COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures

Introduction

De manière informelle, une fonction élémentaire est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et qui « s'exprime par composition » à l'aide de la fonction exponentielle ($e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}$), de la fonction logarithme ($\log(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$), des opérations rationnelles (somme, produit, quotient) et d'opérations algébriques (telles que les racines n-ièmes). Par exemple, les fonctions :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\frac{z^{1995 \sqrt[3]{\sin \frac{z^2}{1+z}}}}{e^{\sqrt{\log z}}},\ \arctan(z) = \frac{\log(1+iz) - \log(1-iz)}{2i}$$

sont élémentaires. Il est plausible, d'après cette vague définition, que la dérivée d'une fonction élémentaire est encore élémentaire et il est bien connu qu'une fraction rationnelle à coefficients réels ou complexes admet comme primitive une fonction élémentaire. Par contre, il existe des fonctions élémentaires très simples n'ayant pas de primitive qui soit élémentaire : c'est le cas par exemple de la fonction $z \mapsto e^{z^2}$; il est donc impossible de calculer « la » primitive d'une telle fonction, du moins avec les règles du jeu habituel.

Le but de l'épreuve consiste d'une part à formaliser le concept de fonction élémentaire et d'autre part à prouver un critère dû en partie à Liouville (1835), amélioré par Ostrowski (1946) permettant de tester si certaines fonctions admettent comme primitive une fonction élémentaire. Le cadre de cette étude est purement algébrique, la notion de primitive étant considérée comme inverse de la dérivée : on dispose d'un corps de base K (penser au corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), d'un surcorps E de K (on admettra ici que l'ensemble des fonctions développables en série entière sur un ouvert connexe de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un anneau intègre dont on peut considérer le corps des fractions) et d'un opérateur de dérivation $D : E \to E$ satisfaisant aux propriétés habituelles (c.f. la suite). Il est alors possible de définir de manière rigoureuse ce que veut dire « $f \in E$ est élémentaire sur K » et de donner dans certains cas un critère permettant d'affirmer que $f \in E$ admet une primitive $g \in E$, i.e. $D(g) = f$, élémentaire sur K.

Partie 0 : Préliminaires

Nous supposerons que tous les corps considérés dans le problème sont commutatifs et contiennent $\mathbb{Q}$; en particulier, si x est élément d'un tel corps et $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors $nx = 0$ implique $x = 0$. On rappelle que si K est un corps (commutatif), l'anneau des polynômes $K[X]$ est un anneau principal.

- Soit E un surcorps d'un corps K c'est-à-dire un corps contenant K ; un élément $x \in E$ est **algébrique** sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) = 0$; il est dit **transcendant** sur K dans le cas contraire. Pour $x \in E$, on désigne par $K(x)$ le plus petit sous-corps de E contenant K et x.

  1. Si $x \in E$ est algébrique sur K, montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme *unitaire* $P_x \in K[X]$ tel que, pour $Q \in K[X]$, on ait l'équivalence $Q(x) = 0 \Leftrightarrow P_x \mid Q$; montrer alors que $K(x) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} K x^i$ où $n = \deg P_x$; en particulier $\dim_K K(x) = n$.

  Réciproquement, si $K(x)$ est de dimension finie sur K, montrer que x est algébrique sur K (considérer les puissances de x dans le K-espace vectoriel $K(x)$).

Le polynôme P_x est appelé le **polynôme minimal** de x sur K.

2. Si $x \in E$ est transcendant sur K, montrer que l'application $K(X) \to E, R \mapsto R(x)$ induit un isomorphisme du corps des fractions rationnelles $K(X)$ sur le corps $K(x)$.

Partie I : Les dérivations et leurs propriétés élémentaires

- Une **dérivation** sur un corps K est une application $D : K \to K$ satisfaisant à :
$$D(u+v) = D(u) + D(v),\ D(uv) = D(u)v + D(v)u,\ u, v \in K.$$
- Un **corps différentiel** K est un corps muni d'une dérivation D ; on note $K_{cst} = \{u \in K \mid D(u) = 0\}$ que l'on appelle le **sous-corps des constantes**.

1. Que vaut $D(1)$? Pour $(u, v) \in K \times K^*$, exprimer $D(u/v)$ en fonction de u, v, $D(u)$, $D(v)$. Question analogue pour $D(u^n)$ avec $(u, n) \in K \times \mathbb{N}$ ou $(u, n) \in K^* \times \mathbb{Z}$.

