

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Cálculo diferencial vectorial  
Profesores: Dr. Félix Capulín Pérez  
Dr. Enrique Castañeda Alvarado  
Tarea: Máximos y mínimos

Nombre: Osmar Dominique Santana Reyes

No. de cuenta: 2125197

**Instrucciones:** Resuelve cada uno de los ejercicios, justica cada respuesta.

**Ejercicio 1.** Encontrar los valores máximos y mínimos locales, así como los puntos silla de las funciones siguientes, después usar un software graficador en tres dimensiones y grafica las funciones teniendo en cuenta que se visualicen todos los aspectos importantes de la función correspondiente.

a)  $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$ .

**Solución.**

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0$$

$$\implies 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 2y = 0$$

$$\implies y = x$$

Así, el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$  contiene a todos los puntos críticos de la función  $f$ .

Luego, se sabe que

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

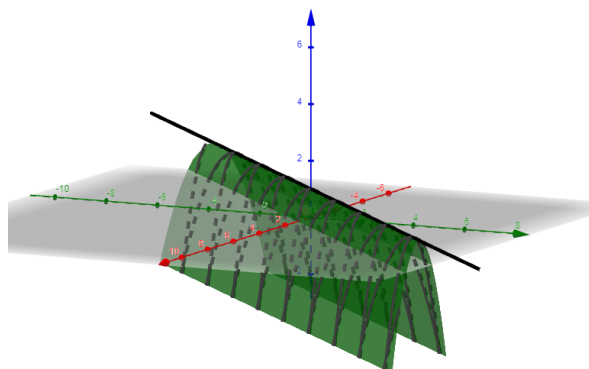
$$\implies 2xy - x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\implies 1 + 2xy - x^2 - y^2 \leq 1$$

Pero si  $(x, y) \in A$  entonces

$$f(x, y) = 1 + 2xx - x^2 - x^2 = 1$$

Por lo tanto,  $f$  alcanza su máximo absoluto en los puntos del conjunto  $A$ .



b)  $f(x, y) = xy - 2x - 2y$ .

**Solución.**

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2 = 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2 = 0$$

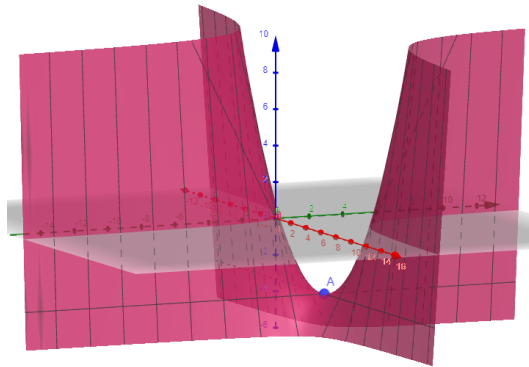
$$\implies y - 2 = 0 \quad y \quad x - 2 = 0$$

$$\implies y = 2 \quad y \quad x = 2$$

Así,  $(2, 2)$  es un punto crítico de  $f$ .

Si  $x = -y$  entonces  $f(x, y) = -y^2$ . Pero  $-y^2$  solo alcanza su máximo valor en  $y = 0$ .

Por lo tanto,  $(2, 2)$  es un punto silla de  $f$ .



c)  $f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$ .

**Solución.**

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(xy)(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)(y)}{x^2y^2} = 0 \quad y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xy)(2x^2y + 1) - (x^2y^2 - 8x + y)(x)}{x^2y^2} = 0$$

$$\implies (xy)(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)(y) = 0 \quad y$$

$$(xy)(2x^2y + 1) - (x^2y^2 - 8x + y)(x) = 0$$

$$\implies 2x^2y^3 - 8xy - x^2y^3 + 8xy - y^2 = 0 \quad y$$

$$2x^3y^2 + xy - x^3y^2 + 8x^2 - xy = 0$$

$$\implies x^2y^3 - y^2 = 0 \quad y \quad x^3y^2 + 8x^2 = 0$$

$$\implies y^2(x^2y - 1) = 0 \quad y \quad x^2(xy^2 + 8) = 0$$

$\implies x = 0, \quad y = 0$  y se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$x^2y - 1 = 0 \tag{1}$$

