Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemáticas

Álgebra Lineal

Profesora:

Socorro López Olvera

Tarea 2

Alumnos:

Peña Mateos Jesús Jacob
Santana Reyes Osmar Dominique
Gallegos Torres Gonzalo

Semestre: 2022B

Fecha de Entrega:

1. **Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta.**

   i. **La matriz identidad es una matriz triangular superior.**

   Af: La matriz identidad es una matriz triangular superior.

   Dem.

   Sea $I_n = [a_{ij}]$ la matriz identidad. Por definición,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   Ya que $a_{ij} = 0 \ \forall\, i > j$, entonces I_n es una matriz triangular superior, por definición. ■

   ii. **Si V es un K - *espacio vectorial*, $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $U \leq V$.**

   Af: $U \leq V$.

   Dem.

   Como $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $W \subseteq V$ y $U \subseteq W$. De esta menera, como $U \subseteq W$ y $W \subseteq V$, entonces $U \subseteq V$.

   Luego, sea $\overline{0} \in V$ el neutro aditivo. Como $W \leq V$ entonces $\overline{0} \in W$, por el inciso i de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces $\overline{0} \in U$, por el inciso i de la proposición 5.

   Después, como $W \leq V$ entonces la adición es cerrada en W, por el inciso ii de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces la adición es cerrada en U, por el inciso ii de la proposición 5.

   Y finalmente, como $W \leq V$ entonces el producto por escalar es cerrado en W, por el inciso iii de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces el producto por escalar es cerrado en U, por el inciso iii de la proposición 5.

   En conclusión, como $\overline{0} \in U$, la adición es cerrada en U y el producto por escalar es cerrado en U, entonces $U \leq V$, por la proposición 5. ■

   iii. **Si A es una matriz con $tr(A) = 0$, entonces A es matriz antisimétrica.**

   Af: A no es matriz antisimétrica.

   Dem.

   Considerando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por definición, la traza de A es $tr(A) = 1 + (-1) + 0 = 0$. Así, $tr(A) = 0$.

   Luego,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 5 & -1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como $A^t \neq -A$ entonces la matriz A no es transpuesta. Por lo tanto, no es cierto que si A es una matriz con $tr(A) = 0$, entonces A es matriz antisimétrica. ■

2. **Sean $n \in \mathbb{N}$, K un campo, $A \in M_n[K]$ y A^t su transpuesta.**

i. **Demuestra que $A + A^t$ es una matriz simétrica.**

ii. **Sea $U = \{A \in M_n[K] \mid A$ es antisimétrica$\} \subseteq M_n[K]$. Demuestre que $U \leq M_n[K]$.**

iii. **¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz simétrica de orden n? Argumente su respuesta.**

3. **Demuestre el corolario 13.**

4. **Sea V un K - *espacio vectorial* y $W \subseteq V$ no vacío. Demuestre que $W \leq V$, si y solo si se cumple:**

   i. $u - z \in W$ **para cualesquiera** $u, z \in W$.

   ii. $\lambda u \in W$, $\forall\, \lambda \in K$ **y** $\forall\, u \in W$.

5. **Sean $V = \mathbb{R}^3$, un $\mathbb{R}$ - *espacio vectorial*, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar, W_1 y W_2 subconjuntos de V, definidos como, $W_1 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3a - b + 4c = 0\right\}$ y $W_2 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, b = -a, 2c = a\right\}$ ¿Es $V = W_1 \oplus W_2$? Demuéstrelo o dé un contraejemplo de la propiedad que no se cumpla.**