Ecuaciones Diferenciables Parciales
Tarea 4
Osmar Dominique Santana Reyes
No. de cuenta: 2125197

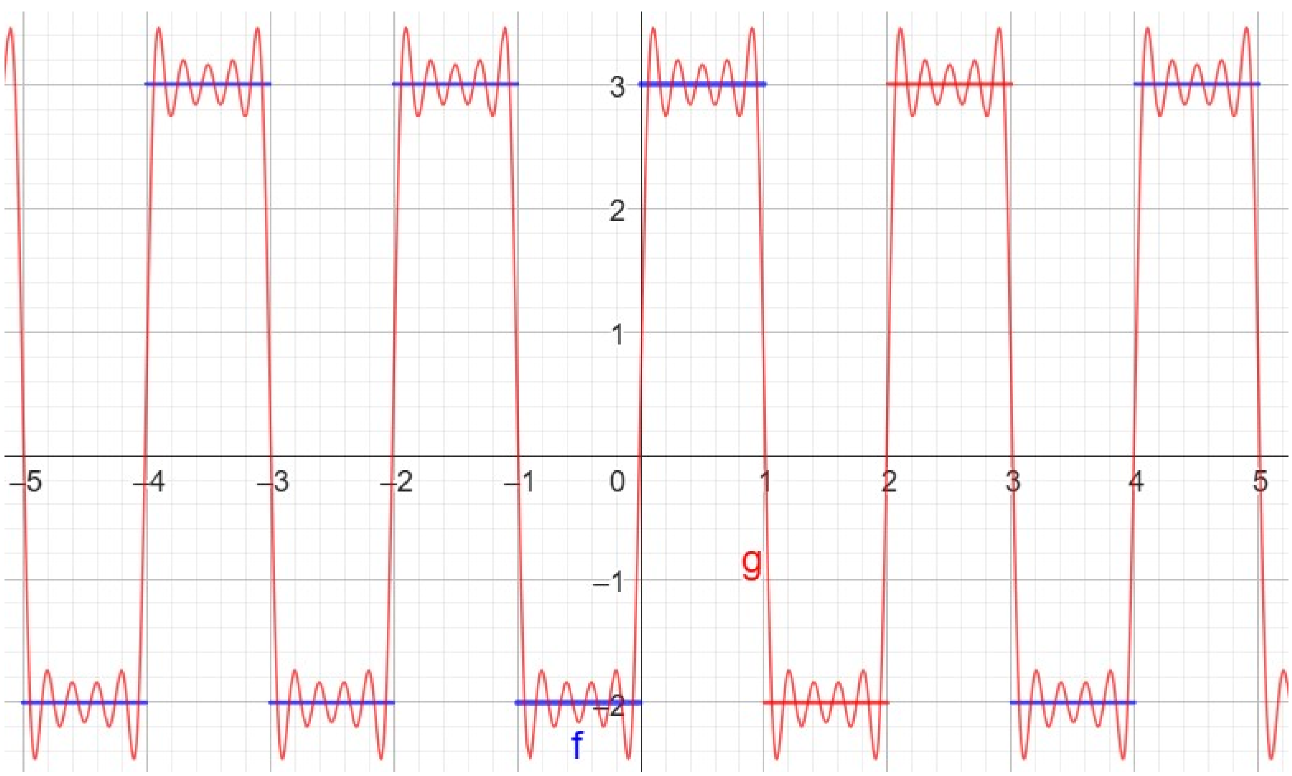
I. Construya la serie de Fourier completa de la función dada f. En cada caso, utilice esquemas apropiados y analice la convergencia de la serie en el intervalo $[-L, L]$ donde f está definida.

(1) $f(x) = \begin{cases} -2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 3\,\mathrm{d}x = -2 + 3 = 1 \\
a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -2\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 3\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0 \\
b_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -2\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 3\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} + \frac{3(-(-1)^n+1)}{n\pi} = \frac{5(1-(-1)^n)}{n\pi}
\end{aligned}$$

Así, $f(x) \sim \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(1-(-1)^n)}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)$



Luego, como f es suave por tramos en $[-1, 1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y a $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2}$ en todo $x \in \mathbb{Z}$.

