

CURVAS E SUPERFÍCIES

LISTA 1

Osmar Cardoso Lopes Filho
osmarclopesfilho@gmail.com

Esse documento possui códigos que geram animações no formato gif e que podem ser acessadas separadamente no seu [repositório](#).

Questão 1

Queremos uma parametrização $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que descreva $x^2 + y^2 = 1$. O traço deve ser percorrido no sentido anti-horário e $\alpha(0) = (1, 0)$.

Primeiramente, escrevemos a representação implícita em coordenadas polares. Substituindo $x = \cos(\theta)r$ e $y = \sin(\theta)r$, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) &= 1 \\ \Rightarrow \forall \theta \quad r &= 1 \end{aligned}$$

Como r é contínuo, definimos θ como nosso único parâmetro, com intervalo $[0, 2\pi)$, obtendo, então, as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos(\theta) \\ y(\theta) &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Em seguida, escreveremos essas equações num ambiente CAS (*Computer Algebra System*) e computaremos o traço descrito por elas. O ambiente que usaremos será a linguagem de programação Julia equipada com os pacotes Symbolics e Plots. A seguir, temos o código que será usado:

```
using Symbolics
using Plots

@variables θ;

x = cos(θ);
y = sin(θ);

tlen = 100;
tvec = range(start=0, stop=2π, length=tlen);

# Initialize a plot with a single, empty series which
# the push! function inside the loop will target.
plt = plot(1; size = (600, 600), lim = (-1.2, 1.2), linewidth = 2);
anim = @animate for t in tvec
    xval = Symbolics.value(substitute(x, Dict{θ => t}));
    yval = Symbolics.value(substitute(y, Dict{θ => t}));

    push!(plt, (xval, yval));
end

gif(anim, "circle.gif");
```

A partir das equações, calculamos uma série de pontos a partir de entradas equidistantes no intervalo de θ . Esse cálculo ocorre dentro de um for loop contido num macro @animate, o qual nos permite

criar um gif do traço sendo criado. Os valores de x e y são calculados utilizando a função `substitute` do `Symbolics`, a qual troca θ pelas entradas que escolhemos em seu intervalo. O resultado é então convertido para um tipo padrão de `Julia` e é atribuído a sua variável. A seguir está o círculo criado:

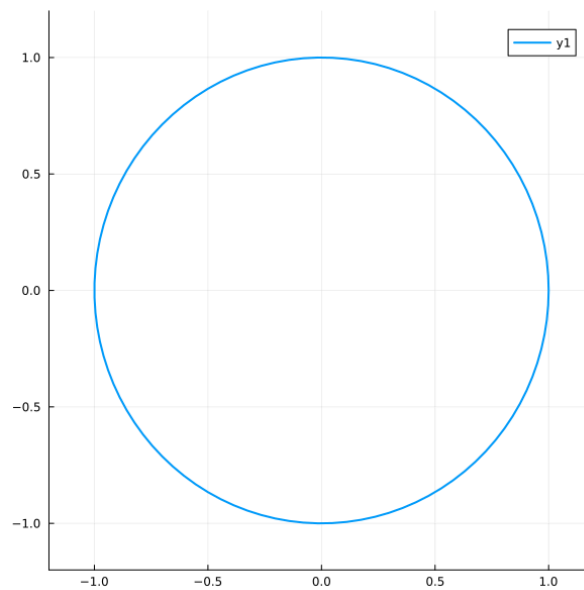


Figure 1: Círculo parametrizado.

Em seguida, podemos calcular as derivadas dessas equações para construir vetores tangentes à curva. Fazemos isso continuando o código da seguinte forma:

```
Dθ = Differential(θ);

xDθ = expand_derivatives(Dθ(x));
yDθ = expand_derivatives(Dθ(y));

tanvec = [
    x      y
    x + xDθ  y + yDθ
];

v1 = Symbolics.value.(substitute.(tanvec, (Dict{θ => π/6},)));
v2 = Symbolics.value.(substitute.(tanvec, (Dict{θ => 2π/3},)));
v3 = Symbolics.value.(substitute.(tanvec, (Dict{θ => π},)));

# NaN entries are added to signal an interruption in the series, creating separated
# lines.
v = [
    v1
    [NaN NaN]
    v2
    [NaN NaN]
    v3
];

plot!(plt, (v[:,1], v[:,2]); linecolor=:red, arrow=true)
```

