

Universidad Autónoma del Estado de
México

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemáticas

Álgebra Lineal

Profesora:

Socorro López Olvera

Tarea 2

Alumnos:

Gallegos Torres Gonzalo

Peña Mateos Jesús Jacob

Santana Reyes Osmar Dominique

Semestre: 2022B

Fecha de Entrega: 9 de septiembre de 2022

1. Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta.

i. La matriz identidad es una matriz triangular superior.

Af: La matriz identidad es una matriz triangular superior.

Dem.

Sea $I_n = [a_{ij}]$ la matriz identidad. Por definición,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$, entonces I_n es una matriz triangular superior, por definición. ■

ii. Si V es un K - espacio vectorial, $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $U \leq V$.

Af: $U \leq V$.

Dem.

Como $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $W \subseteq V$ y $U \subseteq W$. De esta manera, como $U \subseteq W$ y $W \subseteq V$, entonces $U \subseteq V$.

Luego, sea $\bar{0} \in V$ el neutro aditivo. Como $W \leq V$ entonces $\bar{0} \in W$, por el inciso i de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces $\bar{0} \in U$, por el inciso i de la proposición 5.

Después, como $W \leq V$ entonces la adición es cerrada en W , por el inciso ii de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces la adición es cerrada en U , por el inciso ii de la proposición 5.

Y finalmente, como $W \leq V$ entonces el producto por escalar es cerrado en W , por el inciso iii de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces el producto por escalar es cerrado en U , por el inciso iii de la proposición 5.

En conclusión, como $\bar{0} \in U$, la adición es cerrada en U y el producto por escalar es cerrado en U , entonces $U \leq V$, por la proposición 5. ■

iii. Si A es una matriz con $\text{tr}(A) = 0$, entonces A es matriz antisimétrica.

Af: A no es matriz antisimétrica.

Dem.

Considerando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Por definición, la traza de A es $\text{tr}(A) = 1 + (-1) + 0 = 0$. Así, $\text{tr}(A) = 0$.

Luego,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 5 & -1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $A^t \neq -A$ entonces la matriz A no es transpuesta. Por lo tanto, no es cierto que si A es una matriz con $\text{tr}(A) = 0$, entonces A es matriz antisimétrica. ■

2. Sean $n \in \mathbb{N}$, K un campo, $A \in M_n[K]$ y A^t su transpuesta.

i. Demuestra que $A + A^t$ es una matriz simétrica.

Dem.

P.d. $(A + A^t)^t = A + A^t$.

$$\begin{aligned} (A + A^t)^t &= A^t + (A^t)^t && \text{(Proposición 7)} \\ &= A^t + A && \text{(por una observación)} \\ &= A + A^t && \text{(conmutatividad en } M_n[k]) \end{aligned}$$

$\therefore A + A^t$ es simétrica. ■

ii. Sea $U = \{A \in M_n[K] \mid A \text{ es antisimétrica}\} \subseteq M_n[K]$. Demuestre que $U \leq M_n[K]$.

Dem.

Considerando el teorema 6. P.d.

a) $V \neq \emptyset$

b) $\forall A, B \in U, A + B \in U$

c) $\forall A \in U \text{ y } \forall \lambda \in K, \lambda A \in U$

a) Sea $\bar{0} \in M_n[K]$ con $\bar{0} = [a_{ij}]_n$ donde $a_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Notemos que $a_{ji} = 0, \forall j, i \in \{1, \dots, n\}$. Así, $a_{ij} = 0 = -0 = -a_{ji}$.

Así, $\bar{0}$ es una matriz simétrica, es decir, $\bar{0} \in U$.

$\therefore U \neq \emptyset$

b) Sean $A, B \in U$ entonces $A^t = -A$ y $B^t = -B$. Luego,

$$\begin{aligned} (A + B)^t &= A^t + B^t && \text{(Proposición 7)} \\ &= -A + (-B) && \text{(por hipótesis)} \\ &= -(A + B) && \text{(Proposición 7)} \end{aligned}$$

$\therefore A + B$ es antisimétrica y así $A + B \in U$

c) Sea $A \in U$ entonces $A^t = -A$. Así, sea $\lambda \in K$, entonces

$$\begin{aligned} (\lambda A)^t &= \lambda A^t && \text{(Proposición 7)} \\ &= \lambda(-A) && \text{(pues } A^t = -A) \\ &= \lambda((-1)A) \\ &= (\lambda(-1))A \\ &= ((-1)\lambda)A \\ &= (-1)(\lambda A) \\ &= -(\lambda A) \end{aligned}$$

$\therefore \lambda A$ es antisimétrica y así $\lambda A \in U$.

