3. Demuestre que el hiperplano $H = \{x \colon px = k\}$ y un semiespacio $H^+ = \{x \colon px \geq k\}$ son conjuntos convexos.

   Demostración.

   Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in [0,1]$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
& px = k \quad \text{y} \quad py = k \\
& \Longrightarrow \lambda px = \lambda k \quad \text{y} \quad (1-\lambda)\, py = (1-\lambda)\, k \\
& \Longrightarrow \lambda px + (1-\lambda)\, py = \lambda k + (1-\lambda)\, k \\
& \Longrightarrow p\,(\lambda x + (1-\lambda)\, y) = k \\
& \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)\, y \in H
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, H es convexo.

   Ahora, sean $a, b \in H^+$ y $\lambda \in [0,1]$, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
& pa \geq k \quad \text{y} \quad pb \geq k \\
& \Longrightarrow \lambda pa \geq \lambda k \quad \text{y} \quad (1-\lambda)\, pb \geq (1-\lambda)\, k \\
& \Longrightarrow \lambda pa + (1-\lambda)\, pb \geq \lambda k + (1-\lambda)\, k \\
& \Longrightarrow p\,(\lambda a + (1-\lambda)\, b) \geq k \\
& \Longrightarrow \lambda a + (1-\lambda)\, b \in H^+
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, H^+ es convexo.

4. Considere el conjunto $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 2, x_2 \leq 4\}$. Encuentre un hiperplano H tal que X y el punto $(3, -2)$ estén en lados diferentes del hiperplano. Escriba la ecuación del hiperplano.

   Solución.

   Sea $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \right\}$

5.