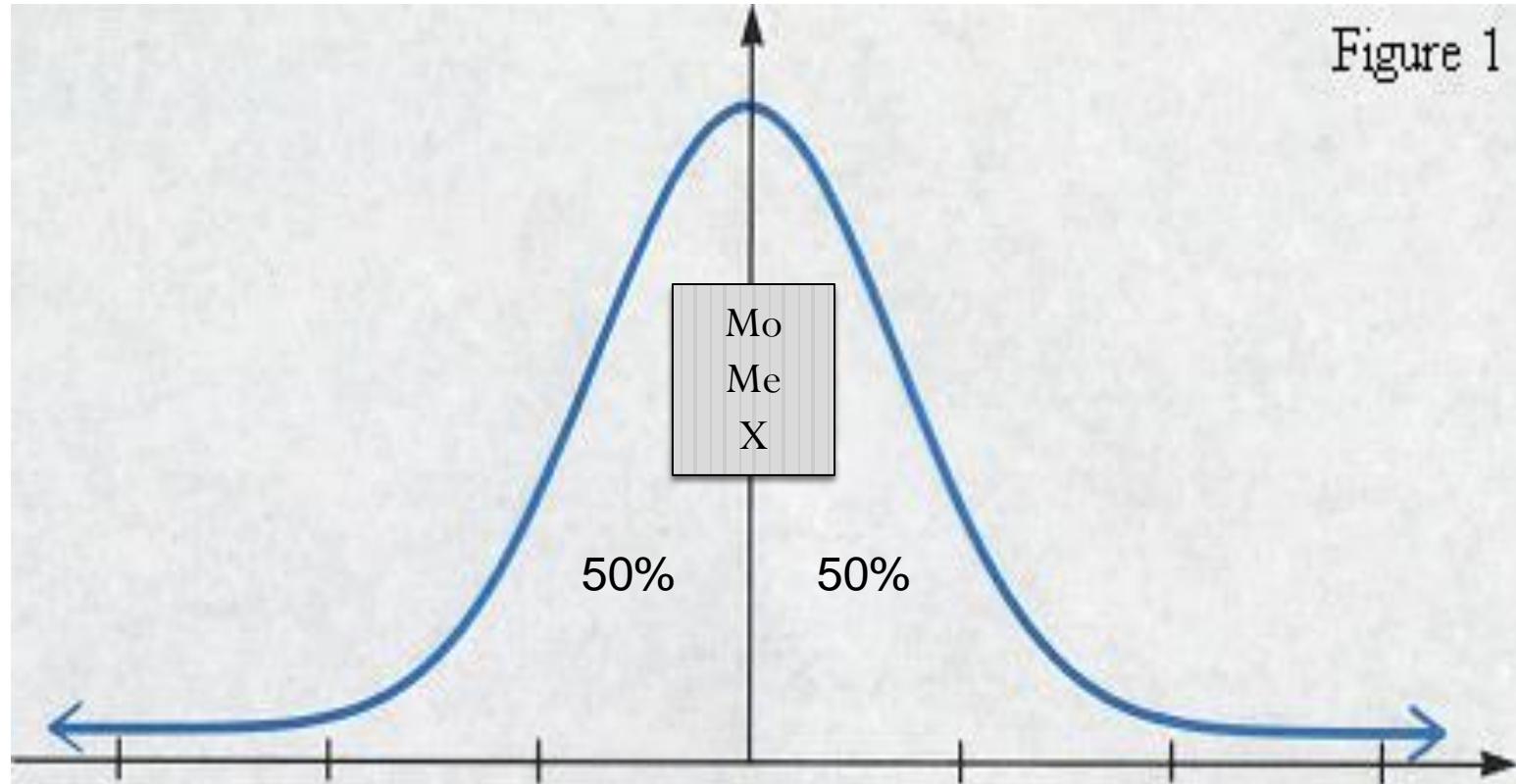
# Características de la curva normal

2. *La distribución es simétrica respecto a su promedio.* Esto hace que entonces el cálculo de cierta probabilidad también lo sea.



# Características de la curva normal

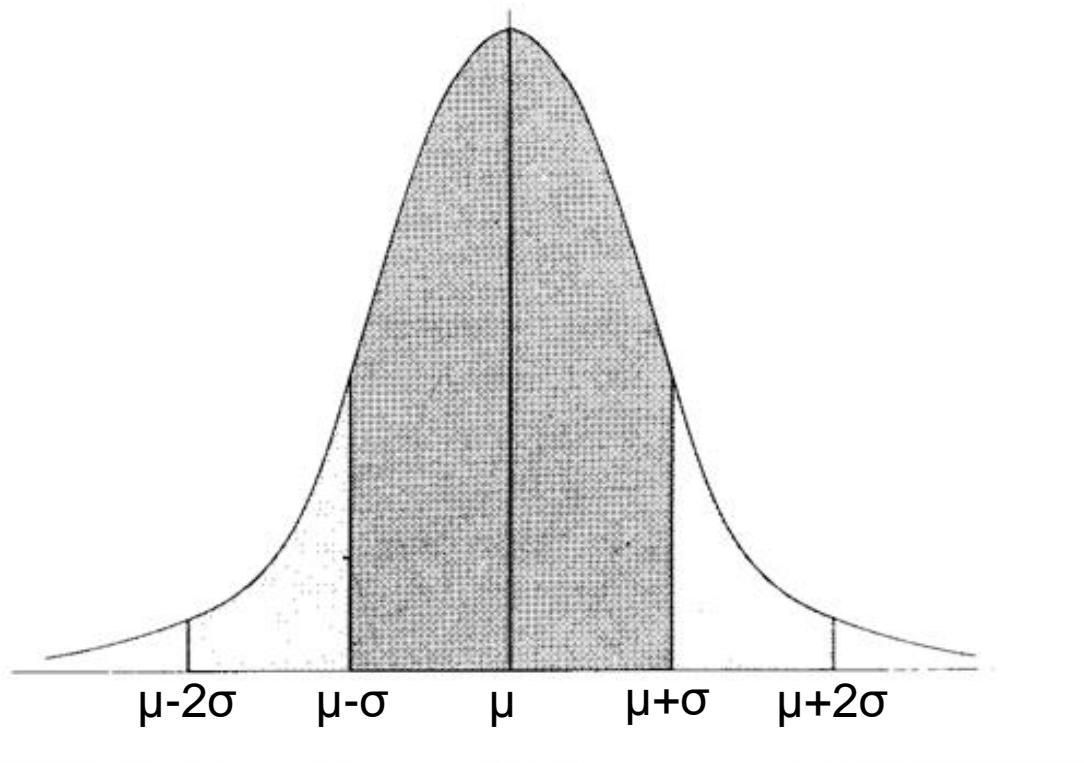
3. *El promedio, moda y media valen lo mismo.*



# Características de la curva normal

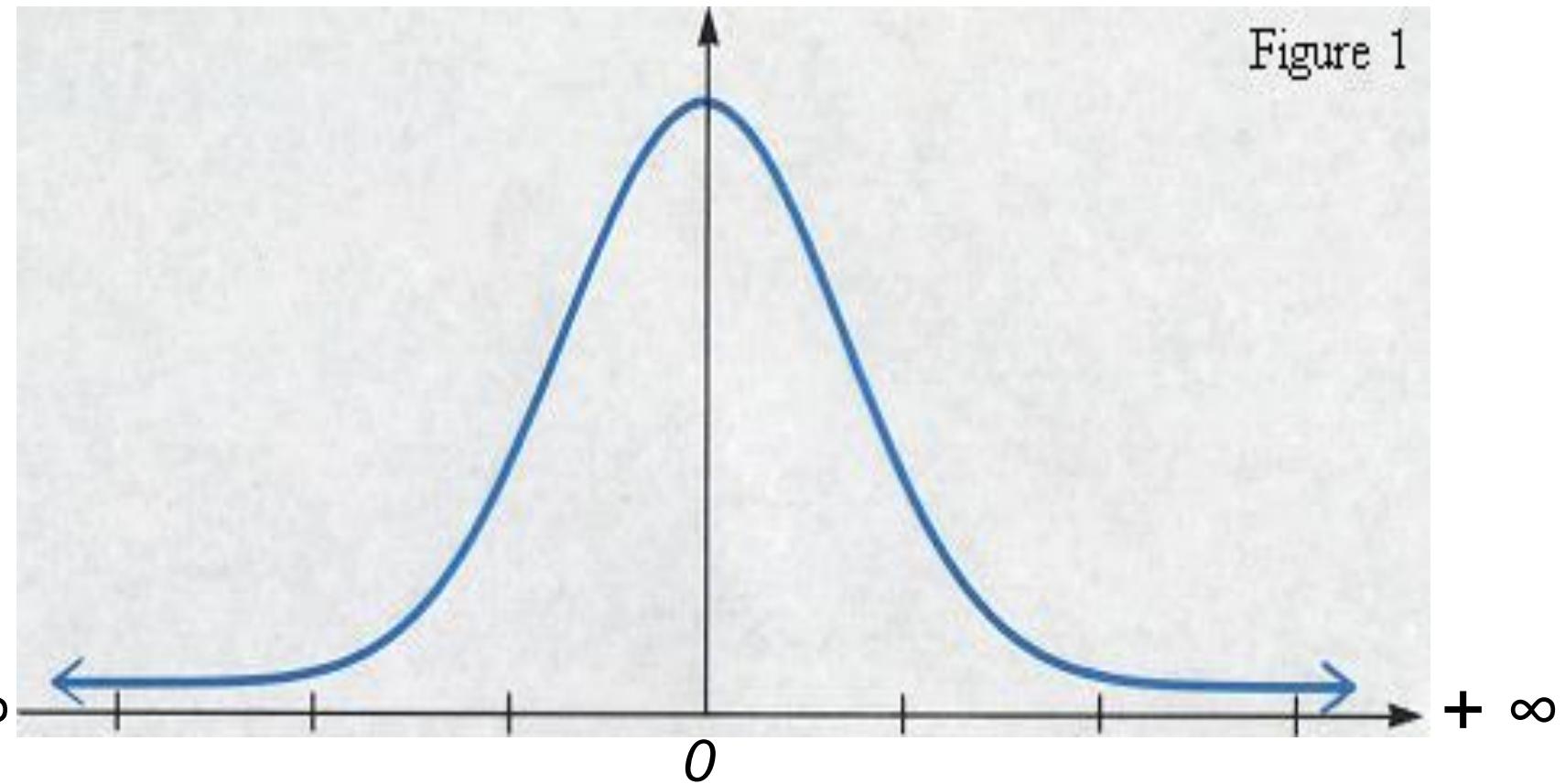
4. La curva queda perfectamente determinada cuando se conoce  $\mu$  y  $\sigma$ .

Esto es que conocidos los dos parámetros anteriores, se define la medida de tendencia central y la de variabilidad.