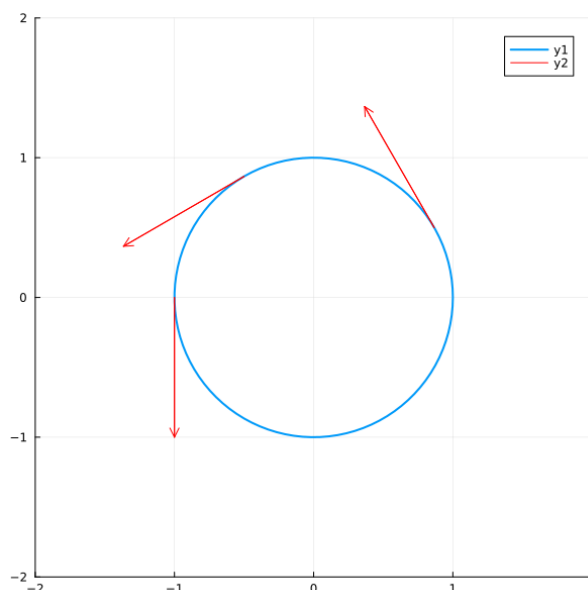


Figure 2: Circulo parametrizado com vetores tangentes.

Questão 2

Queremos desenhar a *Limaçon*, curva parametrizada da seguinte forma:

$$\gamma(t) = ((1 + 2 \cos(t)) \cos(t), (1 + 2 \cos(t)) \sin(t)); t \in \mathbb{R}$$

Note que o código apresentado até o momento não é modularizado e falha em seguir uma das mais importantes regras idiomáticas de Julia: *Escreva funções, não apenas scripts*. Além de deixar o código mais legível e reutilizável – ambas heurísticas para uma vida mais feliz – o compilador de Julia é melhor em otimizar funções do que código solto do escopo global.

Daqui em diante, começaremos a modularizar o código visto em questões passadas, reutilizando as função que criarmos. A seguir, está o código para desenhar a *limaçon*:

```
using Symbolics
using Plots

function curvepoints(xexp::Num, yexp::Num, param::Num, values)
    vlen = length(values)
    points = zeros((vlen, 2))

    for i = 1:vlen
        t = values[i]
        points[i, :] = Symbolics.value.(
            substitute.([xexp yexp], (Dict{param => t},))
        )
    end
    return points
end

@variables t

x = (1 + 2cos(t))*cos(t);
y = (1 + 2cos(t))*sin(t);
```

```

points = curvepoints(x, y, t, range(0, 2π, length = 120));

# For generating a still image
# plt = plot((points[:,1], points[:,2]); size=(500, 500), linewidth=2)

plt = plot(1; size=(500, 500), linewidth=2, xlim=(-0.5,3.2), ylim=(-2,2));
anim = @animate for i = 1:120
    push!(plt, (points[i,1], points[i,2]))
end

gif(anim, "pasnail.gif");

```

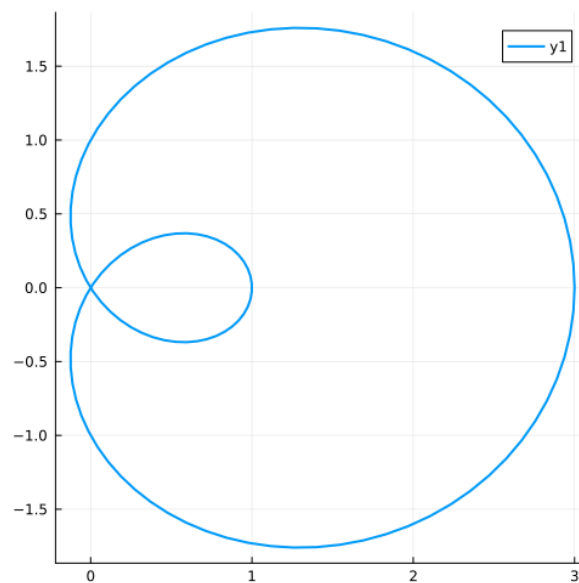


Figure 3: Limaçon

Essa curva passa duas vezes pelo ponto $(0, 0)$ no intervalo $[0, 2\pi)$. Visualizamos ambos os vetores tangentes a esse ponto ao acrescentar o seguinte código:

```

function tangvectors(xexp::Num, yexp::Num, param::Num, values)
    vlen = length(values)*3

    vectors = zeros((vlen, 2))

    D = Differential(param)
    dxexp = expand_derivatives(D(xexp))
    dyexp = expand_derivatives(D(yexp))

    tanvec = [
        xexp yexp (xexp + dxexp) (yexp + dyexp)
    ]

    for i = 1:3:vlen
        t = values[(i÷3) + 1]
        vectors[i, :] = Symbolics.value.(
            substitute.([xexp yexp], (Dict(param => t),))
        )
    end
end

