Ejercicio 11 del Capítulo 6

Sean α una función creciente sobre $[a,b]$ y $u \in \mathcal{R}(\alpha)$. Se define

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_a^b |u|^2 \, \mathrm{d}\alpha}.$$

Si $f, g, h \in \mathcal{R}(\alpha)$ entonces $\|f-h\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2$.

La demostración se hizo en clase.

Ejercicio 12 del Capítulo 6

Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua g sobre $[a,b]$ tal que $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.

La demostración se hizo en clase.

Corolario 1

Sean α una función creciente sobre $[-c,c]$, con $c>0$, y $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[-c,c]$. Si f es una función con periodo $2c$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua g con periodo $2c$ tal que $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.

Demostración.

Sean $\epsilon > 0$, $M = \sup\{|f(x)| : x \in [-c,c]\}$, $P = \{-c = x_0, x_1, \ldots, x_n = c\}$ una partición de $[-c,c]$ tal que $\mathcal{U}(f,P,\alpha) - \mathcal{L}(f,P,\alpha) < \dfrac{\varepsilon^2}{2M}$ y $g\colon [-c,c] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i) \quad \text{donde} \quad x_{i-1} \leq t \leq x_i.$$

Por el ejercicio anterior, g es continua en $[-c,c]$ y es tal que $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}
g(-c) &= \frac{x_1 - (-c)}{\Delta x_1} f(-c) + \frac{-c-(-c)}{\Delta x_1} f(x_1) \\
&= f(-c) \\
&= f(c) && \text{(pues } f \text{ es periódica)} \\
&= \frac{c-c}{\Delta x_n} f(x_{n-1}) + \frac{c - x_{n-1}}{\Delta x_n} f(c) \\
&= g(c)
\end{aligned}$$

Así, se puede extender el dominio de g a $\mathbb{R}$ si para todo $m \in \mathbb{Z}$ se hace $g(t+2mc) = g(t)$ para cada $t \in [-c,c]$. De esta manera, g tiene periodo $2c$.

Teorema 8.16. Teorema de Parseval

Sean $f, g \in \mathcal{R}$ con periodo 2π. Si

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{y} \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx},$$

entonces

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f - s_N(f)\right|^2 \, \mathrm{d}x = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \overline{\gamma_n} \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{R}$ en $[-\pi, \pi]$ y tiene periodo 2π, por el Corolario 1, existe h una función continua que tiene periodo 2π tal que

$$\|f - h\|_2 < \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3} \tag{1}$$

Así, por el Teorema 8.15, existe un polinomio trigonométrico P tal que $|h(x) - P(x)| < \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}
|h(x) - P(x)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} &\Longrightarrow |h(x) - P(x)|^2 < \frac{\varepsilon}{9} \\
&\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - P(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{9} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi\varepsilon}{9} \\
&\Longrightarrow \|h - P\|_2 < \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3}
\end{aligned}$$

Sea N_0 el grado de P, por el Teorema 8.11 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |h - s_{N_0}(h)|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |h - P|^2 \, \mathrm{d}x \\
\Longrightarrow \|h - s_{N_0}(h)\|_2 &\leq \|h - P\|_2 < \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|h - s_N(h)\|_2 < \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3} \quad \text{para todo } N \geq N_0 \tag{2}$$

Ahora, por 76 y (1), se obtiene que para todo $N \geq N_0$

$$s_N(h) - s_N(f) = s_N(h - f) \Longrightarrow \|s_N(h) - s_N(f)\|_2 = \|s_N(h - f)\|_2 \leq \|h - f\|_2 < \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3} \tag{3}$$

De esta forma, por el Ejercicio 11 del Capítulo 6, y las desigualdades (1), (2) y (3), para todo $N \geq N_0$ se da que

$$\begin{aligned}
&\|f - s_N(f)\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \|h - s_N(h)\|_2 + \|s_N(h) - s_N(f)\|_2 < \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3} + \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3} + \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{3} = \sqrt{2\pi\varepsilon} \\
&\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f - s_N(f)|^2 \, \mathrm{d}x < 2\pi\varepsilon \\
&\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f - s_N(f)|^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f - s_N(f)\right|^2 \, \mathrm{d}x = 0$.

