

Para cada EDP:

- (i) Indica el orden y decide si es lineal, semilineal, cuasilineal o completamente no lineal.
 - (ii) Busca en Internet y describe un contexto físico o geométrico en el que la EDP sea relevante. En particular, ¿qué modelan la variable dependiente U y las variables independientes, y qué significan los parámetros de la EDP (ya sean las constantes o las funciones especificadas)? A menos que se especifique lo contrario, $x \in \mathbb{R}$ o $x \in \mathbb{R}^3$.
 - (iii) Si la EDP lleva el nombre de alguien, búsquelo en línea.
- (a) **La ecuación de Schrödinger:** $U(x, t)$ resuelve $i\hbar U_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta U$, donde \hbar es la constante de Planck reducida.

- (i) Sean $F(U) = i\hbar U_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $W = W(x, t)$, se da que

$$\begin{aligned} F(\lambda U + W) &= i\hbar (\lambda U + W)_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta (\lambda U + W) \\ &= i\hbar (\lambda U_t + W_t) + \frac{\hbar^2}{2m}(\lambda \Delta U + \Delta W) \\ &= \lambda \left(i\hbar U_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta U \right) + \left(i\hbar W_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta W \right) \\ &= \lambda F(U) + F(W) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger es lineal de segundo orden.

- (ii) Describe la evolución temporal de una partícula subatómica cuántica con masa en el contexto no relativista. Es de importancia central en la teoría de la mecánica cuántica ordinaria, donde representa para las partículas microscópicas un papel análogo a la segunda ley de Newton en la mecánica clásica. Donde $i \in \mathbb{C}$, \hbar es la constante de Planck reducida (tiene varias interpretaciones pero en términos generales es el producto de la energía implicada y el tiempo empleado de una partícula microscópica), U es la función de onda del sistema cuántico, t es el tiempo transcurrido y m es la "masa reducida" de la partícula. El lado derecho de la ecuación caracteriza la energía total de cualquier función de onda dada.
 - (iii) La ecuación fue desarrollada por el físico austríaco Erwin Schrödinger en 1925 y publicada en el 1926. El realizó importantes contribuciones en los campos de la mecánica cuántica y la termodinámica. Recibió el Premio Nobel de Física en 1933 por haber desarrollado esta ecuación, compartido con Paul Dirac. Tras mantener una larga correspondencia con Albert Einstein propuso el experimento mental del gato de Schrödinger que mostraba las paradojas e interrogantes a los que abocaba la física cuántica.
- (b) **La ecuación de Burgers (no viscosa):** $U(x, t)$ resuelve $U_t + UU_x = 0$.

- (i) Sean $F(U) = U_t + UU_x$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, F es no lineal pues $F(\lambda U) = \lambda U_t + (\lambda U)(\lambda U_x) = \lambda U_t + \lambda^2 UU_x \neq \lambda F(U)$. De esta forma la ecuación es no lineal.

Luego, sean $G(U_t, U_x) = U_t + UU_x$, $W = W(x, t)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} G(\lambda(U_t, U_x) + (W_t, W_x)) &= G(\lambda U_t + W_t, \lambda U_x + W_x) \\ &= \lambda U_t + W_t + U(\lambda U_x + W_x) \\ &= \lambda(U_t + UU_x) + (W_t + UW_x) \\ &= \lambda G(U_t, U_x) + G(W_t, W_x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación es cuasilineal de primer orden.

- (ii) La ecuación representa un flujo unidimensional de un fluido no viscoso a través del tiempo, pero también es un prototipo para la ecuaciones de conservación que puede desarrollar discontinuidades, como la onda de choque. Aquí, U es la densidad del fluido, x es la posición del fluido y t es el tiempo transcurrido.