$\therefore U \leq M_n[K]$. ■

iii. ¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz simétrica de orden n ? Argumente su respuesta.

Sol.

Sea $A \in M_n[K]$ simétrica, por definición $A = A^t$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Notemos que $a_{ii} = a_{ii}$, así que, al transponer la raíz, la diagonal principal permanece sin cambios. Las entradas

a_{ij} pueden ser todas distintas $\forall i > j$ siempre y cuando $a_{ij} = a_{ji}$, es decir, $n^2 - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i a_{ij} \right)$

entradas pueden ser distintas.

3. Sea V un K -espacio vectorial y $W_1, W_2, \dots, W_n \leq V$ entonces:

i. $W_1 + W_2 + \dots + W_n \leq V$.

Dem.

Pd. $\bar{0} \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

Como $W_1, W_2, \dots, W_n \leq V$, entonces $\bar{0} \in W_1, W_2, \dots, W_n$ para cada $i = 1, \dots, n$. Así,

$$\bar{0} + \bar{0} + \dots + \bar{0} \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

Es decir,

$$\bar{0} \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

Pd. Cerradura de la suma.

Sean $v, w \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$, entonces existen $v_1, w_1 \in W_1, v_2, w_2 \in W_2, \dots, v_n, w_n \in W_n$ tales que

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad y \quad w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

Entonces

$$v + w = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (w_1 + w_2 + \dots + w_n)$$

Y conmutando y asociando se tiene que

$$v + w = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \dots + (v_n + w_n)$$

De donde $(v_1 + w_1) \in W_1, (v_2 + w_2) \in W_2, \dots, (v_n + w_n) \in W_n$ pues $W_1, W_2, \dots, W_n \leq V$. Así pues

$$v + w \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

Pd. Cerradura del producto por escalar.

Sean $v \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$ y $\delta \in K$, entonces existen $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2, \dots, v_n \in W_n$ tales que

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta v &= \delta(v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ &= \delta v_1 + \delta v_2 + \dots + \delta v_n \end{aligned}$$

De donde $\delta v_1 \in W_1, \delta v_2 \in W_2, \dots, \delta v_n \in W_n$ pues $W_1, W_2, \dots, W_n \leq V$. Así,

$$\delta v_1 + \delta v_2 + \dots + \delta v_n \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

Es decir,

$$\delta v \in W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

$\therefore W_1 + W_2 + \dots + W_n \leq V$. ■

ii. $W_i \subseteq W_1 + W_2 + \dots + W_n; \forall i = 1, \dots, n$.

Dem.

Sea $u_i \in W_i$. Como $\bar{0} \in W_1, W_2, \dots, W_n$, pues $W_1, W_2, \dots, W_n \leq V$, entonces

$$\bar{0} + \bar{0} + \dots + u_i + \dots + \bar{0} \in W_1 + W_2 + \dots + W_i + \dots + W_n$$

Es decir,

$$u_i \in W_1 + W_2 + \dots + W_i + \dots + W_n$$

$\therefore W_i \subseteq W_1 + W_2 + \dots + W_n$. ■

4. Sea V un K -espacio vectorial y $W \subseteq V$ no vacío. Demuestre que $W \leq V$, si y solo si se cumple:

i. $u - z \in W$ para cualesquiera $u, z \in W$.

ii. $\lambda u \in W, \forall \lambda \in K$ y $\forall u \in W$.

Dem.

\implies] Como $W \leq V$ entonces W es cerrado bajo el producto por escalar. Así, si $z \in W$ entonces $(-1)z = -z \in W$. Luego, W es cerrado bajo la suma. De esta forma, sea $u \in W$ entonces $u + (-z) = u - z \in W$.

