UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Cálculo Diferencial Vectorial
Profesores: Dr. Félix Capulín Pérez
Dr. Enrique Castañeda Alvarado
Tarea: Multiplicadores de Lagrange

Nombre: Osmar Dominique Santana Reyes No. de cuenta: 2125197

Instrucciones: Resuelve cada uno de los ejercicios, justifica cada respuesta.

Ejercicio 1. Utiliza multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximos y mínimos de la función, sujeta a la(s) restricción(es) dada(s).

a) $f(x,y) = x^2y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$

Solución.

$\nabla f = \lambda \nabla(x^2 + 2y^2)$

$\Longrightarrow (2xy, x^2) = \lambda(2x, 4y)$

$$\Longrightarrow 2xy = 2\lambda x \tag{1}$$
$$x^2 = 4\lambda y \tag{2}$$
$$x^2 + 2y^2 = 6 \tag{3}$$

- Si $x = 0$ entonces, por (3) $2y^2 = 6 \Longrightarrow y = \sqrt{3}$ o $y = -\sqrt{3}$.
- Luego, si $x \neq 0$ entonces $y = \lambda$, por (1). Sustituyendo esto en (2) se tiene que $x^2 = 4y^2 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{2} = 2y^2$. De lo anterior, y por 3, se da que $x^2 + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3x^2}{2} = 6 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2$ o $x = -2$. Como $x^2 = 4$, $\lambda = y$ y por (2) se obtiene que $4 = 4y^2 \Longrightarrow y = 1$ o $y = -1$.

Así, se tienen los puntos $\left(0, \sqrt{3}\right)$, $\left(0, -\sqrt{3}\right)$, $(2,1)$, $(-2,1)$, $(2,-1)$ y $(-2,-1)$. Evaluandolos en la función se tiene que

$f\left(0, \sqrt{3}\right) = 0^2 \cdot \sqrt{3} = 0 = 0^2 \cdot -\sqrt{3} = f\left(0, -\sqrt{3}\right)$

$f(2,1) = 2^2 \cdot 1 = 4 = (-2)^2 \cdot 1 = f(-2,1)$

$f(2,-1) = 2^2 \cdot -1 = -4 = (-2)^2 \cdot -1 = f(-2,-1)$

Por lo tanto, el valor máximo de f es 4 y su valor mínimo es -4.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

Solución.

$\nabla f = \lambda \nabla(x^4 + y^4 + z^4)$

$\Longrightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda(4x^3, 4y^3, 4z^3)$

$\Longrightarrow (x, y, z) = \lambda(2x^3, 2y^3, 2z^3)$

$$\Longrightarrow x = 2\lambda x^3 \tag{4}$$
$$y = 2\lambda y^3 \tag{5}$$
$$z = 2\lambda z^3 \tag{6}$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = 1 \tag{7}$$

$\lambda \neq 0$, pues de lo contrario, de (4), (5) y (6), se tendría que $x = y = z = 0$ y no se cumpliría (7). Luego, considerando los siguientes casos:

- Si $x = 0$.
  - Si $y = 0$ entonces de (7) $z^4 = 1 \Longrightarrow z = 1 \quad \text{o} \quad z = -1$.
  - Si $y \neq 0$.
    - Si $z = 0$ entonces de (7) $y^4 = 1 \Longrightarrow y = 1 \quad \text{o} \quad y = -1$.
    - Si $z \neq 0$ entonces de (5) $\lambda = \dfrac{1}{2y^2}$ y de (6) $\lambda = \dfrac{1}{2z^2}$. Así, $\dfrac{1}{2y^2} = \dfrac{1}{2z^2} \Longrightarrow z^2 = y^2 \Longrightarrow z^4 = y^4$. Sustituyendo en (7): $y^4 + y^4 = 1 \Longrightarrow 2y^4 = 1 \Longrightarrow y^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. De esta manera, $z^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow z = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad z = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
- Si $x \neq 0$.
  - Si $y = 0$.
    - Si $z = 0$ entonces de (7) $x^4 = 1 \Longrightarrow x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$.
    - Si $z \neq 0$ entonces de (4) $\lambda = \dfrac{1}{2x^2}$ y de (6) $\lambda = \dfrac{1}{2z^2}$. Así, $\dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2z^2} \Longrightarrow z^2 = x^2 \Longrightarrow z^4 = x^4$. Sustituyendo en (7): $x^4 + x^4 = 1 \Longrightarrow 2x^4 = 1 \Longrightarrow x^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. De esta manera, $z^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow z = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad z = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
  - Si $y \neq 0$.
    - Si $z = 0$ entonces de (4) $\lambda = \dfrac{1}{2x^2}$ y de (5) $\lambda = \dfrac{1}{2y^2}$. Así, $\dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2y^2} \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y^4 = x^4$. Sustituyendo en (7): $x^4 + x^4 = 1 \Longrightarrow 2x^4 = 1 \Longrightarrow x^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. De esta manera, $y^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
    - Si $z \neq 0$ entonces de (4), (5) y (6) se tiene que

