Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemáticas

Álgebra Lineal

Profesora:

Socorro López Olvera

Tarea 2

Alumnos:

Peña Mateos Jesús Jacob
Santana Reyes Osmar Dominique
Gallegos Torres Gonzalo

Semestre: 2022B

Fecha de Entrega:

1. **Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta.**

   i. **La matriz identidad es una matriz triangular superior.**

   Af: La matriz identidad es una matriz triangular superior.

   Dem.

   Sea $I_n = [a_{ij}]$ la matriz identidad. Por definición,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   Ya que $a_{ij} = 0 \ \forall\, i > j$, entonces I_n es una matriz triangular superior, por definición. ■

   ii. **Si V es un K - *espacio vectorial*, $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $U \leq V$.**

   Af: $U \leq V$.

   Dem.

   Como $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $W \subseteq V$ y $U \subseteq W$. De esta menera, como $U \subseteq W$ y $W \subseteq V$, entonces $U \subseteq V$.

   Luego, sea $\overline{0} \in V$ el neutro aditivo. Como $W \leq V$ entonces $\overline{0} \in W$, por el inciso i de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces $\overline{0} \in U$, por el inciso i de la proposición 5.

   Después, como $W \leq V$ entonces la adición es cerrada en W, por el inciso ii de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces la adición es cerrada en U, por el inciso ii de la proposición 5.

   Y finalmente, como $W \leq V$ entonces el producto por escalar es cerrado en W, por el inciso iii de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces el producto por escalar es cerrado en U, por el inciso iii de la proposición 5.

   En conclusión, como $\overline{0} \in U$, la adición es cerrada en U y el producto por escalar es cerrado en U, entonces $U \leq V$, por la proposición 5. ■

   iii. **Si A es una matriz con $tr(A) = 0$, entonces A es matriz antisimétrica.**

   Af: A no es matriz antisimétrica.

   Dem.

   Considerando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por definición, la traza de A es $tr(A) = 1 + (-1) + 0 = 0$. Así, $tr(A) = 0$.

   Luego,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 5 & -1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como $A^t \neq -A$ entonces la matriz A no es transpuesta. Por lo tanto, no es cierto que si A es una matriz con $tr(A) = 0$, entonces A es matriz antisimétrica. ■

2. **Sean $n \in \mathbb{N}$, K un campo, $A \in M_n[K]$ y A^t su transpuesta.**

   i. **Demuestra que $A + A^t$ es una matriz simétrica.**

   ii. **Sea $U = \{A \in M_n[K] \mid A$ es antisimétrica$\} \subseteq M_n[K]$. Demuestre que $U \leq M_n[K]$.**

   iii. **¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz simétrica de orden n? Argumente su respuesta.**

3. **Sea V un K-espacio vectorial y $W_1, W_2, \ldots, W_n \leq V$ entonces:**

i. $W_1 + W_2 + \cdots + W_n \leq V$**.**

Dem.

Pd. $\overline{0} \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$.

Como $W_1, W_2, \ldots, W_n \leq V$, entonces $\overline{0} \in W_1, W_2, \ldots, W_n$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Así,

$$\underbrace{\overline{0} + \overline{0} + \cdots + \overline{0}}_{} \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

n veces Es decir,

$$\overline{0} \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

Pd. Cerradura de la suma.

Sean $v, w \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$, entonces existen $v_1, w_1 \in W_1$, $v_2, w_2 \in W_2$, $\ldots$, $v_n, w_n \in W_n$ tales que

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \qquad y \qquad w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

Entonces

$$v + w = (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n)$$

Y conmutando y asociando se tiene que

$$v + w = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \cdots + (v_n + w_n)$$

De donde $(v_1 + w_1) \in W_1$, $(v_2 + w_2) \in W_2$, $\ldots$, $(v_n + w_n) \in W_n$ pues $W_1, W_2, \ldots, W_n \leq V$. Así pues

$$v + w \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

Pd. Cerradura del producto por escalar.

Sean $v \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ y $\delta \in K$, entonces existen $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$, $\ldots$, $v_n \in W_n$ tales que

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta v &= \delta\,(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= \delta v_1 + \delta v_2 + \cdots + \delta v_n \end{aligned}$$

De donde $\delta v_1 \in W_1$, $\delta v_2 \in W_2$, $\ldots$, $\delta v_n \in W_n$ pues $W_1, W_2, \ldots, W_n \leq V$. Así,

$$\delta v_1 + \delta v_2 + \cdots + \delta v_n \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$
Es decir,
$$\delta v \in W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

$\therefore W_1 + W_2 + \cdots + W_n \leq V$.

