12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

Solución.

Ecuación homogénea asociada: $y'' - 2y' + y = 0$

Polinomio característico: $m^2 - 2m + 1 = 0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow (m-1)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow m - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow m = 1 \quad \text{es una raíz de multiplicidad 2.} \end{aligned}$$

Así, $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = xe^x$ son soluciones *l.i.*

Función complementaria: $y_c(x) = c_1e^x + c_2xe^x$

Como $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ esta en la forma canónica, entonces sea $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ la solución particular. Luego,

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

Y así,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{-xe^x\left(\dfrac{e^x}{1+x^2}\right)}{e^2x} & v'(x) &= \frac{e^x\left(\dfrac{e^x}{1+x^2}\right)}{e^2x} \\ &= -\frac{x}{1+x^2} & &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow u(x) &= \int -\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x & \Longrightarrow v(x) &= \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) & &= \arctan(x) \end{aligned}$$

$\therefore y_p(x) = -\dfrac{e^x}{2}\ln(1+x^2) + xe^x\arctan(x)$

Por lo tanto, la solución general es: $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x - \dfrac{e^x}{2}\ln(1+x^2) + xe^x\arctan(x)$