Curvas e Superfícies

▸ Lista 4

08/04/2024

Osmar Cardoso Lopes Filho
osmarclopesfilho@gmail.com

Esse documento possui códigos que geram animações no formato `gif` e que podem ser acessadas separadamente no repositório.

Questão 1

Item a

Tome a curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Calculamos suas derivadas:

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$
$$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$$

Concluimos que $\alpha(t)$ é 2-regular, dado que $\forall t\ \alpha''(t) \neq 0$.

Item b

Tome a curva $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Calculamos suas derivadas:

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2 + 1)$$
$$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$$

Concluimos que $\alpha(t)$ é 2-regular, dado que $\forall t\ \alpha''(t) \neq 0$.

Questão 2

Começamos mostrando que a curva é regular. Considere sua derivada:

$$\alpha'(t) = \left(-\sin(t), \cos(t), \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Dado que $\forall t$ t.q. $\sin(t) = 0$, $\cos(t) \neq 0$, concluimos que $\forall t$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Feito isso, mostramos que todos os pontos da curva estão contidos no cilindro:

$$\begin{aligned} (1 + \cos(t) - 1)^2 + \sin(t)^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

Em seguida, mostramos que todos os pontos estão contidos na esfera:

$$\begin{aligned} (1 + \cos(t))^2 + \sin(t)^2 + \left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 &\leq 4 \\ \Leftrightarrow 2\cos(t) + 2 - 2\cos(t) + 2 &\leq 4 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 0 \end{aligned}$$

Questão 3

Primeiramente, calculamos a função comprimento de arco da curva a partir de um ponto t_0:

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$$

$$\begin{aligned} L = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \; dt &= \int_{t_0}^{t} \|(e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)), e^t)\| \; dt \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{e^{2t}\left(2\cos(t)^2 + 2\sin(t)^2 + 1\right)} dt \\ &= \sqrt{3}(e^t - e^{t_0}) \end{aligned}$$

Então, deduzimos sua função inversa $\varphi(s)$:

$$\varphi(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)$$

Feito isso, obtemos a reparametrização por comprimento de arco $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \alpha \circ \varphi(t)$$

Questão 4

Provamos que $\|\alpha'(t)\|$ const. $\Leftrightarrow$ $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$ a seguir:

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| \text{ const.} \quad &\Longleftrightarrow \|\alpha'(t)\|^2 \text{ const.} \\ \Longleftrightarrow \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \text{ const.} &\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \\ \Longleftrightarrow 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \; &\Longleftrightarrow \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Em seguida, considere a curva $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$. Sua derivada e seu absoluto são:

$$\alpha'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\left(\sin(t)^2 + \cos(t)^2\right) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Concluimos que $\|\alpha'(t)\|$ é constante.