Curvas e Superfícies

▸ Lista 3

29/03/2024

Osmar Cardoso Lopes Filho
osmarclopesfilho@gmail.com

Esse documento possui códigos que geram animações no formato `gif` e que podem ser acessadas separadamente no repositório.

Questão 1

Item 1

Dada uma reta qualuer $\alpha(t) = (a + tc, b + td)$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (c, b)$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluimos que α **é regular**.

Seu comprimento de arco no intervalo $[p, q]$ é:

$$\int_p^q \|\alpha'(t)\| \, dt = \sqrt{c^2 + d^2}(q - p)$$

Item 2

Dada a curva $\alpha(t) = (t, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (1, 4t^3)$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluimos que α **é regular**.

Item 3

Dada a curva $\alpha(s) = \left(a + r\cos\left(\frac{s}{r}\right), b + r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$, $s \in \mathbb{R}$, $r > 0$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha(-\sin(s), \cos(s))$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluimos que α **é regular**.

Seu comprimento de arco no intervalo $[0, 2\pi r]$ é:

$$\int_p^q \|\alpha'(t)\| \, dt = r;$$

Item 4

Dada a curva $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1))$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (\sin(t) - 2\sin(2t), 2\cos(2t) - \cos(t))$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluimos que α **é regular**.

Para obter sua integral, calculamos seu comprimento de arco em coordenadas polares:

$$\int_p^q \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta = \int_p^q \sqrt{5 - 4\cos(\theta)} d\theta$$

Onde $r = 2\cos(\theta) - 1$.

Item 5

Dada a curva $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (1, \sinh(t))$. Dado isso, como $\alpha \neq 0$, concluimos que α **é regular**.

`pagebreak`

Questão 2

Começamos escrevendo:

$$\begin{aligned} &\arg_t \text{ minmax } k(t) \\ &= \arg_t \text{ minmax } \frac{ab}{\left(\sqrt{(a\sin(t))^2 + (b\cos(t))^2}\right)^3} \end{aligned}$$

Como $f(x) = x^3$ é injetiva e crescente:

$$= \arg_t \text{ minmax } \frac{(ab)^3}{\sqrt{(a\sin(t))^2 + (b\cos(t))^2}}$$

E dado que constantes não alteram o parâmetro maximizador/minimizador:

$$= \arg_t \text{ minmax } \frac{1}{\sqrt{(a\sin(t))^2 + (b\cos(t))^2}}$$

Em seguida, já que nossa expressão é positiva e $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetiva e decrescente no domínio $\mathbb{R}^+$:

$$= \arg_t \text{ maxmin } \sqrt{(a\sin(t))^2 + (b\cos(t))^2}$$

Finalmente, como $f(x) = \sqrt{x}$ é injetiva e crescente:

$$= \arg_t \text{ maxmin } (a\sin(t))^2 + (b\cos(t))^2$$

Suponha então, sem perda de generalidade, que $a > b$. Concluimos, portanto, uma vez que $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$, que:

$$\begin{aligned} \left\{\pi\frac{1}{2}, \pi\frac{3}{2}\right\} &\text{ min } k(t) \\ \{0, \pi\} &\text{ max } k(t) \end{aligned}$$

Questão 3

Primeiramente, verificamos que β é parametrizada por comprimento de arco:

$$\beta'(t) = (\alpha(-t))' = -\alpha'(-t) \Rightarrow \|\beta'(t)\| = \|\alpha'(-t)\| = 1 \ \forall t$$

Sabemos também que β é uma reparametrização de α pelo difeomorfismo $\varphi(t) = -t$. Isso é, $\beta = \alpha(\varphi(t)) = \alpha(-t)$.

Então, segue que:

$$\begin{aligned} k_\beta(t) &= \det(\beta'(t), \beta''(t)) \\ &= \det(-\alpha'(-t), \alpha''(-t)) \\ &= -\det(\alpha'(-t), \alpha''(-t)) \\ &= -k_\alpha(-t) \end{aligned}$$

Questão 5

Primeiramente, calculamos:

$$\begin{aligned} f'(v)\cdot h = Th &= \lim_{t\to 0} \frac{f(v+ht)-f(v)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \begin{bmatrix} (v_2+h_2t)^3 - v_2^3 + (v_1+h_1t)^3 - v_1^3 \\ -(v_2+h_2t)^3 - v_2^3 + (v_1+h_1t)^3 - v_1^3 \end{bmatrix} \frac{1}{t} \\ &= \begin{bmatrix} 3h_1v_1^2 + 3h_2v_2^2 \\ 3h_1v_1^2 - 3h_2v_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3v_1^2 & 3v_2^2 \\ 3v_1^2 & -3v_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Em seguida, remapeando $f' : \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ para $f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f''(v)\cdot h = Sh &= \lim_{t\to 0} \frac{f'(v+ht)-f(v)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \begin{bmatrix} 3(v_1+h_1t)^2 - 3v_1^2 \\ 3(v_1+h_1t)^2 - 3v_1^2 \\ 3(v_2+h_12)^2 - 3v_2^2 \\ -3(v_2+h_2t)^2 - 3v_2^2 \end{bmatrix} \frac{1}{t} \\ &= \begin{bmatrix} 6h_1v_1 \\ 6h_1v_1 \\ 6h_2v_2 \\ -6h_2v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Retomando, então, $f' : \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f''(v)\cdot h = Sh &= \begin{bmatrix} 6h_1v_1 & 6h_2v_2 \\ 6h_1v_1 & -6h_2v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 6h_1v_1 & 0 \\ 6h_1v_1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 6h_2v_2 \\ 0 & -6h_2v_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$