

# Probabilidad



Oscar Centeno Mora



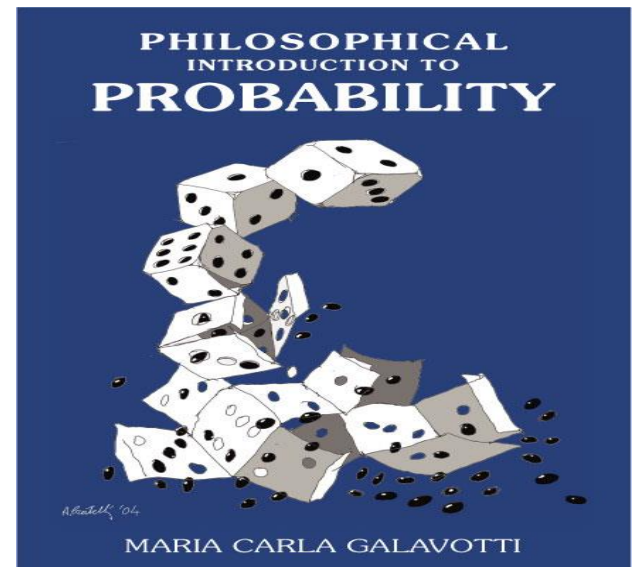
# Introducción

- La probabilidad es un concepto muy común en la comunicación diaria:
- Los pronósticos meteorológicos pronostican una probabilidad de que llueva en la tarde.
- Los médicos que si consume cierto medicamento , con qué probabilidad podría sanar en un determinado tiempo.
- Los consejeros escolares especulan sobre la probabilidad de éxito en cierta Universidad.
- Las encuestas políticas indican cierta probabilidad que tiene el candidato de ganar las elecciones.



# Introducción

- La inferencia estadística se basa en los fundamentos de la teoría de la probabilidad , rama de la matemática que se ocupa de los fenómenos que se producen al azar, o fenómenos aleatorios.
- Del punto anterior la gran importancia de tener los conceptos básicos de lo que a la probabilidad se refiere.



# Índice

1

La esencia de la  
probabilidad y  
conceptos

4

Probabilidad clásica  
o a priori

2

Probabilidad clásica  
o a priori

5

Distribución de  
probabilidad  
discreta

3

Probabilidad  
frecuencia relativa

6

Distribución de  
probabilidad  
continua

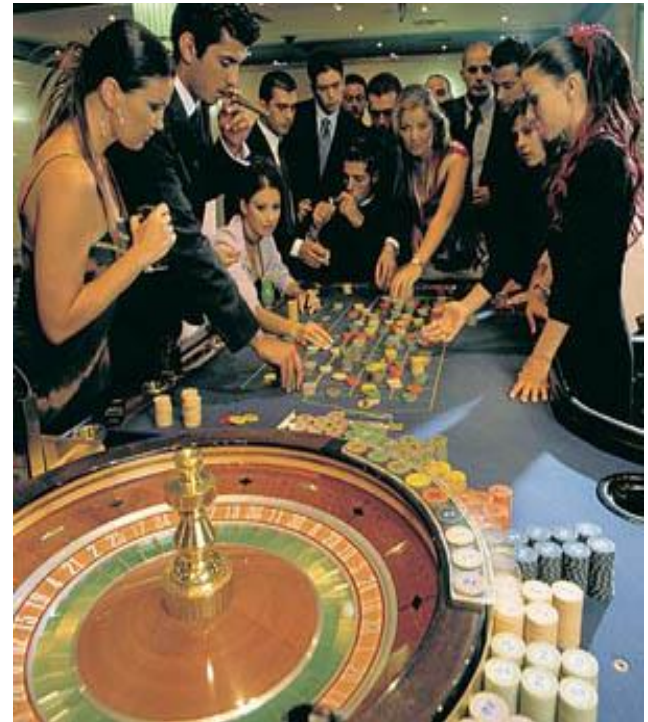
# Índice

1

La esencia de la  
probabilidad y  
conceptos

# La esencia de la probabilidad

- Las probabilidades nacieron en Francia en el XVII siglo, a raíz de los juegos de azar de la época (cartas y dados).
- La probabilidad es un número (resultado) que está siempre en “0” y “1”
- Matemáticamente:



$$0 \leq \text{Probabilidad} \leq 1$$

# La esencia de la probabilidad

- Si el número o el resultado tiene muchos chances de que ocurra, entonces se tendrá una probabilidad muy cercana a “1”.
- De lo contrario, si las posibilidades son muy reducidas, entonces se tendrá una probabilidad muy cercana a “0”.
- También están los casos extremos:
  - La probabilidad de que el sol brille tiene una probabilidad de “1”.
  - La probabilidad de que el cuerpo de un ser humano viva durante 200 años tiene una probabilidad de “0”.



# La esencia de la probabilidad

- En el primer caso, cuando se tiene certeza de que la probabilidad de ocurrencia sea de “1”, entonces es un “*evento completamente seguro*”.
- El segundo caso, cuando se tiene certeza de que la probabilidad de ocurrencia es de “0”, entonces es un evento “completamente imposible”.
- También le asignamos una probabilidad de 0.5 a un fenómeno que tenga la misma posibilidad de ocurrir y de no ocurrir. Somos totalmente indiferentes ante el evento.



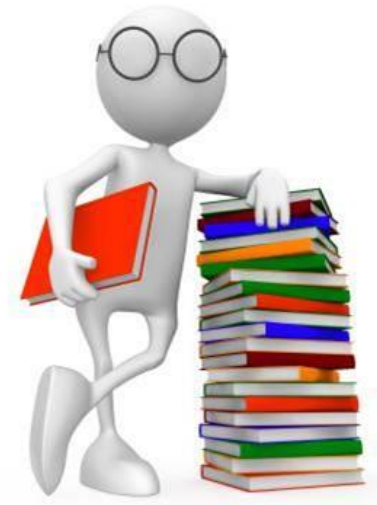
# La esencia de la probabilidad

- En resumidas cuentas

-Asignamos una probabilidad mayor o igual a “0”, pero menor a “0.5”, a un fenómeno que tenga más posibilidad de no ocurrir que de ocurrir.

-Asignamos una probabilidad mayor a 0.5 pero menor o igual a 1, a un fenómeno que tenga más posibilidad de ocurrir que de no ocurrir.

-Asignamos una probabilidad de 0.5 si somos completamente indiferentes a la ocurrencia del evento.