```

```

        vectors[i+1, :] = Symbolics.value.(
            substitute.([xexp+dxexp yexp+dyexp], (Dict{param => t},))
        )
        vectors[i+2, :] = [NaN NaN]
    end

    return vectors
end

vectors = tangvectors(x, y, t, [2π/3 4π/3]);
plot!(plt, (vectors[:,1], vectors[:,2]); linecolor=:red, arrow=true)

```

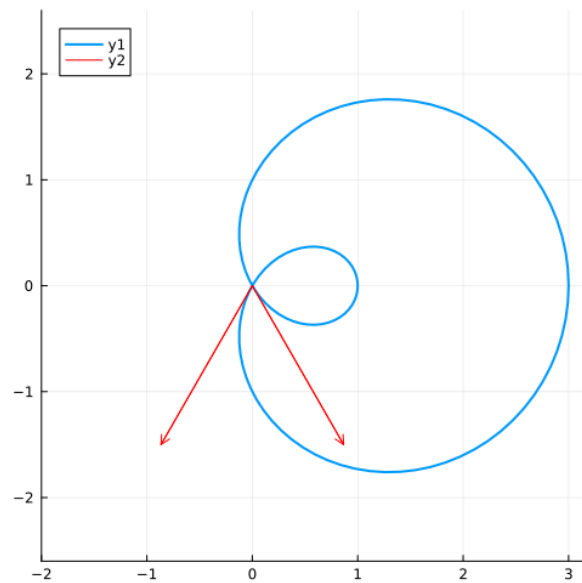


Figure 4: Limaçon com vetores tangentes à origem.

Questão 3

Queremos achar uma parametrização e desenhar a *Cissoide de Diocles*, curva definida implicitamente da seguinte forma:

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

Começamos nosso desenvolvimento isolando uma das variáveis:

$$\begin{aligned}
 x^3 + xy^2 - 2ay^2 &= 0 \\
 \Rightarrow 1 + \frac{y^2}{x^2} - 2a\frac{y^2}{x^3} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} \left(1 - 2\frac{a}{x}\right) &= -1 \\
 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} &= -\frac{1}{1 - 2\frac{a}{x}}
 \end{aligned}$$

Com uma única instância de x no lado direito, retiramos y da equação ao introduzir o parâmetro $t = \frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{x^2} &= -\frac{1}{1-2\frac{a}{x}} \Rightarrow t^2 = -\frac{1}{1-2\frac{a}{x}} \\ \Rightarrow t^2 - 2a\frac{t^2}{x} &= -1 \Rightarrow t^2x - 2at^2 = -x \\ \Rightarrow x &= \frac{2at^2}{t^2+1} \Rightarrow y = \frac{2at^3}{t^2+1}\end{aligned}$$

Em seguida, desenhemos a curva:

```
@variables t a

x = (2*a*t^2)/(t^2 + 1);
y = (2*a*t^3)/(t^2 + 1);

x = substitute(x, Dict(a => 1));
y = substitute(y, Dict(a => 1));

points = curvepoints(x, y, t, range(-5, 5, 100));

# Generate still image
#plt = plot((points[:,1], points[:,2])); linewidth=2, size=(500, 500), xlim=(-5, 7),
#ylim=(-6, 6));

plt = plot(1; linewidth=2, size=(500, 500), xlim=(-5, 7), ylim=(-6,6));
anim = @animate for i = 1:100
    push!(plt, points[i, 1], points[i, 2])
end

gif(anim, "diocis.gif"; fps=24);
```

