Curvas e Superfícies

▸ Lista 2

18/03/2024

Osmar Cardoso Lopes Filho
osmarclopesfilho@gmail.com

Esse documento possui códigos que geram animações no formato `gif` e que podem ser acessadas separadamente no repositório.

Questão 1

Item 1

Seja $\alpha : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $\varphi : I_0 \to I$ um difeormofismo. Vamos mostrar que a reparametrização $\beta = \alpha \circ \varphi$ possui o mesmo comprimento de arco. Suponha que $I = [a, b]$, $I_0 = [c, d]$ e $\varphi' > 0$, logo, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}\int_c^d \|\beta'(t)\|\, dt &= \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| \varphi'(t)\, dt \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\alpha'(s)\|\, ds \\ &= \int_a^b \|\alpha'(s)\|\, ds\end{aligned}$$

Caso $\varphi' < 0$ (uma reparametrização invertida), simplesmente invertemos o sinal a partir da primeira igualdade.

Item 2

Começamos esse item alterando nosso pacote CAS: ao invés do `Symbolics.jl` usaremos o `Reduce.jl`. Esse pacote utiliza o sistema CAS Reduce como *backend*, fornecendo ferramentas CAS para nosso código em Julia.

Seja $r > 0$ e $\alpha(t) = r(\cos t, \sin t), t \in R$, vamos calcular o comprimento de arco de α entre 0 e π:

```
using Reduce
@force using Reduce.Algebra

r = :r;
t = :t;

x = r*cos(t);
y = r*sin(t);

x1d = df(x, t);
y1d = df(y, t);

l = sqrt(x1d^2 + y1d^2);

L = int(l, t, 0, π)
```

O resultado obtido para `L` é πr.

Em seguida, seja $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right), t \in \mathbb{R}$, calculamos o comprimento de arco entre $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ da seguinte forma:

```
t = :t;

x = t;
y = (t^2)/2;

x1d = df(x, t);
y1d = df(y, t);

l = sqrt(x1d^2 + y1d^2);

L = int(l, t, 0, 1)
```

O resultado obtida para `L` é $\frac{\sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

Item 3

Construiremos uma animação onde os vetores tangentes e normais de cada curva a percorrerão simultaneamente um cículo de raio 2:

```
using Plots

r = :r;
t = :t;
s = :s;

αfunc(targ, rarg) = (rarg*cos(targ), rarg*sin(targ));
ϕ = s/r;

α = αfunc(t, r);
β = αfunc(ϕ, r);

α1t = df.(α, t);
β1s = df.(β, s);

α2t = df.(α1t, t);
β2s = df.(β1s, s);

trange = range(0, 4π, length=100);
srange = range(0, 4π, length=100);

xvalues = zeros(Float64, 100);
yvalues = zeros(Float64, 100);

for i=1:100
    (xvalues[i], yvalues[i]) = eval.(sub.(
        (Dict(
            t => trange[i],
            r => 2
        ),), α
    ));
end
```

```
base_plt = plot((xvalues, yvalues);
    linewidth=2,
    label="",
    size=(600,600),
    lim=(-3,3)
);

vecα = [
    α[1]             α[2]
    (α[1] + α1t[1]) (α[2] + α1t[2])
    NaN              NaN
    α[1]             α[2]
    (α[1] + α2t[1]) (α[2] + α2t[2])
];

vecβ = [
    β[1]             β[2]
    (β[1] + β1s[1]) (β[2] + β1s[2])
    NaN              NaN
    β[1]             β[2]
    (β[1] + β2s[1]) (β[2] + β2s[2])
];

anim = @animate for i=1:100
    plt = plot(base_plt);

    numvecα = eval.(sub.(
        (Dict(
            t => trange[i],
            r => 2
        ),), (vecα[:,1], vecα[:,2])
    ))

    numvecβ = eval.(sub.(
        (Dict(
            s => srange[i],
            r => 2
        ),), (vecβ[:,1], vecβ[:,2])
    ))

    plot!(plt, [numvecα, numvecβ];
        arrow=true,
        linewidth=2,
        label=""
    );
end

gif(anim, "circpara.gif");
```