      $$\lambda = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2z^2}$$

      $$\Longrightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

$\Longrightarrow x^4 = y^4 = z^4$

Sustituyendo en (7):

$x^4 + x^4 + x^4 = 1$

$\Longrightarrow 3x^4 = 1$

$\Longrightarrow x^4 = \dfrac{1}{3}$

$\Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{o} \quad x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

De esta forma, $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{o} \quad y = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{y} \quad z = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{o} \quad z = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

De todo lo anterior, se obtienen los siguientes puntos:

$(0,0,1), (0,0,-1), (0,1,0), (0,-1,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),$
$\left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), (1,0,0), (-1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),$
$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right),$
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right),$
$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right).$

Si $(x,y,z) \in \{(0,0,1), (0,0,-1), (0,1,0), (0,-1,0), (1,0,0), (-1,0,0)\}$ entonces $f(x,y,z) = 1$.

Si $(x,y,z) \in \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),\right.$
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right),$
$\left.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right)\right\}$ entonces $f(x,y,z) = \sqrt{2}$.

Si $(x,y,z) \in \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right),\right.$
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right),$
$\left.\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\right\}$ entonces $f(x,y,z) = \sqrt{3}$.

Por lo tanto, el valor máximo de f es $\sqrt{3}$ y su valor mínimo es 1.

c) $f(x,y,z,t) = x+y+z+t$; $x^2+y^2+z^2+t^2=1$

Solución.

$$\nabla f = \lambda \nabla (x^2+y^2+z^2+t^2)$$

$$\Rightarrow (1,1,1,1) = \lambda(2x, 2y, 2z, 2t)$$

$$\Rightarrow 1 = 2\lambda x \cdots (1)$$

$$1 = 2\lambda y \cdots (2)$$

$$1 = 2\lambda z \cdots (3)$$

$$1 = 2\lambda t \cdots (4)$$

$$x^2+y^2+z^2+t^2 = 1 \cdots (5)$$

$\lambda \neq 0$, pues de lo contrario, en (1) se tendría que $1=0$, lo cual no puede ser. Así, de (1), (2), (3) y (4), se tiene que

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{y} \quad t = \frac{1}{2\lambda}$$

Sustituyendo esto en (5):

$$4\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = -1$$

• Si $\lambda=1$ entonces de ①, ②, ③ y ④ se tiene que

$1=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$, $1=2y \Rightarrow y=\frac{1}{2}$,

$1=2z \Rightarrow z=\frac{1}{2}$ y $1=2t \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

• Si $\lambda=-1$ entonces de ①, ②, ③ y ④ se tiene que

$1=-2x \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$, $1=-2y \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$,

$1=-2z \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$ y $1=-2t \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$

Después, evaluando los puntos $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ en f:

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$$

$$f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-2$$

Por lo tanto, el máximo valor de f es 2 y su mínimo valor es -2.

d) $f(x,y,z)=x+2y$; $x+y+z=1$, $y^2+z^2=4$

Solución.

$$\nabla f=\lambda\nabla(x+y+z)+\alpha\nabla(y^2+z^2)$$

$$\Rightarrow (1,2,0)=\lambda(1,1,1)+\alpha(0,2y,2z)$$

$$\Rightarrow 1=\lambda$$

$2=\lambda+2\alpha y \Rightarrow 1=2\alpha y$ ... ①

$0=\lambda+2\alpha z \Rightarrow -1=2\alpha z$ ... ②

$x+y+z=1$ ... ③

$y^2+z^2=4$ ... ④

$\alpha \neq 0$, pues de lo contrario, de ① se tendría que $1=0$, lo cual no puede ser. Luego, de ① y ②:

$y = \frac{1}{2\alpha}$ y $z = -\frac{1}{2\alpha}$

Sustituyendo esto en ③: $x + \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} = 1 \Rightarrow x = 1$.
Así, de ③ se tiene que $1+y+z=1 \Rightarrow y+z=0$
$\Rightarrow y=-z$. Después, de ④: $(-z)^2+z^2=4 \Rightarrow z^2+z^2=4$
$\Rightarrow 2z^2=4 \Rightarrow z^2=2 \Rightarrow z=\sqrt{2}$ ó $z=-\sqrt{2}$. De esta forma, $y=\sqrt{2}$ ó $y=-\sqrt{2}$.

