

Universidad Autónoma del Estado  
de México

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemáticas

Álgebra Lineal

**Profesora:**

*Socorro López Olvera*

**Tarea 2**

**Alumnos:**

*Peña Mateos Jesús Jacob*

*Santana Reyes Osmar Dominique*

*Gallegos Torres Gonzalo*

**Semestre: 2022B**

Fecha de Entrega:

1. Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta.

i. La matriz identidad es una matriz triangular superior.

**Af:** La matriz identidad es una matriz triangular superior.

**Dem.**

Sea  $I_n = [a_{ij}]$  la matriz identidad. Por definición,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que  $a_{ij} = 0 \forall i > j$ , entonces  $I_n$  es una matriz triangular superior, por definición. ■

ii. Si  $V$  es un  $K$  - espacio vectorial,  $W \leq V$  y  $U \leq W$  entonces  $U \leq V$ .

**Af:**  $U \leq V$ .

**Dem.**

Como  $W \leq V$  y  $U \leq W$  entonces  $W \subseteq V$  y  $U \subseteq W$ . De esta manera, como  $U \subseteq W$  y  $W \subseteq V$ , entonces  $U \subseteq V$ .

Luego, sea  $\bar{0} \in V$  el neutro aditivo. Como  $W \leq V$  entonces  $\bar{0} \in W$ , por el inciso i de la proposición 5. Y ya que  $U \leq W$  entonces  $\bar{0} \in U$ , por el inciso i de la proposición 5.

Después, como  $W \leq V$  entonces la adición es cerrada en  $W$ , por el inciso ii de la proposición 5. Y ya que  $U \leq W$  entonces la adición es cerrada en  $U$ , por el inciso ii de la proposición 5.

Y finalmente, como  $W \leq V$  entonces el producto por escalar es cerrado en  $W$ , por el inciso iii de la proposición 5. Y ya que  $U \leq W$  entonces el producto por escalar es cerrado en  $U$ , por el inciso iii de la proposición 5.

En conclusión, como  $\bar{0} \in U$ , la adición es cerrada en  $U$  y el producto por escalar es cerrado en  $U$ , entonces  $U \leq V$ , por la proposición 5. ■

iii. Si  $A$  es una matriz con  $\text{tr}(A) = 0$ , entonces  $A$  es matriz antisimétrica.

**Af:**  $A$  no es matriz antisimétrica.

**Dem.**

Considerando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Por definición, la traza de  $A$  es  $\text{tr}(A) = 1 + (-1) + 0 = 0$ . Así,  $\text{tr}(A) = 0$ .

Luego,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 5 & -1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $A^t \neq -A$  entonces la matriz  $A$  no es transpuesta. Por lo tanto, no es cierto que si  $A$  es una matriz con  $\text{tr}(A) = 0$ , entonces  $A$  es matriz antisimétrica. ■

2. Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K$  un campo,  $A \in M_n[K]$  y  $A^t$  su transpuesta.

i. Demuestra que  $A + A^t$  es una matriz simétrica.

- ii. Sea  $U = \{A \in M_n[K] \mid A \text{ es antisimétrica}\} \subseteq M_n[K]$ . Demuestre que  $U \leq M_n[K]$ .
- iii. ¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz simétrica de orden  $n$ ? Argumente su respuesta.

3. Demuestre el corolario 13.

4. Sea  $V$  un  $K$  - espacio vectorial y  $W \subseteq V$  no vacío. Demuestre que  $W \leq V$ , si y solo si se cumple:

- i.  $u - z \in W$  para cualesquiera  $u, z \in W$ .
- ii.  $\lambda u \in W, \forall \lambda \in K \text{ y } \forall u \in W$ .

5. Sean  $V = \mathbb{R}^3$ , un  $\mathbb{R}$  - espacio vectorial, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar,  $W_1$  y  $W_2$  subconjuntos de  $V$ , definidos como,  $W_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 3a - b + 4c = 0\}$  y  $W_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = -a, 2c = a\}$  ¿Es  $V = W_1 \oplus W_2$ ? Demuéstrelo o dé un contraejemplo de la propiedad que no se cumpla.

Af:  $V = W_1 \oplus W_2$ .

Dem.

P.d. a)  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios vectoriales de  $V$ .

b)  $V = W_1 + W_2$

c)  $W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$

a)  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios vectoriales de  $V$ .

Como  $\bar{0} = (0, 0, 0)$  es el neutro aditivo en  $V$ , entonces  $\bar{0} \in W_1$  pues  $3(0) - 0 + 4(0) = 0 - 0 + 0 = 0$ .