- (iii) Fue introducida por primera vez por Harry Bateman, (fue un matemático inglés que hizo un amplio estudio de las ecuaciones diferenciales aplicadas en su Conferencia Gibbs en 1943 titulada “El control de un fluido elástico”) y luego estudiada por Johannes Martinus Burgers (fue un físico neerlandés que investigó sobre la dinámica de fluidos y trabajó en la teoría de la turbulencia).
- (c) **La ecuación de Burgers completa:** $U(x, t)$ resuelve $U_t + UU_x = \epsilon U_{xx}$.
- (i) De igual manera que el inciso anterior, la ecuación es no lineal. Pero si es lineal, respecto a ϵU_{xx} , y como la suma de operadores lineales es un operador lineal, se obtiene que la ecuación es semilineal de segundo orden.
- (ii) La ecuación de Burgers completa es una ecuación diferencial parcial fundamental que ocurre en varias áreas de la matemática aplicada, como la mecánica de fluidos, la acústica no lineal, la dinámica de gases y el flujo de tráfico. La notación usada es la misma que la del inciso anterior, agregando que ϵ es el coeficiente de viscosidad de la sustancia y es positivo.
- (d) **La ecuación de Hamilton-Jacobi:** $U(x, t)$ resuelve $U_t + H(\nabla U, x) = 0$, donde $H: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ está dado.
- (i) Ya que H es el Hamiltoniano y este no es lineal, se tiene que la ecuación es no lineal. Mas aún, es completamente no lineal, pues el Hamiltoniano depende de las derivadas de más alto orden.
- (ii) La ecuación une la mecánica, la óptica y las matemáticas, y ayudó a establecer la teoría ondulatoria de la luz. Además, permite una formulación alternativa a la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana. Su empleo resulta ventajoso cuando se conoce alguna integral de movimiento sobre una partícula u onda. Aquí, $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo y H es el Hamiltoniano.
- (iii) Carl Gustav Jakob Jacobi fue un matemático alemán de origen judío que contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. Por otro lado, William Rowan Hamilton fue un matemático, físico, y astrónomo irlandés, que hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la dinámica, y el álgebra.
- (e) **La ecuación KdV:** $U(x, t)$ resuelve $U_t + U_{xxx} - 6UU_x = 0$.
- (i) La ecuación es no lineal debido a que el término UU_x es no lineal respecto a U . Luego, sean $F(U_t, U_x, U_{xxx}) = U_t + U_{xxx} - 6UU_x$, $W = W(x, t)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se da que
- $$\begin{aligned} F(\lambda(U_t, U_x, U_{xxx}) + (W_t, W_x, W_{xxx})) &= F(\lambda U_t + W_t, \lambda U_x + W_x, \lambda U_{xxx} + W_{xxx}) \\ &= \lambda U_t + W_t + \lambda U_{xxx} + W_{xxx} - 6U(\lambda U_x + W_x) \\ &= \lambda(U_t + U_{xxx} - 6UU_x) + (W_t + W_{xxx} - 6UW_x) \\ &= \lambda F(U_t, U_x, U_{xxx}) + F(W_t, W_x, W_{xxx}) \end{aligned}$$
- Por lo tanto, la ecuación es semilineal de tercer orden.
- (ii) La ecuación KdV (Korteweg-de Vries) describe, en una dimensión espacial, la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios dispersivos. Donde x, t y U denotan posición espacial, temporal y amplitud, respectivamente. U_t representa la evolución temporal de la perturbación o campo v y U_{xxx} es un dispersivo.
- (iii) Diederik Johannes Korteweg fue un matemático holandés, quién realizó una tesis doctoral titulada “Sobre la propagación de ondas en tubos elásticos”. Mientras que Gustav de Vries fue un matemático neerlandés, que, bajo la asesoría de Korteweg, completó su tesis doctoral “Contribución al conocimiento de las grandes olas”.
- (f) **La ecuación Eikonal:** $U(x)$ resuelve $\|\nabla U\| = f(x)$.
- (i) Sean
- (ii) Tal
- (iii) Fue
- (g) **La ecuación del medio poroso:** $U(x, t)$ resuelve $U_t = \Delta(U^m)$ para algún $m > 1$.
- (i) Sean
- (ii) Tal
- (iii) Fue
- (h) **La ecuación de la viga:** $U(x, t)$ resuelve $U_{tt} + k^2 U_{xxxx} = 0$.
- (i) Sean

- (ii) Tal
 - (iii) Fue
- (i) **La ecuación de Black-Scholes:** $U(S, t)$ resuelve $U_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_{SS} + rSU_{SS} - rU = 0$, donde r y σ son constantes.
- (i) Sean
 - (ii) Tal
 - (iii) Fue
- (j) **La ecuación de Monge-Ampere:** $U(x)$ resuelve $\det(D^2U) = f(x)$, donde D^2U denota la matriz Hessiana (también denotada por $H[U]$) y f está dada.
- (i) Sean
 - (ii) Tal
 - (iii) Fue