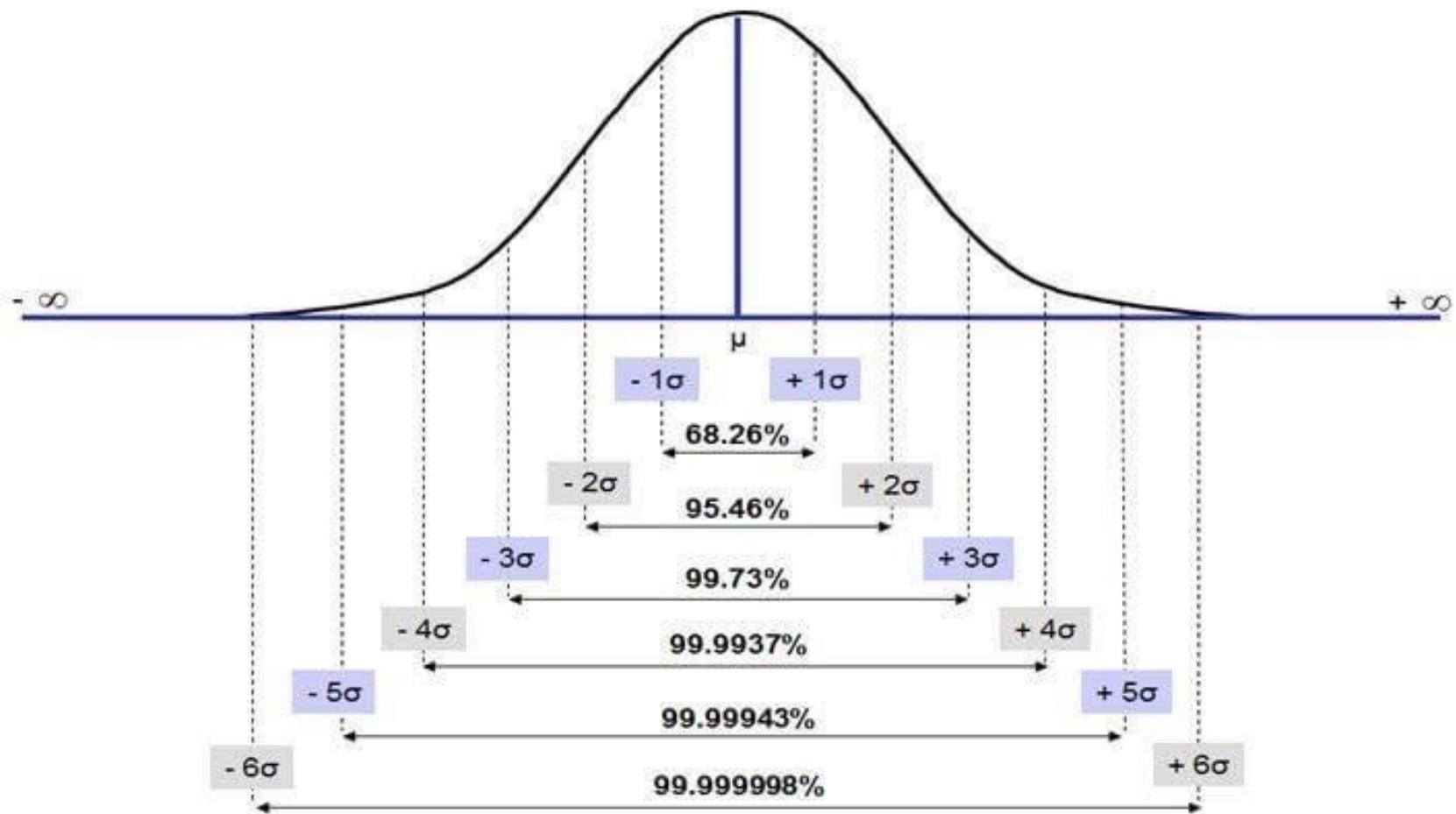


# Características de la curva normal

5. La curva está definida desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ .



# Características de la curva normal



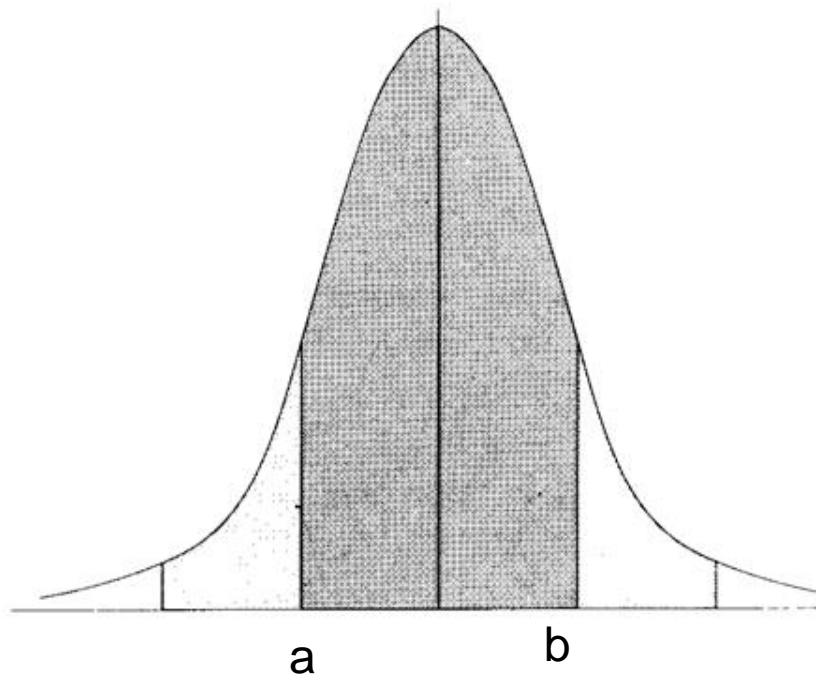
# Importancia de la curva normal

Hay varias razones que han contribuido a que la curva normal sea vital en la teoría y en la práctica de la estadística:

- a. La curva y su integral reúnen diversas ventajas matemáticas-analíticas.
- b. Son muchos los fenómenos que se comportan como una curva normal
- c. La técnica se pueden aplicar ha técnicas aún más avanzadas.
- d. Variables que tienen distribuciones asimétrica pueden tratarse con una transformación y gozar de las ventajas de la normal

# La curva normal y las probabilidades

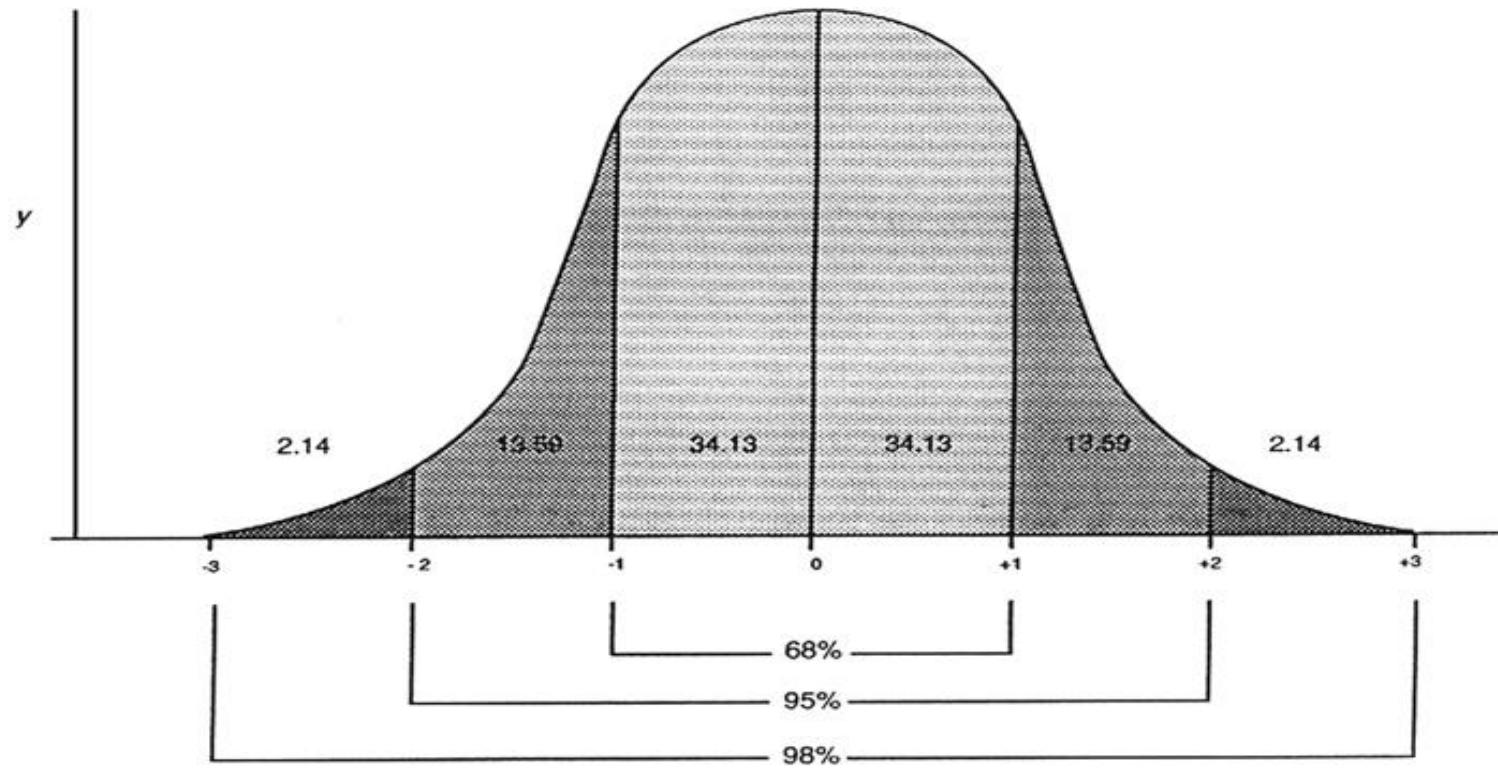
- De acuerdo con la propiedad 1, se pueden calcular probabilidades con la curva normal. Lo que interesa es poder calcular la probabilidad acumulada de un punto a otro.



$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

# La curva normal y las probabilidades

- Antes de explicar la forma de calcular las probabilidades, aunque se puede calcular la probabilidad directamente de la ecuación de la normal estándar, para facilitar los cálculos y los procedimientos procederemos a estandarizar los resultados y utilizar entonces la curva normal estándar, de parámetros  $\mu=0$  y  $\sigma=1$ .



# Índice

1

Introducción

4

La curva normal  
estándar

2

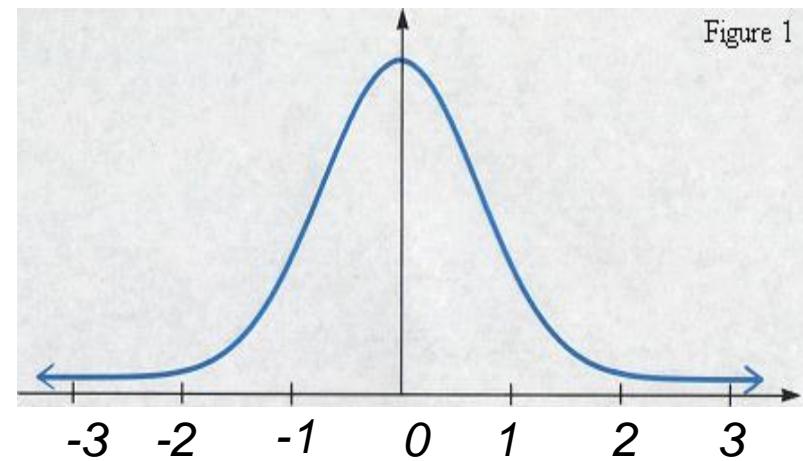
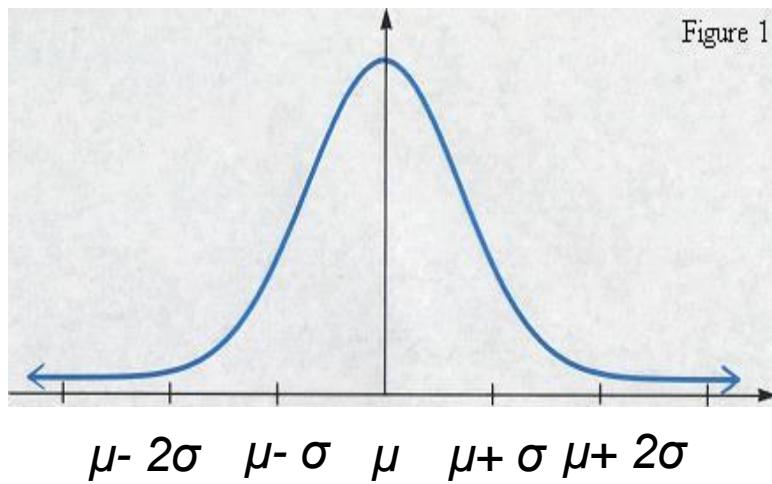
Variable aleatoria

3

La curva normal

# La curva normal vs normal estándar

- Mientras que la curva normal está en función del parámetro  $\mu$  y  $\sigma$ , la normal estándar está en función de  $\mu=0$  y  $\sigma = 1$ . En el fondo los resultados en probabilidad son los mismos, pero la opción “estandarizada” es más sencilla de utilizar.



# La curva normal vs normal estándar

- Una curva normal queda definida si se conoce su media aritmética y su desviación estándar, pero como los valores posibles para  $\mu$  y  $\sigma$  son prácticamente infinitos, es fácil concluir que el número de curvas normales es también infinito.
- Entonces, como el número de curvas normales es infinito, se ha calculado una tabla de probabilidades para una curva normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ , y cualquier problema referente a una variable normal se traslada o refiere a la tabla mencionada mediante simples operaciones algebraicas, conocida como *curva normal estándar*.
- Se quiere alguna probabilidad para una variable normal que tenga el promedio diferente de cero, la desviación estándar diferente de 1, o ambos parámetros diferentes. Por lo tanto se realiza transformación algebraica sencilla denominada estandarización, mediante el traslado a una  $N \sim (0, 1)$ .

# Índice

1

Introducción

4

La curva normal  
estándar

2

Variable aleatoria

5

Cálculo de  
probabilidades en la  
normal estándar

3

La curva normal

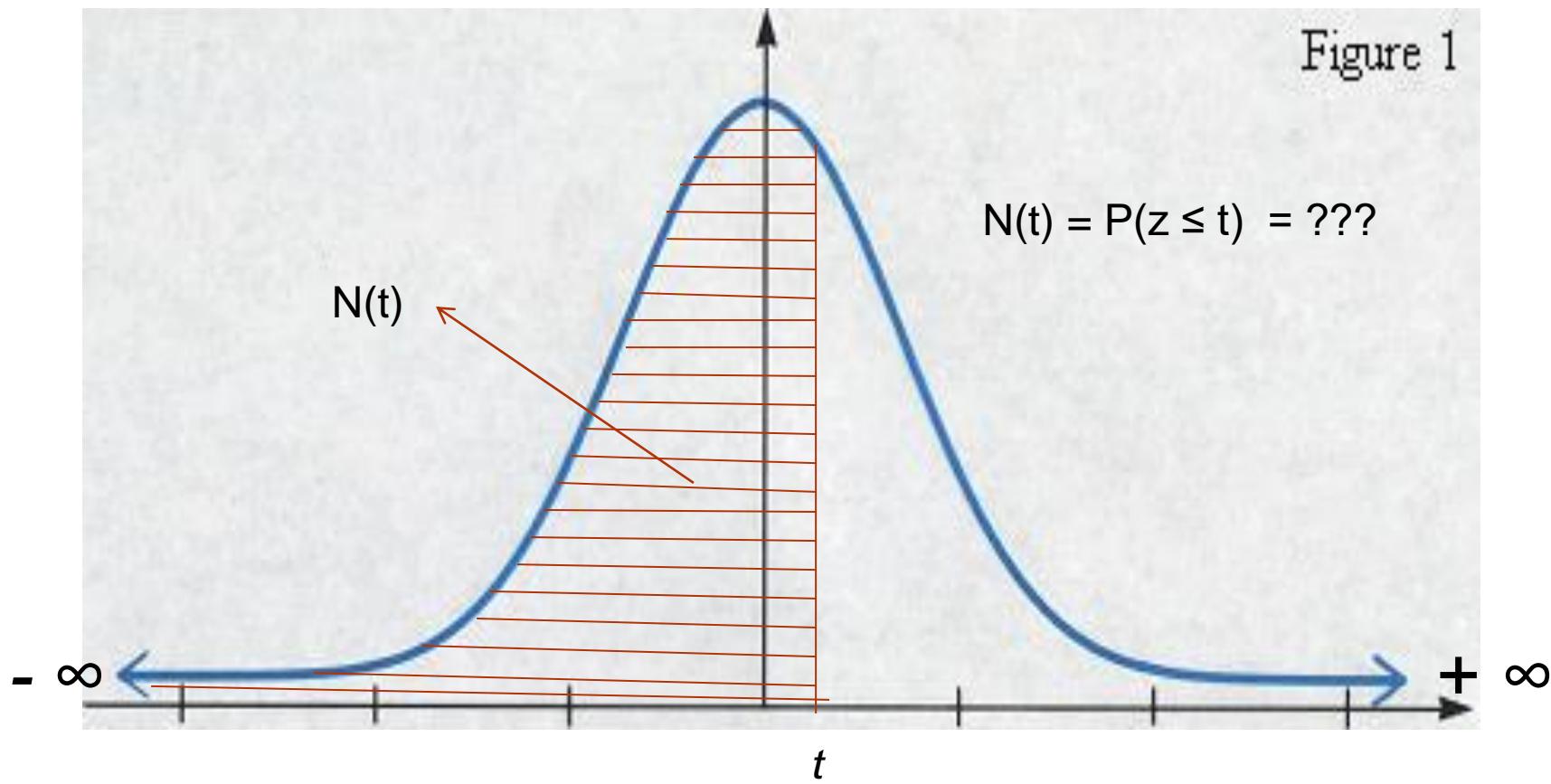
# Probabilidades en distribución N (0,1)

- Para calcular probabilidades en una distribución N(0,1) supongamos lo siguiente.
  1. Sea “z” una variable normal estándar aleatoria.
  2. Sea  $N(t)$  el área acumulada de la curva hasta el punto “t” ( $t$  es un valor particular de  $z$ ).
- Entonces, para expresar esto en término de probabilidades, unimos las dos suposiciones de la siguiente forma:

$N(t) = P(z \leq t)$ ; esto en palabras quiere decir que, para una variable aleatoria  $z$ , cuál es la probabilidad de que esta variable tenga valores menores o iguales al valor  $t$

# Probabilidades en distribución N (0,1)

- Para explicar lo anterior, sea el siguiente dibujo. Considere los términos vistos antes (“t”, “N(t)” y “ $N(t) = P(z \leq t)$ ”;



# Probabilidades en distribución N (0,1)

- Ahora bien, explicado los dos conceptos anteriores, la gran pregunta es:

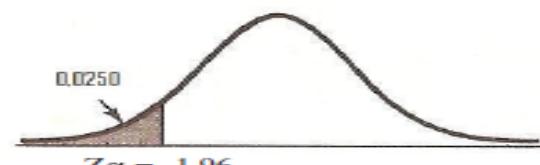
¡¿ Cómo se calculan las probabilidades?!