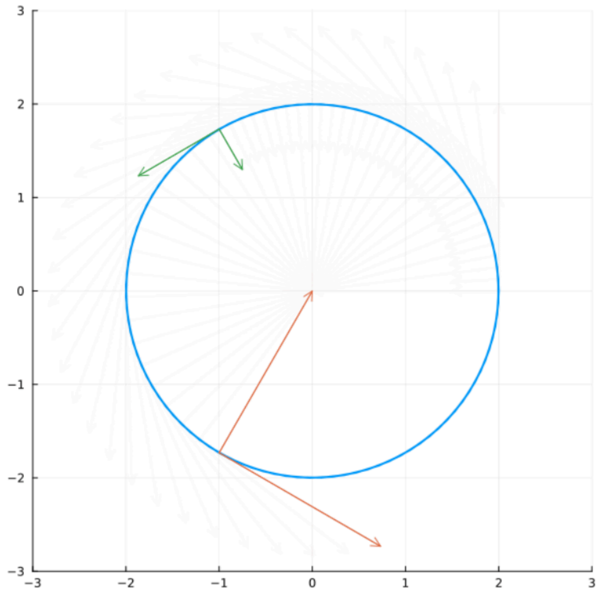

Figure 1: Vetores da parametrização original (vermelhos) e vetores da reparametrização com velocidade unitária (verdes). Vetores animados

Questão 2

Uma reparametrização de uma curva possui o mesmo traço que ela. Portanto, mostraremos que β é simplesmente uma reparametrização de α.

Primeiramente, construiremos um difeormofismo ϕ entre $\mathbb{R}$ e $(0, \infty)$. Seja $\phi(t) = \log(t)$ e, portanto, $\phi^{-1}(t) = e^t$. Sabemos que ϕ é uma bijeção, já que sua inversa existe. Sabemos também que tanto ϕ quanto ϕ^{-1} são diferenciáveis. Portanto, concluimos que ϕ é um difeormofismo e, dado que $\beta(s) = \alpha \circ \phi(s)$, que β é uma reparametrização de α.

Concluimos, então, que seus traços são iguais, já que, para todo ponto na imagem da curva, existem valores únicos em ambas as contra imagens.

Questão 3

Item a

Calculamos o comprimento da seguinte forma:

```
using Reduce
@force using Reduce.Algebra

load_package(:trigsimp)

t = :t;

x = 3*cosh(2t);
y = 3*sinh(2t);
z = 6t;

x1t = df(x, t);
y1t = df(y, t);
z1t = df(z, t);
```

```
l = (sqrt(x1t^2 + y1t^2 + z1t^2));
l = :(trigsimp($l)) |> rcall;

L = int(l, t, 0, π)
```

O resultado para `L` é

$$\frac{3\sqrt{2}(e^{4\pi} - 1)}{2e^{2\pi}}$$

Item b

Calculamos o comprimento da seguinte forma:

```
using Reduce
@force using Reduce.Algebra

load_package(:trigsimp);

t = :t;

x = t;
y = cosh(t);

x1t = df(x, t);
y1t = df(y, t);

l = sqrt(x1t^2 + y1t^2);
l = :(trigsimp($l, cosh)) |> rcall;
# julia> :(abs(cosh(t)))
```

Nesse ponto, como a catenária é simétrica ao redor de x, podemos trocar o valor obtido, `abs(cosh(t))` por `cosh(t)`:

```
int(cosh(t), t, 0, :x)
```

O resultado é:

$$\frac{e^{2x} - 1}{2e^{x}}$$

Questão 4

Item a

Primeiramente, precisamos mostrar que $s(\theta)$ é uma bijeção entre os intervalos $A = (0, \infty)$ e $B = (0, 1)$.

Seja $b \in B$ um valor qualquer, queremos mostrar que existe $a \in A$ tal que $s(a) = b$. Verificamos que $s(0) = 0$ e também que $\lim_{x \to \infty} s(x) = 1$. Portanto, dado que s é contínua, concluimos pelo teorema do valor intermediário que a existe.

Agora, vamos mostrar que esse a é único. Fazemos isso mostrando que s é estritamente crescente. Seja $x > y \in A$, logo:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^2}{x^2+1} > \frac{y^2}{y^2+1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{y^2} > \frac{x^2+1}{y^2+1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{y^2} - \frac{x^2+1}{y^2+1} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2(y^2+1) - (x^2+1)y^2}{y^2(y^2+1)} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2 - y^2}{y^2(y^2+1)} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 > y^2 \Leftrightarrow |x| > |y| \Leftarrow x > y
\end{aligned}
$$

Concluimos, então, que s é uma bijeção.