Luego, sean  $(a_1, b_1, c_1), (d_1, e_1, f_1) \in W_1$  entonces  $3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0$  y  $3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0$ . Por definición de suma en  $\mathbb{R}^3$  se tiene que

$$(a_1, b_1, c_1) + (d_1, e_1, f_1) = (a_1 + d_1, b_1 + e_1, c_1 + f_1)$$

Y como

$$\begin{aligned} 3(a_1 + d_1) - (b_1 + e_1) + 4(c_1 + f_1) &= (3a_1 + 3d_1) + (-b_1 - e_1) + (4c_1 + 4f_1) \\ &= (3a_1 - b_1 + 4c_1) + (3d_1 - e_1 + 4f_1) \\ &= 0 + 0 \\ &\quad (\text{pues } 3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0 \text{ y } 3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces  $(a_1, b_1, c_1) + (d_1, e_1, f_1) \in W_1$ .

Después, sean  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $(a, b, c) \in W_1$  entonces  $3a - b + 4c = 0$ . Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$$\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

Y como

$$\begin{aligned} 3\lambda a - \lambda b + 4\lambda c &= \lambda(3a - b + 4c) \\ &= \lambda(0) && (\text{pues } 3a - b + 4c = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces  $\lambda(a, b, c) \in W_1$

Como  $\bar{0} \in W_1$ , la suma y el producto por escalar son cerrados en  $W_1$ , entonces  $W_1 \leq V$ , por la Proposición 5.

Ahora, se tiene que  $\bar{0} \in W_2$  pues  $0 = -0$  y  $2(0) = 0$ .

Luego, sea  $(a_2, b_2, c_2) \in W_2$  entonces  $b_2 = -a_2$  y  $2c_2 = a_2$ . Y sea  $(d_2, e_2, f_2) \in W_2$  entonces  $e_2 = -d_2$  y  $2f_2 = d_2$ . Por definición de suma en  $\mathbb{R}^3$  se tiene que

$$(a_2, b_2, c_2) + (d_2, e_2, f_2) = (a_2 + d_2, b_2 + e_2, c_2 + f_2)$$

Y como

$$\begin{aligned} b_2 + e_2 &= -a_2 + (-d_2) & (\text{pues } b_2 = -a_2 \text{ y } e_2 = -d_2) \\ &= -(a_2 + d_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(c_2 + f_2) &= 2c_2 + 2f_2 \\ &= a_2 + d_2 & (\text{pues } 2c_2 = a_2 \text{ y } 2f_2 = d_2) \end{aligned}$$

entonces  $(a_2, b_2, c_2) + (d_2, e_2, f_2) \in W_2$ .

Después, sean  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $(d, e, f) \in W_2$  entonces  $e = -d$  y  $2f = d$ . Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$$\lambda(d, e, f) = (\lambda d, \lambda e, \lambda f)$$

Y como

$$\begin{aligned} \lambda e &= \lambda(-d) & (\text{pues } e = -d) \\ &= -(\lambda d) & (\text{inciso 3 de la proposición 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\lambda f) &= \lambda(2f) \\ &= \lambda d & (\text{pues } 2f = d) \end{aligned}$$

entonces  $\lambda(d, e, f) \in W_2$

Como  $\bar{0} \in W_2$ , la suma y el producto por escalar son cerrados en  $W_2$ , entonces  $W_2 \leq V$ , por la Proposición 5.

b)  $V = W_1 + W_2$

$\subseteq ]$  Sea  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . P.d.  $(a, b, c) \in W_1 + W_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Sean } u &= \left( \frac{3a+b-4c}{6}, \frac{3a+5b+4c}{6}, \frac{-3a+b+8c}{12} \right) \text{ y} \\ v &= \left( \frac{3a-b+4c}{6}, \frac{-3a+b-4c}{6}, \frac{3a-b+4c}{12} \right). \text{ Como} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \left( \frac{3a+b-4c}{6} \right) - \frac{3a+5b+4c}{6} + 4 \left( \frac{-3a+b+8c}{12} \right) &= \frac{9a+3b-12c}{6} + \\ &\quad \frac{-3a-5b-4c}{6} + \\ &\quad \frac{-6a+2b+16c}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces  $u \in W_1$ . Y también se tiene que

$$\frac{-3a+b-4c}{6} = -\frac{3a-b+4c}{6} \quad y$$

$$2 \left( \frac{3a-b+4c}{12} \right) = \frac{3a-b+4c}{6}$$

De esta manera,  $v \in W_2$ . Luego,  $u + v \in W_1 + W_2$ , pero

$$u + v = \left( \frac{3a + b - 4c}{6}, \frac{3a + 5b + 4c}{6}, \frac{-3a + b + 8c}{12} \right) + \left( \frac{3a - b + 4c}{6}, \frac{-3a + b - 4c}{6}, \frac{3a - b + 4c}{12} \right)$$