# Universidad Autónoma del Estado de México

# Facultad de Ciencias

# Licenciatura en Matemáticas

## Álgebra Lineal


**Profesora:**

*Socorro López Olvera*


## Tarea 2


**Alumnos:**

*Peña Mateos Jesús Jacob*
*Santana Reyes Osmar Dominique*
*Gallegos Torres Gonzalo*


**Semestre: 2022B**

Fecha de Entrega:

1. **Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta.**

   i. **La matriz identidad es una matriz triangular superior.**

   **Af:** La matriz identidad es una matriz triangular superior.

   **Dem.**

   Sea $I_n = [a_{ij}]$ la matriz identidad. Por definición,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   Ya que $a_{ij} = 0 \ \forall\, i > j$, entonces $I_n$ es una matriz triangular superior, por definición. ■

   ii. **Si $V$ es un $K$ - *espacio vectorial*, $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $U \leq V$.**

   **Af:** $U \leq V$.

   **Dem.**

   Como $W \leq V$ y $U \leq W$ entonces $W \subseteq V$ y $U \subseteq W$. De esta menera, como $U \subseteq W$ y $W \subseteq V$, entonces $U \subseteq V$.

   Luego, sea $\overline{0} \in V$ el neutro aditivo. Como $W \leq V$ entonces $\overline{0} \in W$, por el inciso $i$ de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces $\overline{0} \in U$, por el inciso $i$ de la proposición 5.

   Después, como $W \leq V$ entonces la adición es cerrada en $W$, por el inciso $ii$ de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces la adición es cerrada en $U$, por el inciso $ii$ de la proposición 5.

   Y finalmente, como $W \leq V$ entonces el producto por escalar es cerrado en $W$, por el inciso $iii$ de la proposición 5. Y ya que $U \leq W$ entonces el producto por escalar es cerrado en $U$, por el inciso $iii$ de la proposición 5.

   En conclusión, como $\overline{0} \in U$, la adición es cerrada en $U$ y el producto por escalar es cerrado en $U$, entonces $U \leq V$, por la proposición 5. ■

   iii. **Si $A$ es una matriz con $tr(A) = 0$, entonces $A$ es matriz antisimétrica.**

   **Af:** $A$ no es matriz antisimétrica.

   **Dem.**

   Considerando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por definición, la traza de A es $tr(A) = 1 + (-1) + 0 = 0$. Así, $tr(A) = 0$.

   Luego,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 5 & -1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 5 & 1 & -9 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como $A^t \neq -A$ entonces la matriz $A$ no es transpuesta. Por lo tanto, no es cierto que si $A$ es una matriz con $tr(A) = 0$, entonces $A$ es matriz antisimétrica. ■

2. **Sean $n \in \mathbb{N}$, $K$ un campo, $A \in M_n[K]$ y $A^t$ su transpuesta.**

   i. **Demuestra que $A + A^t$ es una matriz simétrica.**

ii. **Sea $U = \{A \in M_n[K] \mid A$ es antisimétrica$\} \subseteq M_n[K]$. Demuestre que $U \leq M_n[K]$.**

iii. **¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz simétrica de orden $n$? Argumente su respuesta.**

**3. Demuestre el corolario 13.**

**4. Sea $V$ un $K$ - *espacio vectorial* y $W \subseteq V$ no vacío. Demuestre que $W \leq V$, si y solo si se cumple:**

i. $u - z \in W$ **para cualesquiera** $u$, $z \in W$.

ii. $\lambda u \in W$, $\forall\, \lambda \in K$ **y** $\forall\, u \in W$.

**5. Sean $V = \mathbb{R}^3$, un $\mathbb{R}$ - *espacio vectorial*, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar, $W_1$ y $W_2$ subconjuntos de $V$, definidos como, $W_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3a - b + 4c = 0\right\}$ y $W_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, b = -a, 2c = a\right\}$ ¿Es $V = W_1 \oplus W_2$? Demuéstrelo o dé un contraejemplo de la propiedad que no se cumpla.**

**Af:** $V = W_1 \oplus W_2$.

**Dem.**

P.d. a) $W_1$ y $W_2$ son subespacios vectoriales de $V$.
b) $V = W_1 + W_2$
c) $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$

a) $W_1$ y $W_2$ son subespacios vectoriales de $V$.

