UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTEMENTO DE MATEMÁTICAS
Cálculo Diferencial Vectorial
Profesores: Dr. Félix Capulín Pérez
Dr. Enrique Castañeda Alvarado
Tarea: Máximos y mínimos

Nombre: Osmar Dominique Santana Reyes No. de cuenta: 2125197

Instrucciones: Resuelve cada uno de los ejercicios, justifica cada respuesta.

Ejercicio 1. Encontrar los valores máximos y mínimos locales, asi como los puntos silla de las funciones siguientes, después usar un software graficador en tres dimensiones y grafica las funciones teniendo en cuenta que se visualicen todos los aspectos importantes de la función correspondiente.

a) $f(x,y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0$$

$$\Longrightarrow 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 2y = 0$$

$$\Longrightarrow y = x$$

Asi, el conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y\right\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f.

Luego, se sabe que

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

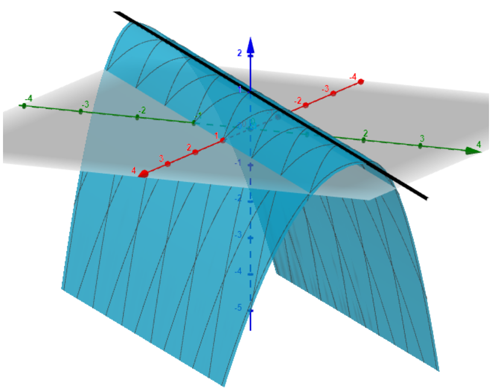
$$\Longrightarrow 2xy - x^2 - y^2 \le 0$$

$$\Longrightarrow 1 + 2xy - x^2 - y^2 \le 1$$

Pero si $(x,y) \in A$ entonces

$$f(x,y) = 1 + 2xx - x^2 - x^2 = 1$$

Por lo tanto, f alcanza su máximo absoluto en los puntos del conjunto A.



b) $f(x, y) = xy - 2x - 2y$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2 = 0$$

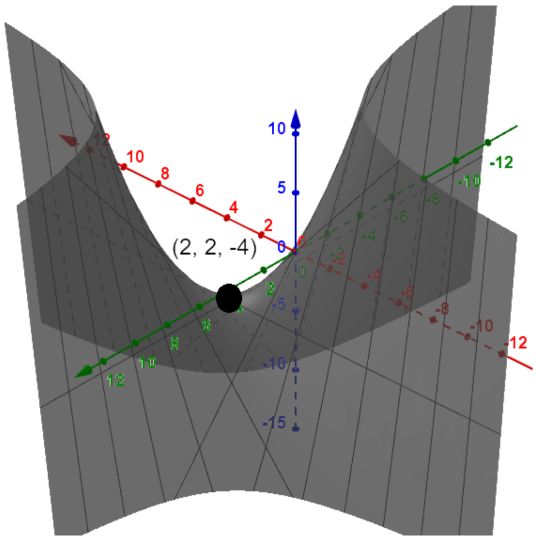
$$\Longrightarrow y = 2 \quad \text{y} \quad x = 2$$

Asi, $(2, 2)$ es un punto crítico de f.

Si $y = x$ entonces $f(x, y) = x^2 - 4x$, el cual alcanza su mínimo en $x = 2$.

Si $y = 4 - x$ entonces $f(x, y) = x(4 - x) - 2x - 2(4 - x) = 4x - x^2 - 8$, el cual alcanza su máximo en $x = 2$.

Por lo tanto, $(2, 2)$ es un punto silla de f.



c) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$.

Solución.

Calculando las primeras y segundas derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(xy)(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)(y)}{x^2y^2} \\
&= \frac{x(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)}{x^2y} \\
&= \frac{2x^2y^2 - 8x - x^2y^2 + 8x - y}{x^2y} \\
&= \frac{x^2y^2 - y}{x^2y} \\
&= \frac{x^2y - 1}{x^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(xy)(2x^2y+1)-(x^2y^2-8x+y)(x)}{x^2y^2} \\
&= \frac{y(2x^2y+1)-(x^2y^2-8x+y)}{xy^2} \\
&= \frac{2x^2y^2+y-x^2y^2+8x-y}{xy^2} \\
&= \frac{x^2y^2+8x}{xy^2} \\
&= \frac{xy^2+8}{y^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{x^2(2xy)-(x^2y-1)(2x)}{x^4} \\
&= \frac{2x^3y-2x^3y+2x}{x^4} \\
&= \frac{2x^2y-2x^2y+2}{x^3} \\
&= \frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{y^2(2xy)-(xy^2+8)(2y)}{y^4} \\
&= \frac{y(2xy)-(xy^2+8)(2)}{y^3} \\
&= \frac{2xy^2-2xy^2-16}{y^3} \\
&= -\frac{16}{y^3}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
$$

Calculando los puntos críticos de la función:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{x^2y-1}{x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{xy^2+8}{y^2} = 0$

De esta manera se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$
x^2y - 1 = 0 \tag{1}
$$
$$
xy^2 + 8 = 0 \tag{2}
$$