(2) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

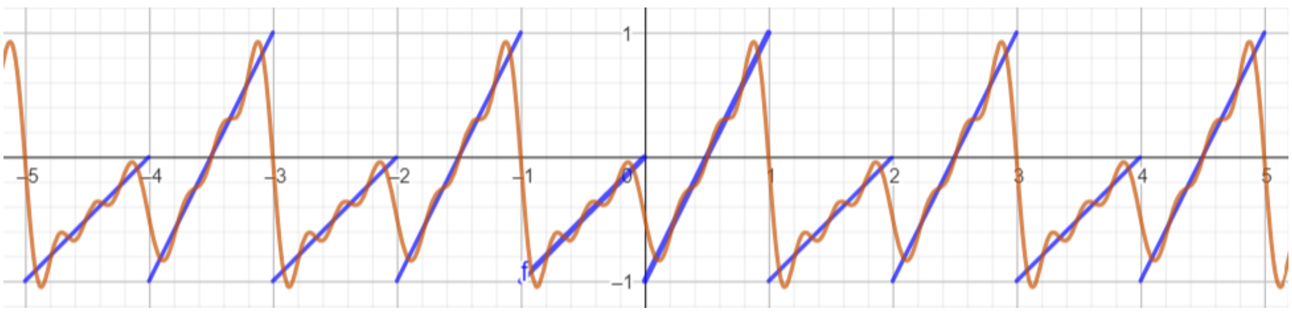
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 2x - 1\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(2x-1)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(2x-1)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{(-1)^n + 1}{n\pi} = -\frac{2(-1)^n + 1}{n\pi} \end{aligned}$$

Así, $f(x) \sim -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi x) - \frac{2(-1)^n + 1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\right]$



Luego, como f es suave por tramos en $[-1,1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, a $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$ en todo x entero par y en $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ en todo x entero impar.

(3) $1 - 2x, -2 \leq x \leq 2$

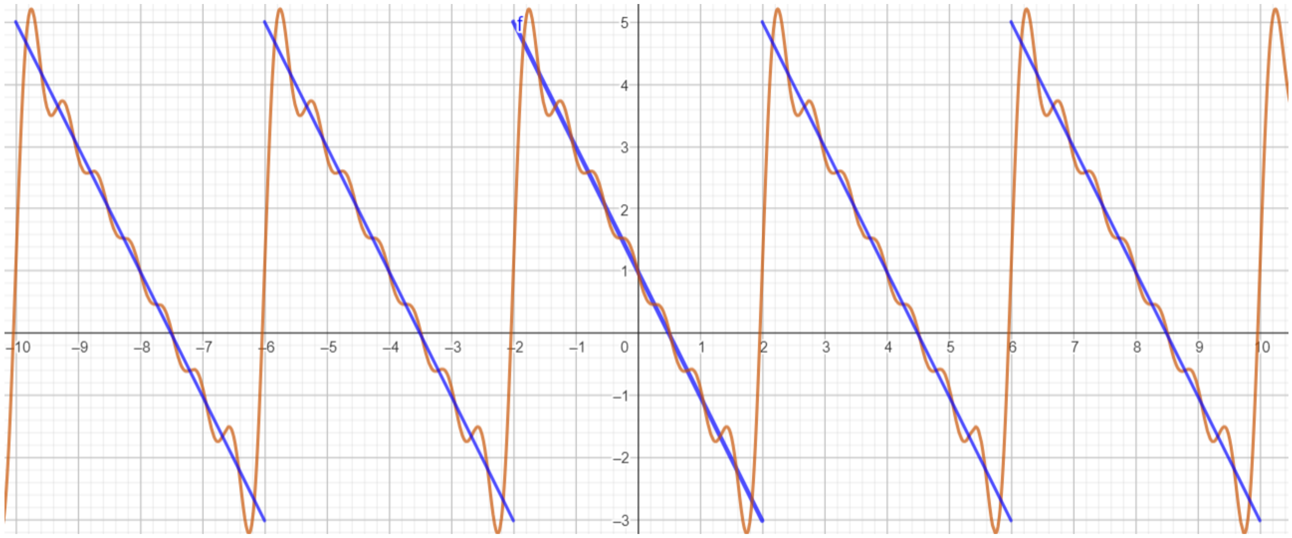
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 1 - 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-2+6) = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(1-2x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(1-2x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{8(-1)^n}{n\pi}$$