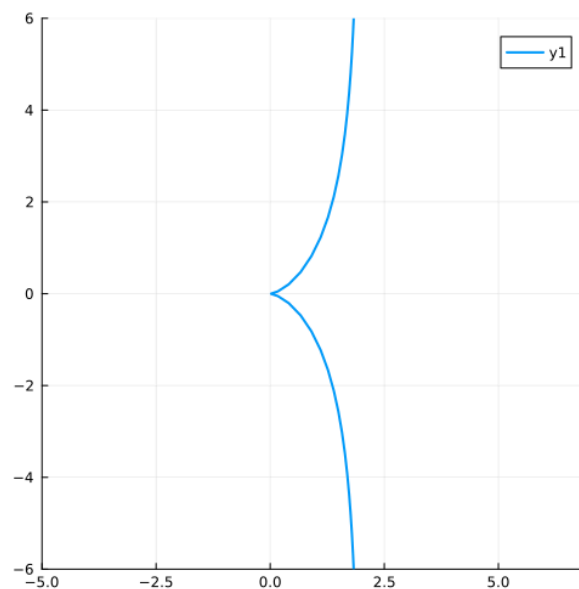


Figure 5: Cissoide de Diocles

A Cissoide foi usada numa das soluções para o problema de duplicar o cubo. Uma das soluções dos tempos antigos que não usava apenas régua e compasso.

Questão 4

Queremos parametrizar e desenhar o *Folium de Descartes*, curva definida implicitamente da seguinte forma:

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Começamos nosso desenvolvimento escrevendo a equação em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} r(\cos(\theta)^3 + \sin(\theta)^3) &= 3\cos(\theta)\sin(\theta)r^2 \\ \Rightarrow \cos(\theta)^3 + \sin(\theta)^3 &= 3\cos(\theta)\sin(\theta)r \\ \Rightarrow \frac{3\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta)^3 + \sin(\theta)^3} &= r \end{aligned}$$

Concluimos com isso que podemos usar θ como nosso parâmetro. Desenhemos então a curva no intervalo $(-\pi\frac{1}{4}, \pi\frac{3}{4})$:

```
using Symbolics
using Plots

function genvis(points; xlim=:auto, ylim=:auto)
    plt = plot(1; linewidth=2, size=(500,500), xlim=xlim, ylim=ylim)
    anim = @animate for i = 1:size(points, 1)
        push!(plt, points[i,1], points[i,2])
    end

    return (plt, anim)
end

# Multiple dispatch of genvis. We can either pass only points, or both points and
# vectors.
# The compiler will figure out which version of the function to call.
function genvis(points, vectors; xlim=:auto, ylim=:auto)
    len = size(points, 1)
    anim = @animate for i = 1:len
        plot(points[1:i,1], points[1:i,2]; linewidth=2 size=(500,500), xlim=xlim,
ylim=ylim)
        plot!(vectors[1:i*3, 1], vectors[1:i*3, 2])
    end

    plt = plot(points[1:len,1], points[1:len,2]; linewidth=2 size=(500,500),
xlim=xlim, ylim=ylim)

    return (plt, anim)
end

@variables θ

r = (3cos(θ)sin(θ))/(cos(θ)^3 + sin(θ)^3);

x = cos(θ)*r;
y = sin(θ)*r;

points = curvepoints(x, y, θ, range(-π/4 + 0.1, 3π/4 - 0.1, length=100));
```

```

vectors = tangvectors(x, y, θ, range(-π/4 + 0.1, 3π/4 - 0.1, length=100));
(plt, anim) = genvis(points, vectors; xlim=(-7,7), ylim=(-7,7));

gif(anim, "folidesc.gif"; fps=24)
plot(plt)
savefig(plt, "folidesc.png")

```

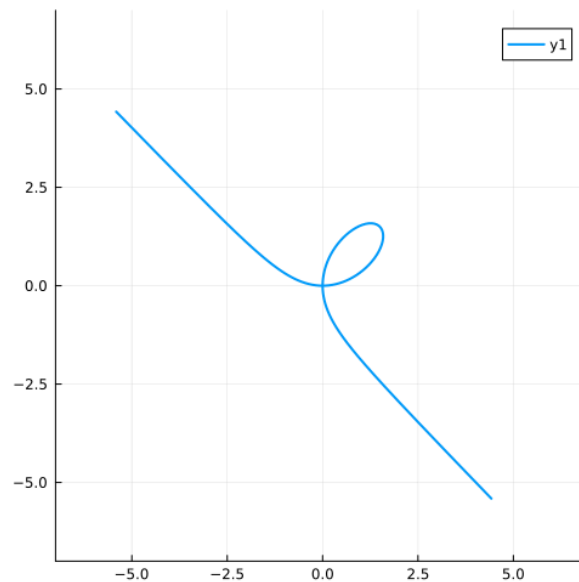


Figure 6: Folium de Descartes

Podemos também desenhar os contornos da equação implícita, mostrando as curvas geradas quando mudamos a igualdade a 0 para outros valores:

```

folidesc(x, y) = x^3 + y^3 - 3*x*y;
xvalues = range(-5, 5, length=150);
yvalues = range(-5, 5, length=150);
z = folidesc.(transpose(xvalues), yvalues);

levels = [
    range(-50, -5, step=5);
    range(-5, 5, step=0.5);
    range(5, 50, step=5);
];

con = contour(xvalues, yvalues, z; size=(500,500), levels=levels)