II. $W_i \subseteq W_1 + W_2 + \cdots + W_n;\ \forall\, i = 1, \ldots, n$.

Dem.

Sea $u_i \in W_i$. Como $\overline{0} \in W_1, W_2, \ldots, W_n$, pues $W_1, W_2, \ldots, W_n \leq V$, entonces

$$\overline{0} + \overline{0} + \ldots + u_i + \ldots + \overline{0} \in W_1 + W_2 + \cdots + W_i + \cdots + W_n$$

Es decir,

$$u_i \in W_1 + W_2 + \cdots + W_i + \cdots + W_n$$

$\therefore W_i \subseteq W_1 + W_2 + \cdots + W_n$. ■

4. Sea V un K - *espacio vectorial* y $W \subseteq V$ no vacío. Demuestre que $W \leq V$, si y solo si se cumple:

i. $u - z \in W$ **para cualesquiera** $u,\, z \in W$**.**

ii. $\lambda u \in W$**,** $\forall\, \lambda \in K$ **y** $\forall\, u \in W$**.**

5. Sean $V = \mathbb{R}^3$**, un** $\mathbb{R}$ **-** ***espacio vectorial*****, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar,** W_1 **y** W_2 **subconjuntos de** V**, definidos como,** $W_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3a - b + 4c = 0\right\}$ **y** $W_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, b = -a, 2c = a\right\}$ **¿Es** $V = W_1 \oplus W_2$**? Demuéstrelo o dé un contraejemplo de la propiedad que no se cumpla.**

Af: $V = W_1 \oplus W_2$.

Dem.

P.d.
a) W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.
b) $V = W_1 + W_2$
c) $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$

a) W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.

Como $\overline{0} = (0,0,0)$ es el neutro aditivo en V, entonces $\overline{0} \in W_1$ pues $3(0) - 0 + 4(0) = 0 - 0 + 0 = 0$.

Luego, sean $(a_1,b_1,c_1),(d_1,e_1,f_1) \in W_1$ entonces $3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0$ y $3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0$. Por definición de suma en $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$(a_1,b_1,c_1) + (d_1,e_1,f_1) = (a_1 + d_1,\, b_1 + e_1,\, c_1 + f_1)$

Y como

$$\begin{aligned}
3(a_1 + d_1) - (b_1 + e_1) + 4(c_1 + f_1) &= (3a_1 + 3d_1) + (-b_1 - e_1) + (4c_1 + 4f_1)\\
&= (3a_1 - b_1 + 4c_1) + (3d_1 - e_1 + 4f_1)\\
&= 0 + 0\\
&\quad (\text{pues } 3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0 \text{ y } 3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0)\\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces $(a_1,b_1,c_1) + (d_1,e_1,f_1) \in W_1$.

Después, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a,b,c) \in W_1$ entonces $3a - b + 4c = 0$. Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$\lambda(a,b,c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

Y como

$$\begin{aligned}
3\lambda a - \lambda b + 4\lambda c =& \lambda(3a - b + 4c)\\
=& \lambda(0) && (\text{pues } 3a - b + 4c = 0)\\
=& 0
\end{aligned}$$

entonces $\lambda(a,b,c) \in W_1$

Como $\overline{0} \in W_1$, la suma y el producto por escalar son cerrados en W_1, entonces $W_1 \leq V$, por la Proposición 5.

Ahora, se tiene que $\overline{0} \in W_2$ pues $0 = -0$ y $2(0) = 0$.

Luego, sea $(a_2,b_2,c_2) \in W_2$ entonces $b_2 = -a_2$ y $2c_2 = a_2$. Y sea $(d_2,e_2,f_2) \in W_2$ entonces $e_2 = -d_2$ y $2f_2 = d_2$. Por definición de suma en $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$(a_2,b_2,c_2) + (d_2,e_2,f_2) = (a_2 + d_2,\, b_2 + e_2,\, c_2 + f_2)$

Y como

$$\begin{aligned}
b_2 + e_2 =& -a_2 + (-d_2) && (\text{pues } b_2 = -a_2 \text{ y } e_2 = -d_2)\\
=& -(a_2 + d_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2(c_2 + f_2) &= 2c_2 + 2f_2\\
&= a_2 + d_2 && (\text{pues } 2c_2 = a_2 \text{ y } 2f_2 = d_2)
\end{aligned}$$

entonces $(a_2,b_2,c_2) + (d_2,e_2,f_2) \in W_2$.

