Teoría avanzada de Gráficas

Tarea 1

Osmar Dominique Santana Reyes

24 de Marzo de 2025

1. Probar que si G es una gráfica conexa de orden 3 o más, entonces cada puente de G incide en un vértice de corte de G.

   Demostración.

   Sea G una gráfica conexa de orden mayor o igual a tres y $e = uv$ un puente de G. Como el orden de G es mayor o igual a 3 hay un vértice $w \in \mathrm{V}(G)$, distinto de u y v, tal que

2. Probar que un vértice v en una gráfica G es un vértice de corte si y solo si hay dos vértices u y w distintos de v tales que v está en cada uw – trayectoria en G.

   Demostración.

3. Una arista e en una gráfica G es un puente si y solo si e no está contenido en un ciclo de G.

   Demostración.

4. Para cada dos vértices u y v de una gráfica G no separable de orden 3 o más hay dos uv – trayectorias distintas en G que solo tienen a u y v en común.

   Demostración.

5. Cada gráfica conexa que contiene vértices de corte contiene al menos dos bloques terminales.

   Demostración.

6. Probar o dar un contraejemplo: Si B es un bloque de orden 3 o más en una gráfica conexa G, entonces hay un ciclo en B que contiene a todos los vértices de B.

7. Probar que si G es una gráfica de orden $n \geq 3$ tal que $\mathrm{gr}_G(u) + \mathrm{gr}_G(v) \geq n$ para cada par u, v de vértices no adyacentes en G, entonces G no es separable.

   Demostración.

8. Sea u un vértice de corte en una gráfica conexa G y sea v un vértice de G tal que $\mathrm{d}(u, v) = k \geq 1$. Mostrar que G contiene un vértice w tal que $\mathrm{d}(v, w) > k$.

   Demostración.

9. Sea G una gráfica conexa de orden n y tamaño m tal que $\mathrm{V}(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Sea $b(v_i)$ el número de bloques a los que v_i pertenece.

   a) Mostrar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b(v_i) \leq 2m$.

   Demostración.

   b) Mostrar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b(v_i) = 2m$ si y solo si G es un árbol.

Demostración.

10. Determinar todos los árboles T tal que $\overline{T}$ es también un árbol.

    Demostración.