$$xy^2 + 8 = 0 \tag{2}$$

De (1) se tiene que  $y = \frac{1}{x^2}$ . Sustituyendo esto en (2), se tiene que

$$x \left( \frac{1}{x^2} \right)^2 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} = -8$$

$$\Rightarrow x^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en (1):

$$\left( -\frac{1}{2} \right)^2 y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{4} = 1$$

$$\Rightarrow y = 4$$

Pero  $(0, 0)$  no pertenece al dominio de  $f$ , pues  $f(0, 0) = \frac{0}{0}$ , por lo que no es un punto crítico.

Así,  $\left( -\frac{1}{2}, 4 \right)$  es un punto crítico de  $f$ .

d)  $f(x, y) = e^x \cos(y)$ .

**Solución.**

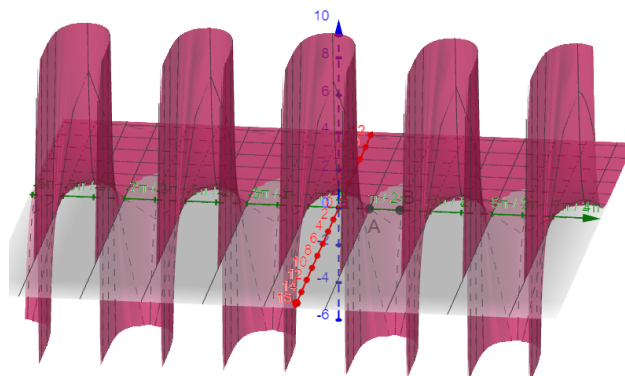
Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin(y) = 0$$

$$\Rightarrow e^x \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -e^x \sin(y) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -\sin(y) = 0$$

$$\Rightarrow y = k \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{N}$$



Así, el conjunto  $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{N} \right\}$  contiene a todos los puntos críticos de la función  $f$ .

Luego, se sabe que  $0 < e^x < \infty$  y  $-1 \leq \cos(y) \leq 1$ . Si  $-1 \leq \cos(y) < 0$  entonces  $-\infty < e^x \cos(y) < 0$ . Y si  $0 < \cos(y) \leq 1$  entonces  $0 < e^x \cos(y) < \infty$ . De esta manera,  $-\infty < e^x \cos(y) < \infty$ . Por lo tanto,  $f$  no tiene máximos ni mínimos locales y los puntos del conjunto  $B$  son puntos silla.

e)  $f(x, y) = x \sin(y)$ .

**Solución.**

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y) = 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(y) = 0$$

$$\implies \sin(y) = 0 \quad y \quad x \cos(y) = 0$$

$$\implies y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad y \quad x \cos(y) = 0$$

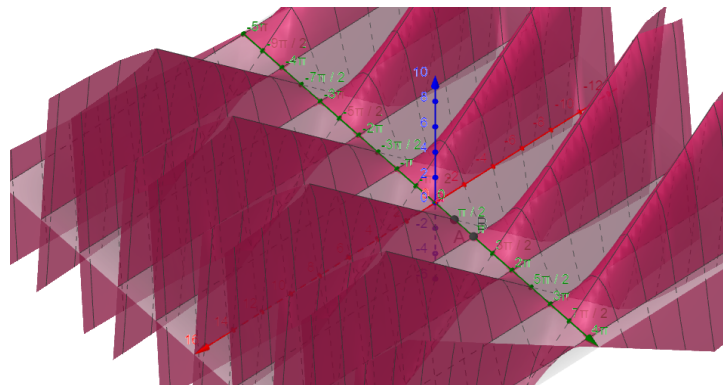
$$\implies y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad y \quad x|1| = 0$$

$$\implies y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad y \quad x = 0$$

Así, el conjunto  $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \right\}$  contiene a todos los puntos críticos de la función  $f$ .

Ahora, si  $y = \frac{\pi}{2}$  entonces  $f(x, y) = x$  y como  $-\infty \leq x \leq \infty$  entonces  $f$  no tiene ningún extremo local en  $x = 0$ .

Por lo tanto, los puntos del conjunto  $C$  son puntos silla.