Después, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(d,e,f) \in W_2$ entonces $e = -d$ y $2f = d$. Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$\lambda(d,e,f) = (\lambda d, \lambda e, \lambda f)$

Y como

$$\begin{aligned} \lambda e =& \lambda(-d) && \text{(pues } e = -d\text{)} \\ =& -(\lambda d) && \text{(inciso 3 de la proposición 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\lambda f) =& \lambda(2f) \\ =& \lambda d && \text{(pues } 2f = d\text{)} \end{aligned}$$

entonces $\lambda(d,e,f) \in W_2$

Como $\overline{0} \in W_2$, la suma y el producto por escalar son cerrados en W_2, entonces $W_2 \leq V$, por la Proposición 5.

b) $V = W_1 + W_2$

$\subseteq$] Sea $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. P.d. $(a,b,c) \in W_1 + W_2$.

Sean $u = \left(\frac{3a+b-4c}{6}, \frac{3a+5b+4c}{6}, \frac{-3a+b+8c}{12}\right)$ y $v = \left(\frac{3a-b+4c}{6}, \frac{-3a+b-4c}{6}, \frac{3a-b+4c}{12}\right)$. Como

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{3a+b-4c}{6}\right) - \frac{3a+5b+4c}{6} + 4\left(\frac{-3a+b+8c}{12}\right) &= \frac{9a+3b-12c}{6} + \\ &\quad \frac{-3a-5b-4c}{6} + \\ &\quad \frac{-6a+2b+16c}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $u \in W_1$. Y también se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{-3a+b-4c}{6} &= -\frac{3a-b+4c}{6} \quad y \\ 2\left(\frac{3a-b+4c}{12}\right) &= \frac{3a-b+4c}{6} \end{aligned}$$

De esta manera, $v \in W_2$. Luego, $u + v \in W_1 + W_2$, pero

$$\begin{aligned} u + v =& \left(\frac{3a+b-4c}{6}, \frac{3a+5b+4c}{6}, \frac{-3a+b+8c}{12}\right) + \\ & \left(\frac{3a-b+4c}{6}, \frac{-3a+b-4c}{6}, \frac{3a-b+4c}{12}\right) \\ =& \left(\frac{3a+b-4c}{6} + \frac{3a-b+4c}{6}, \frac{3a+5b+4c}{6} + \frac{-3a+b-4c}{6}, \frac{-3a+b+8c}{12} + \frac{3a-b+4c}{12}\right) \\ =& \left(\frac{6a}{6}, \frac{6b}{6}, \frac{12c}{12}\right) \\ =& (a,b,c) \end{aligned}$$

Así, $(a,b,c) \in W_1 + W_2$.

$\therefore V \subseteq W_1 + W_2$.

$\supseteq$] Como $W_1, W_2 \leq V$ entonces, por el Teorema 12, $W_1 + W_2 \leq V$ y por definición de subespacio vectorial $W_1 + W_2 \subseteq V$.

$\therefore V = W_1 + W_2$

c) $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$

$\subseteq$] Sea $(a,b,c) \in W_1 \cap W_2$. P.d. $(a,b,c) \in \{\overline{0}\}$.

Como $(a,b,c) \in W_1 \cap W_2$ entonces $(a,b,c) \in W_1$ y $(a,b,c) \in W_2$. Ya que $(a,b,c) \in W_1$ entonces

$$3a - b + 4c = 0 \tag{1}$$

Asimismo, como $(a,b,c) \in W_2$ entonces

$$b = -a \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned} &2c = a \\ &\Longrightarrow c = \frac{a}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene que

$$\begin{aligned} &3a - (-a) + 4\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \\ &\Longrightarrow 3a + a + 2a = 0 \\ &\Longrightarrow 6a = 0 \\ &\Longrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Así, por (2), se tiene que $b = -a = -0 = 0$. Y por (3) $c = \frac{a}{2} = \frac{0}{2} = 0$. De esta manera, $(a,b,c) = (0,0,0) = \overline{0}$.

$\therefore (a,b,c) \in \{\overline{0}\}$.

$\supseteq$] Como $W_1, W_2 \leq V$ entonces $\overline{0}$ pertenece a W_1 y a W_2. Así, $\overline{0} \in W_1 \cap W_2$.

$\therefore \{\overline{0}\} \subseteq W_1 \cap W_2$

$\therefore W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$

$\therefore V = W_1 \oplus W_2$. $\blacksquare$