

I. Construya la serie de Fourier completa de la función dada f . En cada caso, utilice esquemas apropiados y analice la convergencia de la serie en el intervalo $[-L, L]$ donde f está definida.

$$(1) f(x) = \begin{cases} -2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

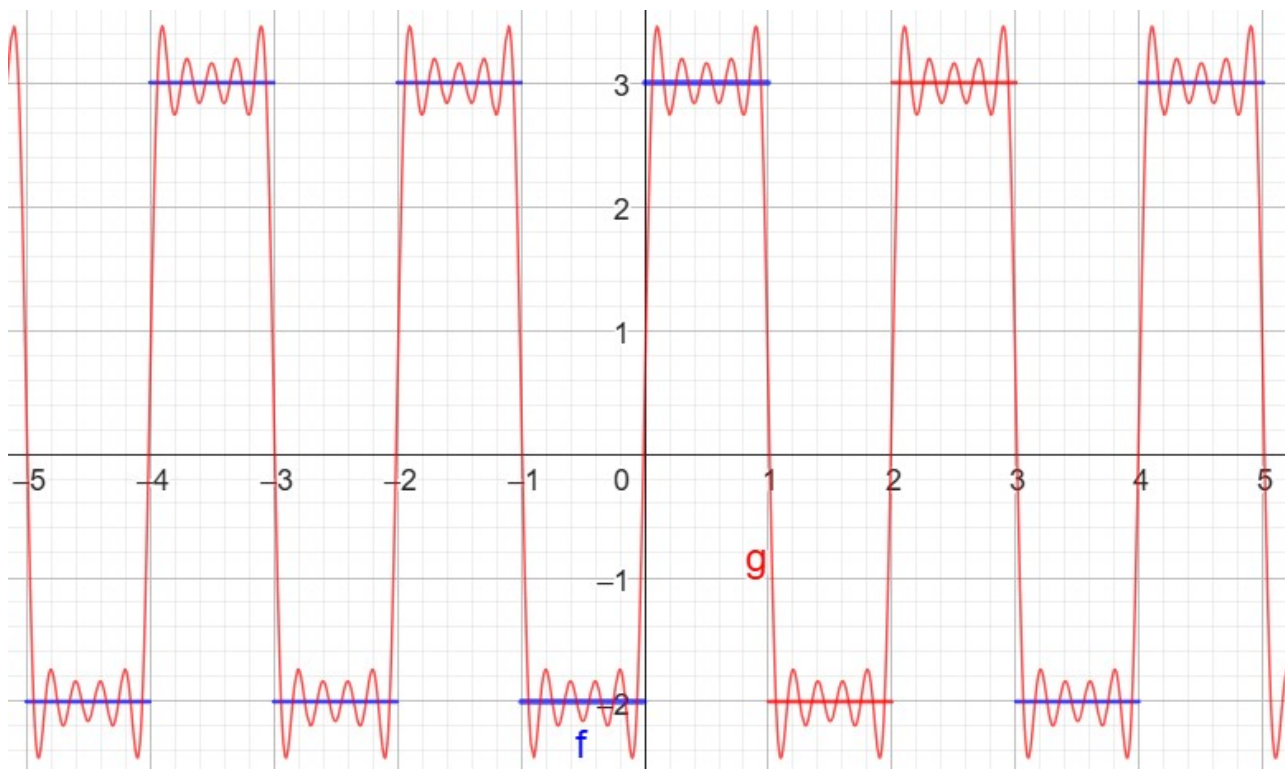
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -2 dx + \int_0^1 3 dx = -2 + 3 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^0 -2 \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 3 \cos(n\pi x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^0 -2 \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 3 \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} + \frac{3(-(-1)^n + 1)}{n\pi} = \frac{5(1 - (-1)^n)}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(n\pi x)$$



Luego, como f es suave por tramos en $[-1, 1]$, se tiene que la serie de Fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a \mathbb{R} en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y a $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$ en todo $x \in \mathbb{Z}$.

