

CURVAS E SUPERFÍCIES

► LISTA 3

06/04/2024

Osmar Cardoso Lopes Filho
osmarclopesfilho@gmail.com

Esse documento possui códigos que geram animações no formato gif e que podem ser acessadas separadamente no [repositório](#).

Questão 1

Item 1

Dada uma reta qualquer $\alpha(t) = (a + tc, b + td)$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (c, d)$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluímos que α é **regular**.

Seu comprimento de arco no intervalo $[p, q]$ é:

$$\int_p^q \|\alpha'(t)\| dt = \sqrt{c^2 + d^2}(q - p)$$

Item 2

Dada a curva $\alpha(t) = (t, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (1, 4t^3)$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluímos que α é **regular**.

Item 3

Dada a curva $\alpha(s) = (a + r \cos(\frac{s}{r}), b + r \sin(\frac{s}{r}))$, $s \in \mathbb{R}$, $r > 0$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(-\sin(s), \cos(s))$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluímos que α é **regular**.

Seu comprimento de arco no intervalo $[0, 2\pi r]$ é:

$$\int_p^q \|\alpha'(t)\| dt = r;$$

Item 4

Dada a curva $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1))$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (\sin(t) - 2\sin(2t), 2\cos(2t) - \cos(t))$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluímos que α é **regular**.

Para obter sua integral, calculamos seu comprimento de arco em coordenadas polares:

$$\int_p^q \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta = \int_p^q \sqrt{5 - 4\cos(\theta)} d\theta$$

Onde $r = 2\cos(\theta) - 1$.

Item 5

Dada a curva $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$, $t \in \mathbb{R}$, verificamos que sua derivada existe e é dada por $\alpha'(t) = (1, \sinh(t))$. Dado isso, como $\alpha' \neq 0$, concluímos que α é **regular**.

Questão 2

Começamos escrevendo:

$$\begin{aligned} & \arg_t \min \max k(t) \\ &= \arg_t \min \max \frac{ab}{\left(\sqrt{(a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2} \right)^3} \end{aligned}$$

Como $f(x) = x^3$ é injetiva e crescente:

$$= \arg_t \min \max \frac{(ab)^3}{\sqrt{(a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2}}$$

E dado que constantes não alteram o parâmetro maximizador/minimizador:

$$= \arg_t \min \max \frac{1}{\sqrt{(a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2}}$$

Em seguida, já que nossa expressão é positiva e $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetiva e decrescente no domínio \mathbb{R}^+ :

$$= \arg_t \max \min \sqrt{(a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2}$$

Finalmente, como $f(x) = \sqrt{x}$ é injetiva e crescente:

$$= \arg_t \max \min (a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2$$

Suponha então, sem perda de generalidade, que $a > b$. Concluimos, portanto, uma vez que $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$, que:

$$\begin{aligned} & \left\{ \pi \frac{1}{2}, \pi \frac{3}{2} \right\} \min k(t) \\ & \{0, \pi\} \max k(t) \end{aligned}$$

Questão 3

Primeiramente, verificamos que β é parametrizada por comprimento de arco:

$$\beta'(t) = (\alpha(-t))' = -\alpha'(-t) \Rightarrow \|\beta'(t)\| = \|\alpha'(-t)\| = 1 \quad \forall t$$

Sabemos também que β é uma reparametrização de α pelo difeomorfismo $\varphi(t) = -t$. Isso é, $\beta = \alpha(\varphi(t)) = \alpha(-t)$.

Então, segue que:

$$\begin{aligned} k_\beta(t) &= \det(\beta'(t), \beta''(t)) \\ &= \det(-\alpha'(-t), \alpha''(-t)) \\ &= -\det(\alpha'(-t), \alpha''(-t)) \\ &= -k_\alpha(-t) \end{aligned}$$

Questão 5

Primeiramente, calculamos:

$$\begin{aligned}
f'(v) \cdot h = Th &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(v + ht) - f(v)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} (v_2 + h_2 t)^3 - v_2^3 + (v_1 + h_1 t)^3 - v_1^3 \\ -(v_2 + h_2 t)^3 - v_2^3 + (v_1 + h_1 t)^3 - v_1^3 \end{bmatrix} \frac{1}{t} \\
&= \begin{bmatrix} 3h_1 v_1^2 + 3h_2 v_2^2 \\ 3h_1 v_1^2 - 3h_2 v_2^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3v_1^2 & 3v_2^2 \\ 3v_1^2 & -3v_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Em seguida, remapeando $f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ para $f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
f''(v) \cdot h = Sh &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(v + ht) - f'(v)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 3(v_1 + h_1 t)^2 - 3v_1^2 \\ 3(v_1 + h_1 t)^2 - 3v_1^2 \\ 3(v_2 + h_2 t)^2 - 3v_2^2 \\ -3(v_2 + h_2 t)^2 - 3v_2^2 \end{bmatrix} \frac{1}{t} \\
&= \begin{bmatrix} 6h_1 v_1 \\ 6h_1 v_1 \\ 6h_2 v_2 \\ -6h_2 v_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Retomando, então, $f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
f''(v) \cdot h = Sh &= \begin{bmatrix} 6h_1 v_1 & 6h_2 v_2 \\ 6h_1 v_1 & -6h_2 v_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 6h_1 v_1 & 0 \\ 6h_1 v_1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 6h_2 v_2 \\ 0 & -6h_2 v_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$