Por otro lado, por la desigualdad de Schwarz, se tiene que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\overline{g}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}[f - s_N(f)]\overline{g}\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f - s_N(f)|^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|g|^2\,\mathrm{d}x}$$
$$\implies \lim_{N\to\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\overline{g}\,\mathrm{d}x\right| \leq \lim_{N\to\infty}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f - s_N(f)|^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|g|^2\,\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{(por el límite anterior)}$$
$$\implies \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x,$$

pero

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\overline{g}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\overline{g}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} c_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{g}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{\gamma_n},$$

por lo cual

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{\gamma_n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{\gamma_n} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\overline{g}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x$$

Por último, si $f = g$ entonces de la igualdad anterior se obtiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{\gamma_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,\mathrm{d}x$$

LA FUNCIÓN GAMMA

Definición 8.17

Se define la función gamma como $\Gamma\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}^+$ dada por $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Escribiendo la función gamma como $\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Ya que $t^{x-1}e^{-t}$ es una función continua para todo $t > 0$, se tiene que
$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{x-1}} = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$ implica que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, pues $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ también converge.
Además, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ implica que $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, pues $\int_1^{\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ también converge.
Por lo tanto, la función Gamma converge para todo $x > 0$.

Lema 1

Si $\varepsilon > 0$ y $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\int_0^1 x^{\varepsilon}(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)\cdots(\varepsilon+n+1)}$$

Procediendo por inducción sobre n:

Para $n = 1$ se tiene que

$$\int_0^1 x^{\varepsilon}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\varepsilon} - x^{\varepsilon+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1} - \frac{x^{\varepsilon+2}}{\varepsilon+2}\right]_0^1 = \frac{1}{\varepsilon+1} - \frac{1}{\varepsilon+2} = \frac{1}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}$$

Luego, suponiendo que para $n = k$ se cumple que $\int_0^1 x^{\varepsilon}(1-x)^k \, \mathrm{d}x = \frac{k!}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)\cdots(\varepsilon+k+1)}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\varepsilon}(1-x)^{k+1} \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1}(1-x)^{k+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1}(k+1)(1-x)^k \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{(k+1)}{\varepsilon+1}\int_0^1 x^{\varepsilon+1}(1-x)^k \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{(k+1)}{\varepsilon+1}\,\frac{k!}{(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)\cdots(\varepsilon+(k+1)+1)} \\
&= \frac{(k+1)!}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)\cdots(\varepsilon+(k+1)+1)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_0^1 x^{\varepsilon}(1-x)^n \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)\cdots(\varepsilon+n+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} \, \mathrm{d}t &= \int_0^\infty t^{x-1} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t \qquad \text{por la continuidad de } \left(1-\frac{t}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Si $s = \frac{t}{n}$ entonces $\mathrm{d}s = \frac{1}{n}\mathrm{d}t$, por lo que

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(ns)^{x-1}(1-s)^n \, \mathrm{d}s \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^x s^{x-1}(1-s)^n \, \mathrm{d}s \\
&= \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n \, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Afirmación. $\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n \, \mathrm{d}s = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Procediendo por inducción sobre n:

Para $n = 1$ se da que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 s^{x-1}(1-s) \, \mathrm{d}s &= \int_0^1 s^{x-1} - s^x \, \mathrm{d}s \\
&= \left(\frac{s^x}{x} - \frac{s^{x+1}}{x+1}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{x(x+1)}
\end{aligned}$$

Suponiendo que para $n = k$ se cumple que $\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^k \, \mathrm{d}s = \frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}$. Sea $u = (1-s)^{k+1}$ y $\mathrm{d}v = s^{x-1}\mathrm{d}s$ entonces $\mathrm{d}u = -(k+1)(1-s)^k\mathrm{d}s$ y $v = \frac{s^x}{x}$, por lo que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{k+1}\,\mathrm{d}s &= \left[(1-s)^{k+1}\frac{s^x}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 (k+1)(1-s)^k\frac{s^x}{x}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{(k+1)}{x}\int_0^1 s^x(1-s)^k\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{(k+1)}{x}\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(k+1))} \\
&= \frac{(k+1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+(k+1))}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n\,\mathrm{d}s = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Así,

$$
\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}
$$

Teorema 8.18

a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x>0$.

b) $\Gamma(n+1) = n!$ para $n\in\mathbb{N}$.

c) $\log(\Gamma)$ es convexa sobre $(0,\infty)$.

