Teorema 3. Si $\mathcal{Y}$ es un semianillo, entonces $\mathcal{R}(\mathcal{Y})$ coincide con el sistema $\mathcal{L}$ de todos los conjuntos A que tienen expansiones finitas

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

con respecto a los conjuntos $A_k \in \mathcal{Y}$.

Demostración.

Se empezará probando que $\mathcal{L}$ es un anillo. Sean $A, B \in \mathcal{L}$, por hipótesis, estos se pueden expresar como:

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad y \quad B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j \qquad \text{donde } A_i, B_j \in \mathcal{L} \;\; \forall i = 1, \ldots, m \text{ y } \forall j = 1, \ldots, n$$

Luego, para cada $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, sea $C_{ij} = A_i \cap B_j$, se tiene que $C_{ij} \in \mathcal{Y}$ dado que es un semianillo. Como estos conjuntos son ajenos a pares y están contenidos en A_i y en B_j, para todo $i = 1, \ldots, m$ y para todo $j = 1, \ldots, n$, por el lema 1, para cada $i = 1, \ldots, m$ y para cada $j = 1, \ldots, n$ existen las siguientes expansiones:

$$\begin{aligned} A_i &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right) \qquad (\text{donde } D_{ik} \in \mathcal{Y} \text{ para todo } i = 1, \ldots, m) \\ B_j &= \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}\right) \qquad (\text{donde } E_{jl} \in \mathcal{Y} \text{ para todo } j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) \\ &= \left\{\bigcup_{i=1}^{m} \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right)\right]\right\} \cap \left\{\bigcup_{j=1}^{n} \left[\left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}\right)\right]\right\} \\ &= \left\{\left[\bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right)\right]\right\} \cap \left\{\left[\bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}\right)\right] \cup \left[\bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}\right)\right]\right\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right) \in \mathcal{L} \qquad (\text{pues } C_{ij} \in \mathcal{Y}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= \left[\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)\right] \Big\backslash \left[\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)\right] \\ &= \left\{\bigcup_{i=1}^{m} \left[\bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cup B_j)\right]\right\} \Big\backslash \left\{\bigcup_{i=1}^{m} \left[\bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)\right]\right\} \\ &= \left\{\bigcup_{i=1}^{m} \left[\bigcup_{j=1}^{n} \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}\right)\right)\right]\right\} \Big\backslash \left\{\bigcup_{i=1}^{m} \left[\bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right)\right]\right\} \\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right)\right] \cup \left[\bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}\right)\right] \in \mathcal{L} \qquad (\text{pues } D_{ik}, E_{jl} \in \mathcal{Y}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es un anillo y $\mathcal{R}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{L}$.

Ahora, sea $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \in \mathcal{L}$, como cada $P_i \in \mathcal{Y}$, con $i = 1, \ldots, n$, y $\mathcal{R}(\mathcal{Y})$ es el anillo minimal generado por $\mathcal{Y}$, se tiene que $P_i \in \mathcal{R}(\mathcal{Y})$, para todo $i = 1, \ldots, n$, por lo que $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \in \mathcal{R}(\mathcal{Y})$. En conclusión, $\mathcal{R}(\mathcal{Y}) = \mathcal{L}$.