$xy'' = y' + x(y')^2$

Solución.

Reescribiendo la E.D.

$x\,\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$

Sea $w(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ entonces $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. Sustituyendo esto en la E.D. se tiene que

$x\,\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w + xw^2$

$\implies x\,\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - w = xw^2$

$\implies \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{x}\,w = w^2$

$\implies \dfrac{1}{w^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{w}\right) = 1$

Sea $u(x) = \dfrac{1}{w}$ entonces $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{w^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)$. Sustituyendo esto en lo anterior,

$-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{x}\,u = 1$

$\implies \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{x}\,u = -1$

Sea $\mu(x) = e^{\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = e^{\ln|x|} = x$. Multiplicando $\mu(x)$ por la ecuación anterior se da que

$\implies x\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = -x$

$\implies \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xu) = -x$

$\implies xu = \int -x\,\mathrm{d}x$

$\implies xu = -\dfrac{x^2}{2} + C$

$\implies u = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{C}{x}$

$\implies u = \dfrac{2C - x^2}{2x}$

Pero $u(x) = \dfrac{1}{w}$. Asi,

$$\frac{1}{w} = \frac{2C - x^2}{2x}$$

$$\implies w = \frac{2x}{2C - x^2}$$

Además de que $w = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, por lo que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{2C - x^2}$$

$$\implies y(x) = \int \frac{2x}{2C - x^2} \, \mathrm{d}x$$

Sea $t = 2C - x^2$ entonces $\mathrm{d}t = -2x \implies -\mathrm{d}t = 2x$. Sustituyendo esto en lo anterior, se da que

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \\ &= -\ln|t| + D \end{aligned}$$

Pero $t = 2C - x^2$. Por lo tanto, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = -\ln\left|2C - x^2\right| + D$$