Demostración.

a) Sea $x>0$, se da que $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = (-t^x e^{-t})|_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$.

b) Procediendo por inducción sobre n:

Para n = 1, y por el inciso a), se tiene que $\Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = (-e^{-t})|_0^\infty = 1 = 1!$

Suponiendo que para $n=k$ se cumple que $\Gamma(k+1)=k!$, por el inciso a) se obtiene que $\Gamma\big((k+1)+1\big) = (k+1)\Gamma(k+1) = (k+1)k! = (k+1)!$

Por lo tanto, $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

c) Sean $x,y\in\mathbb{R}^+$ y $0<\lambda<1$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Gamma\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) &= \int_0^\infty t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(t^{\lambda x-\lambda}e^{-\lambda t}\right)\left(t^{(1-\lambda)y-(1-\lambda)}e^{-(1-\lambda)t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&\le \left(\int_0^\infty \left(t^{\lambda x-\lambda}e^{-\lambda t}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^\infty\left(t^{(1-\lambda)y-(1-\lambda)}e^{-(1-\lambda)t}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \qquad \text{(por la desigualdad de Hödel)} \\
&= \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \\
&= \big(\Gamma(x)\big)^{\lambda}\big(\Gamma(y)\big)^{1-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \ln\Big(\Gamma\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\Big) &\le \ln\Big(\big(\Gamma(x)\big)^{\lambda}\big(\Gamma(y)\big)^{1-\lambda}\Big) \\
&= \lambda\ln\big(\Gamma(x)\big) + (1-\lambda)\ln\big(\Gamma(y)\big)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\ln(\Gamma)$ es convexa.

Teorema 8.19

Si f es una función positiva sobre $(0,\infty)$ tal que

a) $f(x+1) = xf(x)$,

b) $f(1) = 1$,

c) $\ln(f)$ es convexa.

entonces $f(x) = \Gamma(x)$.

Demostración.

Afirmación. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = n!$.

Procediendo por inducción sobre n:

Para $n = 1$ se da que $f(1+1) = 1f(1) = 1$, por los incisos a) y b).

Suponiendo que para $n = k$ se cumple que $f(k+1) = k!$, se obtiene que $f((k+1)+1) = (k+1)f(k+1) = (k+1)k! = (k+1)!$.

Por lo tanto, $f(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como Γ satisface a), b) y c), es suficiente demostrar que f se determina de manera única por a), b), c), para todo $x > 0$. Por el inciso a), es suficiente hacerlo para $x \in (0,1]$.

Sea $x \in (0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\ln\big(f(n+1+x)\big) &= \ln\big(f(x(n+2)+(1-x)(n+1))\big) \\
&\leq x\ln\big(f(n+2)\big) + (1-x)\ln\big(f(n+1)\big) && \text{(pues } \ln(f) \text{ es convexa)} \\
&= x\ln\big((n+1)f(n+1)\big) + (1-x)\ln\big(f(n+1)\big) \\
&= x\ln\big((n+1)n!\big) + (1-x)\ln(n!) && \text{(por la afirmación anterior)} \\
&= x\ln(n+1) + x\ln(n!) + \ln(n!) - x\ln(n!) \\
&= x\ln(n+1) + \ln(n!) \\
\implies f(n+1+x) &= n!(n+1)^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(n!) = \ln\big(f(n+1)\big) &= \ln\Big(f\big(x(n+x)+(1-x)(n+x+1)\big)\Big) \\
&\leq x\ln\big(f(n+x)\big) + (1-x)\ln\big(f(n+x+1)\big) && \text{(pues } \ln(f) \text{ es convexa)} \\
&= x\ln\big(f(n+x)\big) + \ln\big(f(n+x+1)\big) - x\ln\big((n+x)f(n+x)\big) \\
&= x\ln\big(f(n+x)\big) + \ln\big(f(n+x+1)\big) - x\ln(n+x) - x\ln\big(f(n+x)\big) \\
&= \ln\big(f(n+x+1)\big) + \ln\big((n+x)^{-x}\big) \\
\implies n! &\leq f(n+x+1)(n+x)^{-x}
\end{aligned}$$