De lo anterior, se obtienen los siguientes puntos: $(1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Evaluándolos en f:

$f(1,\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2}$
$f(1,-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1-2\sqrt{2}$

Por lo tanto, el máximo valor de f es $1+2\sqrt{2}$ y su mínimo valor es $1-2\sqrt{2}$.

e) $f(x,y,z)=yz+xy$; $xy=1$, $y^2+z^2=1$

Solución.

$\nabla f = \lambda\nabla(xy)+\alpha\nabla(y^2+z^2)$

$\Rightarrow (y, z+x, y) = \lambda(y,x,0)+\alpha(0,2y,2z)$

$\Rightarrow y=\lambda y \cdots$ ①

$z+x=\lambda x+2\alpha y \cdots$ ②

$y=2\alpha z \cdots$ ③

$xy=1 \cdots$ ④

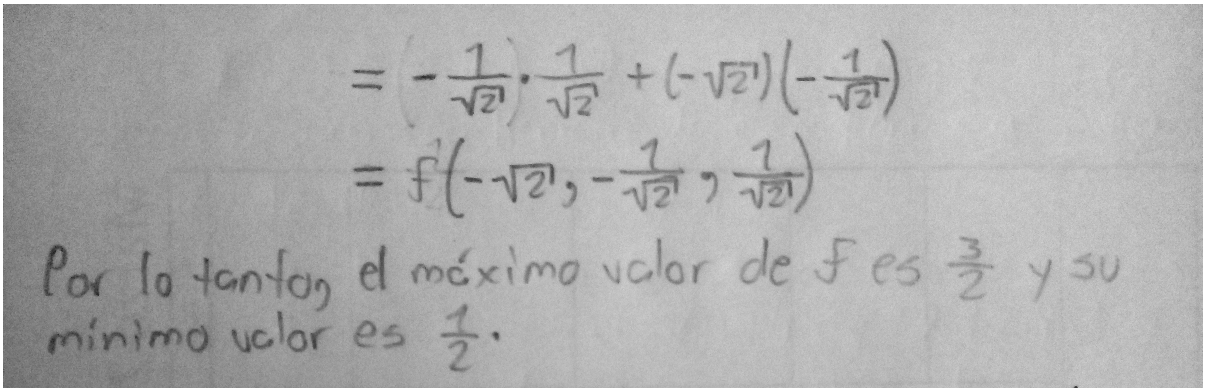
$y^2+z^2=1 \cdots$ ⑤

Si $y=0$ entonces, de ④ se obtiene que $0=1$, lo cual es una contradicción, de esta manera $y\neq 0$.
Luego, de ①: $y=\lambda y \Rightarrow 1=\lambda$
Sustituyendo esto en ②: $z+x=x+2\alpha y \Rightarrow z=2\alpha y$.
Después, de ③: $y=2\alpha(2\alpha y)=4\alpha^2 y \Rightarrow 1=4\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=\frac{1}{4}$
$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ o $\alpha=-\frac{1}{2}$. Así, sustituyendo en ③: $y=z$ o $y=-z$. Posteriormente de ⑤, ya sea que $y=z$ o $y=-z$, se da que $z^2+z^2=1 \Rightarrow 2z^2=1$
$\Rightarrow z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ o $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. De esta forma, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ o $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego, de ④: $x=\frac{1}{y}$
$\Rightarrow x=\sqrt{2}$ o $x=-\sqrt{2}$.

De esta manera, se obtienen los siguientes puntos:
$\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Evaluandolos en f:

$$
\begin{aligned}
f\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}+1 \\
&= \frac{3}{2} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= f\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$



$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= f\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Por lo tanto, el máximo valor de f es $\frac{3}{2}$ y su mínimo valor es $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3. Usa multiplicadores de Lagrange para demostrar que el rectángulo con máxima área, que tiene un perímetro dado p es un cuadrado.

