

Para cada EDP:

- (i) Indica el orden y decide si es lineal, semilineal, cuasilineal o completamente no lineal.
  - (ii) Busca en Internet y describe un contexto físico o geométrico en el que la EDP sea relevante. En particular, ¿qué modelan la variable dependiente  $U$  y las variables independientes, y qué significan los parámetros de la EDP (ya sean las constantes o las funciones especificadas)? A menos que se especifique lo contrario,  $x \in \mathbb{R}$  o  $x \in \mathbb{R}^3$ .
  - (iii) Si la EDP lleva el nombre de alguien, búsquelo en línea.
- (a) **La ecuación de Schrödinger:**  $U(x, t)$  resuelve  $i\hbar U_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta U$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck reducida.

- (i) Sean  $F(U) = i\hbar U_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta U$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $W = W(x, t)$ , se da que

$$\begin{aligned} F(\lambda U + W) &= i\hbar (\lambda U + W)_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta (\lambda U + W) \\ &= i\hbar (\lambda U_t + W_t) + \frac{\hbar^2}{2m}(\lambda \Delta U + \Delta W) \\ &= \lambda \left( i\hbar U_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta U \right) + \left( i\hbar W_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta W \right) \\ &= \lambda F(U) + F(W) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger es lineal de segundo orden.

- (ii) Describe la evolución temporal de una partícula subatómica cuántica con masa en el contexto no relativista. Es de importancia central en la teoría de la mecánica cuántica ordinaria, donde representa para las partículas microscópicas un papel análogo a la segunda ley de Newton en la mecánica clásica. Donde  $i \in \mathbb{C}$ ,  $\hbar$  es la constante de Planck reducida (tiene varias interpretaciones pero en términos generales es el producto de la energía implicada y el tiempo empleado de una partícula microscópica),  $U$  es la función de onda del sistema cuántico,  $t$  es el tiempo transcurrido y  $m$  es la "masa reducida" de la partícula. El lado derecho de la ecuación caracteriza la energía total de cualquier función de onda dada.
  - (iii) La ecuación fue desarrollada por el físico austríaco Erwin Schrödinger en 1925 y publicada en el 1926. El realizó importantes contribuciones en los campos de la mecánica cuántica y la termodinámica. Recibió el Premio Nobel de Física en 1933 por haber desarrollado esta ecuación, compartido con Paul Dirac. Tras mantener una larga correspondencia con Albert Einstein propuso el experimento mental del gato de Schrödinger que mostraba las paradojas e interrogantes a los que abocaba la física cuántica.
- (b) **La ecuación de Burgers (no viscosa):**  $U(x, t)$  resuelve  $U_t + UU_x = 0$ .

- (i) Sean  $F(U) = U_t + UU_x$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $F$  es no lineal pues  $F(\lambda U) = \lambda U_t + (\lambda U)(\lambda U_x) = \lambda U_t + \lambda^2 UU_x \neq \lambda F(U)$ . De esta forma la ecuación es no lineal.

Luego, sean  $G(U_t, U_x) = U_t + UU_x$ ,  $W = W(x, t)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} G(\lambda(U_t, U_x) + (W_t, W_x)) &= G(\lambda U_t + W_t, \lambda U_x + W_x) \\ &= \lambda U_t + W_t + U(\lambda U_x + W_x) \\ &= \lambda(U_t + UU_x) + (W_t + UW_x) \\ &= \lambda G(U_t, U_x) + G(W_t, W_x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación es cuasilineal de primer orden.

- (ii) La ecuación representa un flujo unidimensional de un fluido no viscoso a través del tiempo, pero también es un prototipo para la ecuaciones de conservación que puede desarrollar discontinuidades, como la onda de choque. Aquí,  $U$  es la densidad del fluido,  $x$  es la posición del fluido y  $t$  es el tiempo transcurrido.

