5. Probar que la existencia de cualquiera de las integrales

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$$

implica la existencia de la otra.

Demostración.

Suponiendo que $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$ existe, se tiene que existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples integrables que converge uniformemente a f en A. Así, sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se cumple que

$$\big||f_n(x)| - |f(x)|\big| \leq |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in A$$

De esta manera, la sucesión $\{|f_n|\}$, que es de funciones simples integrables, converge uniformemente a $|f|$. Por lo tanto, $\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$ existe.

Ahora, suponiendo que $\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$ existe, se obtiene que existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples integrables que converge uniformemente a $|f|$ en A. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n \colon A \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f_n(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a $|f|$ en A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se da que

$$\big|f_n(x) - |f(x)|\big| < \epsilon \quad \forall\, x \in A$$

- Si $f(x) \geq 0$, entonces $|g_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
- Si $f(x) < 0$, entonces $|g_n(x) - f(x)| = \big|-f_n(x) + |f(x)|\big| < \epsilon$.

De este modo, $\{g_n\}$ converge uniformemente a f en A. Por lo tanto, $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$ existe.

6. Sea

$$A = \bigcup_n A_n$$

una unión finita o contable de conjuntos disjuntos a pares, y suponiendo que f es integrable en cada A_n y satisface la condición

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

Probar que f es integrable en A.

Demostración.

- Si f es simple, entonces f toma valores a lo más contables $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$. Luego, para cada $k, n \in \mathbb{N}$ sean

$$B_k = \{x \in A \colon f(x) = y_k\} \quad \text{y} \quad B_{nk} = \{x \in A_n \colon f(x) = y_k\}\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_{A_n} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu = \sum_k |y_k| \, \mu(B_{nk})$$

y dado que $\sum_n \int_{A_n} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, se obtiene que

$$\sum_n \sum_k |y_k| \, \mu(B_{nk}) = \sum_k |y_k| \sum_n \mu(B_{nk}) = \sum_k |y_k| \, \mu(B_k)$$

converge. Por lo que f es integrable en A.

- Si f no es simple, entonces dado $\epsilon > 0$, para cada A_n existe una función simple g_n integrable en A_n tal que $|f(x) - g_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in A_n$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_n \int_{A_n} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu - \sum_n \int_{A_n} |g_n(x)| \, \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \sum_n \int_{A_n} |f(x)| - |g_n(x)| \, \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \sum_n \left| \int_{A_n} |f(x)| - |g_n(x)| \, \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \sum_n \int_{A_n} \big| |f(x)| - |g_n(x)| \big| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_n \int_{A_n} |f(x) - g_n(x)| \, \mathrm{d}\mu \\
&< \sum_n \int_{A_n} \epsilon \, \mathrm{d}\mu \\
&= \epsilon \mu(A)
\end{aligned}$$

Sea $g(x) = g_i(x)$ para cada $x \in A$, lo anterior se puede reescribir como

$$\left| \sum_n \int_{A_n} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu - \sum_n \int_{A_n} |g(x)| \, \mathrm{d}\mu \right| < \epsilon \mu(A)$$

Ya que $\sum_n \int_{A_n} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, se obtiene que $\sum_n \int_{A_n} |g(x)| \, \mathrm{d}\mu$ converge. De esta manera, g es integrable en A y, dado que ϵ fue arbitraria, f también lo es.