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

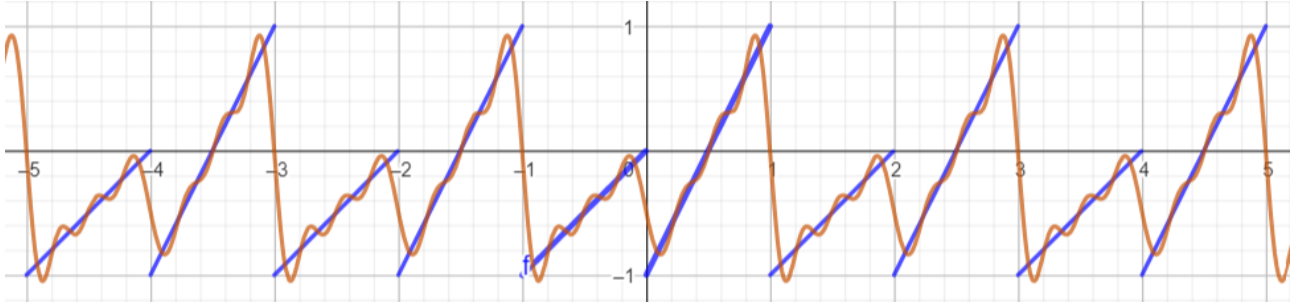
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 2x - 1 dx = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 (2x - 1) \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^0 x \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 (2x - 1) \sin(n\pi x) dx \\ &= -\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{(-1)^n + 1}{n\pi} = -\frac{2(-1)^n + 1}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } f(x) \sim -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) - \frac{2(-1)^n + 1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]$$



Luego, como f es suave por tramos en $[-1, 1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a \mathbb{R} en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$ en todo x entero par y en $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$ en todo x entero impar.

(3) $1 - 2x, -2 \leq x \leq 2$

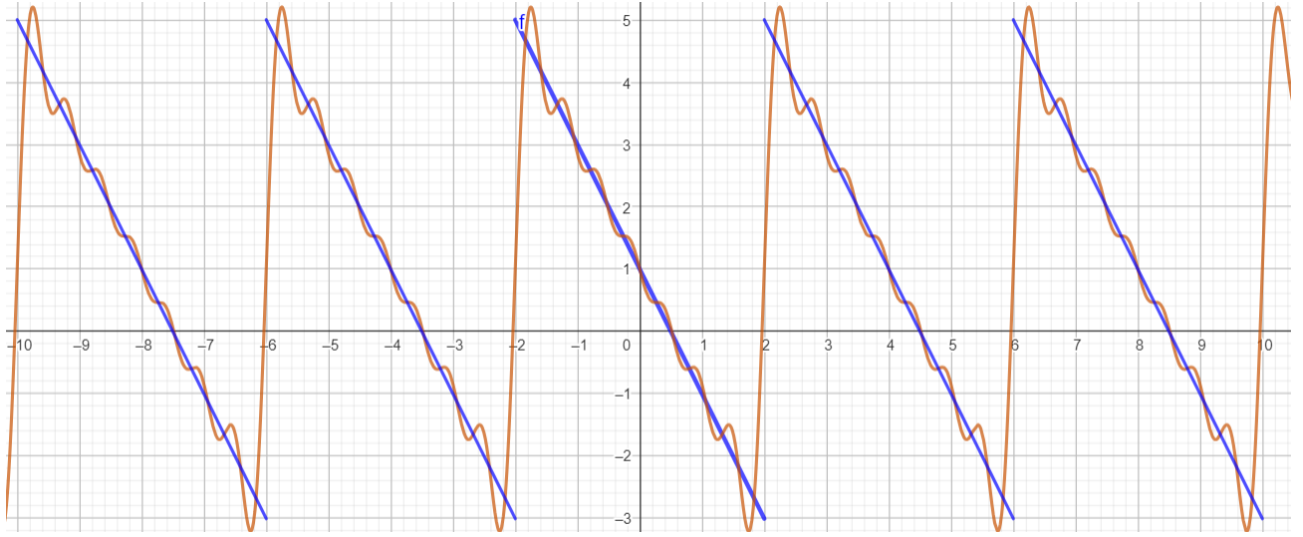
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 1 - 2x dx = \frac{1}{2}(-2 + 6) = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (1 - 2x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (1 - 2x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{8(-1)^n}{n\pi}$$

$$\text{Así, } f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$



Luego, como f es suave por tramos en $[-2, 2]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a \mathbb{R} en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod{4}\}$ y a $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$ en todo $x \in \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod{4}\}$.

