35. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}$; $\quad y(0) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(0) = \dfrac{5}{2}, \quad y''(0) = -\dfrac{9}{2}$

Solución.

Ecuación homogénea asociada: $y''' - 2y'' + y' = 0$

Polinomio característico: $m^3 - 2m^2 + m = 0$

$$\Longrightarrow m(m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow m(m-1)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 1 \text{ es una raíz de multiplicidad 2.}$$

Soluciones *l.i.*: $y_1(x) = e^{0x} = 1,\ y_2(x) = e^x$ y $y_3(x) = xe^x$.

Funcion complementaria: $y_c(x) = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$.

Sea $y_p(x) = Ax + Bx^2e^x + Ce^{5x}$

$\Longrightarrow y_p'(x) = A + 2Bxe^x + Bx^2e^x + 5Ce^{5x}$

$\Longrightarrow y_p''(x) = 2Be^x + 4Bxe^x + Bx^2e^x + 25Ce^{5x}$

$\Longrightarrow y_p'''(x) = 6Be^x + 6Bxe^x + Bx^2e^x + 125Ce^{5x}$

Sustituyendo en la E.D.

$$\begin{aligned} y_p(x)''' - 2y_p(x)'' + y_p(x)' &= 6Be^x + 6Bxe^x + Bx^2e^x + 125Ce^{5x} \\ &\quad - 2\left(2Be^x + 4Bxe^x + Bx^2e^x + 25Ce^{5x}\right) \\ &\quad + A + 2Bxe^x + Bx^2e^x + 5Ce^{5x} \\ &= A + 2Be^x + 80Ce^{5x} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow 2 - 24e^x + 40e^{5x} = A + 2Be^x + 80Ce^{5x}$

De esto, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ -24 &= 2B \\ 40 &= 80C \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= -12 \\ C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, $y_p(x) = 2x - 12x^2e^x + \dfrac{1}{2}\,e^{5x}$.

De esta manera, la solución general es:

$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + 2x - 12x^2 e^x + \frac{1}{2}\, e^{5x}$

Luego,

$y'(x) = c_2 e^x + c_3 e^x + c_3 x e^x + 2 - 24x e^x - 12x^2 e^x + \frac{5}{2}\, e^{5x}$

$y''(x) = c_2 e^x + 2c_3 e^x + c_3 x e^x - 24 e^x - 48 x e^x - 12x^2 e^x + \frac{25}{2}\, e^{5x}$

Pero

$-\frac{9}{2} = y''(0) = c_2 + 2c_3 - 24 + \frac{25}{2} = c_2 + 2c_3 - \frac{23}{2}$

$$\Longrightarrow 7 = c_2 + 2c_3 \tag{1}$$

$\frac{5}{2} = y'(0) = c_2 + c_3 + 2 + \frac{5}{2} = c_2 + c_3 + \frac{9}{2}$

$$\Longrightarrow 2 = -c_2 - c_3 \tag{2}$$

$\frac{1}{2} = y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow 0 = c_1 + c_2 \tag{3}$$

Sumando (1) y (2): $9 = c_3$

Sustituyendo c_3 en (1): $7 = c_2 + 2(9) = c_2 + 18 \Longrightarrow c_2 = -11$

Sustituyendo c_2 en (3): $0 = c_1 - 11 \Longrightarrow c_1 = 11$

Por lo tanto,

$y(x) = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2 e^x + \frac{1}{2}\, e^{5x}$