Encontraremos agora a inversa s^{-1} para mostrar que tanto ela quanto s são diferenciáveis. Seja $\Phi = s^{-1}(\varphi)$, sabemos que $s\left(s^{-1}(\varphi)\right) = s(\Phi) = \varphi$. Logo:

$$
\begin{aligned}
s\left(s^{-1}(\varphi)\right) = \frac{\Phi^2}{\Phi^2+1} &= \varphi \\
\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi^2}} &= \varphi \\
\Rightarrow \frac{1}{\varphi} &= 1 + \frac{1}{\Phi^2} \\
\Rightarrow \frac{1}{\varphi} - 1 &= \frac{1}{\Phi^2} \\
\Rightarrow \frac{1-\varphi}{\varphi} &= \frac{1}{\Phi^2} \\
\Rightarrow \Phi &= \sqrt{\frac{\varphi}{1-\varphi}}
\end{aligned}
$$

Verificamos que tanto s quanto s^{-1} são diferenciáveis, possuindo as seguintes derivadas:

$$
\begin{aligned}
s'(\theta) &= \frac{2\theta}{\left(\theta^2+1\right)^2} \\
s^{-1\prime}(\varphi) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\phi}{\phi+1}}\left(\phi+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

Item b

A função tan possui inversa arctan, i.e., é uma bijeção. Além disso, ambas possuem derivadas:

$$
\begin{aligned}
\tan'(x) &= \tan(x)^2 + 1 \\
\arctan'(x) &= \frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Item c

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva qualquer. Queremos mostrar que existe um difeormofismo $\varphi : [0,1] \to I$. Seja $I = [a, b]$, considere a função $\varphi(t) = a + t(b - a) = a(1 - t) + bt$. Sabemos que ela é contínua e que $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$. Portanto, pelo teorema do valor intermediário, sabemos que ela é sobrejetiva. Além disso sabemos que ela é estritamente crescente:

$$
\begin{aligned}
& x > y \in [0,1] \\
& \Rightarrow a + x(b - a) > a + y(b - a) \\
& \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y)
\end{aligned}
$$

Portanto, sabemos que ela é injetiva e, logo, uma bijeção.

Finalmente, tanto ela quanto sua inversa $\varphi^{-1}(s) = \frac{s-a}{b-a}$ possuem derivadas:

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) &= b - a \\
\varphi^{-1\prime}(t) &= \frac{1}{b-a}
\end{aligned}
$$

Questão 5

Começamos mostrando que a derivada de $\gamma(t) = \left(2t, \frac{2}{1+t^2}\right)$ nunca se anula quando $t > 0$:

$$
\gamma'(t) = \left(2, \frac{-4t}{\left(t^2+1\right)^2}\right)
$$

Como $-4t \neq 0 \quad \forall t > 0$, concluimos que a curva γ é regular.

Em seguida, para mostrar que γ é uma reparametrização da curva $\alpha(s) = \left(\frac{2\cos(s)}{1+\sin(s)}, 1 + \sin(s)\right)$, precisamos encontrar um difeormofismo φ tal que $\gamma(t) = \alpha(\varphi(t))$.

Seja, então, $\varphi(t) = \cos^{-1}\left(2\frac{t}{1+t^2}\right)$.

Questão 6

Para realizar a reparametrização, primeiro calculamos o comprimento de arco:

```
using Reduce
@force using Reduce.Algebra

isr2 = :(1/sqrt(2));
isr3 = :(1/sqrt(3));

α = (cos(t)*isr3 + sin(t)*isr2, cos(t)*isr3, cos(t)*isr3 - sin(t)*isr2);

α1t = df.(α, t);

l = sqrt(α1t[1]^2 + α1t[2]^2 + α1t[3]^2);
L = int(l, t);
L = :(trigsimp($L)) |> rcall
```

O resultado final para L é t. Ou seja, o difeormofismo inverso $\varphi(s) = s$ é igual a $L(t) = t$. Concluimos então que essa curva já está parametrizada por comprimento de arco.