\Leftarrow] Por el teorema 6, es suficiente demostrar

a) $W \neq \emptyset$

Esto se da por hipótesis.

b) W es cerrado bajo la suma.

Como pasa ii y sean $z \in W$, $-1 \in K$ entonces $(-1)z = -z \in W$. Así, $u - (-z) = u + z \in W$.

c) W es cerrado bajo el producto por escalar.

Se da por hipótesis. ■

5. Sean $V = \mathbb{R}^3$, un \mathbb{R} - espacio vectorial, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar, W_1 y W_2 subconjuntos de V , definidos como, $W_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 3a - b + 4c = 0\}$ y $W_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = -a, 2c = a\}$ ¿Es $V = W_1 \oplus W_2$? Demuéstrelo o dé un contraejemplo de la propiedad que no se cumpla.

Af: $V = W_1 \oplus W_2$.

Dem.

P.d. a) W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V .

b) $V = W_1 + W_2$

c) $W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$

a) W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V .

Como $\bar{0} = (0, 0, 0)$ es el neutro aditivo en V , entonces $\bar{0} \in W_1$ pues $3(0) - 0 + 4(0) = 0 - 0 + 0 = 0$.

Luego, sean $(a_1, b_1, c_1), (d_1, e_1, f_1) \in W_1$ entonces $3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0$ y $3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0$. Por definición de suma en \mathbb{R}^3 se tiene que

$$(a_1, b_1, c_1) + (d_1, e_1, f_1) = (a_1 + d_1, b_1 + e_1, c_1 + f_1)$$

Y como

$$\begin{aligned} 3(a_1 + d_1) - (b_1 + e_1) + 4(c_1 + f_1) &= (3a_1 + 3d_1) + (-b_1 - e_1) + (4c_1 + 4f_1) \\ &= (3a_1 - b_1 + 4c_1) + (3d_1 - e_1 + 4f_1) \\ &= 0 + 0 \\ &\quad (\text{pues } 3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0 \text{ y } 3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $(a_1, b_1, c_1) + (d_1, e_1, f_1) \in W_1$.

Después, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a, b, c) \in W_1$ entonces $3a - b + 4c = 0$. Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$$\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

Y como

$$\begin{aligned} 3\lambda a - \lambda b + 4\lambda c &= \lambda(3a - b + 4c) \\ &= \lambda(0) && (\text{pues } 3a - b + 4c = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $\lambda(a, b, c) \in W_1$

Como $\bar{0} \in W_1$, la suma y el producto por escalar son cerrados en W_1 , entonces $W_1 \leq V$, por la Proposición 5.

Ahora, se tiene que $\bar{0} \in W_2$ pues $0 = -0$ y $2(0) = 0$.

Luego, sea $(a_2, b_2, c_2) \in W_2$ entonces $b_2 = -a_2$ y $2c_2 = a_2$. Y sea $(d_2, e_2, f_2) \in W_2$ entonces $e_2 = -d_2$ y $2f_2 = d_2$. Por definición de suma en \mathbb{R}^3 se tiene que

$$(a_2, b_2, c_2) + (d_2, e_2, f_2) = (a_2 + d_2, b_2 + e_2, c_2 + f_2)$$

Y como

$$\begin{aligned} b_2 + e_2 &= -a_2 + (-d_2) && (\text{pues } b_2 = -a_2 \text{ y } e_2 = -d_2) \\ &= -(a_2 + d_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(c_2 + f_2) &= 2c_2 + 2f_2 \\ &= a_2 + d_2 && (\text{pues } 2c_2 = a_2 \text{ y } 2f_2 = d_2) \end{aligned}$$

entonces $(a_2, b_2, c_2) + (d_2, e_2, f_2) \in W_2$.

