10. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0;\ y_1 = x^2$

Solución.

Sea $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ la segunda solución de la E.D. Por el método de reducción de orden, se sabe que

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}}{(x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{e^{-2\ln|x|}}{x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x^{-2}}{x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x^6}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{5x^3}
\end{aligned}
$$

Así, $y_2(x) = \left(-\dfrac{1}{5x^3}\right)x^2 = -\dfrac{1}{5x^3}$.

Por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = c_1x^2 - \frac{c_2}{5x^3}$$

7. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

Solución.

El polinomio característico de la E.D. es

$12m^2 - 5m - 2 = 0$

$\implies 12m^2 - 8m + 3m - 2 = 0$

$\implies 4m(3m^2 - 2) + (3m - 2) = 0$

$\implies (4m + 1)(3m - 2) = 0$

$\implies m_1 = -\frac{1}{4}$ y $m_2 = \frac{2}{3}$ son raíces del polinomio característico.

Como $m_1 \neq m_2$ entonces

$y_1(x) = e^{-\frac{1}{4}x}$ y $y_2(x) = e^{\frac{2}{3}x}$ son soluciones linealmente independientes de la E.D.

$\therefore\ y(x) = c_1e^{-\frac{1}{4}x} + c_2e^{\frac{2}{3}x}$ es la solución general de la E.D.