Y aplicando el inciso a) repetidamente

$$f(n+x+1) = (n+x)f(n+x) = (n+x)(n-1+x)f(n-1+x) = \cdots = (n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x)$$

Por todo lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
& n!(n+x)^x \leq (n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x) \leq n!(n+1)^x \\
\implies & \frac{n!(n+x)^x}{n^x} \leq \frac{(n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x)}{n^x} \leq \frac{n!(n+1)^x}{n^x} \\
\implies & n!\left(\frac{n+x}{n}\right)^x \leq \frac{(n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x)}{n^x} \leq n!\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \\
\implies & \left(1+\frac{x}{n}\right)^x \leq \frac{(n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x)}{n!n^x} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \\
\implies & \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^x \leq \lim_{n\to\infty}\frac{(n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x)}{n!n^x} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \left(\lim_{n\to\infty} 1+\frac{x}{n}\right)^x \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x)}{n!n^x} \leq \left(\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}\right)^x \\
&\implies 1 = 1^x \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)xf(x)}{n!n^x} \leq 1^x = 1 \\
&\implies \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)\cdots(x+1)x} = f(x) \quad \text{(por el Lema 2)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Gamma(x) = f(x)$ para todo $x > 0$.

Teorema 8.20

Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

A β se le llama la función beta.

Demostración.

Sean $f(x) = \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\beta(x,y)$, donde $y > 0$, $x, w \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in (0,1)$. Para cada $y > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= \frac{\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(y)}\beta(x+1,y) \\
&= \frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \left\{\left[-\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_0^1 + \int_0^1 x\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\left(\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right)\mathrm{d}t\right\} \\
&= x\frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)(x+y)} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= x\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\beta(x,y) \\
&= xf(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)}\beta(1,y) \\
&= \frac{y\Gamma(y)}{\Gamma(y)} \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= y\left[-\frac{(1-t)^y}{y}\right]_0^1 \\
&= y\frac{1}{y} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta(\lambda x+(1-\lambda)w,y) &= \int_0^1 t^{\lambda x+(1-\lambda)w-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{\lambda x-\lambda}(1-t)^{\lambda y-\lambda}t^{(1-\lambda)w-(1-\lambda)}(1-t)^{(1-\lambda)y-(1-\lambda)}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \left(\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^1 t^{w-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \quad \text{(por la desigualdad de Hödel)} \\
&= (\beta(x,y))^{\lambda}\,(\beta(w,y))^{1-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \ln\left(\beta(\lambda x+(1-\lambda)w,y)\right) \leq \ln\left((\beta(x,y))^{\lambda}\,(\beta(w,y))^{1-\lambda}\right) = \lambda\ln\left(\beta(x,y)\right)+(1-\lambda)\ln\left(\beta(w,y)\right)
$$