$$(4) f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + 2x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

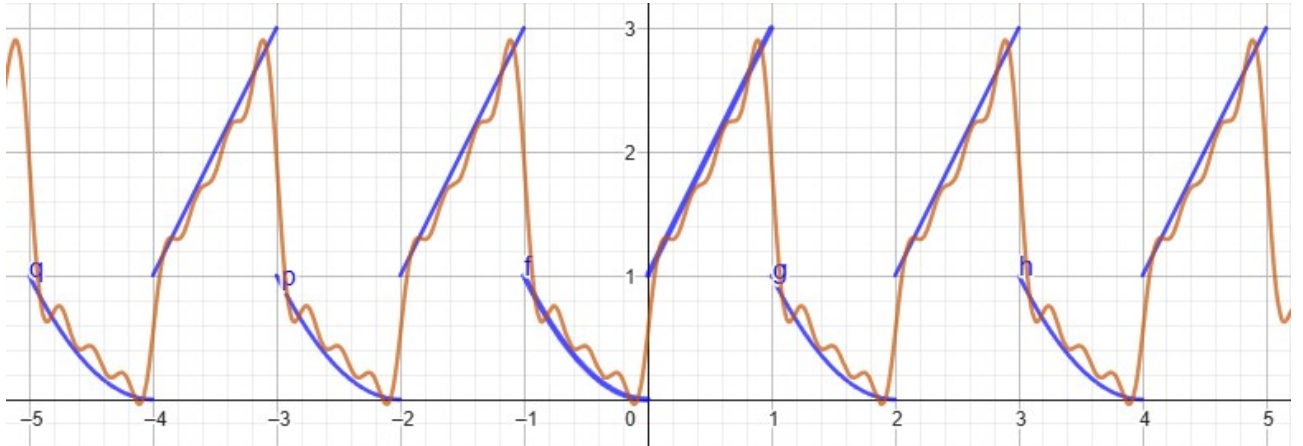
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 1 + 2x dx = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^0 x^2 \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 (1 + 2x) \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{4(-1)^n - 2}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^0 x^2 \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 (1 + 2x) \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1 - 3(-1)^n}{n\pi} = \frac{1 - 2(-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } f(x) \sim \frac{7}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^n - 2}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) + \frac{1 - 2(-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]$$



Luego, como f es suave por tramos en $[-1, 1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a \mathbb{R} en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ en todo x entero par y en

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ en todo } x \text{ entero impar.}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1 \\ 1+x, & -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

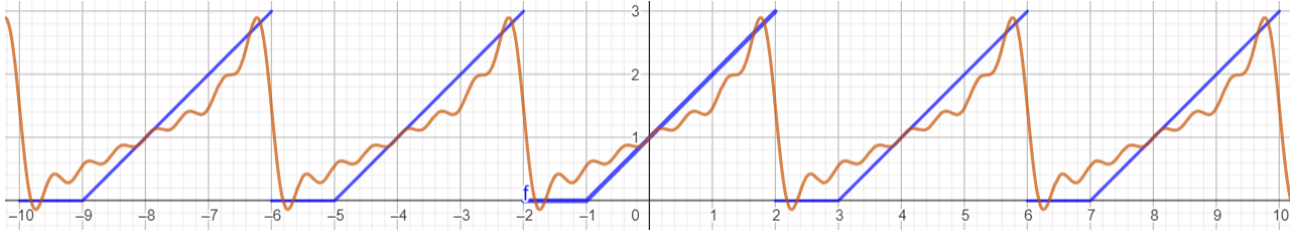
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} 0 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (1+x) dx = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} 0 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (1+x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{-2}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (1+x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{-1}{n\pi} \left(3(-1)^n + \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Así, } f(x) \sim \frac{9}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{2}{n\pi} \left(3(-1)^n + \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]$$



Luego, como f es suave por tramos en $[-2, 2]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a \mathbb{R} en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2(\text{mód } 4)\}$ y en $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$ en todo $x \in \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2(\text{mód } 4)\}$.