- Para esto entonces utilizaremos la siguiente tabla de probabilidad es una normal estándar (siguientes dos filminas), y recordemos que:
  - El área total bajo la curva suma 1.
  - La curva es simétrica con respecto al promedio.

**Tabla 5. Probabilidades acumuladas de la Distribución Normal Estándar**

$$F(Z_\alpha) = \int_{-\infty}^{Z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

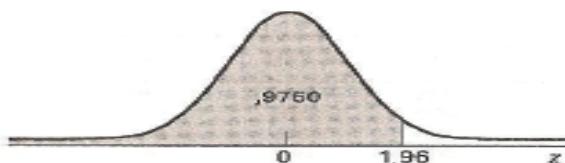
$$P(Z \leq -1,96) = 0,0250$$



Segundo decimal de $z$											$z$
$z$	-0,09	-0,08	-0,07	-0,06	-0,05	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	0,00	$z$
-4,0	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0,000003	-4,0
-3,9	0,00003	0,00003	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00005	0,00005	-3,9
-3,8	0,00005	0,00005	0,00005	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00007	0,00007	0,00007	-3,8
-3,7	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008	0,00009	0,00009	0,00009	0,00010	0,00010	0,00010	-3,7
-3,6	0,00011	0,00012	0,00012	0,00013	0,00013	0,00014	0,00014	0,00015	0,00015	0,00016	-3,6
-3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023	-3,5
-3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00032	0,00034	-3,4
-3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048	-3,3
-3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069	-3,2
-3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00084	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097	-3,1
-3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135	-3,0
-2,9	0,00139	0,00144	0,00149	0,00154	0,00159	0,00164	0,00169	0,00175	0,00181	0,00187	-2,9
-2,8	0,00193	0,00199	0,00205	0,00212	0,00219	0,00226	0,00233	0,00240	0,00248	0,00256	-2,8
-2,7	0,00264	0,00272	0,00280	0,00289	0,00298	0,00307	0,00317	0,00326	0,00336	0,00347	-2,7
-2,6	0,00357	0,00368	0,00379	0,00391	0,00402	0,00415	0,00427	0,00440	0,00453	0,00466	-2,6
-2,5	0,00480	0,00494	0,00508	0,00523	0,00539	0,00554	0,00570	0,00587	0,00604	0,00621	-2,5
-2,4	0,00639	0,00657	0,00676	0,00695	0,00714	0,00734	0,00755	0,00776	0,00798	0,00820	-2,4
-2,3	0,00842	0,00866	0,00889	0,00914	0,00939	0,00964	0,00990	0,01017	0,01044	0,01072	-2,3
-2,2	0,01101	0,01130	0,01160	0,01191	0,01222	0,01255	0,01287	0,01321	0,01355	0,01390	-2,2
-2,1	0,01426	0,01463	0,01500	0,01539	0,01578	0,01618	0,01659	0,01700	0,01743	0,01786	-2,1
-2,0	0,01831	0,01876	0,01923	0,01970	0,02018	0,02068	0,02118	0,02169	0,02222	0,02275	-2,0
-1,9	0,02330	0,02385	0,02442	0,02500	0,02559	0,02619	0,02680	0,02743	0,02807	0,02872	-1,9
-1,8	0,02938	0,03005	0,03074	0,03144	0,03216	0,03288	0,03362	0,03438	0,03515	0,03593	-1,8
-1,7	0,03673	0,03754	0,03836	0,03920	0,04006	0,04093	0,04182	0,04272	0,04363	0,04457	-1,7
1,6	0,04551	0,04648	0,04746	0,04846	0,04947	0,05050	0,05155	0,05262	0,05370	0,05480	-1,6
-1,5	0,05592	0,05705	0,05821	0,05938	0,06057	0,06178	0,06301	0,06426	0,06552	0,06681	-1,5
-1,4	0,06811	0,06944	0,07078	0,07215	0,07353	0,07493	0,07636	0,07780	0,07927	0,08076	-1,4
-1,3	0,08226	0,08379	0,08534	0,08692	0,08851	0,09012	0,09176	0,09342	0,09510	0,09680	-1,3
-1,2	0,09853	0,10027	0,10204	0,10383	0,10565	0,10749	0,10935	0,11123	0,11314	0,11507	-1,2
-1,1	0,11702	0,11900	0,12100	0,12302	0,12507	0,12714	0,12924	0,13136	0,13350	0,13567	-1,1
-1,0	0,13786	0,14007	0,14231	0,14457	0,14686	0,14917	0,15151	0,15386	0,15625	0,15866	-1,0
-0,9	0,16109	0,16354	0,16602	0,16853	0,17106	0,17361	0,17619	0,17879	0,18141	0,18406	-0,9
-0,8	0,18673	0,18943	0,19215	0,19489	0,19766	0,20045	0,20327	0,20611	0,20897	0,21186	-0,8
-0,7	0,21476	0,21770	0,22065	0,22363	0,22663	0,22965	0,23270	0,23576	0,23885	0,24196	-0,7
-0,6	0,24510	0,24825	0,25143	0,25463	0,25785	0,26109	0,26435	0,26763	0,27093	0,27425	-0,6
-0,5	0,27760	0,28096	0,28434	0,28774	0,29116	0,29460	0,29806	0,30153	0,30503	0,30854	-0,5
-0,4	0,31207	0,31561	0,31918	0,32276	0,32636	0,32997	0,33360	0,33724	0,34090	0,34458	-0,4
-0,3	0,34827	0,35197	0,35569	0,35942	0,36317	0,36693	0,37070	0,37448	0,37828	0,38209	-0,3
-0,2	0,38591	0,38974	0,39358	0,39743	0,40129	0,40517	0,40905	0,41294	0,41683	0,42074	-0,2
-0,1	0,42465	0,42858	0,43251	0,43644	0,44038	0,44433	0,44828	0,45224	0,45620	0,46017	-0,1
0,0	0,46414	0,46812	0,47210	0,47608	0,48006	0,48405	0,48803	0,49202	0,49601	0,50000	0,0

# Continuación ... Distribución Normal Estándar

$$P(Z \leq 1,96) = 0,975$$



Segundo decimal de  $z$

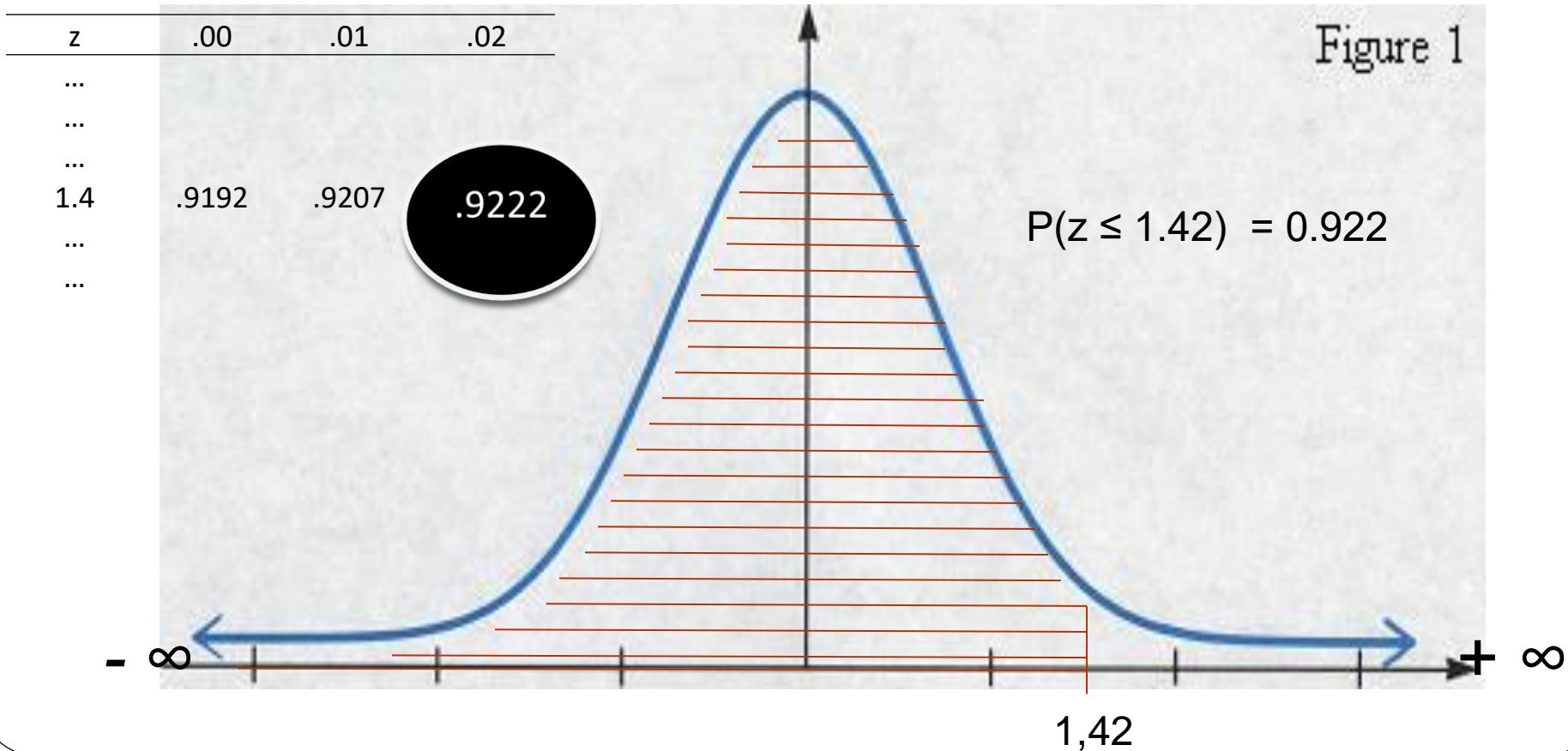
$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	$z$
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586	0,0
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535	0,1
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409	0,2
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173	0,3
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793	0,4
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240	0,5
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490	0,6
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524	0,7
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327	0,8
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891	0,9
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214	1,0
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298	1,1
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147	1,2
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774	1,3
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189	1,4
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408	1,5
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449	1,6
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327	1,7
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062	1,8
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670	1,9
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169	2,0
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574	2,1
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899	2,2
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158	2,3
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361	2,4
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520	2,5
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643	2,6
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736	2,7
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807	2,8
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	4,0

# Probabilidades en distribución N (0,1)

- Esta tabla se conoce como “tablas de dos colas”; esto permite conocer directamente las probabilidades acumuladas, tanto de valores positivos como de valores negativos de la variable aleatoria z.
- En el empleo de la tabla se debe tomar en cuenta que:
  - a. En la primera columna aparecen los valores de z con un decimal;
  - b. En la primera hilera aparece el segundo decimal para dar mayor precisión a la tabla.
  - c. En el cuerpo de la tabla se muestra el área acumulada desde  $-\infty$  hasta un valor positivo dado de z

# Probabilidades en distribución N (0,1)

- Por ejemplo, busquemos la siguiente probabilidad de  $P(z \leq 1.42)$ :

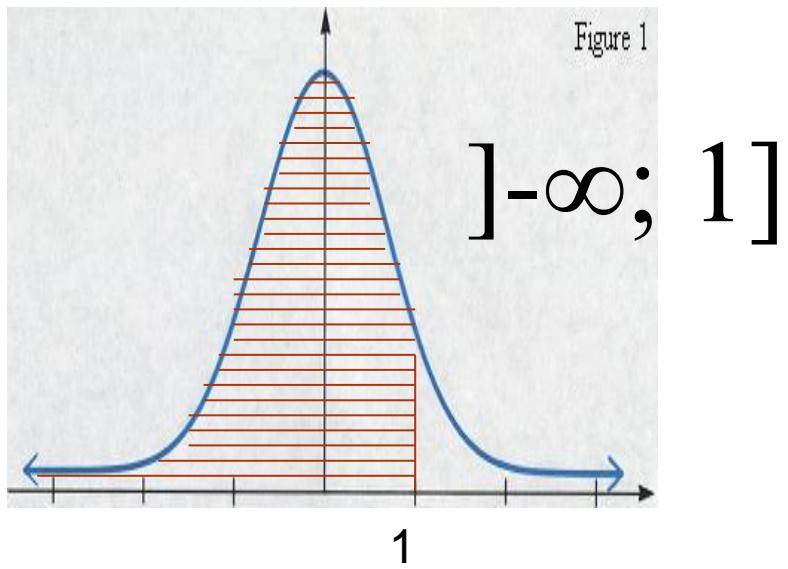


# Probabilidades en distribución N (0,1)

Probabilidad menor (boca a la izquierda).

