

12.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$

**Solución.**

Ecuación homogénea asociada:  $y'' - 2y' + y = 0$

Polinomio característico:  $m^2 - 2m + 1 = 0$

$$\implies (m-1)^2 = 0$$

$$\implies m-1 = 0$$

$$\implies m = 1 \quad \text{es una raíz de multiplicidad 2.}$$

Así,  $y_1(x) = e^x$  y  $y_2(x) = xe^x$  son soluciones *l.i.*

Función complementaria:  $y_c(x) = c_1e^x + c_2xe^x$

Como  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$  esta en la forma canónica, entonces sea  $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$  la solución particular. Luego,

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

Y así,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{-xe^x \left( \frac{e^x}{1+x^2} \right)}{e^{2x}} & v'(x) &= \frac{e^x \left( \frac{e^x}{1+x^2} \right)}{e^{2x}} \\ &= -\frac{x}{1+x^2} & &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies u(x) &= \int -\frac{x}{1+x^2} dx & \implies v(x) &= \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) & &= \arctan(x) \end{aligned}$$

$$\therefore y_p(x) = -\frac{e^x}{2} \ln(1+x^2) + xe^x \arctan(x)$$

Por lo tanto, la solución general es:  $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{e^x}{2} \ln(1+x^2) + xe^x \arctan(x)$