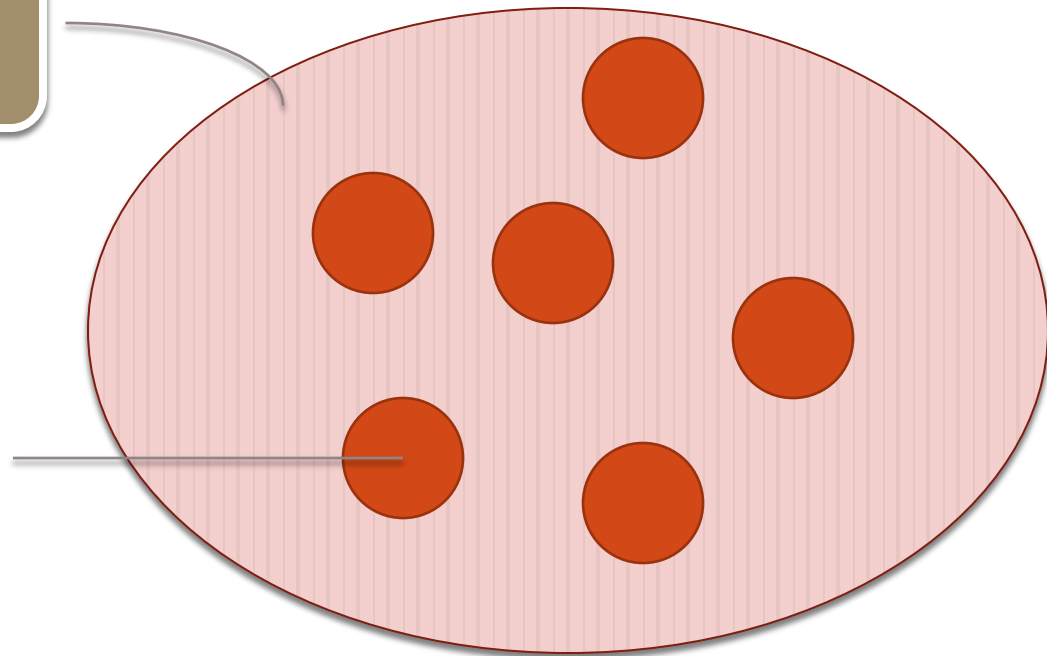
# Ideas fundamentales de las probabilidades

## Conjunto y elemento

“Un conjunto es una colección bien definida de objetos. Normalmente a los objetos que forman el conjunto se le conoce como elementos”.

Conjunto

Elemento



# Ideas fundamentales de las probabilidades

## Conjunto y elemento

- Los presidentes de CR desde 1960 constituyen un conjunto de todos los presidentes, siendo cada presidente un elemento.
- El planeta tierra constituye un elemento, del conjunto de los primeros 5 planetas cercanos al sol.

Por ejemplo, sea “A” el siguiente conjunto, constituido por los siguientes elementos.

$A = \{\text{Sra. Allen; Sta. Brown; Sr. Smith; Sr. Walker}\}.$   
¿Un elemento?

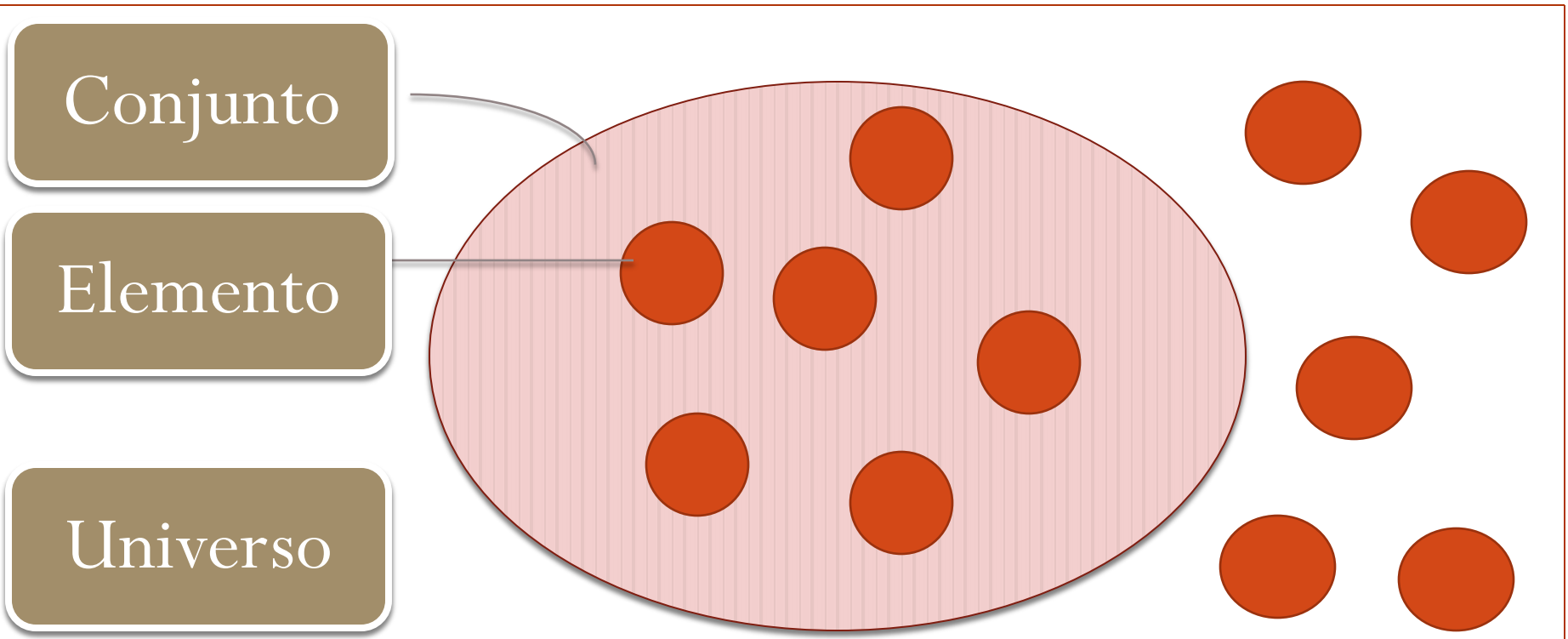


# Ideas fundamentales de las probabilidades

## Conjunto Universal

“Es el conjunto más extenso por el cual hay interés en un análisis dado”.

La definición de conjunto universal generalmente se indica por medio de una U.