- Cuando se solicita por ejemplo la siguiente probabilidad:

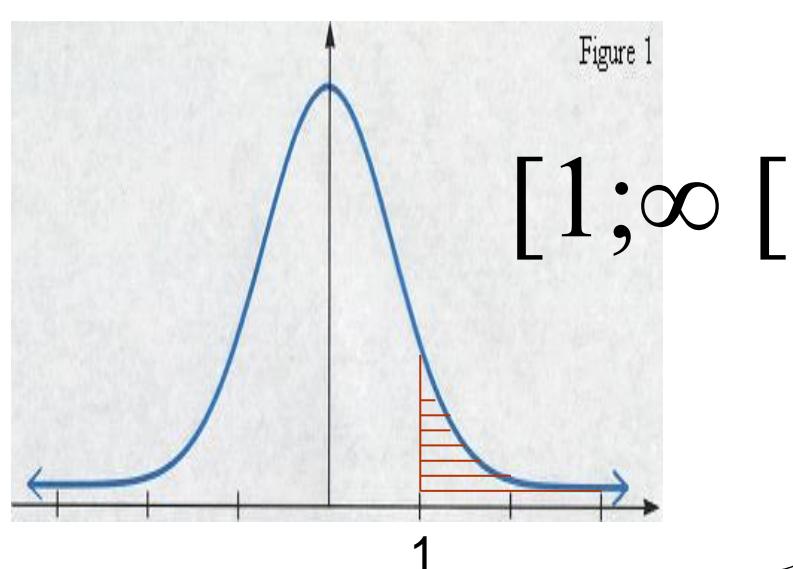
$$P(Z \leq 1)$$



Probabilidad mayor (boca a la derecha).

- Cuando se solicita por ejemplo la siguiente probabilidad:

$$P(Z \geq 1)$$

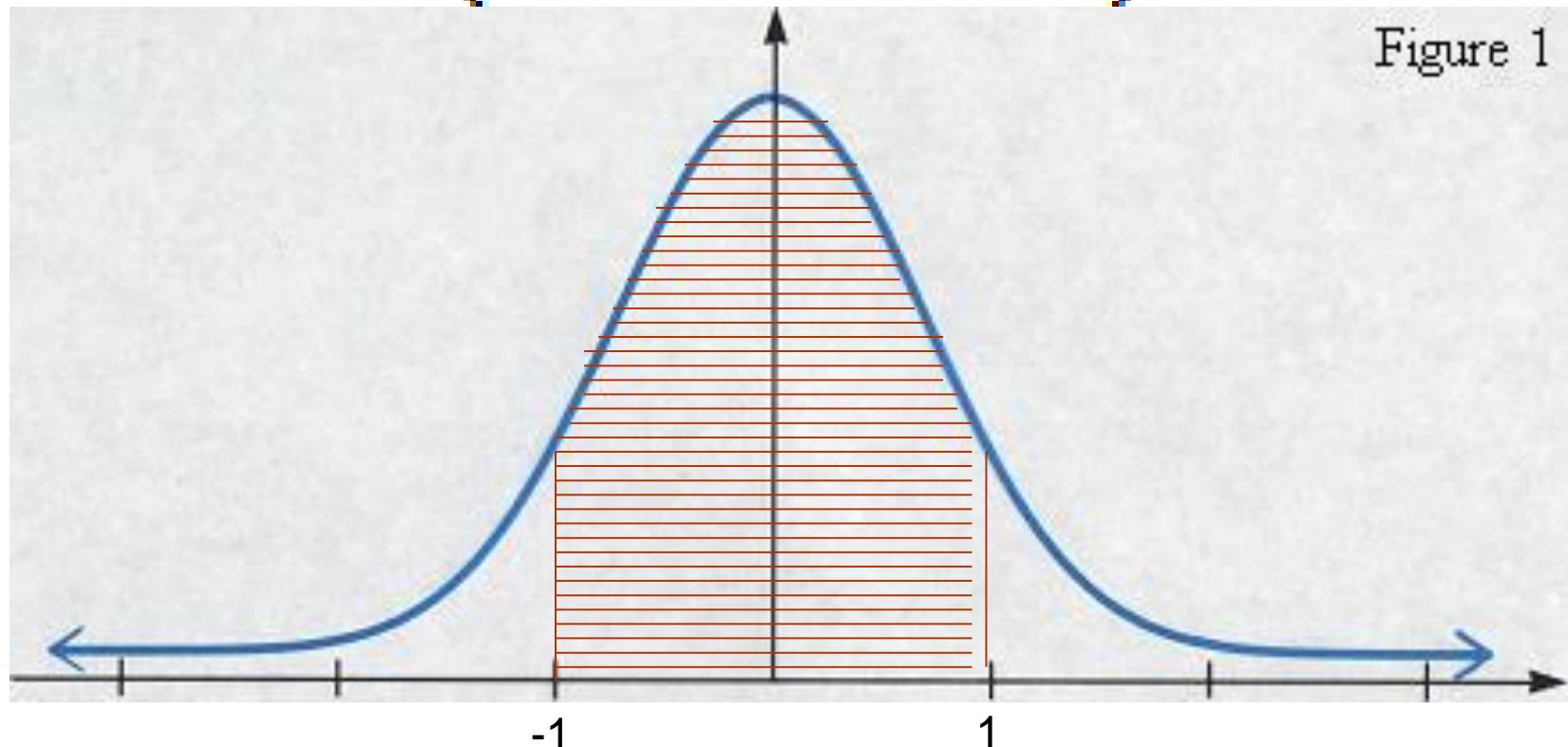


# Probabilidades en distribución N (0,1)

Probabilidad entre dos valores (dos boca a la izquierda).

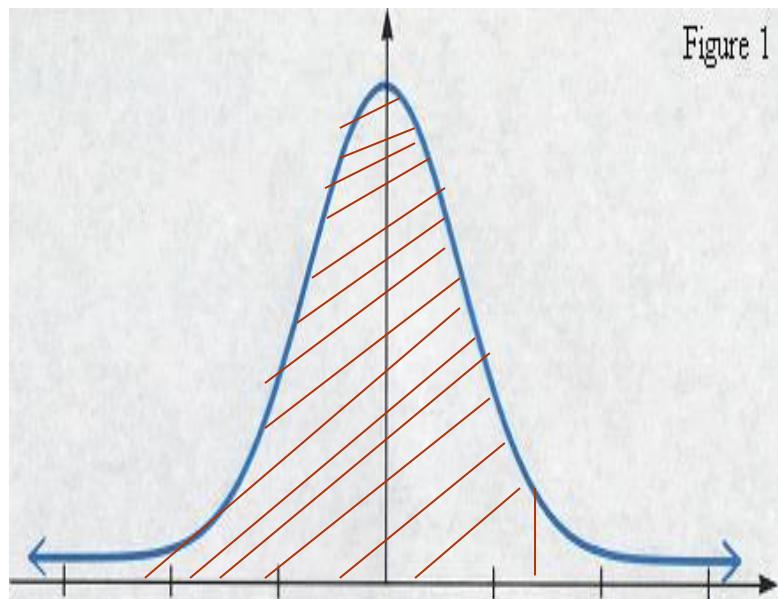
- Cuando se solicita por ejemplo la siguiente probabilidad:

$$P(-1 \leq z \leq 1)$$



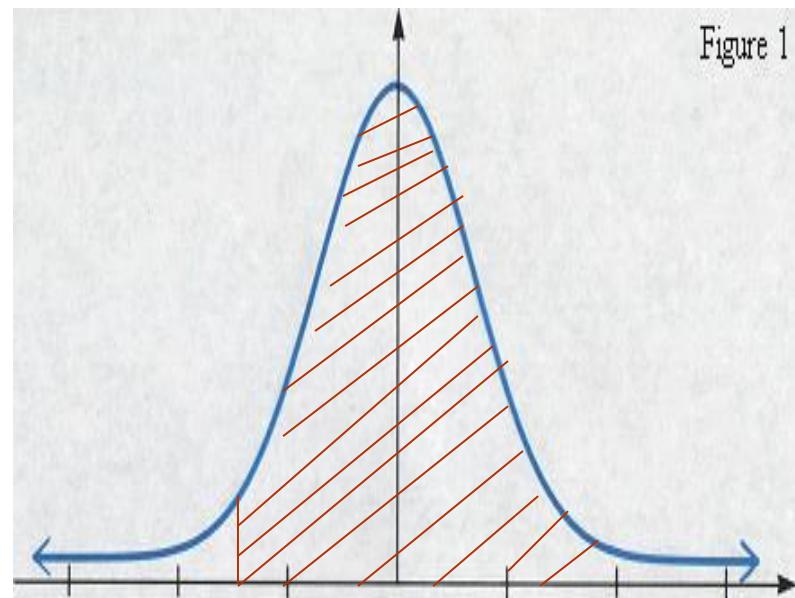
# Probabilidades en distribución N (0,1)

- El hecho de que la tabla dé solamente áreas acumuladas desde  $-\infty$  hasta valores positivos de  $z$  no constituye ningún problema, dado que la curva es simétrica. Las probabilidades de  $P(z \leq 1.5)$  y  $P(z \geq 1.5)$  son exactamente iguales.



$$P(z \leq 1.5) = 0.9332$$

=



$$P(z \geq 1.5) =$$

# Índice

1

Introducción

4

La curva normal  
estándar

2

Variable aleatoria

5

Cálculo de  
probabilidades en la  
normal estándar

3

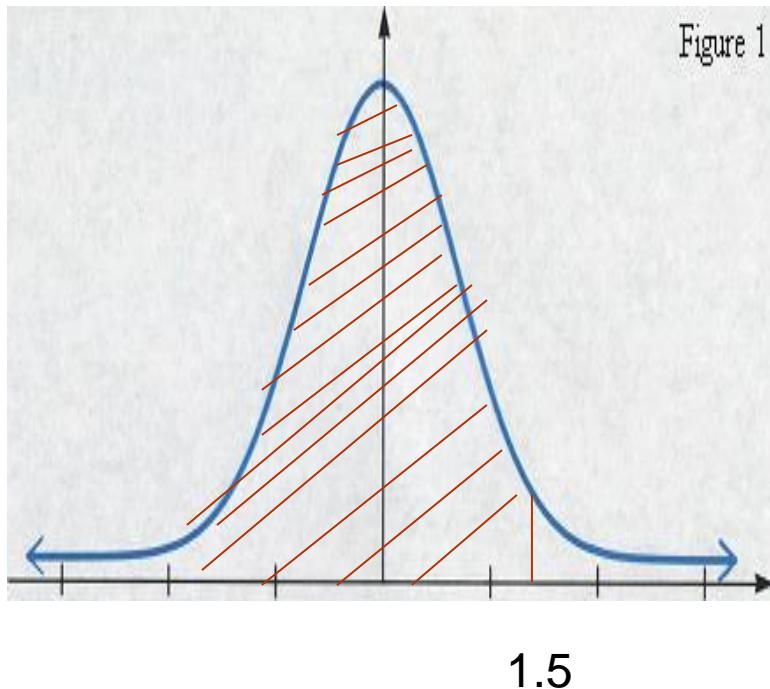
La curva normal

6

Ejemplos de cálculos  
de probabilidad

# Ejemplos 1/9

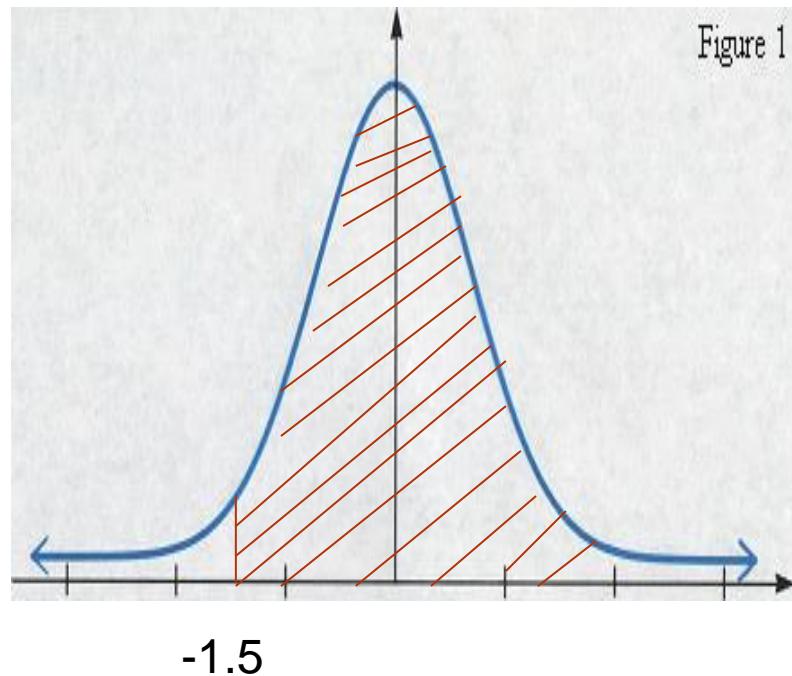
- 1. La probabilidad  $P(z \leq 1.5) = ?$