II. Construya la serie de senos de Fourier y la serie de cosenos de Fourier de la función dada f . En cada caso, utilice esquemas apropiados y analice la convergencia de la serie en el intervalo $[0, L]$ donde f está definida.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

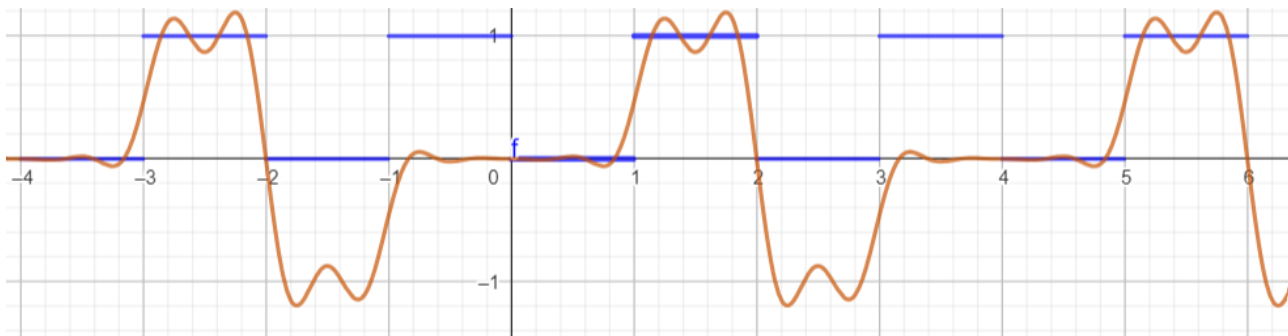
Solución.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 0 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 0 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{-2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

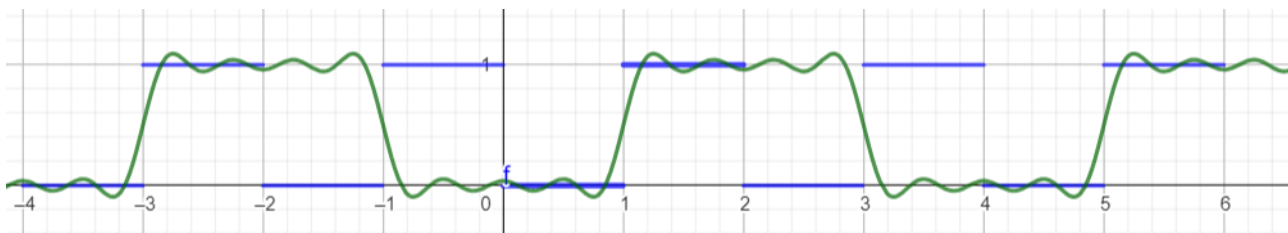
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \right) \end{aligned}$$

$$\text{Así, la serie de senos de } f \text{ es: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$



Como se ve en el dibujo, la serie de senos de f solo convergerá puntualmente a f en los intervalos $[4n, 4n+2]$, esto debido a que la función no es impar.

Y la serie de cosenos es: $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.



Nuevamente, la serie de cosenos de f solo convergerá puntualmente a f en los intervalos $[4n, 4n+2]$, esto debido a que la función no es par.

Luego, como f es suave por tramos en $[-1, 1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a \mathbb{R} en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y a $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ en todo $x \in \mathbb{Z}$.

$$(2) f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Solución.

$$(3) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Solución.

$$(4) f(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Solución.

$$(5) f(x) = x + \sin(x), 0 \leq x \leq \pi$$

Solución.