

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Cálculo diferencial vectorial
Profesores: Dr. Félix Capulín Pérez
Dr. Enrique Castañeda Alvarado
Tarea: Máximos y mínimos

Nombre: Osmar Dominique Santana Reyes

No. de cuenta: 2125197

Instrucciones: Resuelve cada uno de los ejercicios, justica cada respuesta.

Ejercicio 1. Encontrar los valores máximos y mínimos locales, así como los puntos silla de las funciones siguientes, después usar un software graficador en tres dimensiones y grafica las funciones teniendo en cuenta que se visualicen todos los aspectos importantes de la función correspondiente.

a) $f(x, y) = 1 + 2x - x^2 - y^2$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0$$

$$\implies 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 2y = 0$$

$$\implies y = x$$

Así, el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f .

Luego, se sabe que

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$\implies 2xy - x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\implies 1 + 2xy - x^2 - y^2 \leq 1$$

Pero si $(x, y) \in A$ entonces

$$f(x, y) = 1 + 2xx - x^2 - x^2 = 1$$

Por lo tanto, f alcanza su máximo absoluto en los puntos del conjunto A .

b) $f(x, y) = xy - 2x - 2y$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2 = 0$$

$$\implies y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2 = 0$$

$$\implies y = 2 \quad \text{y} \quad x = 2$$

Así, $(2, 2)$ es un punto crítico de f .

Si $x = -y$ entonces $f(x, y) = -y^2$. Pero $-y^2$ solo alcanza su máximo valor en $y = 0$.

Por lo tanto, $(2, 2)$ es un punto silla de f .

$$c) f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}.$$

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(xy)(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)(y)}{x^2y^2} = 0 \quad y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xy)(2x^2y + 1) - (x^2y^2 - 8x + y)(x)}{x^2y^2} = 0$$

$$\implies (xy)(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)(y) = 0 \quad y$$

$$(xy)(2x^2y + 1) - (x^2y^2 - 8x + y)(x) = 0$$

$$\implies 2x^2y^3 - 8xy - x^2y^3 + 8xy - y^2 = 0 \quad y$$

$$2x^3y^2 + xy - x^3y^2 + 8x^2 - xy = 0$$

$$\implies x^2y^3 - y^2 = 0 \quad y \quad x^3y^2 + 8x^2 = 0$$

$$\implies y^2(x^2y - 1) = 0 \quad y \quad x^2(xy^2 + 8) = 0$$

$$\implies x = 0, \quad y = 0 \quad y \text{ se tiene el siguiente sistema de ecuaciones}$$

$$x^2y - 1 = 0 \tag{1}$$

$$xy^2 + 8 = 0 \tag{2}$$

De (1) se tiene que $y = \frac{1}{x^2}$. Sustituyendo esto en (2), se tiene que

$$x \left(\frac{1}{x^2} \right)^2 + 8 = 0$$

$$\implies \frac{1}{x^3} = -8$$

$$\implies x^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\implies x = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en (1):

$$\left(-\frac{1}{2} \right)^2 y - 1 = 0$$

$$\implies \frac{y}{4} = 1$$

$$\implies y = 4$$

Pero $(0, 0)$ no pertenece al dominio de f , pues $f(0, 0) = \frac{0}{0}$, por lo que no es un punto crítico.

Así, $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ es un punto crítico de f .

d) $f(x, y) = e^x \cos(y)$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin(y) = 0$$

$$\implies e^x \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -e^x \sin(y) = 0$$

$$\implies \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -\sin(y) = 0$$

$$\implies y = k \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

Así, el conjunto $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{N}\right\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f .

Luego, se sabe que $0 < e^x < \infty$ y $-1 \leq \cos(y) \leq 1$. Si $-1 \leq \cos(y) < 0$ entonces $-\infty < e^x \cos(y) < 0$. Y si $0 < \cos(y) \leq 1$ entonces $0 < e^x \cos(y) < \infty$. De esta manera, $-\infty < e^x \cos(y) < \infty$. Por lo tanto, f no tiene máximos ni mínimos locales y los puntos del conjunto B son puntos silla.

e) $f(x, y) = x \sin(y)$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(y) = 0$$

$$\implies \sin(y) = 0 \quad \text{y} \quad x \cos(y) = 0$$

$$\implies y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x \cos(y) = 0$$

$$\implies y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x|1| = 0$$

$$\implies y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x = 0$$

Así, el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f .

