12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

Solución.

Ecuación homogénea asociada: $y'' - 2y' + y = 0$

Polinomio característico:

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$
$$\implies (m-1)^2 = 0$$
$$\implies m - 1 = 0$$
$$\implies m = 1 \quad \text{es una raíz de multiplicidad 2.}$$

Así, $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = xe^x$ son soluciones *l.i.*

Función complementaria: $y_c(x) = c_1e^x + c_2xe^x$

Solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Como $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ esta en la forma canónica, entonces sea $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ la solución particular. Luego,

$$\begin{aligned} W(e^x, xe^x) &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

Y así,

$$u'(x) = \frac{-xe^x\left(\dfrac{e^x}{1+x^2}\right)}{e^2x} \qquad\qquad v'(x) = \frac{e^x\left(\dfrac{e^x}{1+x^2}\right)}{e^2x}$$

$$= -\frac{x}{1+x^2} \qquad\qquad = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\implies u(x) = \int -\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad\qquad \implies v(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \qquad\qquad = \arctan(x)$$

$$\therefore\ y_p(x) = -\frac{e^x}{2}\ln(1+x^2) + xe^x\arctan(x)$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{e^x}{2} \ln(1 + x^2) + x e^x \arctan(x)$$