$$P(z \leq 1.5) = 0.9332$$

# Ejemplos 2/9

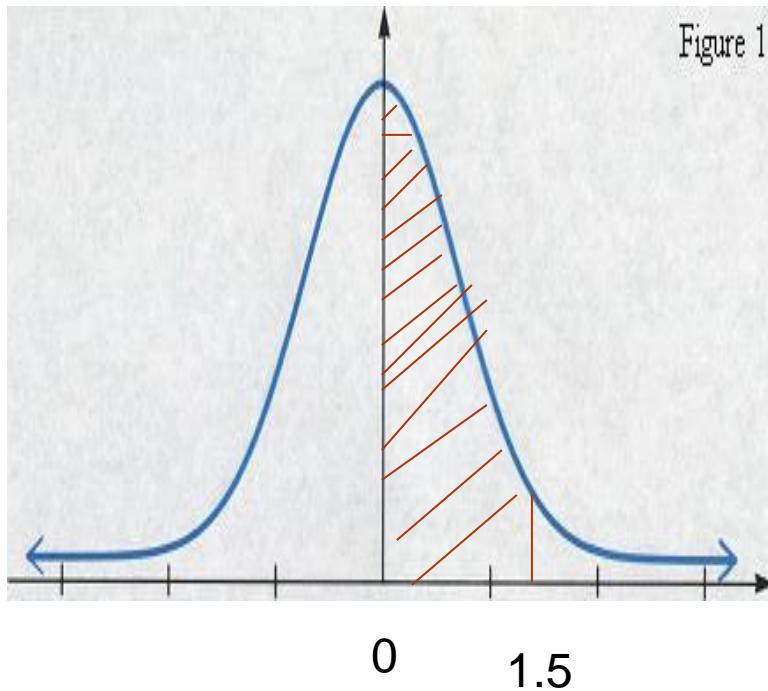
- 1. La probabilidad  $P(z \geq -1.5) = ?$



$$P(z \geq -1.5) = 0.9332$$

# Ejemplos 3/9

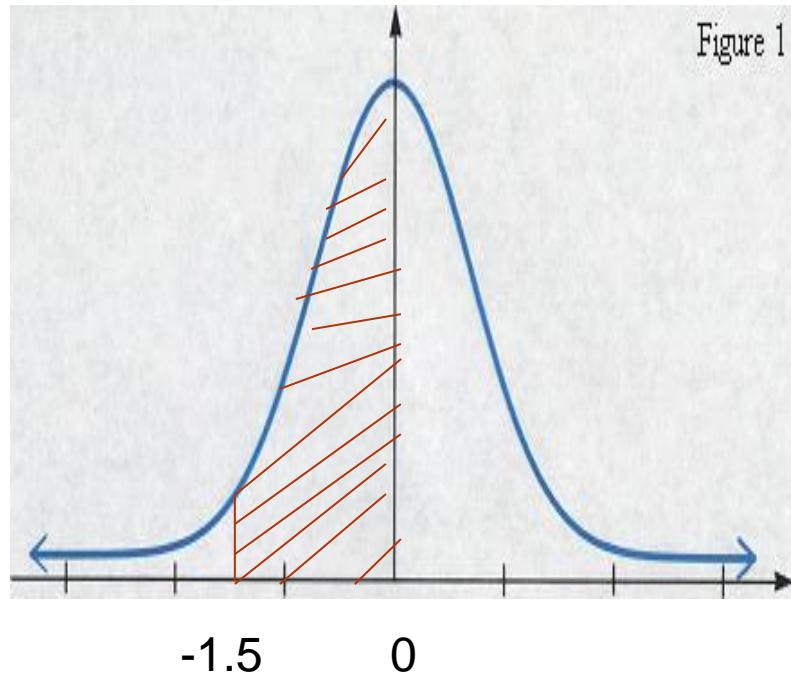
- 1. La probabilidad  $P(0 \leq z \leq 1.5) = ?$



$$\begin{aligned} P(0 \leq z \leq 1.5) &= P(z \leq 1.5) - P(z \leq 0) \\ &= 0.93332 - 0.5 \\ &= 0.4332 \end{aligned}$$

# Ejemplos 4/9

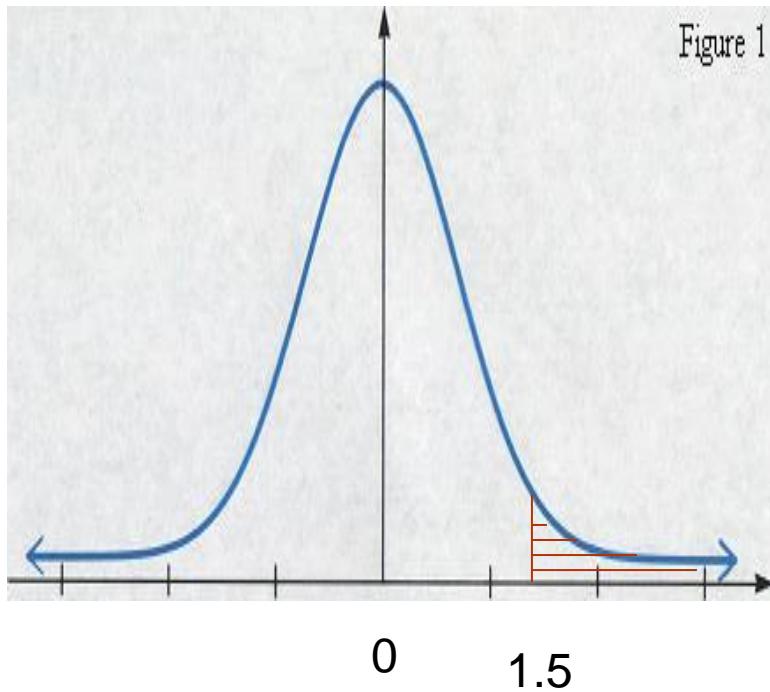
- 1. La probabilidad  $P(-1.5 \leq z \leq 0) = ?$



$$\begin{aligned} P(-1.5 \leq z \leq 0) &= P(z \leq 0) - P(z \leq -1.5) \\ &= 0.5 - 0.06681 \\ &= 0.43319 \end{aligned}$$

# Ejemplos 5/9

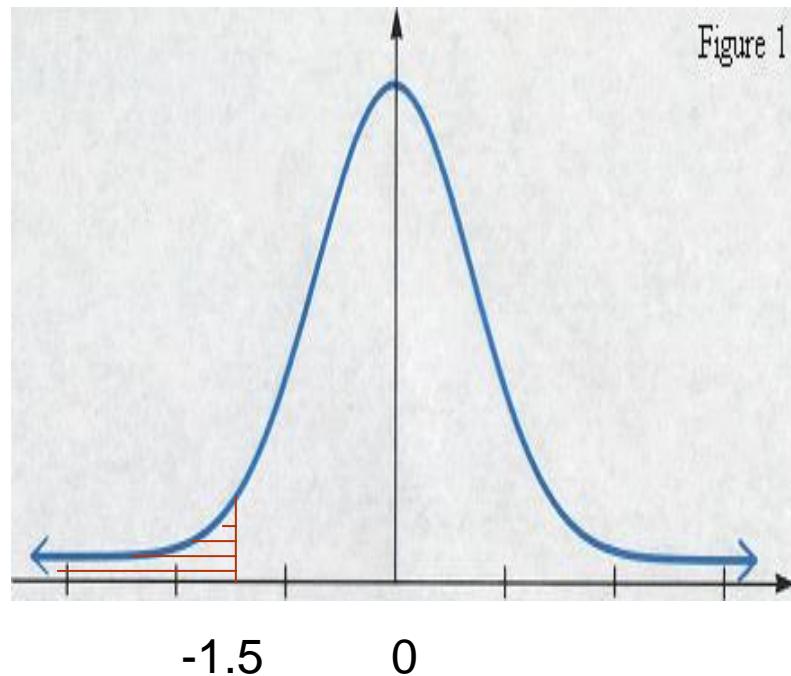
- 1. La probabilidad  $P(z \geq 1.5) = ?$



$$\begin{aligned}P(z \geq 1.5) &= 1 - P(z \leq 1.5) \\&= 1 - 0.9332 \\&= 0.0668\end{aligned}$$

# Ejemplos 6/9

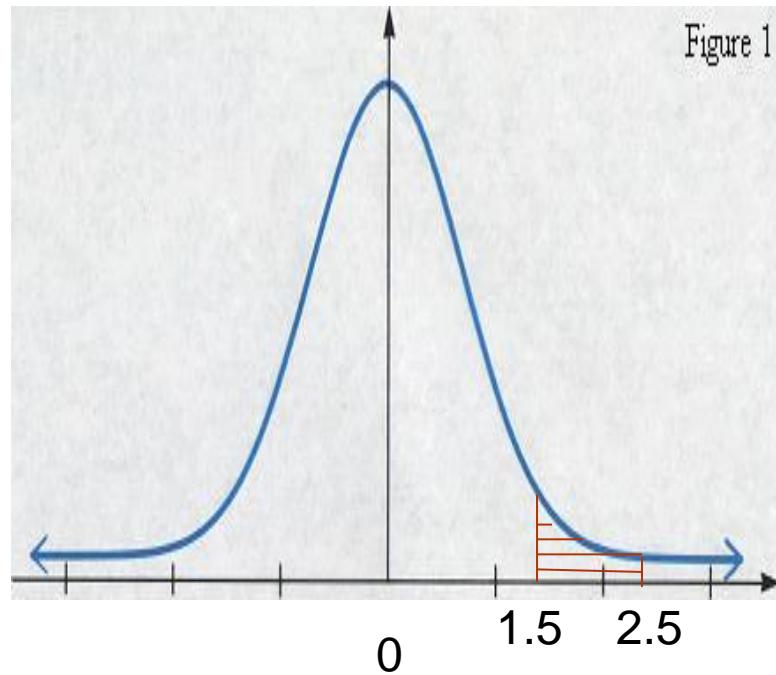
- 1. La probabilidad  $P(z \geq 1.5) = ?$



$$P(z \leq -1.5) = 0.06681$$

# Ejemplos 7/9

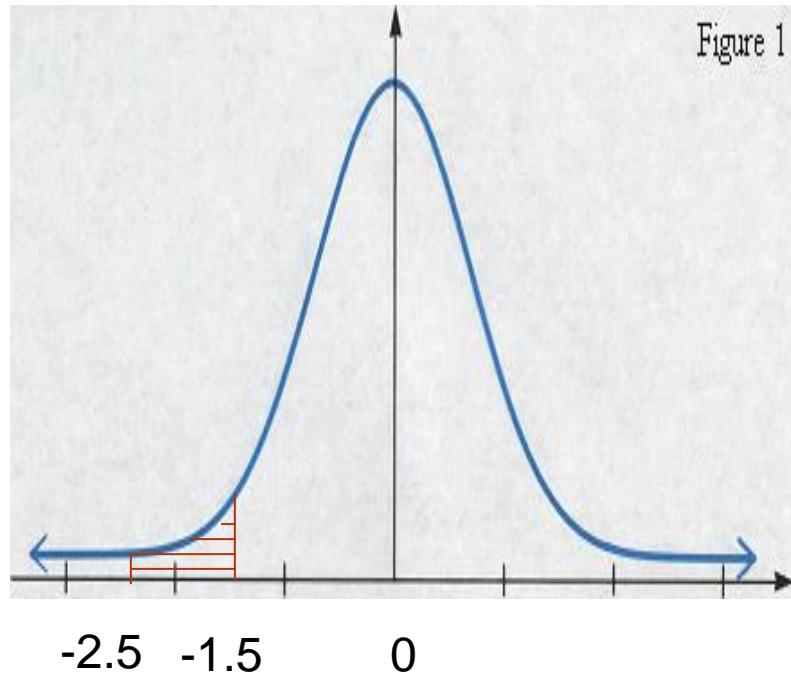
- 1. La probabilidad  $P(1.5 \leq z \leq 2.5) = ?$



$$\begin{aligned}P(1.5 \leq z \leq 2.5) &= P(z \leq 2.5) - P(z \leq 1.5) \\&= 0.9938 - 0.9332 \\&= 0.0606\end{aligned}$$

# Ejemplos 8/9

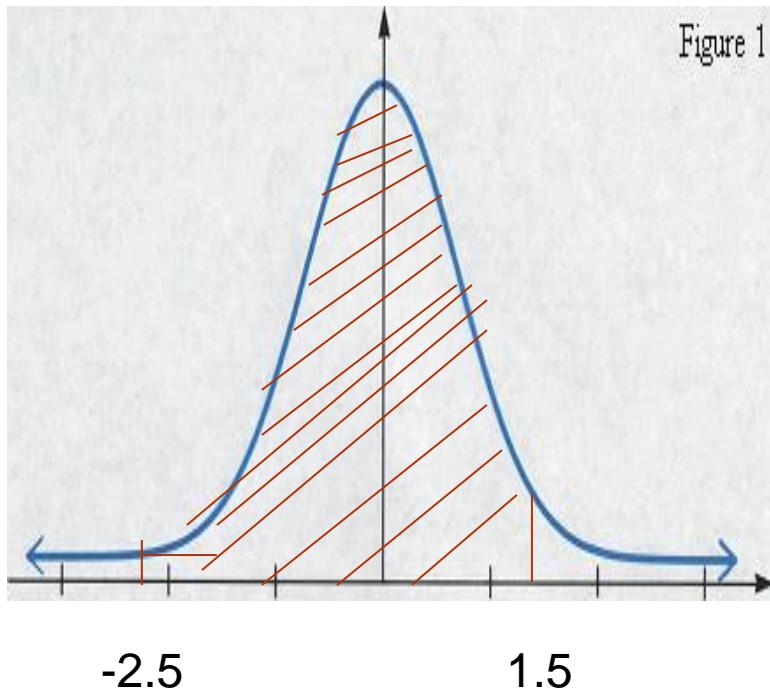
- 1. La probabilidad  $P(-2.5 \leq z \leq -1.5) = ?$



$$\begin{aligned}P(-2.5 \leq z \leq -1.5) &= P(z \leq -1.5) - P(z \leq -2.5) \\&= 0.06681 - 0.00621 \\&= 0.0606\end{aligned}$$

# Ejemplos 8/9

- 1. La probabilidad  $P(-2.5 \leq z \leq 1.5) = ?$



$$\begin{aligned}P(-2.5 \leq z \leq 1.5) &= P(z \leq 1.5) - P(z \leq -2.5) \\&= 0.93319 - 0.00621 \\&= 0.92698\end{aligned}$$