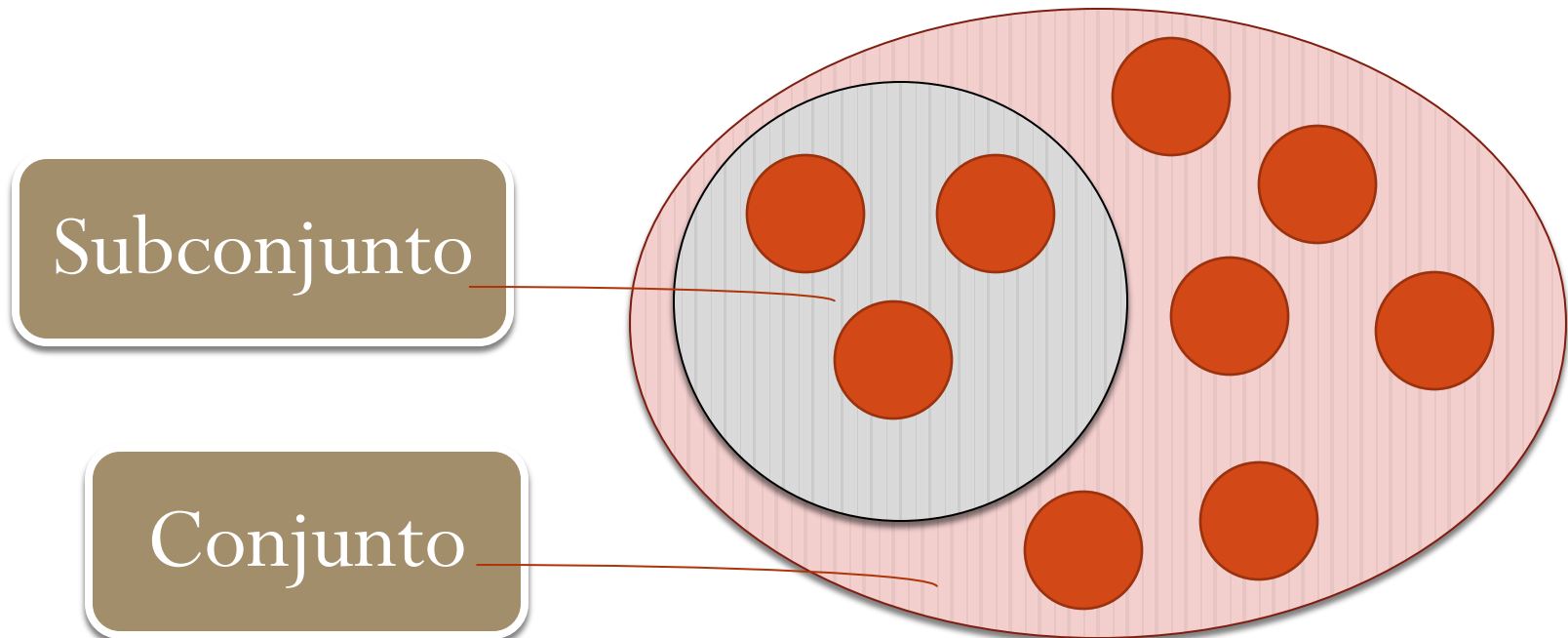


# Ideas fundamentales de las probabilidades

## Subconjunto

Un subconjunto es una porción del conjunto. Formalmente:

*“El conjunto de B es un subconjunto de A si cada elemento de también un elemento de A”*



# Ideas fundamentales de las probabilidades

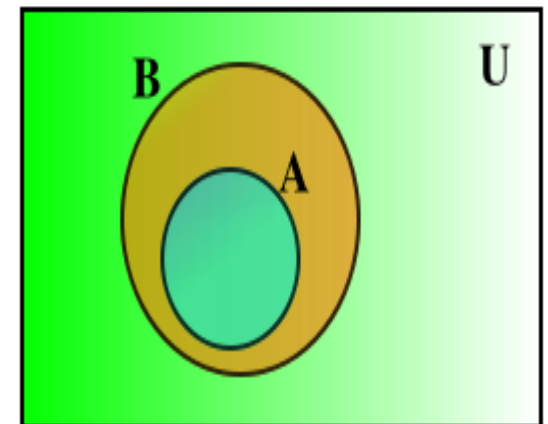
- Por ejemplo, según el ejemplo de hace un rato:

$A = \{\text{Sra. Allen; Sta. Brown; Sr. Smith; Sr. Walker}\}$

Y sea

$B = \{\text{Sra. Allen; Sta. Brown; Sr. Smith}\}$

Como se puede notar, todos los elementos que están dentro de B, también están contenidos en A, por lo que B es un subconjunto de A



# Conceptos

## Experimento

Proceso o actividad que conduce a un resultado u observación.

Ejemplos:

- Lanzar un dado
- Lanzar dos dados
- Jugar cartas (poker).
- Tirar una moneda al aire.
- Tirar la monerda 3 veces al aire



# Conceptos

## Evento

A cada uno de los posibles resultados de un experimento, se le conoce como eventos.



## Ejemplos:

- Obtener un “4” en el lanzamiento de un dado.
- Obtener un “4” y un “2” en el lanzamiento de dos dados
- Obtener 3 “As” y dos “Reyes”
- Obtener un escudo.
- obtener dos escudos y una corona.



# Conceptos

## Eventos mutuamente excluyentes

Dos o más eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento (o eventos).

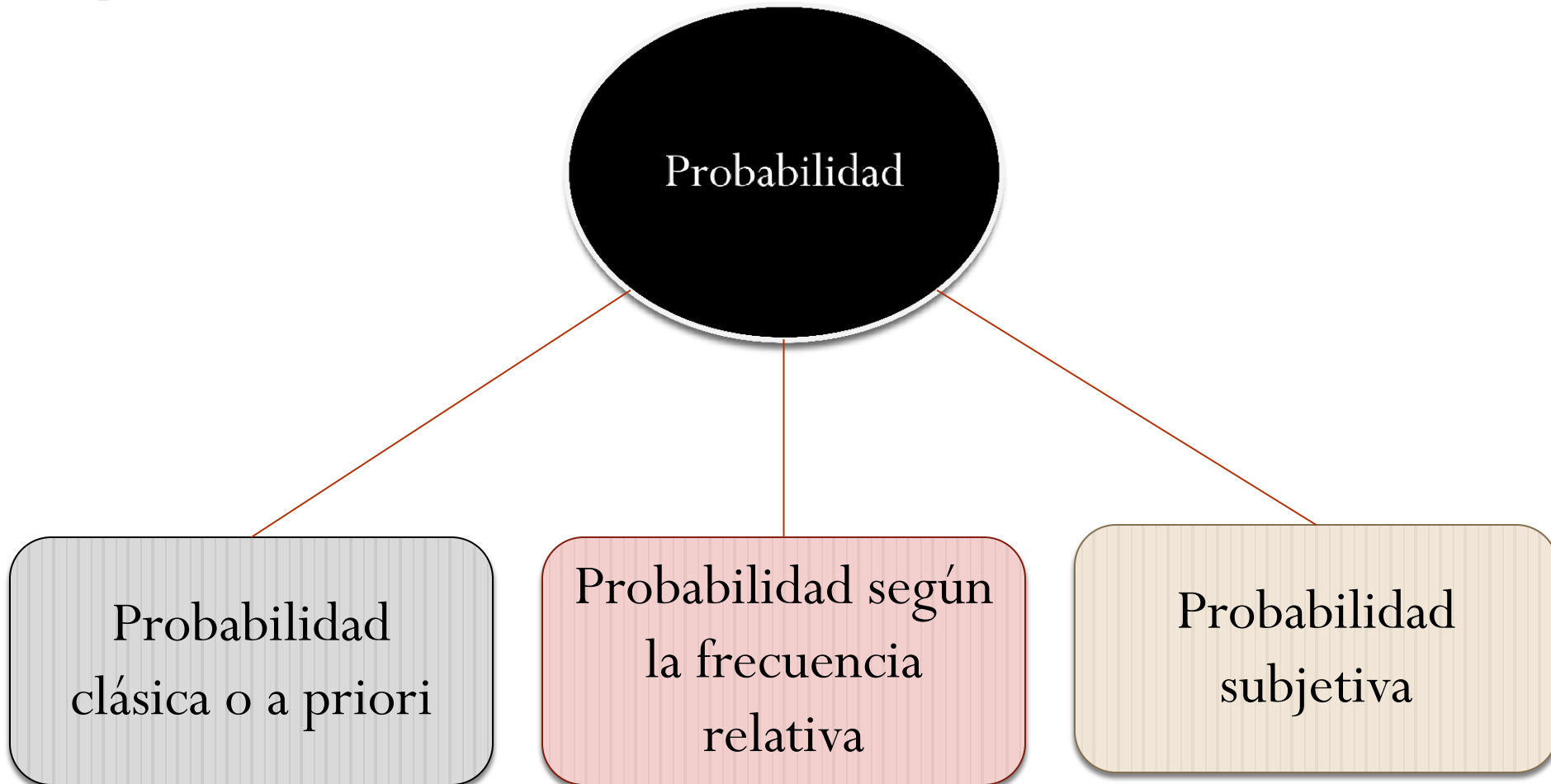
Ejemplo:

Al lanzar una moneda solo puede ocurrir que salga cara o sello pero no los dos a la vez, esto quiere decir que estos eventos son excluyentes.