Y

$$
\begin{aligned}
f\left(\lambda x+(1-\lambda)w\right) &= \ln\left(\frac{\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)w+y)}{\Gamma(y)}\right)\beta(\lambda x+(1-\lambda)w,y) \\
&= \ln\left(\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)w+y)\right)-\ln\left(\Gamma(y)\right)+\ln\left(\beta(\lambda x+(1-\lambda)w,y)\right) \\
&= \ln\left(\Gamma(\lambda x++\lambda y+(1-\lambda)w+(1-\lambda)y)\right)-\lambda\ln\left(\Gamma(y)\right)- \\
&\qquad (1-\lambda)\ln\left(\Gamma(y)\right)+\ln\left(\beta(\lambda x+(1-\lambda)w,y)\right) \\
&\leq \lambda\ln\big(\Gamma(x+y)\big)+(1-\lambda)\ln\big(\Gamma(w+y)\big)-\lambda\ln\left(\Gamma(y)\right)- \\
&\qquad (1-\lambda)\ln\left(\Gamma(y)\right)+\lambda\ln\left(\beta(x,y)\right)+(1-\lambda)\ln\left(\beta(w,y)\right) \\
&= \lambda\ln\left(\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\beta(x,y)\right)+(1-\lambda)\ln\left(\frac{\Gamma(w+y)}{\Gamma(y)}\beta(w,y)\right) \\
&= \lambda f(x)+(1-\lambda)f(w)
\end{aligned}
$$

De esta manera, $\dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\beta(x,y)=f(x)=\Gamma(x)$, por el Teorema 8.19. Por lo tanto, $\beta(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Teorema 8.21

a) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

b) $\Gamma(x)=\dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

Demostración.

a)
$$
\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t
$$

Si $t=\operatorname{sen}^2(\theta)$ entonces $\mathrm{d}t=2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$. Así,

$$
\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\,\mathrm{d}\theta=\pi
$$

Y por el Teorema 8.20, se obtiene que

$$
\pi=\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2
$$

$$
\Longrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}
$$

b) Ya que

$$
\begin{aligned}
\frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) &= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2} \\
&= x\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right), \\
\frac{2^{1-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1,
\end{aligned}
$$

y si $\lambda \in (0,1)$ entonces

$$
\begin{aligned}
\ln\left[\frac{2^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\lambda x+(1-\lambda)y}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda x+(1-\lambda)y+1}{2}\right)\right] &= \ln\left[\frac{2^{\lambda x-\lambda}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{(1-\lambda)y-(1-\lambda)}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\lambda\frac{x}{2}+(1-\lambda)\frac{y}{2}\right)\right. \\
&\qquad \left.\Gamma\left(\lambda\frac{x+1}{2}+(1-\lambda)\frac{y+1}{2}\right)\right] \\
&\leq \lambda\ln\left(\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\right)+(1-\lambda)\ln\left(\frac{2^{y-1}}{\sqrt{\pi}}\right)+\lambda\ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\right)+ \\
&\qquad (1-\lambda)\ln\left(\Gamma\left(\frac{y}{2}\right)\right)+\lambda\ln\left(\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+ \\
&\qquad (1-\lambda)\ln\left(\Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right)\right) \\
&= \lambda\ln\left[\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]+ \\
&\qquad (1-\lambda)\ln\left[\frac{2^{y-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{y}{2}\right)\Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

De esta forma, por el Teorema 8.19, se tiene que $\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Teorema 8.22

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}} = 1
$$

Demostración.

Para $x>0$ se da que

$$
\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t
$$

Si $t = xu$ entonces $\mathrm{d}t = x\mathrm{d}u$. De este modo,

$$
\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^\infty u^x e^{-xu}\,\mathrm{d}u
$$

Si $u = 1+\frac{s}{\sqrt{x}}$ entonces $\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}s$. Así,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x^{x+1}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{x}}^\infty\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-s\sqrt{x}}\,\mathrm{d}s \\
&= \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Ahora, obteniendo el polinomio de Maclaurin de $\ln(1+x)$ se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
&\Longrightarrow \ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) = \frac{s}{\sqrt{x}} - \frac{s^2}{2x} + \frac{s^3}{3x\sqrt{x}} - \frac{s^4}{4x^2} + \cdots \\
&\Longrightarrow x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) = s\sqrt{x} - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{x}} - \frac{s^4}{4x} + \cdots \\
&\Longrightarrow x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x} = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{x}} - \frac{s^4}{4x} + \cdots \\
&\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{x}} - \frac{s^4}{4x} + \cdots\right] = -\frac{s^2}{2}
\end{aligned}
$$

De esta forma,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}\,\mathrm{d}s}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} \\
&= 1
\end{aligned}
$$