# Índice

7

La estandarización

# La estandarización

- Finalmente, el capítulo de “Probabilidades”, “Medidas de Tendencia”, “Variabilidad” y “La curva normal y normal estándar” se unen para llevar a cabo la estandarización.
- Supongamos el siguiente caso: queremos averiguar, para una población determinada que labora para una firma financiera, cuál sería la probabilidad de encontrar a una persona con un salario superior a los \$ 120 por día, sabiendo de ante mano que, los datos se distribuyen normalmente, y que además los datos arrojaron el siguiente resultado:

$$\mu = 105$$

$$\sigma = 10$$

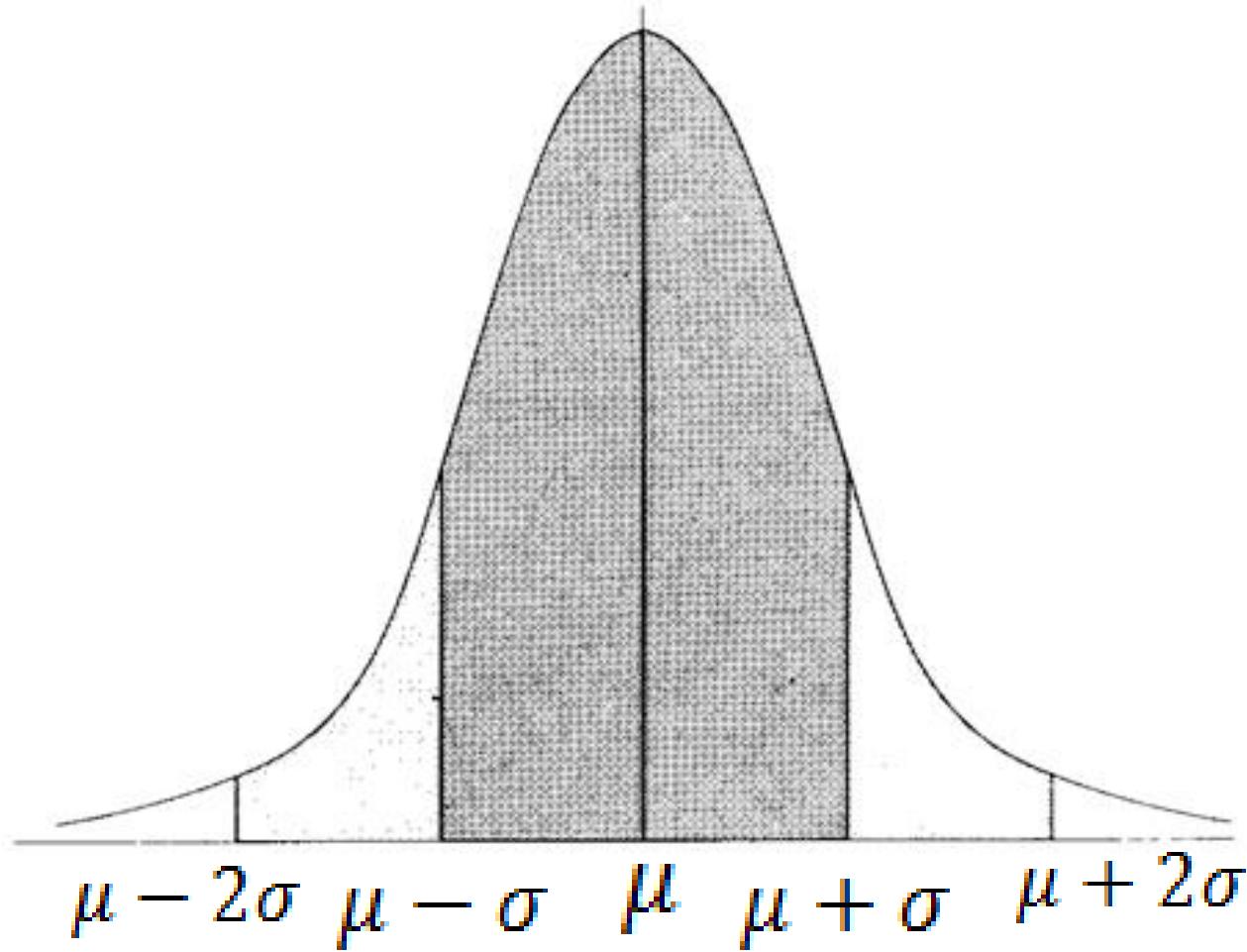
¿Cómo averiguamos este hecho?

# Introducción

Curva normal, definida por:

$-\mu$

$-\sigma$



# Introducción

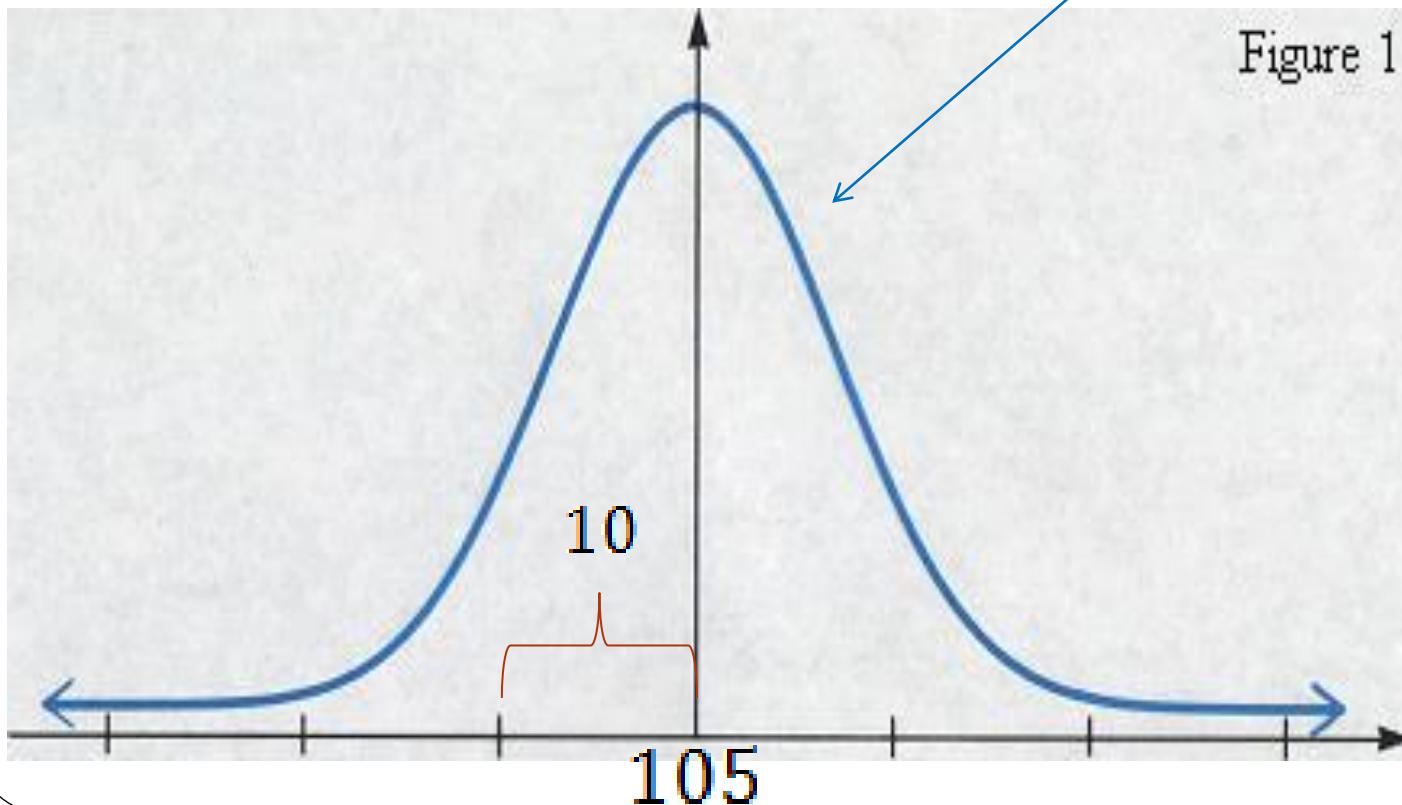
- En nuestro caso:

$$\mu = 105 \quad (\$)$$

$$\sigma = 10$$

$$\frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-105}{10}\right)^2}$$

Figure 1



# Introducción

De acuerdo al enunciado:

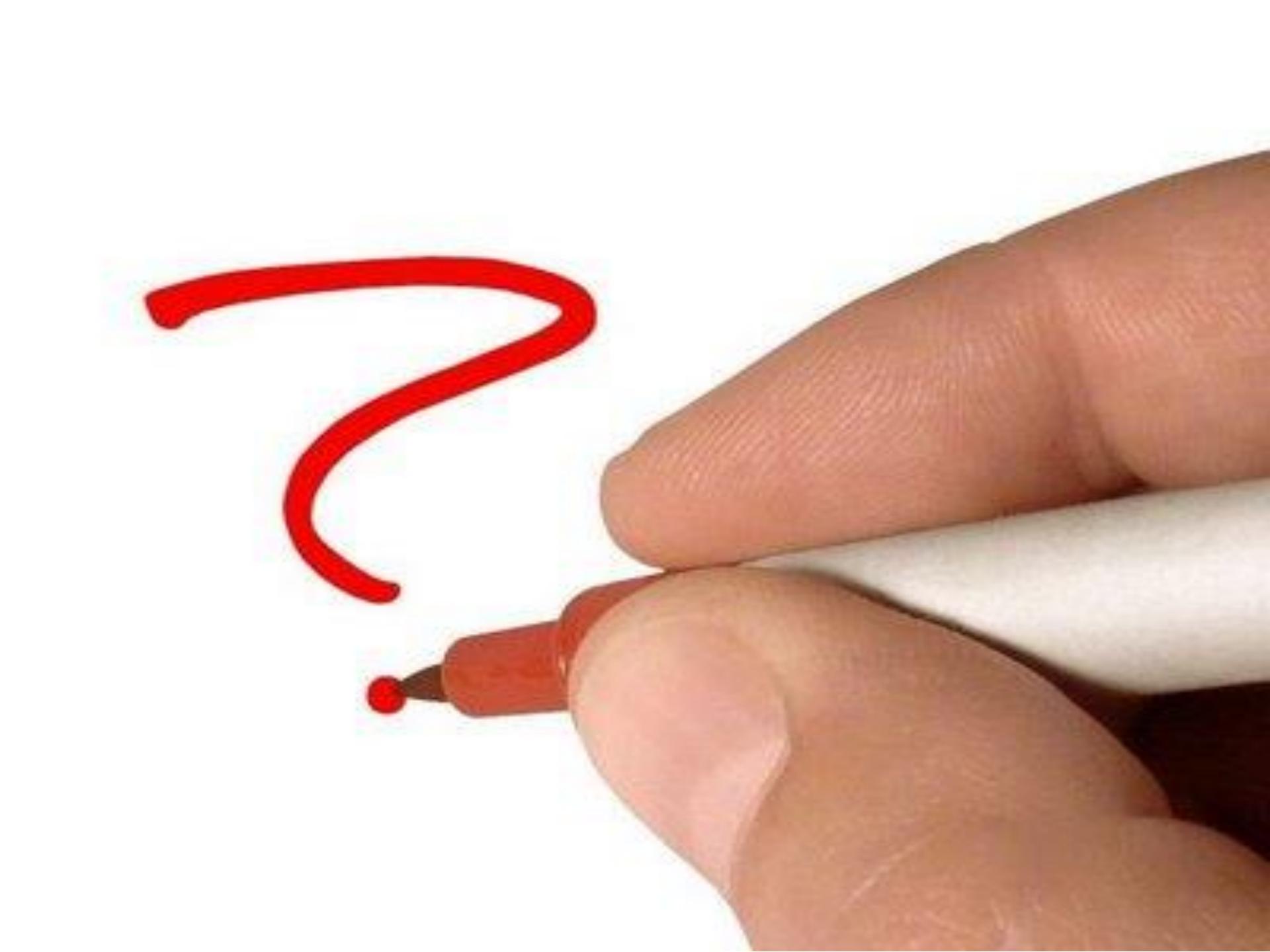
“... , cuál sería la probabilidad de encontrar a una persona con un salario superior a los \$ 120 por día ...”

-Además, recolectados todos los datos sabemos que:

$$\mu = 105 \quad (\$)$$

$$\sigma = 10$$

¿Cómo se calcula esta  
probabilidad?

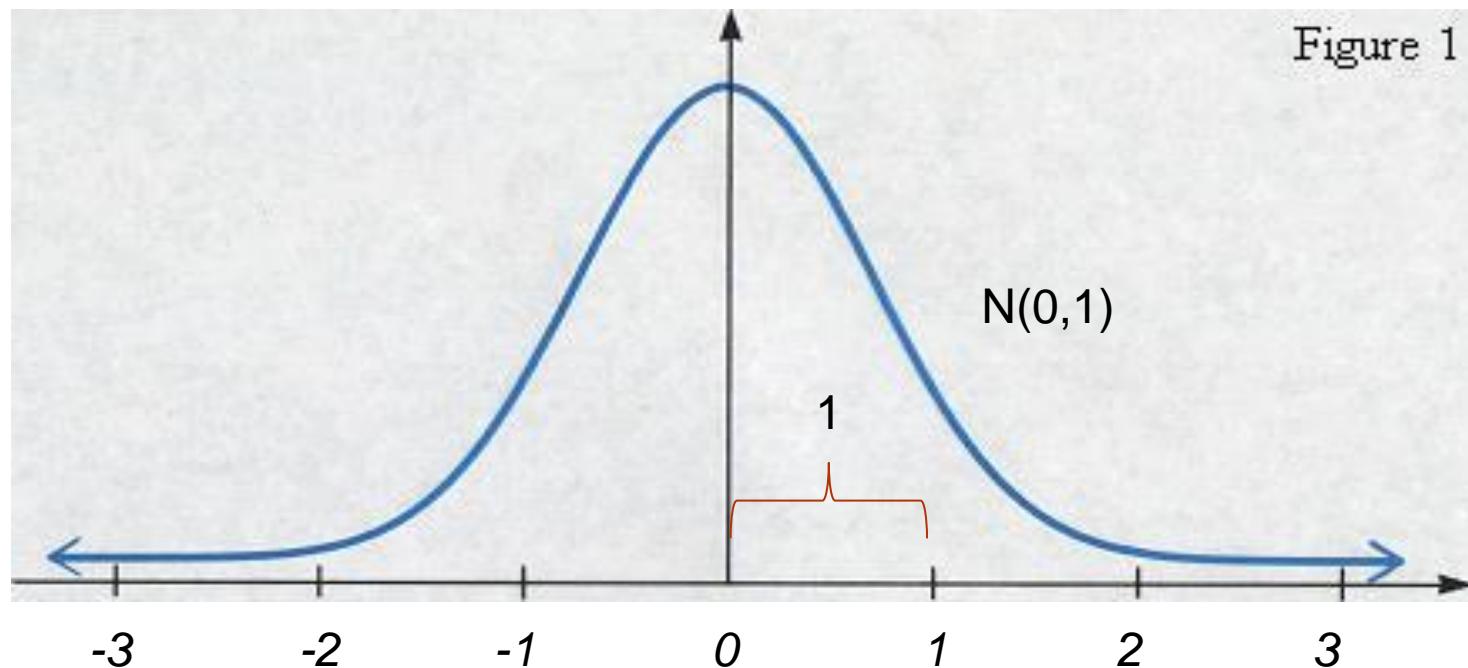


A hand is shown from the side, holding a red marker. The hand is drawing a large, stylized question mark on a white surface. The question mark is drawn with a thick red line, starting with a vertical stroke on the left, followed by a large curve that loops back towards the left, ending with a short horizontal stroke at the bottom right.