# Los 3 enfoques de la probabilidad

- Actualmente hay 3 grandes conceptos o formas de ver la probabilidad.



# Índice

1

La esencia de la  
probabilidad y  
conceptos

2

Probabilidad clásica  
o a priori

¿De cuerdo al total de resultados posible, cuál es la posibilidad de obtener... o de que..?



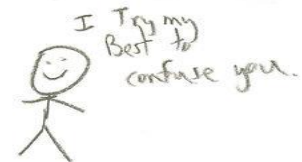
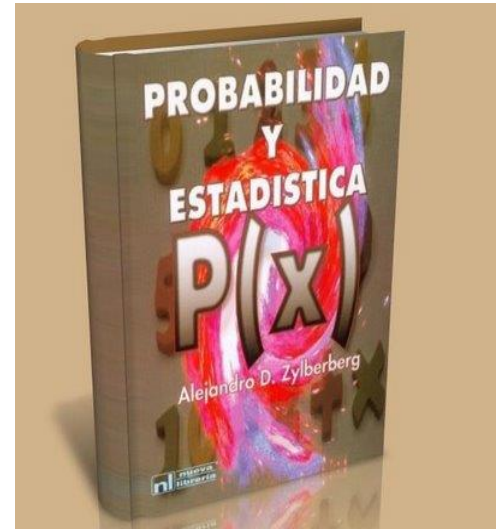
# Probabilidad clásica o a priori

- La definición formal de la *Probabilidad Clásica* es la siguiente:

*“Si un experimento puede ocurrir de  $N$  resultados igualmente probables y mutuamente excluyentes y si dentro de estos  $N$  resultados el eventos “ $E$ ” puede ocurrir  $N_e$  veces, entonces la probabilidad del evento  $E$ , que se escribe  $P(E)$ , está dada por:*

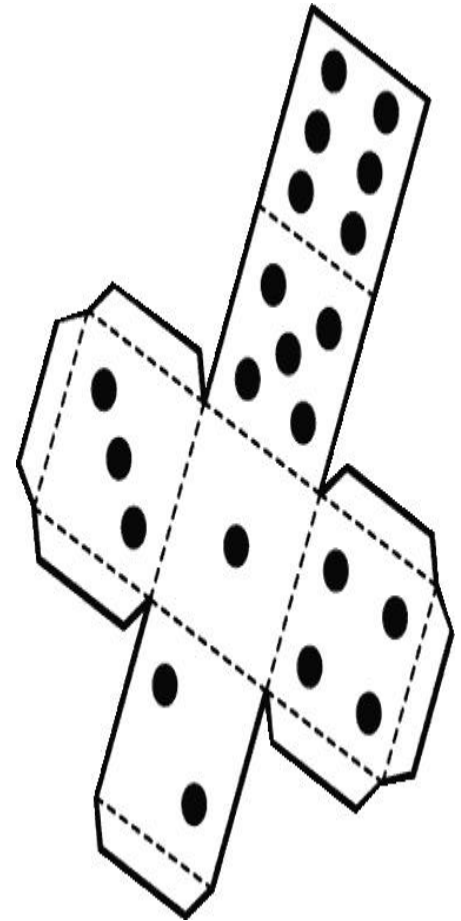
$$P(E) = \frac{N_e}{N}$$

....ejemplifiquemos la definición anterior.....



# Probabilidad clásica o a priori

- Supongamos un experimento como el lanzamiento de un dado, que consta de un total de 6 resultados ( $N=6$ ).
- Además se sabe que todos los resultados son igualmente probables, ya que tienen la misma oportunidad de salir, y que son mutuamente excluyentes, ya que o sale un “1”, o sale “3”, pero no puede salir un “1” o un “3” a la vez.
- Ahora, supongamos que queremos saber la probabilidad de sacar un “4” en un dado. En este caso el evento “4” (E), puede ocurrir una única vez ( $N_E$ ).



# Probabilidad clásica o a priori

- Entonces la probabilidad del evento “4” (E), se escribe como  $P(4)$ , y está dado por:

$$P(4) = \frac{1}{6}$$

- De acuerdo a todo lo anterior, cuál sería la probabilidad de tener:
  - Un número par.
  - Un número impar.
  - Un número menor a 5.
  - Un número mayor o igual a 3.



# Juguemos cartas

Supóngase que se va a jugar cartas...

1. Cuántos son todos los posibles resultados en un juego de cartas.
2. Si un evento consta en sacar un “10”, cuál sería esa probabilidad.
3. Si un evento consta en obtener cartas mayores o iguales a una “Jota”, cuál sería la probabilidad.
4. Si un evento consta en tener sólo cartas menores a 6, cuál sería la probabilidad.



# Probabilidad clásica o a priori

- El enfoque de la probabilidad clásica es el emplear un razonamiento lógico previo o a priori.

¿Por qué?



# Índice

1

La esencia de la  
probabilidad y  
conceptos

2

Probabilidad clásica  
o a priori

3

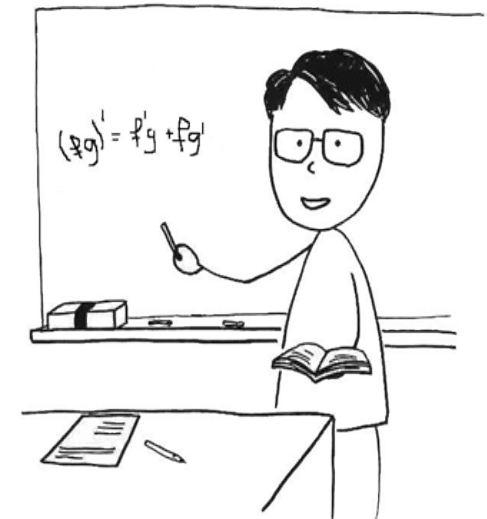
Probabilidad  
frecuencia relativa

¿De acuerdo al total de resultados que se observan, cuál es la posibilidad de obtener... o de que..?