```

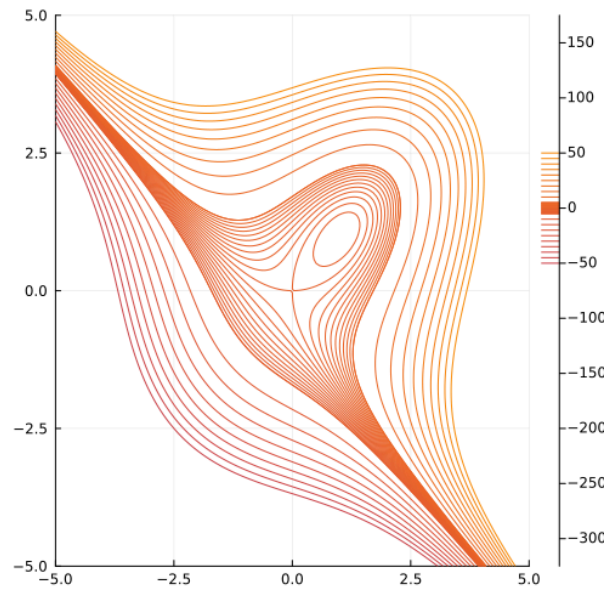



Figure 7: Curvas de nível do Folium

Questão 5

Queremos desenhar as seguintes parametrizações da parábola:

$$\alpha(t) = (t, t^2); \quad \gamma(t) = (t^3, t^6)$$

Fazemos isso da seguinte forma:

```
@variables t

x1 = t
y1 = t^2

x2 = t^3
y2 = t^6

points1 = curvepoints(x1, y1, t, range(-5, 5, length=100))
points2 = curvepoints(x2, y2, t, range(-2, 2, length=100))

vectors1 = tangvectors(x1, y1, t, range(-5, 5, length=100))
vectors2 = tangvectors(x2, y2, t, range(-2, 2, length=100))

(plt1, anim1) = genvis(points1, vectors1)
(plt2, anim2) = genvis(points2, vectors2)

savefig(plt1, "parabol1.png")
savefig(plt2, "parabol2.png")
gif(anim1, "parabol1.gif")
gif(anim2, "parabol2.gif")
```

