2. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes, sin formar ni resolver un sistema de ecuaciones. Justifique su respuesta.

   i. $A = \{\}$

      Af. A es linealmente independiente.

      Dem.

      Por definición, un conjunto es linealmente dependiente si existe un número finito de vectores distintos $v_1, \ldots v_n$ y escalares $a_1, \ldots a_n$, no todos cero, tal que $\overline{0} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Pero el conjunto A es vacío, por lo que no cumple la definición y de esta forma no es linealmente dependiente. Por lo tanto, A es linealmente independiente, por definición. $\blacksquare$

   ii. En el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, el conjunto $B = \{(-2, 6), (3, -9)\}$.

      Af: B es linealmente dependiente.

      Dem.

      Ya que $-\dfrac{3}{2}(-2, 6) = (3, -9)$, con $(-2, 6), (3, -9) \in B$ y $-\dfrac{3}{2}$ un escalar, se tiene que $(3, -9)$ es combinación lineal de $(-2, 6)$. Así, por el Teorema 17, B es linealmente dependiente. $\blacksquare$

   iii. En el K- espacio vectorial V, consideremos el conjunto $C = \left\{\overline{0}_V, u\right\}$, con $u \in V$ y $\overline{0}_V$, el idéntico aditivo en V.

      Af. C es linealmente dependiente.

      Dem.

      Como $\overline{0}_V$ es el idéntico aditivo en V, por el Teorema 17, se sabe que $\left\{\overline{0}_V\right\}$ es linealmente dependiente. Luego, como $\left\{\overline{0}_V\right\} \subseteq \left\{\overline{0}_V, u\right\}$, se tiene que $\left\{\overline{0}_V, u\right\}$ es linealmente dependiente, por el teorema 18. Por lo tanto, C es linealmente dependiente. $\blacksquare$

3. Sea V = $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios hasta de grado 2, con coeficientes reales, y consideremos $S = \left\{f(x) = x^2 + x + 3, g(x) = 5x^2 - x + 2, h(x) = -3x^2 + 4\right\} \subseteq$ V. Determine si S es o no base para V.

   Af: S es base para V.

   Dem.

   Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\overline{0} = a\, f(x) + b\, g(x) + c\, h(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= a(x^2 + x + 3) + b(5x^2 - x + 2) + c(-3x^2 + 4) \\
&= ax^2 + ax + 3a + 5bx^2 - bx + 2b - 3cx^2 + 4c \\
&= (a + 5b - 3c)x^2 + (a - b)x + (3a + 2b + 4c).
\end{aligned}$$

Así,

$$0 = a + 5b - 3c \tag{1}$$

$$0 = a - b \tag{2}$$

$$0 = 3a + 2b + 4c \tag{3}$$

De (2) se tiene que $a = b$. Sustituyendo esto en (1) y (3) se da que

$$0 = b + 5b - 3c = 6b - 3c \tag{4}$$

y

$$0 = 3b + 2b + 4c = 5b + 4c \tag{5}$$

Sumando $4 \cdot (4)$ y $3 \cdot (5)$ se obtiene que: $0 = 39b$ por lo que $b = 0$. Y como $a = b$ se tiene que $a = 0$.

De (4), y como $b = 0$, se da que $0 = -3c$. De esta forma, $c = 0$.

Ya que $a = b = c = 0$ entonces S es linealmente independiente.

Luego, por un ejercicio anterior, se sabe que $\left\{1, x, x^2\right\}$ es una base, la cual tiene 3 elementos. Además, como S es linealmente independiente y tiene 3 elementos, se da que S es una base para V, por el Corolario 25. ■