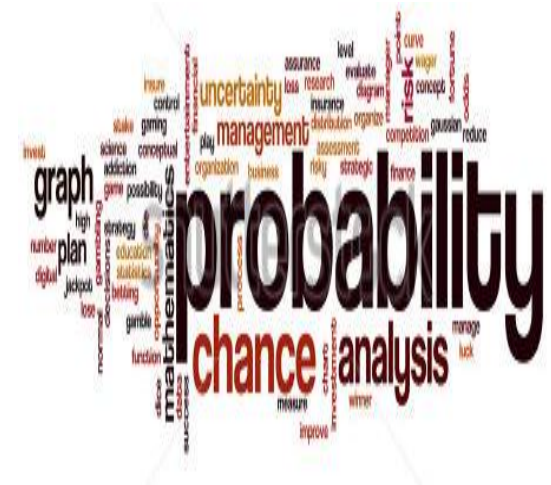
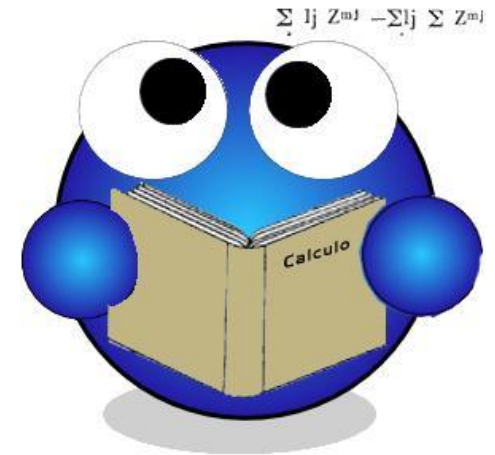
# Probabilidad según la frecuencia relativa

- Un problema de la probabilidad a priori consiste en que se supone que los resultados son igualmente probables, pero en la práctica esto casi nunca sucede.
- Además, hay muchos casos en donde no se puede establecer desde antes las probabilidades a priori de cierto acontecimiento.
- En la actualidad, el concepto más frecuente es el de la *Frecuencia Relativa*.



# Probabilidad según la frecuencia relativa

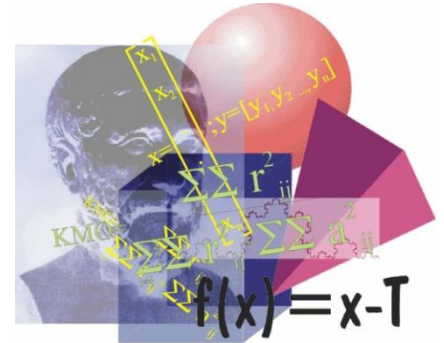
- Imaginemos que se quiere saber la probabilidad de que al nacer un bebé, este sea un hombre o una mujer.
- Aunque si se establece que la mitad de los chances es que sea un hombre, y la otra parte mujer, en la práctica esto no ha resultado de la misma forma: suelen nacer más hombres que mujeres.
- ¿Cómo podríamos calcular entonces una probabilidad de tal forma de no pasar por el enfoque clásico?



# Probabilidad según la frecuencia relativa

- La probabilidad según el concepto de frecuencia relativa se suele expresar de la siguiente forma:

$$P(e) \approx \frac{n_x}{n} \quad \longrightarrow \quad P(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_x}{n}$$

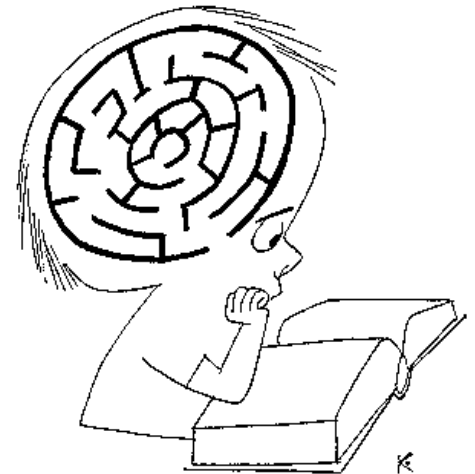


$P(E)$  = es la probabilidad de ocurrencia del evento de interés.

$n_E$  = es el número de veces que ocurre el evento E  
en

los  $n$  ensayos.

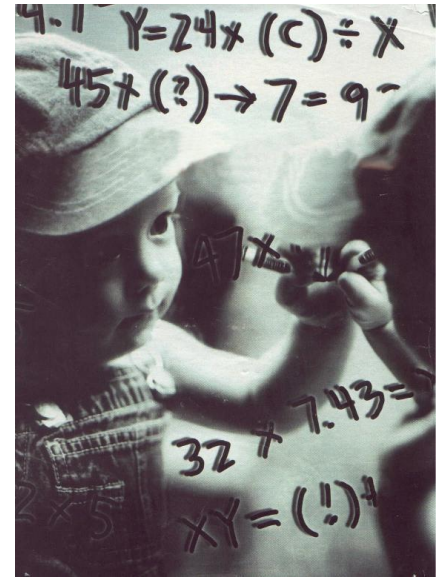
$n$  = el total de ensayos de un posible experimento.



# Probabilidad según la frecuencia relativa

- Ahora, supongamos que queremos saber con qué probabilidad podría nacer un niño en CR en el 2010. Según los registros se tiene que para el presente año hubo 105 nacimientos de hombres y 100 nacimientos de mujeres.
- Entonces en total hubo 205 nacimientos.
- ¿Cómo calculamos la probabilidad según el enfoque de frecuencia relativa?

$$P(E) = \frac{ne}{n}$$



# Probabilidad según la frecuencia relativa

- El resultado es muy similar a una proporción:

$$P(\text{"niño"}) = \frac{\text{niños nacidos}}{\text{total de nacimientos}}$$

$$P(\text{"niño"}) = \frac{105}{205}$$

$$P(\text{"niño"}) = 0.512$$



# Probabilidad según la frecuencia relativa

- Entonces, de acuerdo al resultado anterior, la probabilidad de nacer de un niño en CR es de 0.512.
- Nótese que el resultado de la presente probabilidad recurrió la necesidad de los datos obtenidos.
- Además, en este caso no hay ningún pensamiento anterior o posterior, todo se fundamente en la información presente.



# Probabilidad según la frecuencia relativa

- Con este nuevo concepto de la probabilidad según la frecuencia relativa, que pasó con el enfoque clásico....



$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

# Índice

1

La esencia de la  
probabilidad y  
conceptos

4

Probabilidad  
subjetiva

2

Probabilidad clásica  
o a priori

3

Probabilidad  
frecuencia relativa

¿De cuerdo a la información que manejo o poseo, cuál es la posibilidad de obtener... o de que..?



# Probabilidad subjetiva

- Existen muchos eventos de interés cuyas probabilidades de ocurrencia no se pueden calcular de acuerdo con los métodos de frecuencia relativa o de probabilidad a priori.
- Los métodos anteriores no prestan ninguna ayuda para calcular la probabilidad de que , por ejemplo:
  - Haya vida en algún planeta distante
  - En los próximos 10 años se descubra algún remedio contra el cáncer.
  - Cierta persona vaya a destacar en la universidad.
  - Mañana vaya a llover.



# Probabilidad subjetiva

- Muchas veces escuchamos que según el nivel de precipitación y la nubosidad en el cielo, se tiene una probabilidad del 70% de que vaya a llover.
- Aquellas probabilidades que nos permite asignarle probabilidades a eventos tales como estos, en donde no hay un claro respaldo de datos para el momento, se le denomina como *probabilidad subjetiva*.
- Este método tiene un gran fundamento en la estadística Bayesiana. Los dos enfoques de probabilidad anterior se conciben como un caso especial de la probabilidad subjetiva.