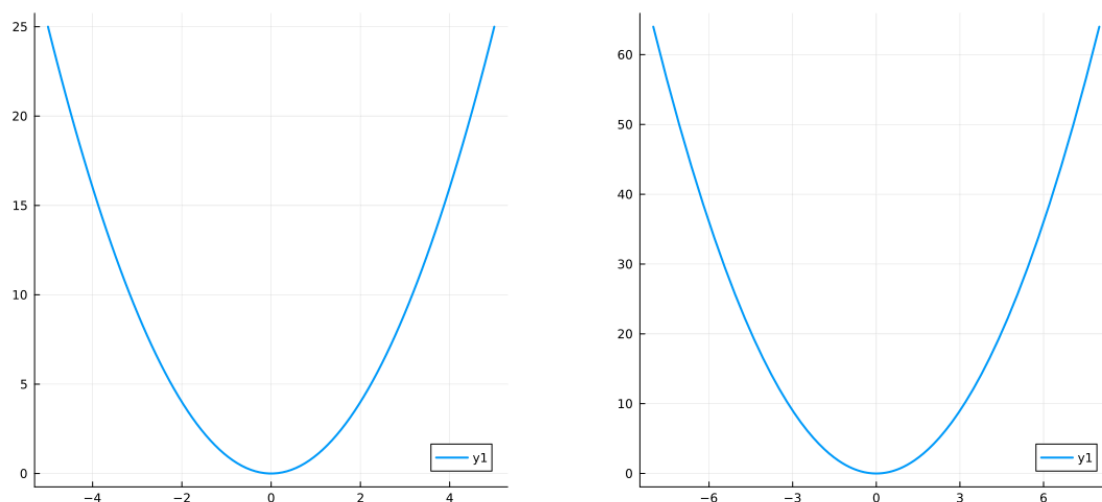


Table 1: Parábolas

A seguir desenhamos as derivadas dessas curvas. Será, então, fácil ver que a segunda curva não é regular, já que sua derivada é nula quando $t = 0$:

```
Dt = Differential(t);
(dx1, dy1, dx2, dy2) = expand_derivatives.(Dt.((x1, y1, x2, y2)));

dpts1 = curvepoints(dx1, dy1, t, range(-5, 5, length=100))
dpts2 = curvepoints(dx2, dy2, t, range(-2, 2, length=100))

(pltd1, _) = genvis(dpts1; xlim=(-2,4))
(pltd2, _) = genvis(dpts2; xlim=(-2,8))

savefig(pltd1, "derparab1.png")
savefig(pltd2, "derparab2.png")
```

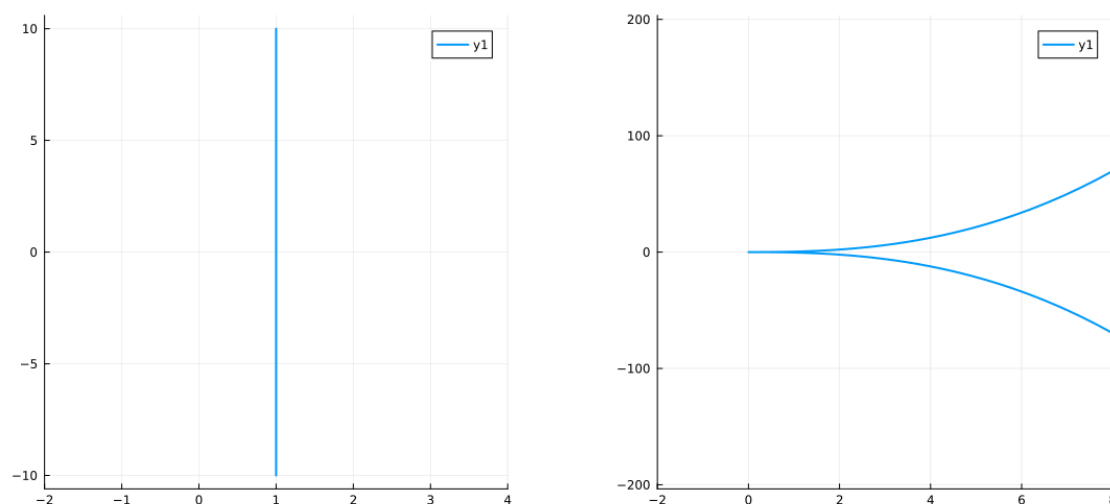


Table 2: Derivadas das parábolas

Uma tentativa intuitiva de reparametrização entre as curvas seria a aplicação da função $f(t) = t^2$ no intervalo da segunda curva. Os valores resultantes disso seriam usados na primeira curva e resultariam

na mesma parábola. Contudo, essa função tem uma imagem contida nos positivos e, portanto, não cobre todo o intervalo da primeira equação.

Questão 6

Escolhemos a curva *hipotrocoide*, desenhada por um ponto fixo em referência a um círculo que gira no interior de outro centrado na origem.

As equações que regem o movimento desse ponto são as seguintes:

$$C = ((R - r) \cos(\theta), (R - r) \sin(\theta))$$

$$\varphi = \theta \left(\frac{R}{r} - 1 \right)$$

$$P = C + (d \cos(\varphi), -d \sin(\varphi))$$

Onde:

- P é o ponto que desenha a curva;
- C é o centro do círculo interior;
- R e r são, respectivamente, os raios do círculo exterior e interior;
- d é a distância entre C e P ;
- θ é o ângulo percorrido por C ao redor da origem;
- φ é o ângulo percorrido por P ao redor de C .