Vérifier que K_{cst} est bien un sous-corps de K. Quelle propriété possède la « dérivée logarithmique » $K^* \to K$ qui à u associe $D(u)/u$? À quelle condition a-t-on $D(u)/u = D(v)/v$?

2. Si $P = \sum\limits_i a_i X^i \in K[X]$, on note P^D le polynôme $\sum\limits_i D(a_i)X^i$ et P' le polynôme dérivé de P au sens habituel i.e. $P' = \sum\limits_i i a_i X^i$. Pour $u \in K$, vérifier que $D(P(u)) = P'(u)D(u) + P^D(u)$.

3. On rappelle qu'un polynôme à coefficients dans K est sans facteur carré s'il est produit de polynômes irréductibles distincts c'est-à-dire si les exposants intervenant dans sa décomposition en facteurs premiers sont tous égaux à 1. Soit D une dérivation sur le corps des fractions rationnelles $K(X)$ vérifiant $D(K[X]) \subset K[X]$. On considère une famille *finie* $(Q_j)_{j \in J}$ de polynômes non nuls de $K[X]$ *sans facteur carré et premiers entre eux deux à deux* et une égalité :
$$\sum_{j \in J} \frac{P_j}{Q_j} = D\left(\frac{P}{Q}\right),\ P_j, P \in K[X],\ Q \in K[X] \setminus \{0\},\ \text{pgcd}(P, Q) = 1.$$
Montrer que Q divise $D(Q)$. Montrer ensuite que si $j \in J$ est tel que $\text{pgcd}(Q_j, Q) = 1$, alors $Q_j \mid P_j$.

Partie II : Dérivation sur $K(X)$ de type logarithmique

- Un **surcorps différentiel** E d'un corps K est un surcorps de K muni d'une dérivation D vérifiant $D(K) \subset K$ et ayant **même sous-corps des constantes** que K (i.e. si $v \in E$ vérifie $D(v) = 0$ alors $v \in K$).

On considère dans cette partie une dérivation D sur le corps des fractions rationnelles $K(X)$ telle que $K(X)$ est un surcorps différentiel de K et $D(X) \in K$.

1. Soit $P = \sum\limits_i a_i X^i \in K[X]$; à l'aide de l'expression de $D(P)$ en fonction de $D(X)$, $P^D = \sum\limits_i D(a_i)X^i$ et P' (c.f. question **I.2**), montrer que $D(P) \in K[X]$ et comparer son degré avec celui de P. À quelle condition a-t-on $\deg D(P) < \deg P$?

2. Quels sont les polynômes *unitaires* $Q \in K[X]$ tels que Q divise $D(Q)$? les polynômes $P \in K[X]$ tels que $D(P) \in K$?

3. Soit R une fraction rationnelle de $K(X)$ telle que $D(R) \in K$; montrer $R = cX + g$ avec $c \in K_{cst}$ et $g \in K$.

- Dans un corps différentiel K, on appelle **somme de Liouville** dans K tout élément de K de la forme :
$$D(g) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{D(f_i)}{f_i},\ g \in K,\ c_i \in K_{cst},\ f_i \in K \setminus \{0\}.$$

4. Soit $f \in K$; on suppose que f est une somme de LIOUVILLE *dans* $K(X)$. Montrer qu'il existe $c \in K_{cst}$ tel que $f - cD(X)$ soit une somme de LIOUVILLE *dans* K. Pour cela, on montrera, en partant de la définition d'une somme de LIOUVILLE dans K(X), que l'on peut écrire f sous la forme :

$$f = D(R) + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j},$$

$$\text{avec } R \in K(X),\ f_i \in K \setminus \{0\},\ Q_j \in K[X] \setminus \{0\},\ c_i, d_j \in K_{cst},$$

les Q_j étant des polynômes *distincts* de $K[X]$, de degré non nul, irréductibles e t unitaires puis on utilisera la question **I.3**.

- Dans un corps différentiel K, on dit que $v \in K$ est un **logarithme** de $u \in K \setminus \{0\}$ si $D(v) = D(u)/u$ (penser à la formule $(\log u)' = u'/u$).
- Un surcorps différentiel E de K est dit **logarithmique** s'il est de la forme $E = K(v)$ où $v \in E$ est un logarithme d'une fonction $u \in K \setminus \{0\}$.