- (iii) Fue introducida por primera vez por Harry Bateman, (fue un matemático inglés que hizo un amplio estudio de las ecuaciones diferenciales aplicadas en su Conferencia Gibbs en 1943 titulada “El control de un fluido elástico”) y luego estudiada por Johannes Martinus Burgers (fue un físico neerlandés que investigó sobre la dinámica de fluidos y trabajó en la teoría de la turbulencia).
- (c) **La ecuación de Burgers completa:**  $U(x, t)$  resuelve  $U_t + UU_x = \epsilon U_{xx}$ .
- (i) De igual manera que el inciso anterior, la ecuación es no lineal. Pero si es lineal, respecto a  $\epsilon U_{xx}$ , y como la suma de operadores lineales es un operador lineal, se obtiene que la ecuación es semilineal de segundo orden.
- (ii) La ecuación de Burgers completa es una ecuación diferencial parcial fundamental que ocurre en varias áreas de la matemática aplicada, como la mecánica de fluidos, la acústica no lineal, la dinámica de gases y el flujo de tráfico. La notación usada es la misma que la del inciso anterior, agregando que  $\epsilon$  es el coeficiente de viscosidad de la sustancia y es positivo.
- (d) **La ecuación de Hamilton-Jacobi:**  $U(x, t)$  resuelve  $U_t + H(\nabla U, x) = 0$ , donde  $H: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  está dado.
- (i) Ya que  $H$  es el Hamiltoniano y este no es lineal, se tiene que la ecuación es no lineal. Mas aún, es completamente no lineal, pues el Hamiltoniano depende de las derivadas de más alto orden.
- (ii) La ecuación une la mecánica, la óptica y las matemáticas, y ayudó a establecer la teoría ondulatoria de la luz. Además, permite una formulación alternativa a la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana. Su empleo resulta ventajoso cuando se conoce alguna integral de movimiento sobre una partícula u onda. Aquí,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es el tiempo y  $H$  es el Hamiltoniano.
- (iii) Carl Gustav Jakob Jacobi fue un matemático alemán de origen judío que contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. Por otro lado, William Rowan Hamilton fue un matemático, físico, y astrónomo irlandés, que hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la dinámica, y el álgebra.
- (e) **La ecuación KdV:**  $U(x, t)$  resuelve  $U_t + U_{xxx} - 6UU_x = 0$ .
- (i) La ecuación es no lineal debido a que el término  $UU_x$  es no lineal respecto a  $U$ . Luego, sean  $F(U_t, U_x, U_{xxx}) = U_t + U_{xxx} - 6UU_x$ ,  $W = W(x, t)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se da que
- $$\begin{aligned} F(\lambda(U_t, U_x, U_{xxx}) + (W_t, W_x, W_{xxx})) &= F(\lambda U_t + W_t, \lambda U_x + W_x, \lambda U_{xxx} + W_{xxx}) \\ &= \lambda U_t + W_t + \lambda U_{xxx} + W_{xxx} - 6U(\lambda U_x + W_x) \\ &= \lambda(U_t + U_{xxx} - 6UU_x) + (W_t + W_{xxx} - 6UW_x) \\ &= \lambda F(U_t, U_x, U_{xxx}) + F(W_t, W_x, W_{xxx}) \end{aligned}$$
- Por lo tanto, la ecuación es semilineal de tercer orden.
- (ii) La ecuación KdV (Korteweg-de Vries) describe, en una dimensión espacial, la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios dispersivos. Donde  $x, t$  y  $U$  denotan posición espacial, temporal y amplitud, respectivamente.  $U_t$  representa la evolución temporal de la perturbación o campo  $v$  y  $U_{xxx}$  es un dispersivo.
- (iii) Diederik Johannes Korteweg fue un matemático holandés, quién realizó una tesis doctoral titulada “Sobre la propagación de ondas en tubos elásticos”. Mientras que Gustav de Vries fue un matemático neerlandés, que, bajo la asesoría de Korteweg, completó su tesis doctoral “Contribución al conocimiento de las grandes olas”.
- (f) **La ecuación Eikonal:**  $U(x)$  resuelve  $\|\nabla U\| = f(x)$ .
- (i) La ecuación es no lineal ya que la norma no es una función lineal. Por esta misma razón, la ecuación es completamente no lineal de primer orden.
- (ii) Es una ecuación encontrada en propagación de ondas, cuando la ecuación de onda es aproximada usando la teoría WKB. Esto es derivable desde las ecuaciones de Maxwell de electromagnetismo, y proveen un enlace entre óptica física (onda) y óptica geométrica. Aquí,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $U$  es el tiempo más corto necesario para viajar desde la frontera del dominio de  $U$  a  $x$  y  $F(x)$  es el coste en términos de tiempo (y no de velocidad) en  $x$ .
- (g) **La ecuación del medio poroso:**  $U(x, t)$  resuelve  $U_t = \Delta(U^m)$  para algún  $m > 1$ .
- (i) La ecuación se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
U_t &= \Delta(U^m) \\
&= (U^m)_{tt} + (U^m)_{xx} \\
&= (mU^{m-1}U_t)_t + (mU^{m-1}U_x)_x \\
&= (m(m-1)U^{m-2}(U_t)^2 + mU^{m-1}U_{tt}) + (m(m-1)U^{m-2}(U_x)^2 + mU^{m-1}U_{xx}) \\
&= m(m-1)U^{m-2}((U_t)^2 + (U_x)^2) + mU^{m-1}(U_{tt} + U_{xx})
\end{aligned}$$

Ya que las potencias no actúan como operador lineal, se tiene que la ecuación del medio poroso no es lineal respecto a  $U$  ni respecto a las primeras derivadas, pero sí respecto a las derivadas de segundo orden, pues solo aparece su suma. Por lo tanto, la ecuación es cuasilineal de segundo orden.