De (1) se tiene que $y = \dfrac{1}{x^2}$. Sustituyendo esto en (2), se tiene que

$x\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2 + 8 = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{x^3} = -8$

$\Longrightarrow x^3 = -\dfrac{1}{8}$

$\Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Sustituyendo en (1):

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 y - 1 = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{y}{4} = 1$

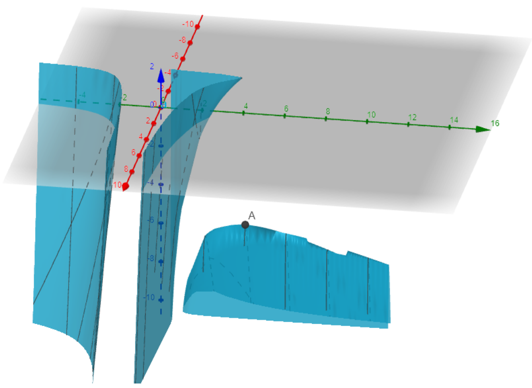
$\Longrightarrow y = 4$

Así, $\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right)$ es un punto crítico de f.

Luego,

$$\begin{aligned} D\left(-\frac{1}{2}, 4\right) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}\right)\left(-\frac{16}{4^3}\right) - 1^2 \\ &= (-16)\left(-\frac{1}{4}\right) - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 > 0 \end{aligned}$$

Y como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right) = -16 < 0$ entonces $\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right)$ es un punto de máximo local de f.



d) $f(x,y) = e^x \cos(y)$.

Solución.

Calculando las primeras y segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos(y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen}(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos(y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^x \operatorname{sen}(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Calculando los puntos críticos de la función:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\Longrightarrow e^x \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -e^x \operatorname{sen}(y) = 0$

$\Longrightarrow \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -\operatorname{sen}(y) = 0$

$\Longrightarrow y = k\,\dfrac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$

Asi, el conjunto $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = k\,\dfrac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f.

Luego, sea $(x,y) \in B$ se tiene que $y = k\,\dfrac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así,

$$D(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right)^2$$

- Si $k = 0, 4, 8, 12, \ldots$ entonces

  $D(x,y) = (e^x)\,(-e^x) = -e^{2x} < 0$
- Si $k = 1, 5, 9, 13, \ldots$ entonces

  $D(x,y) = -\,(-e^x)^2 < 0$
- Si $k = 2, 6, 10, 14, \ldots$ entonces

  $D(x,y) = (-e^x)\,(e^x) = -e^{2x} < 0$
- Si $k = 3, 7, 11, 15, \ldots$ entonces

  $D(x,y) = -\,(e^x)^2 < 0$

Por lo tanto, los puntos del conjunto B son puntos silla de f.

e) $f(x,y) = x \operatorname{sen}(y)$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen}(y) = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos(y) = 0$

$\Longrightarrow \operatorname{sen}(y) = 0 \quad \text{y} \quad x\cos(y) = 0$

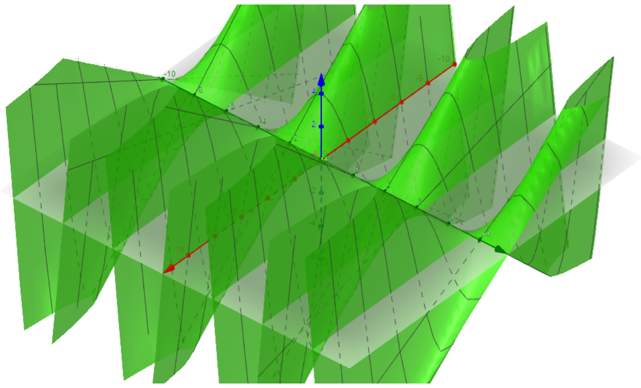
$\Longrightarrow y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x\cos(y) = 0$

$\Longrightarrow y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x|1| = 0$

$\Longrightarrow y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x = 0$

Asi, el conjunto $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0, y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N}\right\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f.

Ahora, si $(x, y) \in C$ entonces $f(x, y) = 0$. Pero para $(x, y) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x, y) = 1$ y para $(x, y) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x, y) = -1$. Debido a esto, los puntos del conjunto C no son máximos ni mínimos locales, es decir, son puntos silla.



Ejercicio 2. Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de f en la región D.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$.

Solución.

Sea $(x, y) \in D$ entonces $|x| \leq 1 \quad \text{y} \quad |y| \leq 1$

$\Longrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$

$\Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y^2 \leq 1$

$\Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1, \quad 0 \leq y^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq x^2y \leq 1$

$\Longrightarrow 4 \leq x^2 + y^2 + x^2y + 4 \leq 1 + 1 + 1 + 4 = 7$

De esta forma, f está acotada entre 4 y 7. Luego, notemos que

$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 + 0^2(0) + 4 = 4 \quad \text{y}$

$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 1^2(1) + 4 = 7 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2(1) + 4 = f(-1, 1).$

Por lo tanto, f alcanza su mínimo absoluto en $(0, 0)$ y su máximo absoluto en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

b) $f(x, y) = 1 + xy - x - y$, D es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Ejercicio 3. Encontrar el punto del plano $2x - y + z = 1$ que sea más cercano al punto $(-4, 1, 3)$.