Así, $f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$



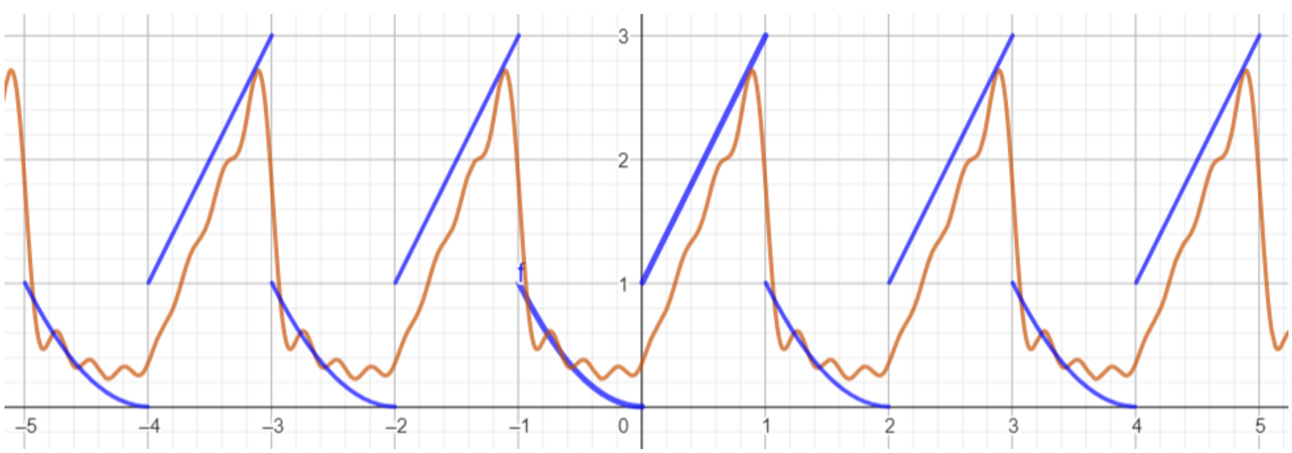
Luego, como f es suave por tramos en $[-2,2]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{Z} \colon x \equiv 2(\mod 4)\}$ y a $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ en todo $x \in \{x \in \mathbb{Z} \colon x \equiv 2(\mod 4)\}$.

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 0 \\ 1+2x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$

Solución.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1+2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}+2 = \frac{7}{3} \\
a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+2x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2} = \frac{4(-1)^n-2}{\pi^2 n^2} \\
b_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+2x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2-2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{3(-1)^n}{n\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2(-1)^n}{n\pi}
\end{aligned}
$$

Así, $f(x) \sim \dfrac{7}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n-2}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi x) + \left(\frac{2-2(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2(-1)^n}{n\pi}\right)\operatorname{sen}(n\pi x)\right]$



Luego, como f es suave por tramos en $[-1,1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ en todo x entero par y en

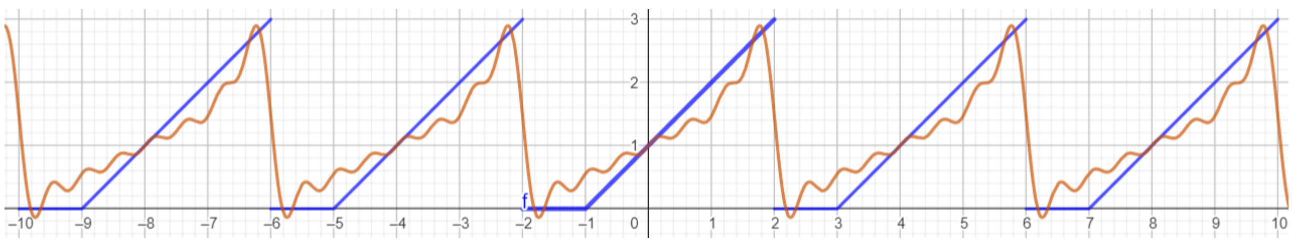
$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ en todo } x \text{ entero impar.}$$

(5) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le -1 \\ 1+x, & -1 < x \le 2 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 0\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} 1+x\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4} \\
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 0\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(1+x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-2}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right) \\
b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 0\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(1+x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{n\pi}\left(3(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Así, $f(x) \sim \dfrac{9}{8} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right)\cos(\frac{n\pi x}{2}) - \frac{2}{n\pi}\left(3(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{2})\right]$



Luego, como f es suave por tramos en $[-2,2]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{Z}\colon x \equiv 2(\mod 4)\}$ y en $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \dfrac{3+0}{2} = \dfrac{3}{2}$ en todo $x \in \{x \in \mathbb{Z}\colon x \equiv 2(\mod 4)\}$.