Desenhamos um exemplar dessa curva a seguir:

```
@variables θ R r d

C = (x=(R - r)*cos(θ), y=(R - r)*sin(θ));
φ = (R/r - 1)*θ;
P = (x=C.x + d*cos(φ), y=C.y - d*sin(φ));

(x, y) = substitute((P.x, P.y), (Dict(
    R => 4,
    r => 1,
    d => 1
),))

points = curvepoints(x, y, θ, range(0, 2π, length=100));
vectors = tangvectors(x, y, θ, range(0, 2π, length=100));

(plt, anim) = genvis(points, vectors; xlim=(-5,5), ylim=(-5,5));

savefig(plt, "astroid.png");
gif(anim, "astroid.gif");

(plt, anim) = genvis(vectors; xlim=(-7,7), ylim=(-7,7));

gif(anim, "astvecs.gif"; fps=60);

points = curvepoints(x, y, θ, range(0, 15π, length=200));
vectors = tangvectors(x, y, θ, range(0, 15π, length=200));

(plt, anim) = genvis(points, vectors; xlim=(-5,5), ylim=(-5,5));
```

```
savefig(plt, "hypotch.png");
```

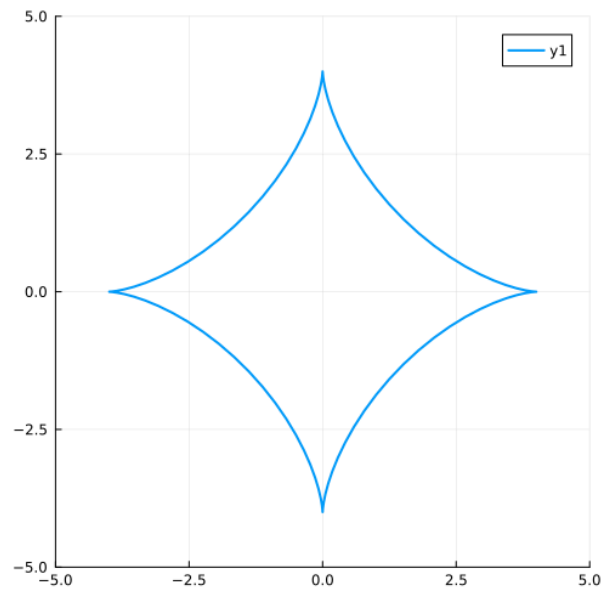


Figure 8: Astroide: Caso especial da hipotrocoide com $\frac{R}{r} = 4$ e $d = r$

Questão 7

Para verificar que a curva $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ é diferenciável, verificamos que seus componentes são diferenciáveis:

$$\alpha'_1(t) = -a \sin(t)$$

$$\alpha'_2(t) = b \cos(t)$$

O traço é desenhado a seguir para $a = 2$ e $b = 3$:

```
@variables t a b

(x, y) = (a*cos(t), b*sin(t));
(x, y) = substitute.((x, y), (Dict(
    a => 2,
    b => 3
),));

points = curvepoints(x, y, t, range(0, 2π, length=100));

(plt, anim) = genvis(points; xlim=(-4,4), ylim=(-4,4));

savefig(plt, "elips.png");
```

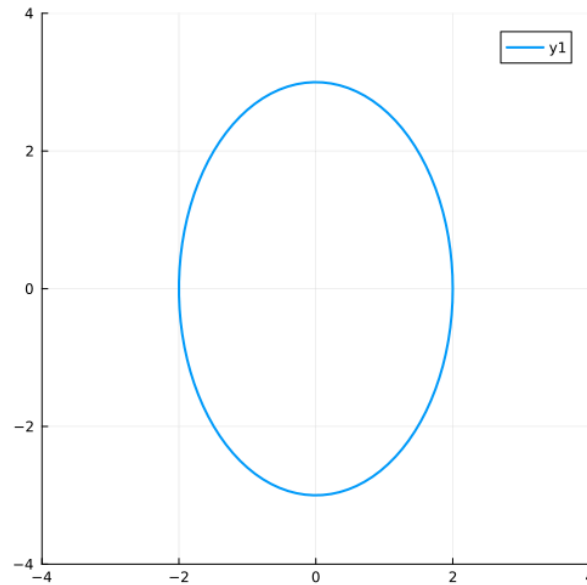


Figure 9: Elipse criada pela equação.

Questão 8

Começamos satisfazendo a condição $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$. Para isso, tomamos a curva $\alpha(t) = (\frac{t^3}{3} + c_1, e^t + c_2)$. Em seguida, tomamos $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$, satisfazendo a condição $\alpha(0) = (2, 0)$.

Questão 9

Começamos provando que $\|\alpha'(t)\| \text{ const.} \Rightarrow \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Tome a função $\varphi : I \rightarrow [0, 2\pi)$ que mapeia valores do parâmetro nos ângulos do vetor $\alpha'(t)$. Definindo $c = \|\alpha'(t)\|$, temos em coordenadas polares o seguinte:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (c \cos(\varphi(t)), c \sin(\varphi(t))) \\ \alpha''(t) &= (-c \sin(\varphi(t))\varphi'(t), c \cos(\varphi(t))\varphi'(t))\end{aligned}$$

Concluimos trivialmente que $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$.