**Ejercicio 2.** Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de  $f$  en la región  $D$ .

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ .

**Solución.**

Sea  $(x, y) \in D$  entonces  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$

$$\implies -1 \leq x \leq 1 \quad y \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\implies 0 \leq x^2 \leq 1 \quad y \quad 0 \leq y^2 \leq 1$$

$$\implies 0 \leq x^2 \leq 1, \quad 0 \leq y^2 \leq 1 \quad y \quad 0 \leq x^2y \leq 1$$

$$\implies 4 \leq x^2 + y^2 + x^2y + 4 \leq 1 + 1 + 1 + 4 = 7$$

De esta forma,  $f$  está acotada entre 4 y 7. Luego, notemos que

$$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 + 0^2(0) + 4 = 4 \quad y$$

$$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 1^2(1) + 4 = 7 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2(1) + 4 = f(-1, 1).$$

Por lo tanto,  $f$  alcanza su mínimo absoluto en  $(0, 0)$  y su máximo absoluto en  $(-1, 1)$  y  $(1, 1)$ .

b)  $f(x, y) = 1 + xy - x - y$ ,  $D$  es la región acotada por la parábola  $y = x^2$  y la recta  $y = 4$ .

c)  $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Ejercicio 3.** Encontrar el punto del plano  $2x - y + z = 1$  que sea más cercano al punto  $(-4, 1, 3)$ .

**Solución.**

Sea  $(x, y, z)$  un punto del plano  $2x - y + z = 1$  entonces la distancia entre este punto y el punto  $(-4, 1, 3)$  esta dada por

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$$

Luego, de la ecuación del plano  $2x - y + z = 1$  se tiene que  $z = 1 + y - 2x$ . Sustituyendo esto en la expresión anterior se tiene que

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (1+y-2x-3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2}$$

Como la raíz cuadrada es una función creciente entonces basta con encontrar el mínimo absoluto de  $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$ .

Así, sea  $g(x, y) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$ . Calculando los puntos críticos de la función, se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \quad y \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0$$

$$\implies 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \quad y \quad 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0$$

$$\implies 2x + 8 - 4y + 8x + 8 = 0 \quad y \quad 2y - 2 + 2y - 4x - 4 = 0$$

$$\implies 10x - 4y + 16 = 0 \quad y \quad -4x + 4y - 6 = 0$$

De esta manera, se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$10x - 4y = -16 \tag{3}$$

$$-4x + 4y = 6 \tag{4}$$

Sumando (3) y (4):  $6x = -10 \implies x = -\frac{5}{3}$ . Sustituyendo en (4) se tiene que

$$-4\left(-\frac{5}{3}\right) + 4y = 6 \implies 4y = 6 - \frac{20}{3} \implies y = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Por lo tanto,  $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)$  es un punto crítico de  $g$ .

- Ejercicio 4.** Encontrar el punto de la superficie  $x^2y^2z = 1$  que sea más cercano al origen.
- Ejercicio 5.** Encontrar tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea mínimo.
- Ejercicio 6.** Encontrar el volumen de la mayor caja rectangular con bordes paralelos a los ejes que pueda estar inscrita en el elipsoide  $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$ .
- Ejercicio 7.** Encontrar las dimensiones de la caja rectangular con máximo volumen y área superficial total de  $64 \text{ cm}^2$ .
- Ejercicio 8.** La base de una pecera con volumen  $V$  dado esta hecha de pizarra y, los lados, de vidrio. Si la pizarra cuesta 5 veces (por unidad de área) más que el vidrio encontrar las dimensiones de la pecera que reduzca al mínimo el costo de los materiales.
- Ejercicio 9.** Tres alelos (formas mutantes de genes) A, B y O, determinan los cuatro tipos sanguíneos A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg expresa que la proporción de individuos en una población que llevan los alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2rp + 2rq$$

donde  $p, q, r$  son las proporciones de A, B, O en la población. Utilizar el hecho de que  $p + q + r = 1$  para demostrar que  $P$  es, a lo sumo  $\frac{2}{3}$ .

- Ejercicio 10.** Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,3) y determina el volumen más pequeño en el primer octante.