?

# La curva normal estándar $\rightarrow N(0,1)$

- Todos los ejercicios de probabilidades que realizamos anteriormente eran relativos a una curva normal con promedio de cero ( $\mu=0$ ) y desviación estándar de uno ( $\sigma =1$ )



# La curva normal estándar → N(0,1)

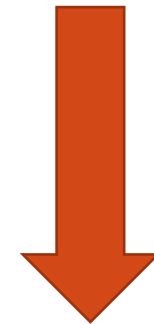
- Entonces, si tenemos un problema de una curva normal, según el enunciado, pero calculamos las probabilidades en una normal estándar: ¿qué tipo de transformación tenemos que hacer para calcular las probabilidades del enunciado en una normal estándar...?

$$\frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-105}{10}\right)^2}$$



$$\frac{1}{1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2}$$

Normal

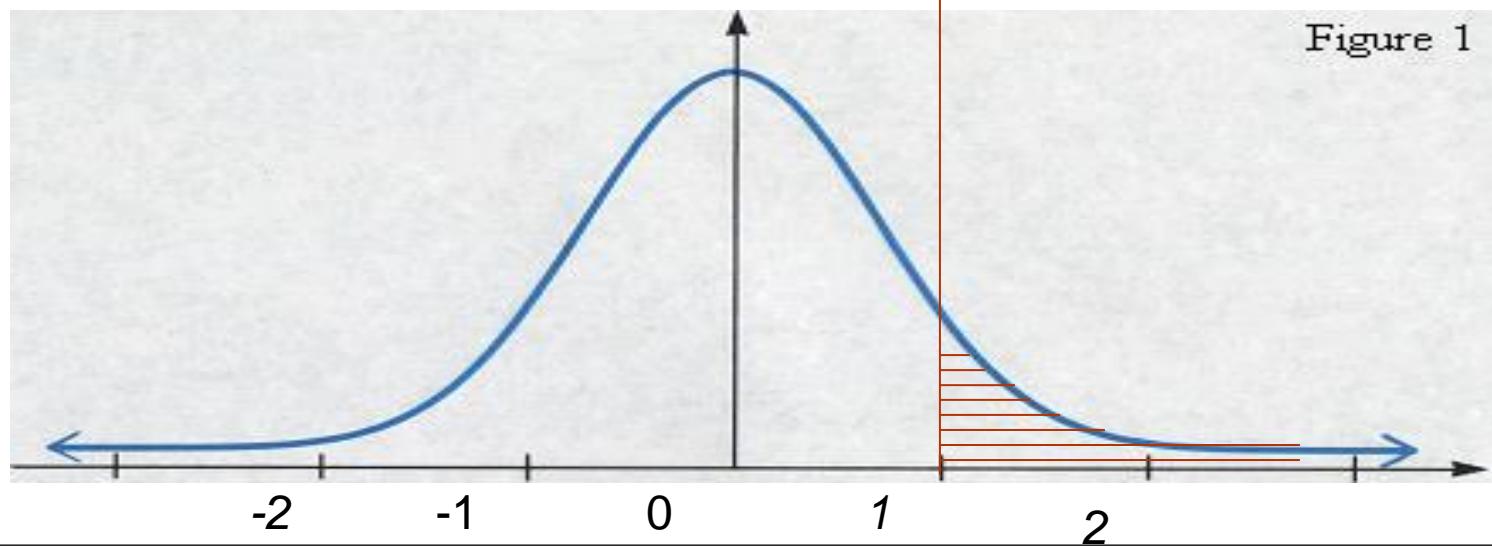
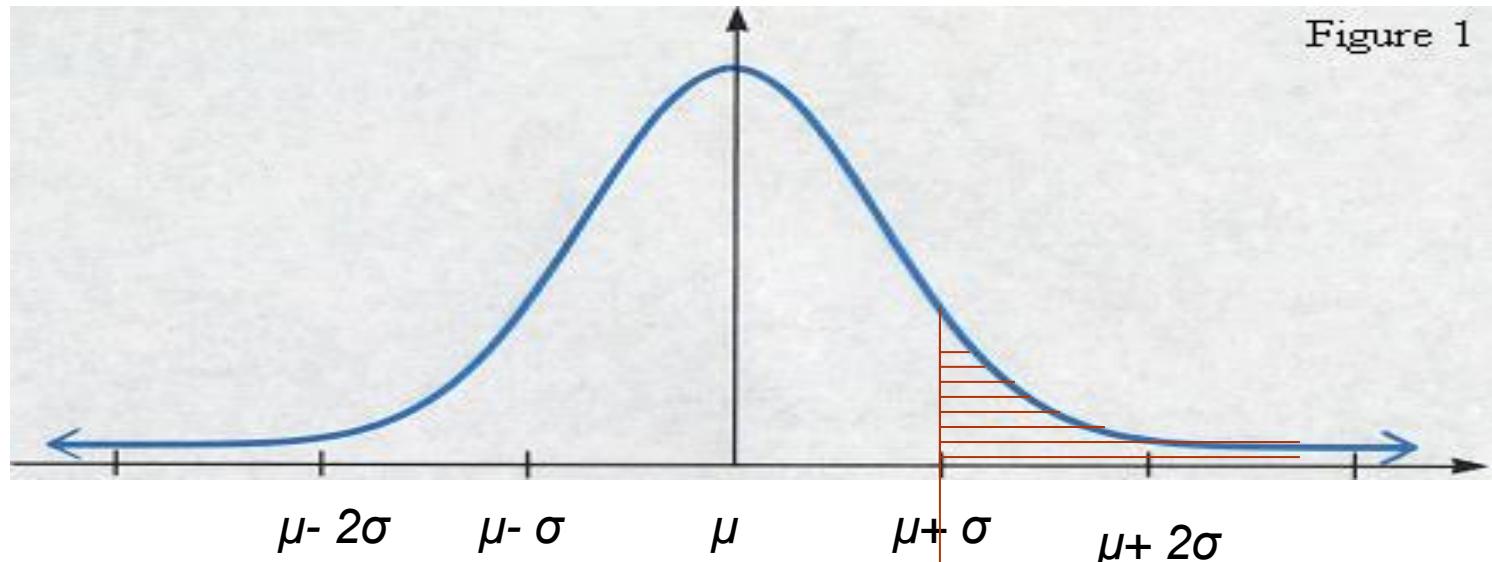


Normal  
Estándar

Transformación

# La curva normal estándar $\rightarrow N(0,1)$

En valor de la probabilidad, es exactamente lo mismo



# Estandarización

- Para pasar de una “curva normal” a una “normal estándar”, y poder hacer el cálculo de probabilidades, debemos estandarizar.
- Estandarizar una curva normal es transformarla de manera que su media sea *cero* y su desviación estándar sea *uno*. Esto se logra restando a la variable  $x$  su promedio ( $\mu$ ) y dividiendo la diferencia entre su desviación estándar ( $\sigma$ ) .
- La expresión numérica para la estandarización es:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

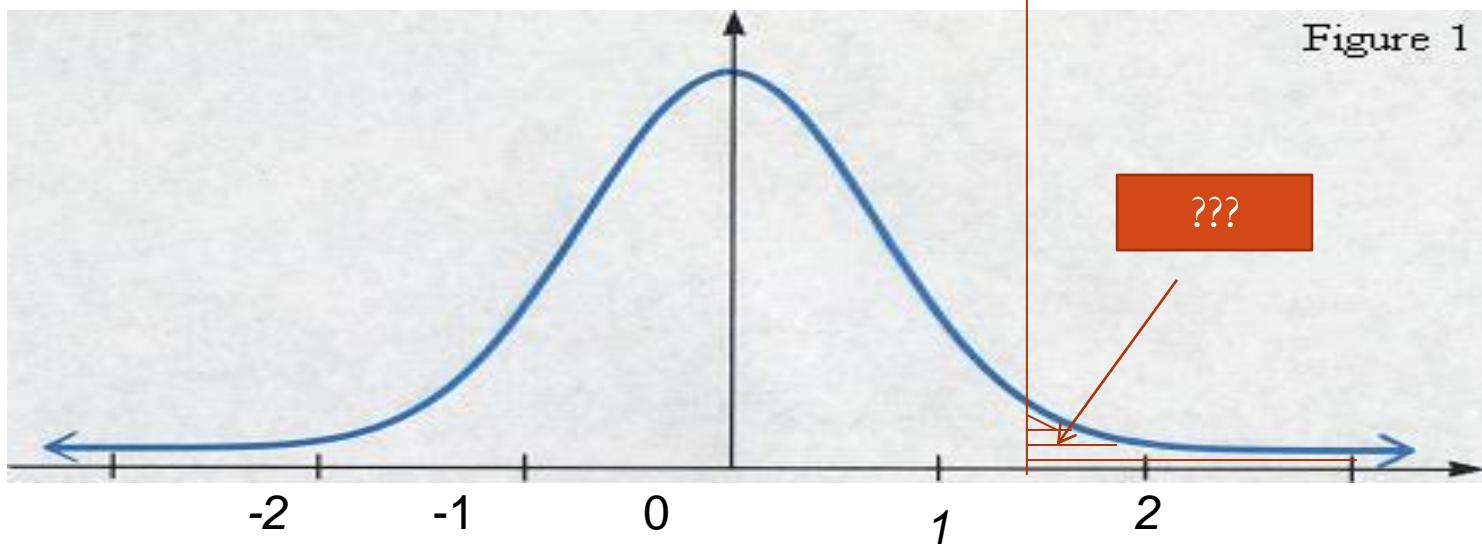
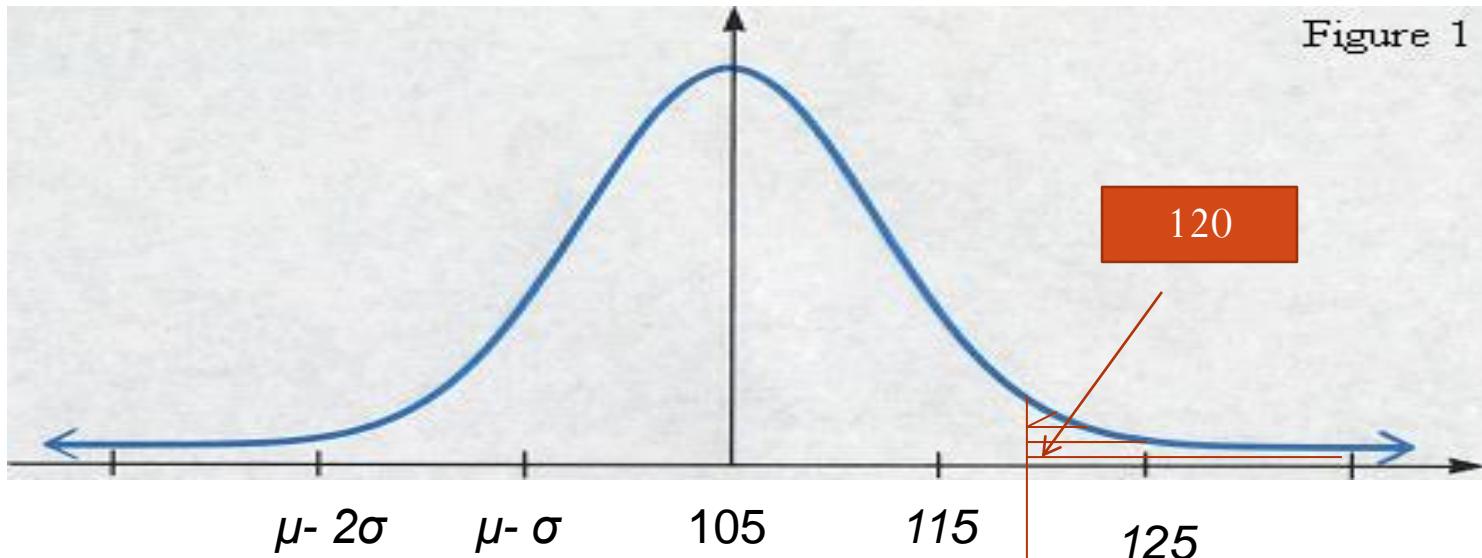
$$N(0, 1)$$

# Estandarización

- En general, si la variable en cuestión tiene una distribución normal, con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , basta con hacer el proceso anterior con el valor de interés “a”, para obtener una probabilidad.
- La estandarización es un proceso muy simple, pero muy importante, que permite resolver problemas para cualquier curva normal trasladándolos, por medio de una sencilla transformación algebraica , a la normal estándar.
- Matemáticamente se define como:

$$P(x \leq a) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = P(z \leq \frac{a - \mu}{\sigma})$$

# Nuestro ejemplo



# Estandarizando

“... , cuál sería la probabilidad de encontrar a una persona con una presión diastólica superior a 120...”

