

# TEORÍA DE DIGRÁFICAS

## DIGRÁFICAS ACÍCLICAS

### TAREA 5

Osmar Dominique Santana Reyes

21 de Noviembre de 2024

Resuelve con todo detalle cada uno de los siguientes ejercicios.

42. ¿Cómo son todas las digráficas tales que cada vértice forma una base?

*Solución.*

Sea  $D$  una digráfica en la que cada uno de sus vértices forma una base.

Afirmación.  $D$  es fuerte.

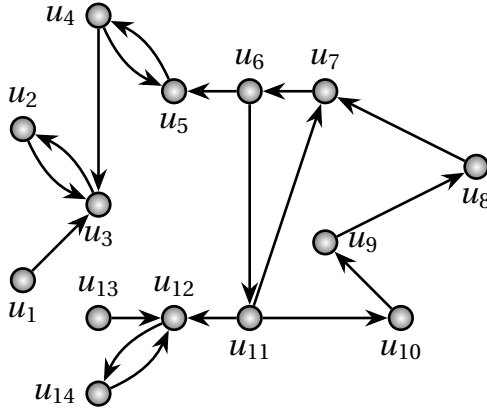
Sean  $u, v \in V(D)$ , ya que  $\{u\}$  es una base de  $D$ , se tiene que, para  $v$ , existe una  $vu$  – trayectoria en  $D$ . De manera similar,  $\{v\}$  es una base de  $D$  por lo que, para  $u$ , existe una  $uv$  – trayectoria en  $D$ .

Por lo tanto,  $D$  es fuerte.

43. Da un ejemplo de una digráfica con exactamente 6 bases y 4 cobases, donde cada base y cada cobase tenga por lo menos dos vértices.

*Solución.*

Sea  $D$  la siguiente digráfica:



Por la Proposición 20, se sabe que los vértices de ingrado 0 pertenecen a cualquier base de una digráfica, por lo que  $u_1$  y  $u_{13}$  están en cualquier base. Luego, por el Teorema 21, no puede haber trayectorias entre dos vértices de una base, por lo que  $u_2, u_3, u_{12}$  y  $u_{14}$  no pueden ser elementos de alguna base, dado que existen las trayectorias  $(u_1, u_3, u_2)$ ,  $(u_1, u_3)$ ,  $(u_{13}, u_{12})$  y  $(u_{13}, u_{12}, u_{14})$ , respectivamente. De esta manera, sea  $B$  una base de  $D$ , se sabe que  $u_1, u_{13} \in B$ , pero  $u_2, u_3, u_{12}, u_{14} \notin B$ .

Además, para  $u_4$  no existe ninguna  $u_1u_4$  – trayectoria ni una  $u_{13}u_4$  – trayectoria en  $D$ , por lo que  $B$  tiene más elementos. Ya que la trayectoria  $T = (u_{11}, u_{10}, u_9, u_8, u_7, u_6, u_5, u_4)$  contiene a los demás vértices de  $D$ , se tiene que solo uno de estos vértices pertenece a  $B$ , pues si más de uno perteneciera, entonces es posible hallar una trayectoria contenida en  $T$  entre dos vértices de  $B$ , lo cual sería a una contradicción al Teorema 21.

Ahora,  $u_4, u_5 \notin B$ , ya que no es posible hallar una  $u_4u_6$  – trayectoria ni una  $u_5u_6$  – trayectoria en  $D$ . Pero si es posible hallar una  $u_iu_j$  – trayectoria en  $D$  para cada  $i = 6, \dots, 11$  y para cada  $j = 4, \dots, 11$ . De esta forma, las siguientes son bases de  $D$ :

$B_1 = \{u_1, u_6, u_{13}\}, B_2 = \{u_1, u_7, u_{13}\}, B_3 = \{u_1, u_8, u_{13}\}, B_4 = \{u_1, u_9, u_{13}\}, B_5 = \{u_1, u_{10}, u_{13}\}$   
y  $B_6 = \{u_1, u_{11}, u_{13}\}$ .

Por otro lado, los vértices de ingrado cero y exgrado mayor a cero no pertenecen a ninguna co-base de  $D$ , puesto que no hay trayectorias que terminen en estos

44. ¿Cómo son todas las digráficas tales que el conjunto de todos los vértices es una base de  $D$ .

*Solución.*

45. Da un ejemplo de una digráfica tal que todas sus bases sean también cobases.

*Solución.*

46. ¿Cómo son todas las digráficas tales que todas sus bases son cobases?

*Solución.*

47. Da un ejemplo de una digráfica tal que tenga una base que también sea un conúcleo.

*Solución.*

48. Decimos que una digráfica es transitiva si para cualesquiera tres vértices distintos  $u, v, w$ , tales que  $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$  se tiene que  $(u, w) \in F(D)$ . Prueba que si  $D$  es una digráfica transitiva entonces toda cobase de  $D$  es un núcleo de  $D$ .

*Demostración.*

49. Prueba que  $D$  es una digráfica tal que toda cobase de  $D$  es un núcleo entonces  $D$  es transitiva.

*Demostración.*

50. Para cada  $p \geq 3$ , da un ejemplo de una digráfica semicompleta con  $n$  vértices que no tenga núcleo.

*Solución.*

51. Sea  $D$  una digráfica transitiva, demuestra que  $D$  tiene núcleo.

*Demostración.*

52. Decimos que una digráfica es núcleo imperfecta crítica si no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida sí tiene núcleo. Prueba que un ciclo dirigido de longitud impar es núcleo imperfecta crítica.

*Demostración.*