5. Soit $E = K(v)$ un surcorps différentiel logarithmique, v étant supposé transcendant sur K. Montrer le théorème de descente de LIOUVILLE : si $f \in K$ est une somme de LIOUVILLE *dans* E, alors f est une somme de LIOUVILLE *dans* K. Pour cela, on transportera la dérivation de E en une dérivation de $K(X)$ à l'aide de l'isomorphisme de corps $K(X) \leftrightarrow E$ (c.f. la question **0.2**) et on appliquera la question précédente.

Partie III : Dérivation sur $K(X)$ de type exponentiel

On considère dans cette partie une dérivation D sur le corps des fractions rationnelles $K(X)$ telle que :

$$K(X) \text{ est un surcorps différentiel de } K,\ \frac{D(X)}{X} \in K.$$

La première assertion signifie donc que $D(K) \subset K$ et $K(X)_{cst} = K_{cst}$ (en particulier $D(X) \neq 0$).

1. Soit $P \in K[X]$; montrer que $D(P) \in K[X]$ et comparer son degré avec celui de P.

2. Soit $P \in K[X]$; montrer que P divise $D(P)$ si et seulement si P est de la forme aX^n, avec $a \in K$.

3. Soit $R \in K(X)$ une fraction rationnelle ; montrer que si $D(R) \in K[X]$, alors soit $R \in K_{cst}$ soit R est un polynôme, de même degré que $D(R)$ (en particulier, si $D(R) \in K$ alors $R \in K$).

4. Soit $f \in K$; on suppose que f est une somme de LIOUVILLE *dans* $K(X)$. Montrer qu'il existe $c \in K_{cst}$ tel que $f - cD(X)/X$ soit une somme de LIOUVILLE *dans* K. Pour cela, on raisonnera comme dans la question **II.4**.

- Dans un corps différentiel K, on dit que $v \in K \setminus \{0\}$ est une **exponentielle** de $u \in K$ si $D(v)/v = D(u)$ (penser à la formule $(e^u)' = u'e^u$).
- Un surcorps différentiel E de K est dit **exponentiel** s'il est de la forme $E = K(v)$ où vE est une exponentielle d'un élément $u \in K$.

5. Soit $E = K(v)$ un surcorps différentiel exponentiel, v étant supposé transcendant sur K. Énoncer et montrer un théorème de descente de LIOUVILLE analogue à celui de la question **II.5**.

Partie IV : Norme, trace et descente dans un surcorps de dimension finie

Dans cette partie, K désigne un corps (rappel : K est commutatif et contient $\mathbb{Q}$, en particulier il est infini) ; si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension n, on note $\chi_u(T) = \det(TI_E - u) \in K[T]$ le polynôme caractéristique de u, $\Omega_u(T) \in K[T]$ le polynôme $\dfrac{\chi_u(T) - \chi_u(0)}{T}$ et $u^{\#}$ l'endomorphisme $(-1)^{n-1}\Omega_u(u)$.

1. Soit A la matrice de u dans une base de E ; montrer que la matrice $A^\#$ de $u^\#$ dans cette base est la transposée de la matrice des cofacteurs de A (considérer d'abord le cas où u est inversible ; considérer ensuite l'endomorphisme $u - \lambda I_E$ pour $\lambda \in K$).

2. Soit E un surcorps de K de dimension finie comme K-espace vectoriel ; on définit deux applications $\mathrm{tr} : E \to K$ (la trace) et $N : E \to K$ (la norme) par :

$\mathrm{tr}\,(x) = \mathrm{tr}\,(m_x)$, $N(x) = \det(m_x)$ ($m_x = y \mapsto xy$ est la multiplication par x dans E).

Vérifier que la trace est K-linéaire ; que vaut $\mathrm{tr}\,(\lambda)$ pour $\lambda \in K$? Vérifier que $N(xy) = N(x)N(y)$ pour $x, y \in E$; que vaut $N(\lambda)$ pour $\lambda \in K$?

Soit $x \in E$; montrer qu'il existe un unique $x^\# \in E$ tel que $(m_x)^\# = m_{x^\#}$. Vérifier que $x^\# x = x x^\# = N(x)$.

3. Soit D une dérivation sur K ; pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$, on note $D(A)$ la matrice $(Da_{i,j})$. Montrer que $D(\det A) = \mathrm{tr}\,\big(A^\# D(A)\big)$.