Solución.

Sean x, y la base y la altura de un rectángulo, respectivamente; $P(x,y) = 2x + 2y = p$ su perímetro y $A(x,y) = xy$ su área. Usando multiplicadores de Lagrange se tiene que

$\nabla A = \lambda \nabla P$

$\Longrightarrow (y, x) = \lambda(2, 2)$

$$\Longrightarrow y = 2\lambda \quad (8)$$
$$x = 2\lambda \quad (9)$$
$$2x + 2y = p \quad (10)$$

Sustituyendo (8) y (9) en (10): $2(2\lambda) + 2(2\lambda) = p \Longrightarrow 8\lambda = p \Longrightarrow \lambda = \dfrac{p}{8}$. Así, de (8) y (9) se obtiene que $y = \dfrac{p}{4}$ y $x = \dfrac{p}{4}$.

Por lo tanto, el rectángulo alcanza su máxima área cuando la longitud de su base y altura son iguales, es decir, cuando es un cuadrado cuyos lados tienen una medida de un cuarto de su perímetro.

Ejercicio 5. El plano $x + y + 2z = 2$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Encontrar los puntos de esta elipse que estan más cerca y más lejos del origen.

Solución.

Sea (x, y, z) un punto del plano $x + y + 2z = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ entonces la distancia entre este punto y el origen esta dada por

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Como la raíz cuadrada es una función creciente, basta con encontrar los extremos locales de $x^2 + y^2 + z^2$. Luego, usando Multiplicadores de Lagrange

$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \alpha \nabla(x + y + 2z) + \lambda \nabla(x^2 + y^2 - z)$

$\Longrightarrow (2x, 2y, 2z) = \alpha(1, 1, 2) + \lambda(2x, 2y, -1)$

$$\Longrightarrow 2x = \alpha + 2\lambda x \tag{11}$$
$$2y = \alpha + 2\lambda y \tag{12}$$
$$2z = 2\alpha - \lambda \tag{13}$$
$$x + y + 2z = 2 \tag{14}$$
$$z = x^2 + y^2 \tag{15}$$

Si $\lambda = 1$ entonces, por (11), $\alpha = 0$. Luego, por (13), se tiene que $2z = -1 \Longrightarrow z = -\dfrac{1}{2}$. Después en (14) se da que $x + y = 3 \Longrightarrow y = 3 - x$. Y de (15), se obtiene que $-\dfrac{1}{2} = x^2 + (3 - x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 6x = -\dfrac{19}{2} \Longrightarrow x^2 - 3x + \dfrac{19}{4} = 0$. Pero como $(-3)^2 - 4(1)\left(\dfrac{19}{4}\right) = -10 < 0$, se tiene que x no existe como número real. De esta manera, $\lambda \neq 1$.

- Si $x = 0$ entonces, por (11), $\alpha = 0$. Sustituyendo en (12) se tiene que $y = \lambda y$.

  Como $y = \lambda y$ y $\lambda \neq 1$ se tiene que $y = 0$. Asi, de (15), $z = 0$. Y por (14) $0 = 2$, lo cual no puede ser. De esta forma, $x \neq 0$, y de forma analoga, $y \neq 0$.

Ahora, por (11) y (12), se obtiene que $2x - 2\lambda x = \alpha = 2y - 2\lambda y \Longrightarrow x(1 - \lambda) = y(1 - \lambda) \Longrightarrow x = y$.

Posteriormente, de (15): $z = 2x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{\dfrac{z}{2}}$ o $x = -\sqrt{\dfrac{z}{2}}$.

Si $x = \sqrt{\dfrac{z}{2}}$ entonces, por (14), $2\sqrt{\dfrac{z}{2}} + 2z = 2 \Longrightarrow \sqrt{\dfrac{z}{2}} = 1 - z \Longrightarrow \dfrac{z}{2} = 1 - 2z + z^2 \Longrightarrow 2z^2 - 5z + 1 = 0 \Longrightarrow (z - 2)\left(z - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow z = \dfrac{1}{2}$ o $z = 2$.

Por lo tanto, se obtienen los puntos $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $(-1, -1, 2)$. Evaluandolos en $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ se obtiene que

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

En conclusión, el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ está más cerca del origen y el punto $(-1, -1, 2)$ es el más lejano.