Solución.

Sea (x, y, z) un punto del plano $2x - y + z = 1$ entonces la distancia entre este punto y el punto $(-4, 1, 3)$ esta dada por

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$$

Luego, de la ecuación del plano $2x - y + z = 1$ se tiene que $z = 1 + y - 2x$. Sustituyendo esto en la expresión anterior se tiene que

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (1+y-2x-3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2}$$

Como la raíz cuadrada es una función creciente entonces basta con encontrar el mínimo absoluto de $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$.

Así, sea $g(x, y) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$. Calculando las primeras y segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 2x + 8 - 4y + 8x + 8 = 10x - 4y + 16$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 2y - 2 + 2y - 4x - 4 = -4x + 4y - 6$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 10 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -4 = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$
$$\Longrightarrow 10x - 4y + 16 = 0 \quad \text{y} \quad -4x + 4y - 6 = 0$$

De esta manera, se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$10x - 4y = -16 \tag{3}$$
$$-4x + 4y = 6 \tag{4}$$

Sumando (3) y (4): $6x = -10 \Longrightarrow x = -\frac{5}{3}$. Sustituyendo en (4) se tiene que $-4\left(-\frac{5}{3}\right) + 4y = 6 \Longrightarrow 4y = 6 - \frac{20}{3} \Longrightarrow y = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$

Así, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ es un punto crítico de g. Luego,

$$\begin{aligned} D\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right) &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)\right) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)\right)^2 \\ &= (10)(4) - (-4)^2 \\ &= 40 - 16 \\ &= 24 > 0 \end{aligned}$$

Y como $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right) = 10 > 0$, g tiene un punto mínimo en $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)$. Después,

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-\frac{5}{3}+4\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}-1\right)^2 + \left(-\frac{1}{6} - 2\left(-\frac{5}{3}\right) - 2\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{49}{36} + \frac{49}{36}} \\ &= \sqrt{\frac{294}{36}} \\ &= \frac{7\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia mínima entre el punto del plano $2x - y + z = 1$ al punto $(-4, 1, 3)$ es $\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

Ejercicio 4. Encontrar el punto de la superficie $x^2y^2z = 1$ que sea más cercano al origen.

Solución.

Sea (x, y, z) un punto de la superficie $2x^2y^2z = 1$ entonces la distancia entre este punto y el origen esta dada por

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Luego, de la ecuación de la superficie $2x^2y^2z = 1$ se tiene que $z = \frac{1}{2x^2y^2}$. Sustituyendo esto en la expresión anterior se tiene que

$$\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{2x^2y^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^4y^4}}$$

Como la raíz cuadrada es una función creciente entonces basta con encontrar el mínimo absoluto de $x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^4y^4}$.

Así, sea $h(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^4y^4}$. Calculando las primeras y segundas derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= 2x - \frac{16x^3y^4}{(4x^4y^4)^2} = 2x - \frac{1}{x^5y^4} \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= 2y - \frac{16x^4y^3}{(4x^4y^4)^2} = 2y - \frac{1}{x^4y^5} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 2 + \frac{5x^4y^4}{(x^5y^4)^2} = 2 + \frac{5}{x^6y^4} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= 2 + \frac{5x^4y^4}{(x^4y^5)^2} = 2 + \frac{5}{x^4y^6} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} &= \frac{4x^5y^3}{(x^5y^4)^2} = \frac{4}{x^5y^5} = \frac{4x^3y^5}{(x^4y^5)^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

Buscando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\Longrightarrow 2x - \frac{1}{x^5y^4} = 0 \quad \text{y} \quad 2y - \frac{1}{x^4y^5} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{2x^6y^4 - 1}{x^5y^4} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{2x^4y^6 - 1}{x^4y^5} = 0$$

$$\Longrightarrow 2x^6y^4 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2x^4y^6 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 2x^6y^4 = 1 \quad \text{y} \quad 2x^4y^6 = 1$$

$$\Longrightarrow 2x^6y^4 = 2x^4y^6$$

$$\Longrightarrow x^2 = y^2$$

$$\Longrightarrow x = y \quad \text{o} \quad x = -y$$

Si $x = y$ entonces $2x^6y^4 = 2x^{10} = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[10]{2}} = y$.

Si $x = -y$ entonces $2(-y)^6y^4 = -2y^{10} = 1$. Pero no hay algún número real que cumpla esta igualdad.

De esta forma, $\left(\dfrac{1}{\sqrt[10]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)$ es un punto crítico de h. Luego,

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, \frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right) &= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, \frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, \frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)\right) - \\
&\qquad \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, \frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)\right)^2 \\
&= (12)(12) - (8)^2 \\
&= 144 - 64 \\
&= 80 > 0
\end{aligned}$$

Y como $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[10]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[10]{2}}\right) = 12 > 0$, h tiene un punto mínimo en $\left(\dfrac{1}{\sqrt[10]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)$.
Después,

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^2 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^4}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^4$$

Por lo tanto la distancia mínima entre un punto de la superficie al origen es $\left(\sqrt[10]{2}\right)^4$.