- (ii) Modela un fluido incompresible que fluye por un medio poroso.  $U$  es la velocidad del fluido,  $t$  el tiempo transcurrido y  $x \in \mathbb{R}^3$  es la posición del fluido.

(h) **La ecuación de la viga:**  $U(x, t)$  resuelve  $U_{tt} + k^2 U_{xxxx} = 0$ .

- (i) Sean  $F(U) = U_{tt} + k^2 U_{xxxx}$ ,  $W = W(x, t)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se da que

$$\begin{aligned}
F(\lambda U + W) &= (\lambda U + W)_{tt} + k^2 (\lambda U + W)_{xxxx} \\
&= \lambda U_{tt} + W_{tt} + k^2 (\lambda U_{xxxx} + W_{xxxx}) \\
&= \lambda (U_{tt} + k^2 U_{xxxx}) + (W_{tt} + k^2 W_{xxxx}) \\
&= \lambda F(U) + F(W)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación es lineal de cuarto orden.

- (ii) Representa una viga con carga distribuida variable empotrada en un extremo y con el otro extremo libre.  $x$  representa la distancia horizontal de la viga desde un extremo,  $k^2$  la rigidez de la viga y  $U$  es la fuerza que se le aplica a la viga en cierto punto.

(i) **La ecuación de Black-Scholes:**  $U(S, t)$  resuelve  $U_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_{SS} + rSU_{SS} - rU = 0$ , donde  $r$  y  $\sigma$  son constantes.

- (i) Ya que cada término de la ecuación es un operador lineal, se tiene que la ecuación es lineal de segundo orden.
- (ii) Es una ecuación usada para determinar el precio de determinados activos financieros.  $t$  es el tiempo transcurrido,  $S$  es el precio de un activo,  $\sigma$  es la volatilidad, que mide la desviación estándar de los retornos,  $r$  es una medida del crecimiento promedio del precio del activo, y  $U$  es el valor actual del activo.
- (iii) Fischer Sheffey Black fue un economista estadounidense y Myron S. Scholes es un economista, matemático y abogado canadiense. En conjunto, publicaron el documento “El precio de las opciones y los pasivos corporativos.”<sup>en</sup> el “The Journal of Political Economy”.

(j) **La ecuación de Monge-Ampère:**  $U(x)$  resuelve  $\det(D^2U) = f(x)$ , donde  $D^2U$  denota la matriz Hessiana (también denotada por  $H[U]$ ) y  $f$  está dada.

- (i) Reescribiendo la ecuación:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \det(D^2U) \\
&= \det \begin{pmatrix} U_{x_1x_1} & U_{x_2x_1} & U_{x_3x_1} \\ U_{x_1x_2} & U_{x_2x_2} & U_{x_3x_2} \\ U_{x_1x_3} & U_{x_2x_3} & U_{x_3x_3} \end{pmatrix} \\
&= U_{x_1x_1}(U_{x_2x_2}U_{x_3x_3} - U_{x_3x_2}U_{x_2x_3}) - U_{x_2x_1}(U_{x_1x_2}U_{x_3x_3} - U_{x_3x_2}U_{x_1x_3}) + \\
&\quad U_{x_3x_1}(U_{x_1x_2}U_{x_2x_3} - U_{x_2x_2}U_{x_1x_3})
\end{aligned}$$

Como las derivadas se multiplican, es fácil ver que la ecuación es no lineal, más aún, es completamente no lineal.

- (ii) Surge con frecuencia en la geometría diferencial, por ejemplo, en los problemas de Weyl y Minkowski en geometría diferencial de superficies. Primero fueron estudiados por Gaspard Monge en 1784 y más tarde por André-Marie Ampère en 1820.  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- (iii) Gaspard Monge, conde de Peluse, fue un matemático francés, inventor de la geometría descriptiva, mientras que André-Marie Ampère fue un matemático y físico francés, que formuló la teoría de la electrodinámica.