Ahora, si $y = \frac{\pi}{2}$ entonces $f(x, y) = x$ y como $-\infty \leq x \leq \infty$ entonces f no tiene ningún extremo local en $x = 0$.

Por lo tanto, los puntos del conjunto C son puntos silla.

Ejercicio 2. Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de f en la región D .

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Solución.

Sea $(x, y) \in D$ entonces $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$

$$\implies -1 \leq x \leq 1 \quad y \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\implies 0 \leq x^2 \leq 1 \quad y \quad 0 \leq y^2 \leq 1$$

$$\implies 0 \leq x^2 \leq 1, \quad 0 \leq y^2 \leq 1 \quad y \quad 0 \leq x^2 y \leq 1$$

$$\implies 4 \leq x^2 + y^2 + x^2 y + 4 \leq 1 + 1 + 1 + 4 = 7$$

De esta forma, f está acotada entre 4 y 7. Luego, notemos que

$$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 + 0^2(0) + 4 = 4 \quad y$$

$$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 1^2(1) + 4 = 7 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2(1) + 4 = f(-1, 1).$$

Por lo tanto, f alcanza su mínimo absoluto en $(0, 0)$ y su máximo absoluto en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

b) $f(x, y) = 1 + xy - x - y$, D es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ejercicio 3. Encontrar el punto del plano $2x - y + z = 1$ que sea más cercano al punto $(-4, 1, 3)$.

Solución.

Sea (x, y, z) un punto del plano $2x - y + z = 1$ entonces la distancia entre este punto y el punto $(-4, 1, 3)$ esta dada por

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$$

Luego, de la ecuación del plano $2x - y + z = 1$ se tiene que $z = 1 + y - 2x$. Sustituyendo esto en la expresión anterior se tiene que

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (1+y-2x-3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2}$$

Como la raíz cuadrada es una función creciente entonces basta con encontrar el mínimo absoluto de $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$.

Así, sea $g(x, y) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$. Calculando los puntos críticos de la función, se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \quad y \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0$$

$$\implies 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \quad y \quad 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0$$

$$\implies 2x + 8 - 4y + 8x + 8 = 0 \quad y \quad 2y - 2 + 2y - 4x - 4 = 0$$

$\implies 10x - 4y + 16 = 0 \quad y \quad -4x + 4y - 6 = 0$ De esta manera, se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$10x - 4y = -16 \tag{3}$$

$$-4x + 4y = 6 \tag{4}$$

- Ejercicio 4.** Encontrar el punto de la superficie $x^2y^2z = 1$ que sea más cercano al origen.
- Ejercicio 5.** Encontrar tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea mínimo.
- Ejercicio 6.** Encontrar el volumen de la mayor caja rectangular con bordes paralelos a los ejes que pueda estar inscrita en el elipsoide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.
- Ejercicio 7.** Encontrar las dimensiones de la caja rectangular con máximo volumen y área superficial total de 64 cm^2 .
- Ejercicio 8.** La base de una pecera con volumen V dado esta hecha de pizarra y, los lados, de vidrio. Si la pizarra cuesta 5 veces (por unidad de área) más que el vidrio encontrar las dimensiones de la pecera que reduzca al mínimo el costo de los materiales.
- Ejercicio 9.** Tres alelos (formas mutantes de genes) A, B y O, determinan los cuatro tipos sanguíneos A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg expresa que la proporción de individuos en una población que llevan los alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2rp + 2rq$$

donde p, q, r son las proporciones de A, B, O en la población. Utilizar el hecho de que $p + q + r = 1$ para demostrar que P es, a lo sumo $\frac{2}{3}$.

- Ejercicio 10.** Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,3) y determina el volumen más pequeño en el primer octante.