# Probabilidad subjetiva

- ¿Es fácil de entender el enfoque de probabilidad subjetiva?

## Likelihoods for continuous distributions [\[ edit \]](#)

The use of the [probability density](#) instead of a probability in specifying the likelihood function above is justified as follows. The likelihood that an observation  $x$  lies in the interval  $[x_j, x_j + h]$ , where  $x_j$  is a specific observed value and  $h > 0$  a constant, is given by  $\mathcal{L}(\theta|x \in [x_j, x_j + h])$ . Observe that

$$\arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta|x \in [x_j, x_j + h]) = \arg \max_{\theta} \frac{1}{h} \mathcal{L}(\theta|x \in [x_j, x_j + h]), \text{ since } h \text{ is positive and constant. Because}$$

$$\arg \max_{\theta} \frac{1}{h} \mathcal{L}(\theta|x \in [x_j, x_j + h]) = \arg \max_{\theta} \frac{1}{h} \Pr(x_j \leq x \leq x_j + h|\theta) = \arg \max_{\theta} \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j + h} f(x|\theta) dx, \text{ where } f(x|\theta) \text{ is the probability density function of}$$

the variable  $x$ , it follows that  $\arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta|x \in [x_j, x_j + h]) = \arg \max_{\theta} \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j + h} f(x|\theta) dx$ . The first [fundamental theorem of calculus](#) and the [l'Hôpital's rule](#)

$$\text{together provide that } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j + h} f(x|\theta) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dh} \int_{x_j}^{x_j + h} f(x|\theta) dx}{\frac{dh}{dh}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_j + h|\theta)}{1} = f(x_j|\theta). \text{ Then,}$$

$$\arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta|x_j) = \arg \max_{\theta} \left[ \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(\theta|x \in [x_j, x_j + h]) \right] = \arg \max_{\theta} \left[ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j + h} f(x|\theta) dx \right] = \arg \max_{\theta} f(x_j|\theta). \text{ Therefore,}$$

$$\arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta|x_j) = \arg \max_{\theta} f(x_j|\theta).$$

# Índice

1

La esencia de la  
probabilidad y  
conceptos

4

Probabilidad clásica  
o a priori

2

Probabilidad clásica  
o a priori

5

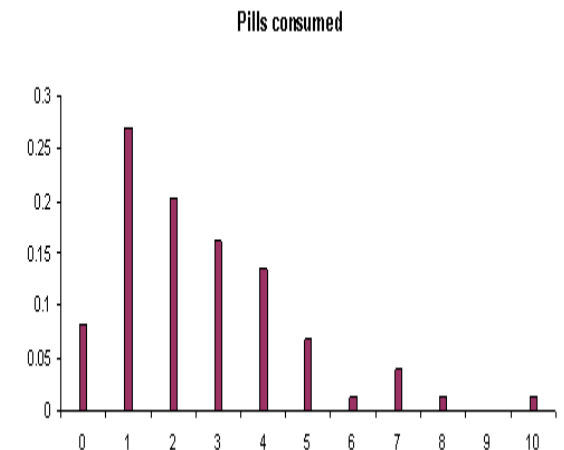
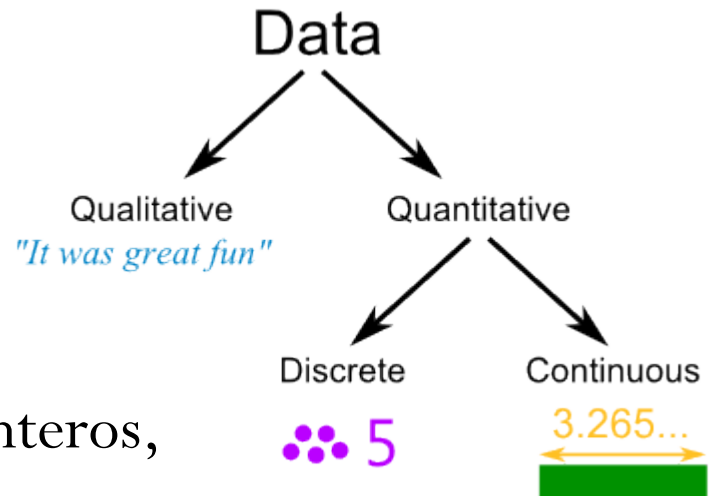
Distribución de  
probabilidad  
discreta

3

Probabilidad  
frecuencia relativa

# Datos discretos

- ¿Qué son datos discretos?
- Datos de que son números reales enteros, que van desde 0 hasta  $+\infty$
- 0, 1, 2, 3, ..., n
- Ejemplo: número de hijos, cantidad de nacimientos, número de accidentes en la carretera, etc.

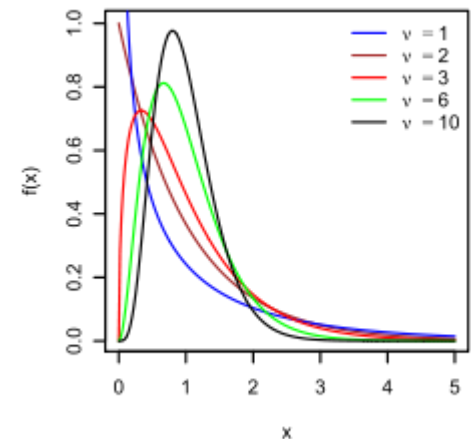
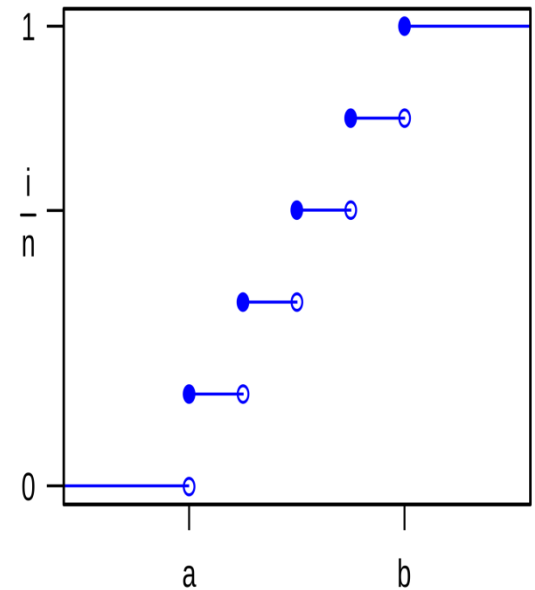


