5. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, T un operador lineal en V y β una base para V. Entonces λ es valor propio de T si y solo si λ es valor propio de $[T]_\beta$.

Demostración.

Por el Teorema 2.1.13, λ es valor propio de T si y solo si $\det(T - \lambda 1_V) = 0$. Luego, por el inciso 4 del Teorema 2.1.12, $\det([T]_\beta - \lambda I_n) = \det(T - \lambda 1_V) = 0$ si y solo si λ es valor propio de $[T]_\beta$, por el Corolario 2.1.14.

14. Demostrar que matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n[\mathbb{K}]$ matrices semejantes, es decir, existe $Q \in \mathcal{M}_n[\mathbb{K}]$ invertible tal que $B = Q^{-1}AQ$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{polcar}(B) &= \det(B - tI_n) \\
&= \det(Q^{-1}AQ - tI_n) \\
&= \det[Q^{-1}AQ - Q^{-1}(tI_n)Q] \\
&\quad \big(\text{pues } Q^{-1}(tI_n)Q = t(Q^{-1}I_nQ) = t(Q^{-1}Q) = tI_n\big) \\
&= \det[Q^{-1}(A - tI_n)Q] \\
&= \det(Q^{-1})\det(A - tI_n)\det(Q) \\
&= \frac{1}{\det(Q)}\det(A - tI_n)\det(Q) \\
&= \det(A - tI_n) \\
&= \operatorname{polcar}(A)
\end{aligned}$$

$\therefore \operatorname{polcar}(B) = \operatorname{polcar}(A)$.

17. Sean T un operador lineal en un espacio vectorial V, v un vector propio de T correspondiente al valor propio λ y $m \in \mathbb{N}$. Demostrar que v es un vector propio de T^m correspondiente al valor propio λ^m.

Demostración.

Aplicando inducción sobre m:

1. Base de inducción: Por hipótesis, v es vector propio de T correspondiente al valor propio λ. Así, v es un vector propio de T^m correspondiente al valor propio λ^m para $m = 1$.
2. Hipótesis de inducción: Suponiendo que la afirmación se cumple para $m = k$, es decir, v es un vector propio de T^k correspondiente al valor propio λ^k.
3. Paso inductivo: P.d. La afirmación se cumple para $m = k + 1$.

Por hipótesis de inducción se obtiene que

$$\begin{aligned}
T^{k+1}(v) &= T(T^k(v)) \\
&= T(\lambda^k v) \\
&= \lambda^k T(v) \\
&= \lambda^k(\lambda v) && \text{(por la base de inducción)} \\
&= \lambda^{k+1} v
\end{aligned}$$

$\therefore$ v es un vector propio de T^m correspondiente al valor propio λ^m para todo $m \in \mathbb{N}$.

41. Sea A una matriz real de $n \times n$ (todas sus entradas son reales) con un valor propio complejo $a + ib$ al que le corresponde un vector propio $v + iw$ donde v y w son vectores reales. Demostrar que $a - ib$ también es un valor propio con el vector propio $v - iw$.

Demostración.

Sean $A = [a_{jk}]$, $v + iw = [b_j]$, $v - iw = [c_j]$ y $A(v + iw) = [d_j]$ con $1 \leq j, k \leq n$, pues $v + iw, v - iw \in \mathbb{C}^n$ y así $A(v + iw) \in \mathbb{C}^n$. Luego, como $L_A(v - iw) = A(v - iw) \in \mathbb{C}^n$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
[A(v - iw)]_j &= \sum_{l=1}^{n} a_{jl} c_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{jl} \overline{b_l} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \overline{a_{jl} b_l} \\
&= \overline{\sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_l} \\
&= \overline{d_j} \\
&= \overline{(a + ib)(b_j)} && \text{(pues } L_A(v - iw) = A(v + iw) = (a + ib)(v + iw) \text{ por hipótesis)} \\
&= \left(\overline{a + ib}\right)\left(\overline{b_j}\right) \\
&= (a - ib) c_j
\end{aligned}$$

De esta manera, $L_A(v - iw) = A(v - iw) = (a - ib)(v - iw)$ y, por lo tanto, $v - iw$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $a - ib$.