Después, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(d, e, f) \in W_2$ entonces $e = -d$ y $2f = d$. Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$$\lambda(d, e, f) = (\lambda d, \lambda e, \lambda f)$$

Y como

$$\begin{aligned} \lambda e &= \lambda(-d) && \text{(pues } e = -d) \\ &= -(\lambda d) && \text{(inciso 3 de la proposición 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\lambda f) &= \lambda(2f) \\ &= \lambda d && \text{(pues } 2f = d) \end{aligned}$$

entonces $\lambda(d, e, f) \in W_2$

Como $\bar{0} \in W_2$, la suma y el producto por escalar son cerrados en W_2 , entonces $W_2 \leq V$, por la Proposición 5.

b) $V = W_1 + W_2$

\subseteq] Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. P.d. $(a, b, c) \in W_1 + W_2$.

$$\text{Sean } u = \left(\frac{3a+b-4c}{6}, \frac{3a+5b+4c}{6}, \frac{-3a+b+8c}{12} \right) \text{ y } v = \left(\frac{3a-b+4c}{6}, \frac{-3a+b-4c}{6}, \frac{3a-b+4c}{12} \right).$$

Como

$$\begin{aligned} 3 \left(\frac{3a+b-4c}{6} \right) - \frac{3a+5b+4c}{6} + 4 \left(\frac{-3a+b+8c}{12} \right) &= \frac{9a+3b-12c}{6} + \\ &\quad \frac{-3a-5b-4c}{6} + \\ &\quad \frac{-6a+2b+16c}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $u \in W_1$. Y también se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{-3a+b-4c}{6} &= -\frac{3a-b+4c}{6} \quad y \\ 2 \left(\frac{3a-b+4c}{12} \right) &= \frac{3a-b+4c}{6} \end{aligned}$$

De esta manera, $v \in W_2$. Luego, $u + v \in W_1 + W_2$, pero

$$\begin{aligned} u + v &= \left(\frac{3a+b-4c}{6}, \frac{3a+5b+4c}{6}, \frac{-3a+b+8c}{12} \right) + \\ &\quad \left(\frac{3a-b+4c}{6}, \frac{-3a+b-4c}{6}, \frac{3a-b+4c}{12} \right) \\ &= \left(\frac{3a+b-4c}{6} + \frac{3a-b+4c}{6}, \frac{3a+5b+4c}{6} + \frac{-3a+b-4c}{6}, \frac{-3a+b+8c}{12} + \frac{3a-b+4c}{12} \right) \\ &= \left(\frac{6a}{6}, \frac{6b}{6}, \frac{12c}{12} \right) \\ &= (a, b, c) \end{aligned}$$

Así, $(a, b, c) \in W_1 + W_2$.

$\therefore V \subseteq W_1 + W_2$.

\supseteq] Como $W_1, W_2 \leq V$ entonces, por el Teorema 12, $W_1 + W_2 \leq V$ y por definición de subespacio vectorial $W_1 + W_2 \subseteq V$.

$\therefore V = W_1 + W_2$

c) $W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$

\subseteq] Sea $(a, b, c) \in W_1 \cap W_2$. P.d. $(a, b, c) \in \{\bar{0}\}$.

Como $(a, b, c) \in W_1 \cap W_2$ entonces $(a, b, c) \in W_1$ y $(a, b, c) \in W_2$. Ya que $(a, b, c) \in W_1$ entonces

$$3a - b + 4c = 0 \quad (1)$$

Asimismo, como $(a, b, c) \in W_2$ entonces

$$b = -a \quad (2)$$

y

$$\begin{aligned} 2c &= a \\ \implies c &= \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene que

$$\begin{aligned} 3a - (-a) + 4\left(\frac{a}{2}\right) &= 0 \\ \implies 3a + a + 2a &= 0 \\ \implies 6a &= 0 \\ \implies a &= 0 \end{aligned}$$

Así, por (2), se tiene que $b = -a = -0 = 0$. Y por (3) $c = \frac{a}{2} = \frac{0}{2} = 0$. De esta manera, $(a, b, c) = (0, 0, 0) = \bar{0}$.

$\therefore (a, b, c) \in \{\bar{0}\}$.

\supseteq] Como $W_1, W_2 \leq V$ entonces $\bar{0}$ pertenece a W_1 y a W_2 . Así, $\bar{0} \in W_1 \cap W_2$.

$\therefore \{\bar{0}\} \subseteq W_1 \cap W_2$

$\therefore W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$

$\therefore V = W_1 \oplus W_2$. ■