# Función de probabilidad discretas

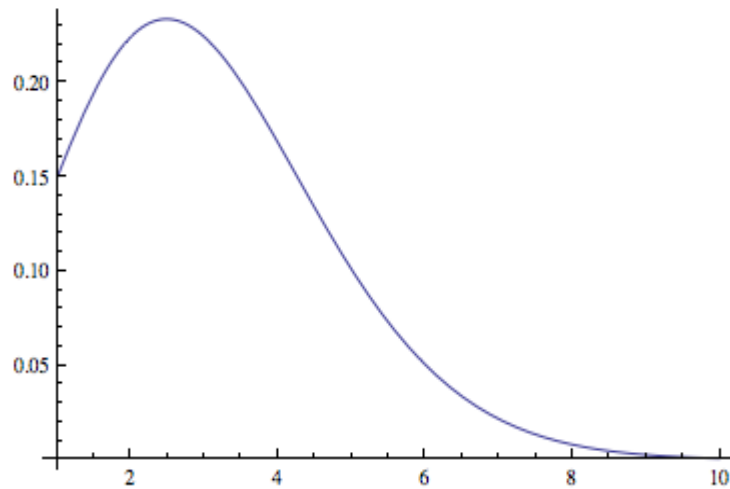
- Las funciones discretas son distribuciones que asignan una probabilidad a un fenómeno de esta clase.
- En este tipo de funciones de distribución, para obtener la probabilidad, se utilizan sumatorias:

$$\Sigma$$

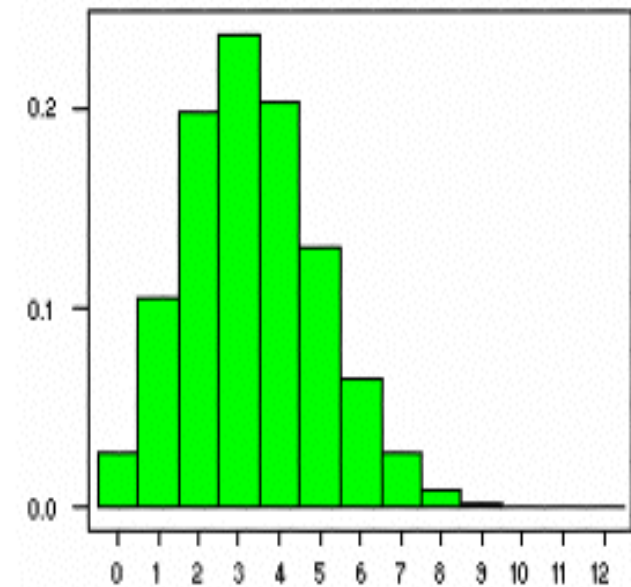
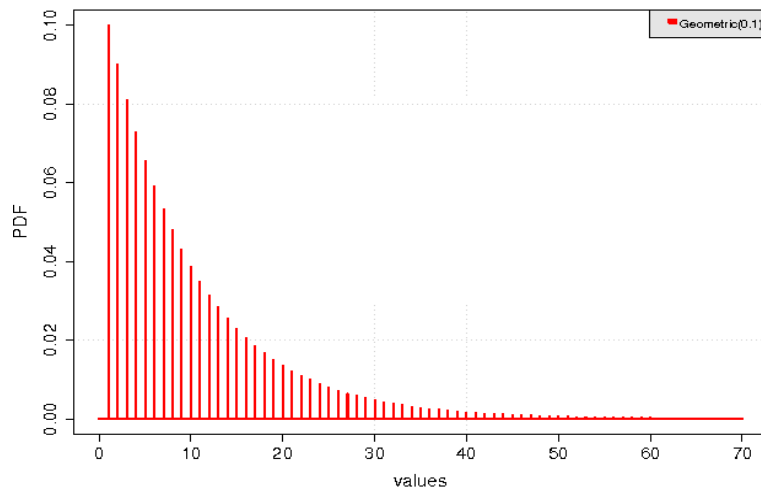
- Las funciones discretas más conocidas son: poisson, bernoulli, binomial, binomial negativa, geométrica, la hypergeométrica, etc.



# Función de probabilidad discretas



PDF – Geometric(p)



# Índice

1

La esencia de la  
probabilidad y  
conceptos

4

Probabilidad clásica  
o a priori

2

Probabilidad clásica  
o a priori

5

Distribución de  
probabilidad  
discreta

3

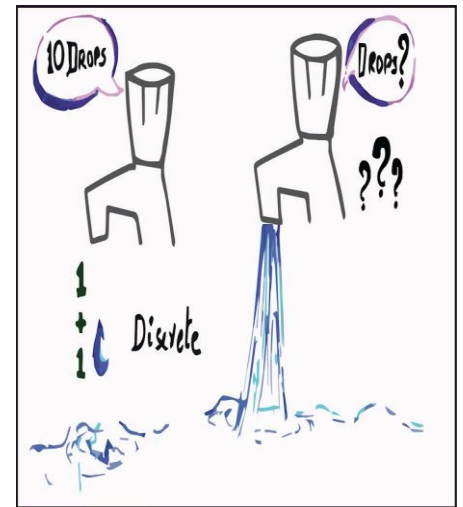
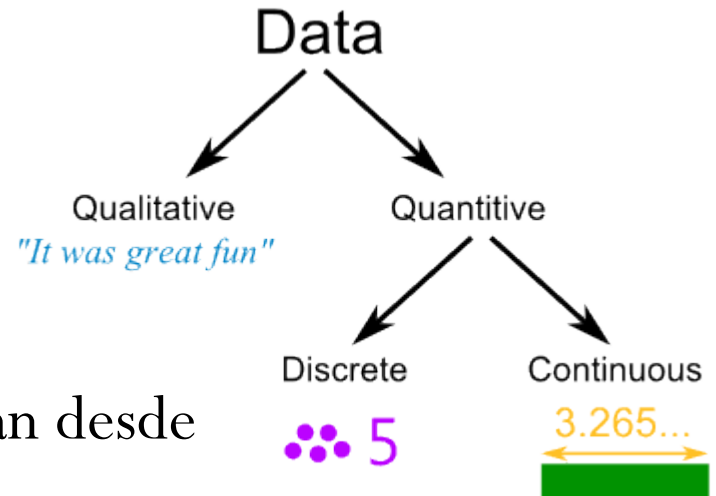
Probabilidad  
frecuencia relativa

6

Distribución de  
probabilidad  
continua

# Datos continuos

- ¿Qué son datos continuos?
- Datos de que son números reales, que van desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ .
- $-\infty$ , -344.3, -243.9, 0, 5342.8, 34234.6,  $+\infty$
- Ejemplo: salario, cantidad de glóbulos rojos, presión sanguínea, volumen del agua, etc.

