7. $\big[\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) - xe^y\big]\mathrm{d}y = \big[e^y + \cos(x)\cos(y)\big]\mathrm{d}x$

Solución.

Escribiendo la E.D. en la forma diferencial:

$\big[-e^y - \cos(x)\cos(y)\big]\mathrm{d}x + \big[\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) - xe^y\big]\mathrm{d}y = 0$

Sean $M(x,y) = -e^y - \cos(x)\cos(y)$ y $N(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) - xe^y$, entonces $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -e^y + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos(x)\operatorname{sen}(y) - e^y$. Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces la E.D. es exacta. Es decir, existe $f(x,y) = C$ con $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^y - \cos(x)\cos(y) \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) - xe^y \tag{2}$$

Integrando (1) respecto a x:

$$f(x,y) = -xe^y - \operatorname{sen}(x)\cos(y) + h(y) \tag{3}$$

Luego, derivando (3) respecto a y:

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -xe^y + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) + h'(y)$

De la ecuación (2) y la anterior, se tiene que

$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) - xe^y = -xe^y + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) + h'(y)$

$\Longrightarrow 0 = h'(y)$

$\Longrightarrow h(y) = c$ (con $c \in \mathbb{R}$)

Despúes, sustituyendo $h(y)$ en (3):

$f(x,y) = -xe^y - \operatorname{sen}(x)\cos(y) + c$

Y como $f(x,y) = C$, entonces

$C = -xe^y - \operatorname{sen}(x)\cos(y) + c$

$\therefore\ xe^y + \operatorname{sen}(x)\cos(y) = D$, con $D = c - C$, es solución implícita de la E.D.