Em seguida, provaremos a volta $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \Rightarrow \|\alpha'(t)\| \text{ const.}$. Sejam $r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$ as coordenadas polares da curva. Logo:

$$\begin{aligned}\alpha' &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \alpha'' &= (r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)\theta', r' \sin(\theta) + r \cos(\theta)\theta')\end{aligned}$$

Portanto, dado que α' e α'' são ortogonais:

$$\begin{aligned}rr' \cos(\theta)^2 - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\theta' + rr' \sin(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\theta' &= 0 \\ \Rightarrow rr'(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= 0 \\ \Rightarrow r = 0 \vee r' = 0\end{aligned}$$

Se $r = 0$, então nossa curva é apenas um ponto, um absurdo. Logo, concluímos que $r' = 0$ e, portanto, $\|\alpha'(t)\| \text{ const.}$

Questão 10

Começamos mostrando que x deve ser estritamente crescente ou decrescente. Tome x' e suponha que existam t_1 e t_2 tais que $x'(t_1)$ e $x'(t_2)$ tenham sinais opostos. Logo, pelo teorema do valor intermediário, sabemos que deve haver um ponto onde x' se anula. Isso é um absurdo pelo enunciado. Logo, x é estritamente crescente ou decrescente.

Podemos então afirmar que existe uma bijeção entre x e t . Definimos então $t = t(x)$ e $f(x) = y(t(x))$. Como y é diferenciável em relação a t e t em relação a x , concluímos que f é diferenciável: $f'(x) = y'(t(x))t'(x)$.

Questão 11

Desenhamos essa curva γ da seguinte forma:

```
@variables t

γ = (x=e^t * cos(t), y=e^t * sin(t));

points = curvepoints(γ.x, γ.y, t, range(0, 8π, length=200));

function symgenvis(points)
    plt = plot(1; linewidth=2, size=(500,500), aspect_ratio=:equal, lims=:symmetric)
    anim = @animate for i = 1:size(points, 1)
        push!(plt, points[i,1], points[i,2])
    end

    return (plt, anim)
end

(plt, anim) = symgenvis(points);

savefig(plt, "spirl.png");
gif(anim, "spirl.gif"; fps=24);
```

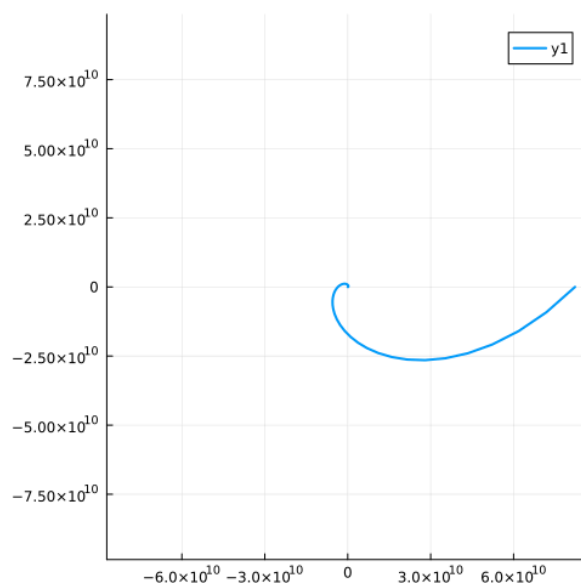


Figure 10: Espiral

Para mostrar a independência do ângulo em relação a t , calculamos as derivadas da curva γ :

$$x' = e^t \cos(t) - e^t \sin(t)$$

$$y' = e^t \cos(t) + e^t \sin(t)$$

Concluimos então que o produto interno entre γ e γ' é:

$$\begin{aligned} & \langle \gamma, \gamma' \rangle \\ &= e^{2t} (\cos^2 t - \cos t \sin t) \\ &+ e^{2t} (\cos^2 t + \cos t \sin t) \\ &= e^{2t} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \langle \gamma, \gamma' \rangle \\ &= \|\gamma\| \|\gamma'\| \cos(\theta) \\ &= e^t \sqrt{2} e^t \cos(\theta) = e^{2t} \sqrt{2} \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{2t} = e^{2t} \sqrt{2} \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Concluimos, então, que o ângulo entre γ e γ' é fixo e independente de t .