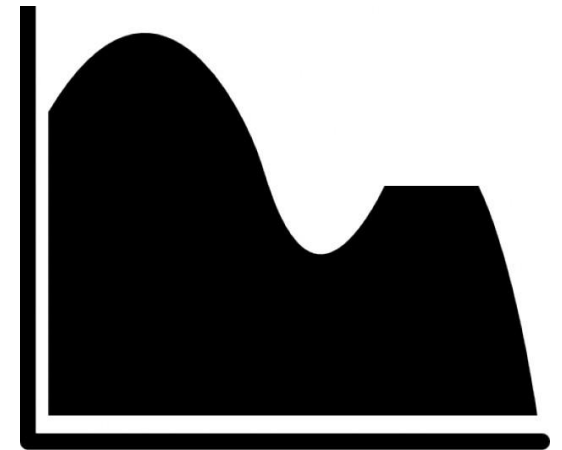
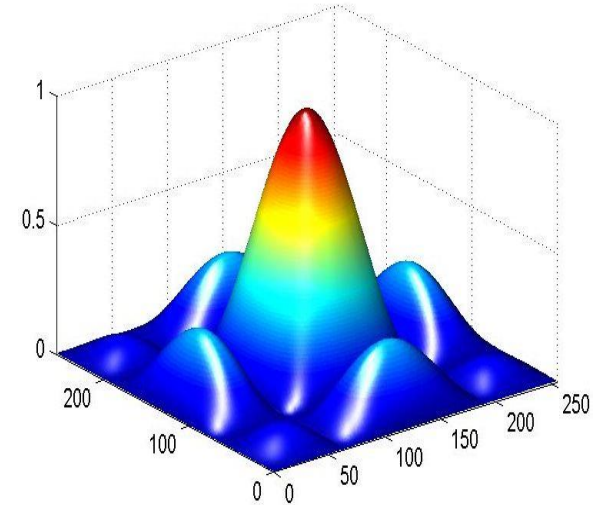


# Función de probabilidad continua

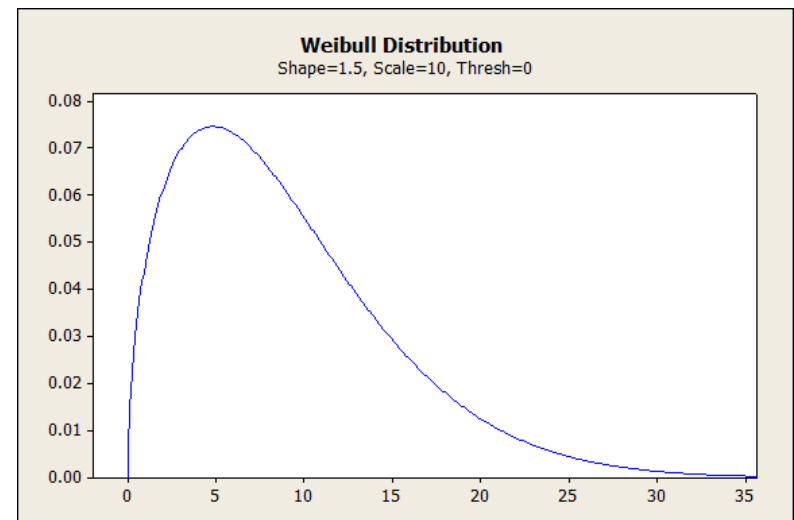
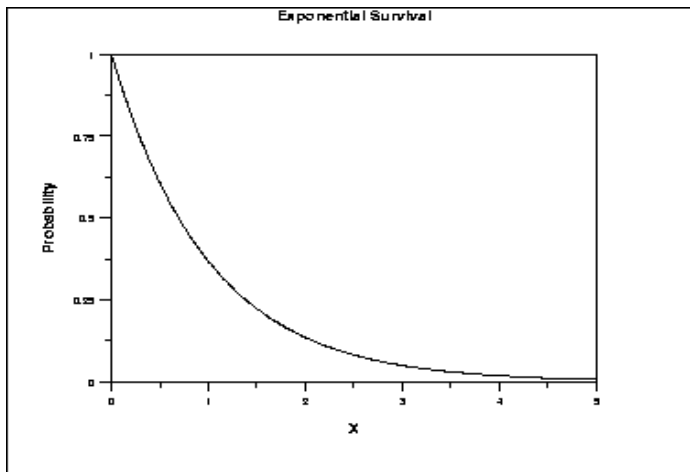
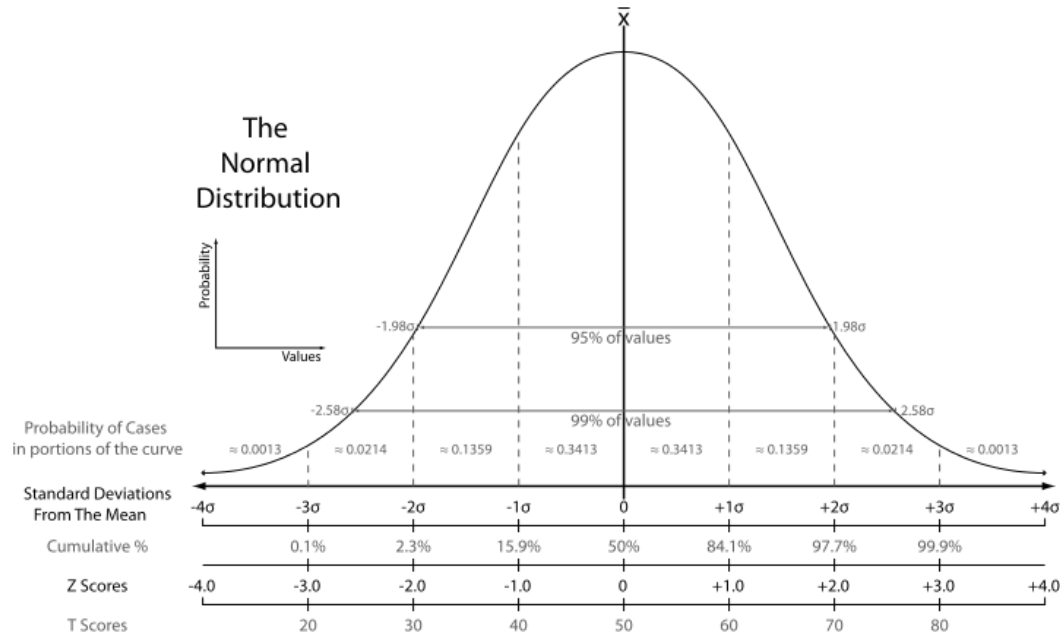
- Las funciones continuas son distribuciones que asignan una probabilidad a un fenómeno de esta clase.
- En este tipo de funciones de distribución, para obtener la probabilidad, se utilizan integrales:

$$\int \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

- Las funciones continuas más conocidas son: Normal, Exponencial, Weibull, Gamma, Beta, etc. .

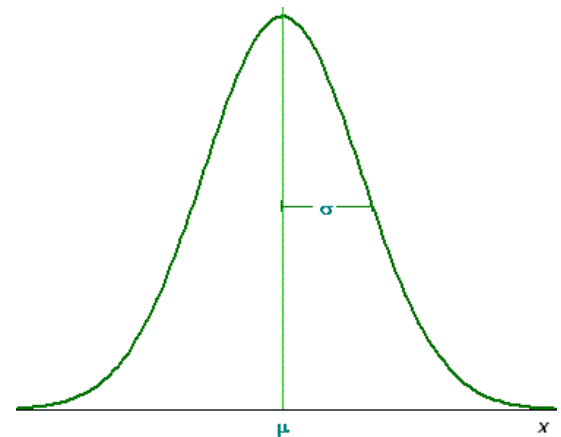


# Función de probabilidad continua



# Últimas reseñas

- En la actualidad, las probabilidades son el fundamento de todo tipo de análisis.
- El desarrollo de la inferencia estadística es gracias a los fuertes fundamentos de probabilidad.
- Volveremos a utilizar las probabilidades en el capítulo de la curva normal y la normal estándar.



arte