Como $\overline{0} = (0,0,0)$ es el neutro aditivo en $V$, entonces $\overline{0} \in W_1$ pues $3(0) - 0 + 4(0) = 0 - 0 + 0 = 0$.

Luego, sean $(a_1, b_1, c_1), (d_1, e_1, f_1) \in W_1$ entonces $3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0$ y $3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0$. Por definición de suma en $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$(a_1, b_1, c_1) + (d_1, e_1, f_1) = (a_1 + d_1,\, b_1 + e_1,\, c_1 + f_1)$

Y como

$$\begin{aligned} 3(a_1 + d_1) - (b_1 + e_1) + 4(c_1 + f_1) &= (3a_1 + 3d_1) + (-b_1 - e_1) + (4c_1 + 4f_1) \\ &= (3a_1 - b_1 + 4c_1) + (3d_1 - e_1 + 4f_1) \\ &= 0 + 0 \\ &\quad \text{(pues } 3a_1 - b_1 + 4c_1 = 0 \text{ y } 3d_1 - e_1 + 4f_1 = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $(a_1, b_1, c_1) + (d_1, e_1, f_1) \in W_1$.

Después, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a,b,c) \in W_1$ entonces $3a - b + 4c = 0$. Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$\lambda(a,b,c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

Y como

$$\begin{aligned} 3\lambda a - \lambda b + 4\lambda c =& \lambda(3a - b + 4c) \\ =& \lambda(0) && \text{(pues } 3a - b + 4c = 0) \\ =& 0 \end{aligned}$$

entonces $\lambda(a,b,c) \in W_1$

Como $\overline{0} \in W_1$, la suma y el producto por escalar son cerrados en $W_1$, entonces $W_1 \leq V$, por la Proposición 5.

Ahora, se tiene que $\overline{0} \in W_2$ pues $0 = -0$ y $2(0) = 0$.

Luego, sea $(a_2, b_2, c_2) \in W_2$ entonces $b_2 = -a_2$ y $2c_2 = a_2$. Y sea $(d_2, e_2, f_2) \in W_2$ entonces $e_2 = -d_2$ y $2f_2 = d_2$. Por definición de suma en $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$(a_2, b_2, c_2) + (d_2, e_2, f_2) = (a_2 + d_2,\ b_2 + e_2,\ c_2 + f_2)$

Y como

$$\begin{aligned} b_2 + e_2 =& -a_2 + (-d_2) && \text{(pues } b_2 = -a_2 \text{ y } e_2 = -d_2\text{)} \\ =& -(a_2 + d_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(c_2 + f_2) &= 2c_2 + 2f_2 \\ &= a_2 + d_2 && \text{(pues } 2c_2 = a_2 \text{ y } 2f_2 = d_2\text{)} \end{aligned}$$

entonces $(a_2, b_2, c_2) + (d_2, e_2, f_2) \in W_2$.

Después, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(d, e, f) \in W_2$ entonces $e = -d$ y $2f = d$. Luego, por definición de producto por escalar, se tiene que

$\lambda(d, e, f) = (\lambda d, \lambda e, \lambda f)$

Y como

$$\begin{aligned} \lambda e =& \lambda(-d) && \text{(pues } e = -d\text{)} \\ =& -(\lambda d) && \text{(inciso 3 de la proposición 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\lambda f) =& \lambda(2f) \\ =& \lambda d && \text{(pues } 2f = d\text{)} \end{aligned}$$

entonces $\lambda(d, e, f) \in W_2$

Como $\overline{0} \in W_2$, la suma y el producto por escalar son cerrados en $W_2$, entonces $W_2 \leq V$, por la Proposición 5.

b) $V = W_1 + W_2$

$\subseteq$ ] Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. P.d. $(a, b, c) \in W_1 + W_2$.