7. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

Solución.

Suponiendo que $y(x) = x^m$

$$\implies y'(x) = mx^{m-1}$$

$$\implies y''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo lo anterior en la E.D. se tiene que

$x^2m(m-1)x^{m-2} - 3xmx^{m-1} - 2x^m = 0$

$\implies m(m-1)x^m - 3mx^m - 2x^m = 0$

$\implies x^m(m^2 - m - 3m - 2) = 0$

$\implies x^m(m^2 - 4m - 2) = 0$

$\implies m^2 - 4m - 2 = 0$

$\implies m = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$

$\implies m_1 = 2 + \sqrt{6}$ y $m_2 = 2 - \sqrt{6}$ son raíces del polinomio característico.

$\therefore$ La solución general es $y(x) = c_1x^{2+\sqrt{6}} + c_2x^{2-\sqrt{6}}$