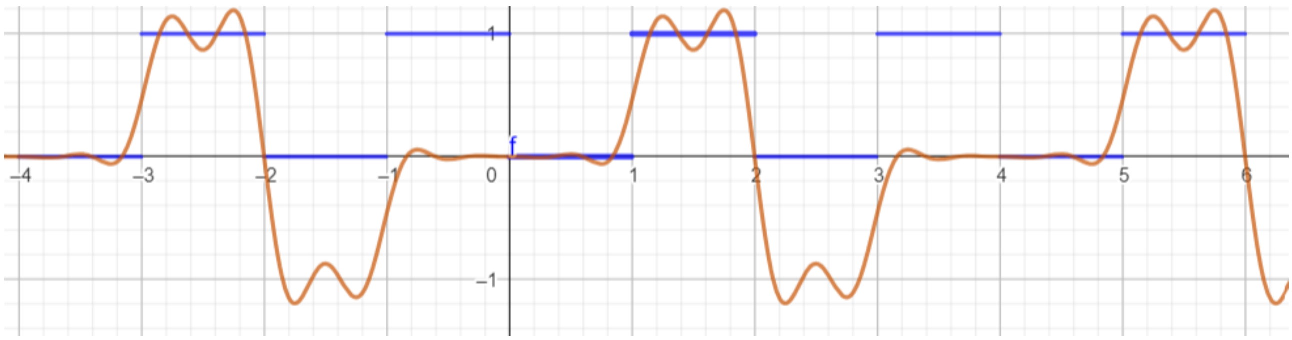
II. Construya la serie de senos de Fourier y la serie de cosenos de Fourier de la función dada f. En cada caso, utilice esquemas apropiados y analice la convergencia de la serie en el intervalo $[0,L]$ donde f está definida.

(1) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Solución.

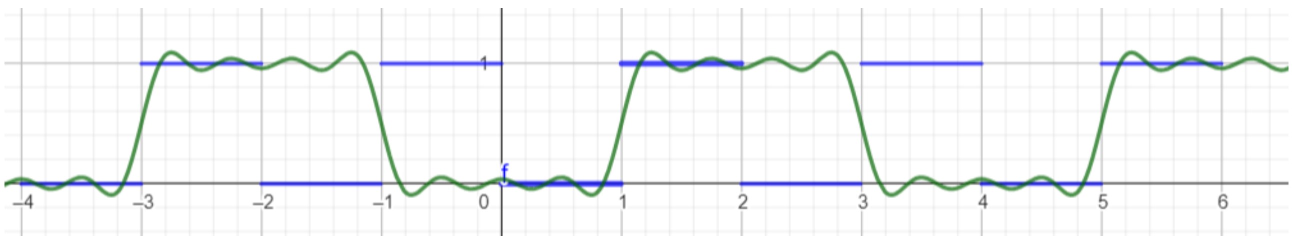
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 0\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
b_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 0\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right)
\end{aligned}$$

Así, la serie de senos de f es: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.



Como se ve en el dibujo, la serie de senos de f solo convergerá puntualmente a f en los intervalos $[4n, 4n+2]$, esto debido a que la función no es impar.

Y la serie de cosenos es: $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.



Nuevamente, la serie de cosenos de f solo convergerá puntualmente a f en los intervalos $[4n, 4n+2]$, esto debido a que la función no es par.

Luego, como f es suave por tramos en $[-1, 1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y a $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ en todo $x \in \mathbb{Z}$.

(2) $f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 3, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$

Solución.

(3) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Solución.

(4) $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$

Solución.

(5) $f(x) = x + \operatorname{sen}(x), 0 \le x \le \pi$

Solución.