$$\mu = 105$$

$$\sigma = 10$$

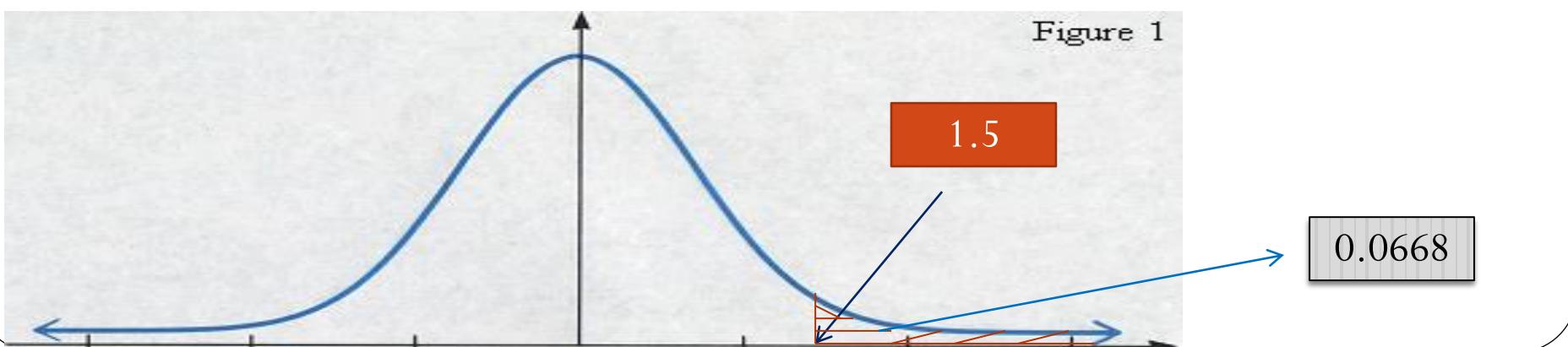
Entonces estandarizamos:

$$Z = \frac{120-105}{10} = \frac{15}{10} = 1.5$$



$$N(0, 1)$$

Figure 1



# Estandarizando

- Sería encontrar entonces  $P(z \geq 1.5)$ , ya que el enunciado dice persona con presión superior. En términos de probabilidades sería.

$$P(x \geq 120)$$

$$P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{120 - 105}{10}\right)$$

$$P\left(z \geq \frac{15}{10}\right)$$

$$P(z \geq 1.5)$$

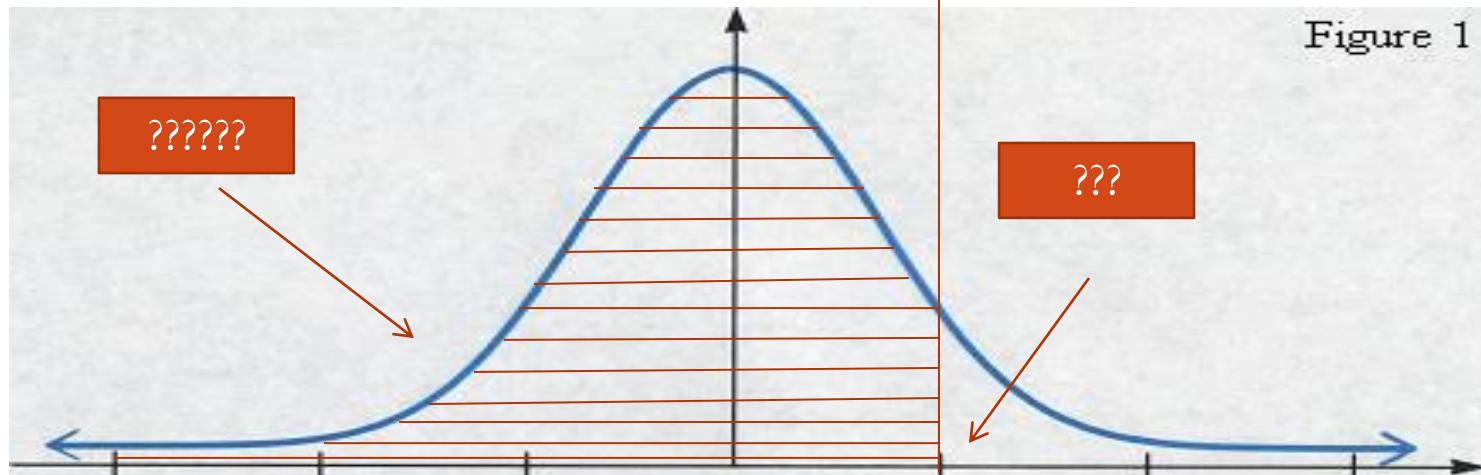
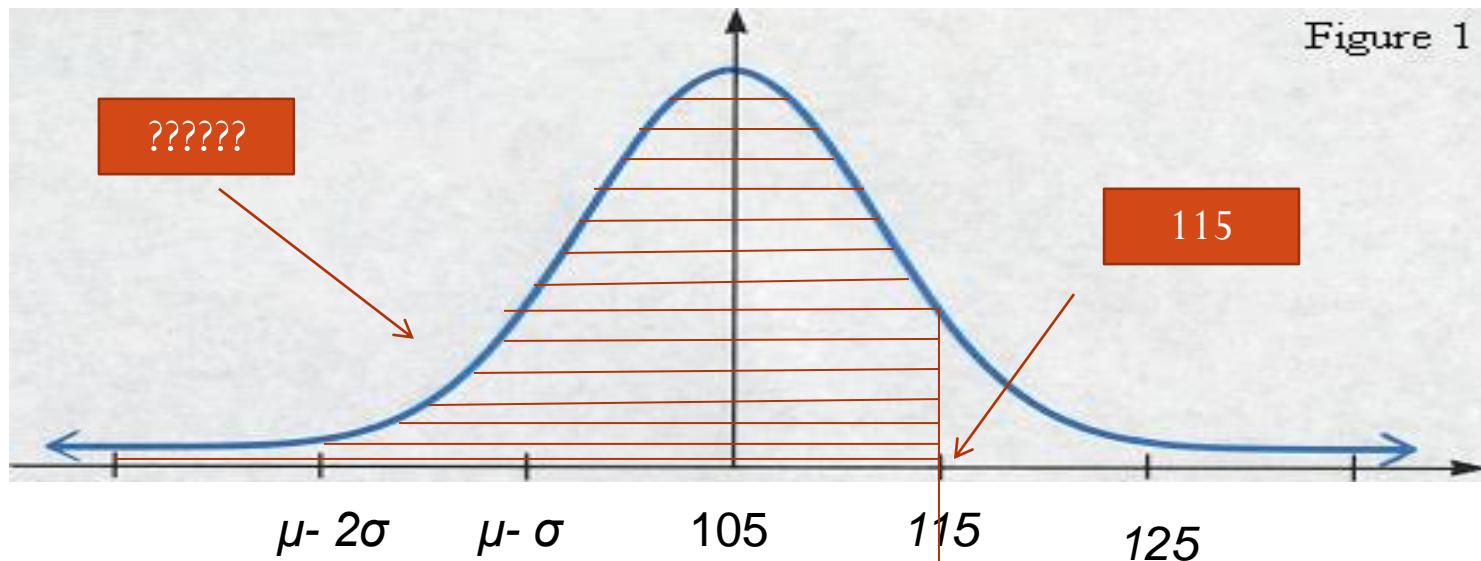
0.0668

# Estandarizando

- Entonces la respuesta sería que se tiene una probabilidad de 0.0668 de encontrar personas con más de \$ 120 de salario en un día, lo cuál es un hecho muy poco probable...
- Ahora, que pasa si en vez de encontrar la probabilidad anterior, no gustaría saber:
  1. La probabilidad de personas con salarios inferiores a \$ 115.
  2. Personas con salarios entre \$110 y \$120.

# Estandarizando

1. La probabilidad de personas con menos de 115 de presión D.



# Estandarizando

- La solución sería:

$$P(x \leq 115)$$

$$P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{115 - 105}{10}\right)$$

$$P\left(z \leq \frac{10}{10}\right)$$

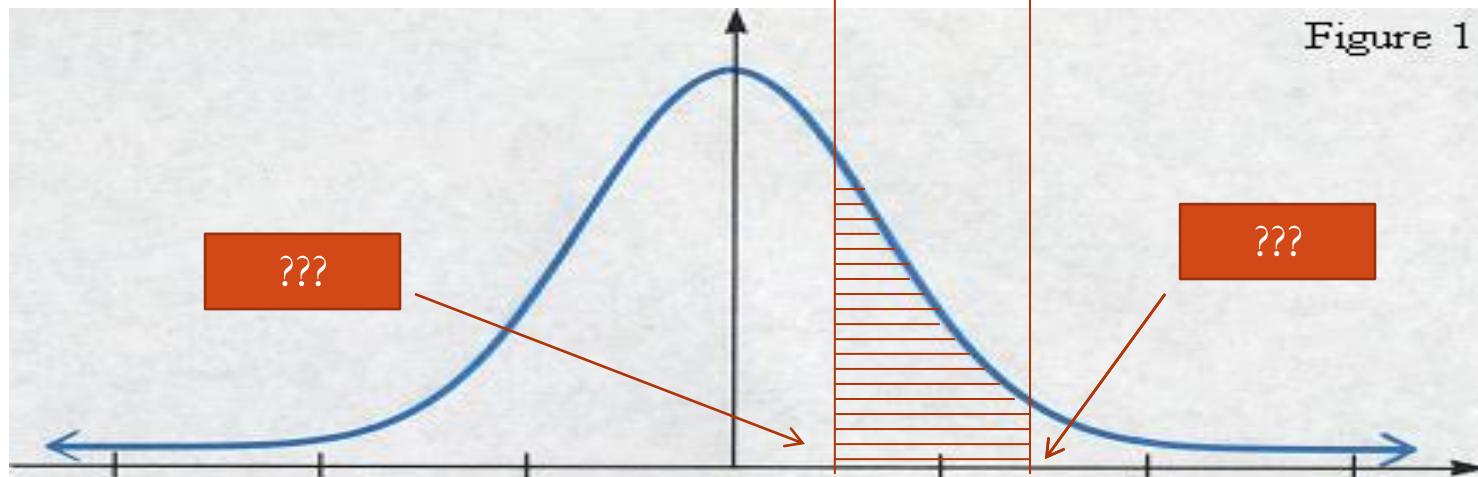
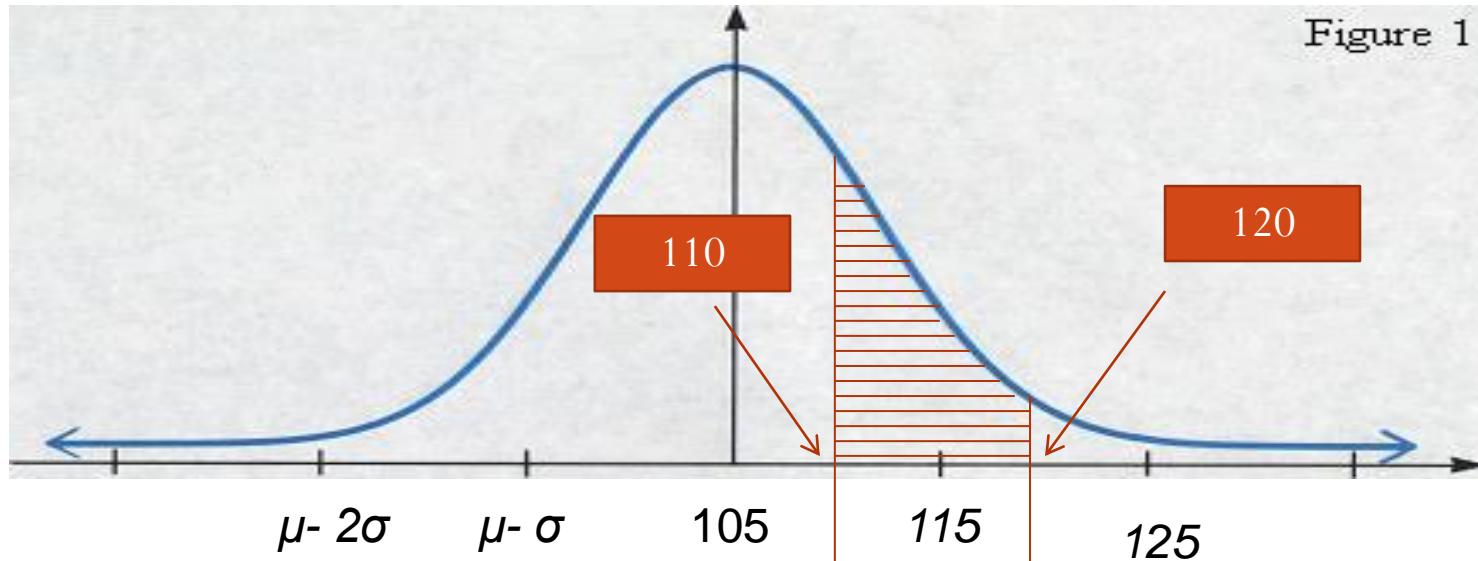
$$P(z \leq 1)$$

0.8413

R: se tiene una probabilidad de 0.8413 de encontrar personas con menos de \$ 115 salario en un día, lo cuál es un hecho muy probable...

# Estandarizando

- La probabilidad de personas entre 110 y 120 de presión D.



# Estandarizando

- La solución sería:

$$P(110 \leq x \leq 120)$$

$$P\left(\frac{110 - 105}{10} \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{120 - 105}{10}\right)$$

$$P\left(\frac{5}{10} \leq z \leq \frac{15}{10}\right)$$

$$P\left(\frac{5}{10} \leq z \leq \frac{15}{10}\right)$$

$$P(0.5 \leq z \leq 1.5)$$

$$=0.6915-0.9332$$

$$0.2417$$

¿Cómo deberíamos concluir la presente probabilidad?

# Reseñas finales

- El cálculo de probabilidades mediante la curva normal estándar es, sin duda alguna, una de las mejores herramientas que se crearon en la estadística.
- La estandarización es un método capaz de obtener resultados probabilísticos a partir de la suposición que estamos trabajando con datos que se distribuyen normalmente. Este supuesto será muy importante para los próximos temas.
- Además, muchos de los fundamentos para elegir el nivel de confianza en un intervalo de confianza, o el nivel de rechazo en una prueba de hipótesis se fundamenta en las probabilidades de estas dos curvas vistas en este capítulo.

CONC  
USIÓN



ARTE