4. Soit D une dérivation sur E vérifiant $D(K) \subset K$. Montrer que $\mathrm{tr}\,(D(x)) = D\,(\mathrm{tr}\,(x))$ pour $x \in E$. Pour cela, on fixe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E sur K ($n = \dim_K E$) et on note $\Delta : E \to E$ l'unique application K-linéaire définie par $\Delta(e_i) = D(e_i)$ (attention, D n'est pas K-linéaire) ; soit $(a_{i,j})$ la matrice de m_x dans $\mathcal{B}$ et $m_x^D : E \to E$ l'application K-linéaire de matrice $(Da_{i,j})$. Vérifier que :

$$(*) \qquad m_x \circ \Delta + m_{D(x)} = \Delta \circ m_x + m_x^D$$

puis conclure.

5. Montrer que $\mathrm{tr}\,\big((x^\# D(x))\big) = N\,(N(x))$ (on pourra éventuellement utiliser une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E et la relation $(*)$ de la question précédente). En déduire que pour $x \in E\backslash\{0\}$:

$$\frac{D\,(N(x))}{N(x)} = \mathrm{tr}\left(\frac{D(x)}{x}\right).$$

6. Énoncer un théorème de descente pour un surcorps différentiel E de K de dimension finie.

Partie V : Le théorème de Liouville/Ostrowski

1. Soit E un surcorps différentiel de K ; si $x \in E$ est algébrique sur K, montrer que $D\,(K(x)) \subset K(x)$.

- Un surcorps différentiel E de K est dit **élémentaire** sur K s'il existe une suite $(K_i)_{0 \le i \le m}$ de sous-corps de E telle que :
$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_{m-1} \subset K_m = E$$
où K_{i+1} est ou bien de dimension finie sur K_i ou bien de la forme $K_i(v_{i+1})$, $v_{i+1} \in K_{i+1}$ étant soit un logarithme soit une exponentielle d'un élément de K_i. On rappelle que E et K ont même sous-corps de constantes.

2. Soit f appartenant à un corps différentiel K ; on suppose que f admet une primitive *dans* un surcorps différentiel E *élémentaire* sur K, i.e. il existe $g \in E$ tel que $D(g) = f$. Montrer que f est une somme de Liouville *dans* K : c'est le théorème de Liouville/Ostrowski (il ramène une propriété ayant lieu dans E à une propriété ayant lieu dans K).

Partie VI : $\int e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ n'est pas une fonction élémentaire

Soit K un corps différentiel et $u \in K$; afin d'alléger les notations, on note (de manière abusive) e^u tout élément appartenant à un surcorps différentiel de K qui est une exponentielle de u. Idem pour les logarithmes avec la notation $\log(u)$.

1. On reprend les hypothèses figurant au début de la partie **III**. Soit $f \in K$; montrer que Xf est une somme de Liouville dans $K(X)$ si et seulement si il existe $g \in K$ tel que $f = D(g) + gD(X)/X$. Si de plus, K est égal à un corps de fractions rationnelles $k(T)$ (à coefficients dans un corps k) muni de la dérivation habituelle, montrer que si f et $D(X)/X$ appartiennent à $k[T]$, alors $g \in k[T]$ (i.e. si f et $D(X)/X$ sont des *polynômes* en T, alors g est un polynôme en T).

2. Soit E un surcorps différentiel de K ; on considère un élément $v \in E$ telle que $D(v) \in K$ (c'est le cas par exemple de $v = \log(u)$ pour $u \in K \setminus \{0\}$; montrer que si $v \notin K$, alors v est transcendant sur K. De manière analogue, pour $u \in K$, montrer que e^u est transcendant sur K sauf dans le cas où il existe un entier $n > 0$ tel que nu soit un logarithme d'un élément de K (dans les deux cas, on pourra raisonner par l'absurde et considérer le polynôme minimal de v sur K).

3. On considère le corps différentiel « habituel » $K = \mathbb{C}(T)$; montrer qu'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(T)$ *non constante* n'admet pas de logarithme dans $\mathbb{C}(T)$. En déduire que si $u \in \mathbb{C}(T)$ n'est pas une constante, alors e^u est transcendante sur $\mathbb{C}(T)$.

4. En déduire le critère de Liouville : soient $f \in \mathbb{C}(T)$, $u \in \mathbb{C}(T)\setminus\mathbb{C}$; alors fe^u admet une primitive dans un surcorps différentiel élémentaire de $\mathbb{C}(T)$ si et seulement si il existe $g \in \mathbb{C}(T)$ tel que $f = g' + gu'$. De plus, si f, u sont des polynômes, alors g est un polynôme et $\deg u \leq 1 + \deg f$.

5. En déduire que $\displaystyle\int e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ n'est pas une fonction élémentaire i.e. n'appartient à aucun surcorps différentiel élémentaire de $\mathbb{C}(T)$.