Lema (Integrales de tipo Cauchy). Sean $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva $\mathcal{C}^1$ por tramos, $\phi\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ continua y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si

$$g(z) = \int_\gamma \phi(w)(w-z)^n \,\mathrm{d}w$$

entonces g es analítica y $\mathcal{C}^\infty$ en el sentido complejo en $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$.

Además, si $n = -1$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$g^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^{k+1}} \,\mathrm{d}w.$$

Demostración.

Sean $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ y $\{h_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a 0.

P.d. $\dfrac{(w-z_0-h_p)^n - (w-z_0)^n}{h_p} \to -n(w-z_0)^{n-1} \,\forall w \in \gamma([a,b])$.

Sean $w \in \gamma([a,b])$ y $u = w - z_0$. Como γ es compacto en $\mathbb{C}$, se tiene que $N \leq |u| \leq M$ para algunos $N, M \in \mathbb{R}^+$. Luego,

- Si $n > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(u-h_p)^n - u^n}{h_p} + nu^{n-1}\right| &= \left|\frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k u^{n-k}h_p^k - u^n}{h_p} + nu^{n-1}\right| \\
&= \left|\frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k u^{n-k}h_p^k}{h_p} + nu^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k u^{n-k}h_p^{k-1} + nu^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^n \binom{n}{k}(-1)^k u^{n-k}h_p^{k-1}\right| \\
&\leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left|u^{n-k}h_p^{k-1}\right| \\
&< n^n M^n \sum_{k=2}^n |h_p|^{k-1}
\end{aligned}$$

  Por lo que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(w-z_0-h_p)^n - (w-z_0)^n}{h_p} = -n(w-z_0)^{n-1}$$

- Si $n < 0$ entonces sea $m = -n$, se da que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{(u-h_p)^n-u^n}{h_p}+nu^{n-1}\right| &= \left|\frac{1}{h_p}\left(\frac{1}{(u-h_p)^m}-\frac{1}{u^m}\right)-\frac{m}{u^{m+1}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{h_p}\left(\frac{u^m-(u-h_p)^m}{(u-h_p)^m u^m}\right)-\frac{m}{u^{m+1}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{h_p}\left(\frac{u^m-\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k u^{m-k}h_p^k}{(u-h_p)^m u^m}\right)-\frac{m}{u^{m+1}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{h_p}\left(\frac{\sum_{k=1}^m \binom{m}{k}(-1)^{k+1} u^{m-k}h_p^k}{(u-h_p)^m u^m}\right)-\frac{m}{u^{m+1}}\right| \\
&= \left|\left(\frac{\sum_{k=1}^m \binom{m}{k}(-1)^{k+1} u^{m-k}h_p^{k-1}}{(u-h_p)^m u^m}\right)-\frac{m}{u^{m+1}}\right| \\
&\leq \left|\frac{m}{(u-h_p)^m u}-\frac{m}{u^{m+1}}\right|+\left|\frac{\sum_{k=2}^m \binom{m}{k}(-1)^{k+1} u^{-k}h_p^{k-1}}{(u-h_p)^m}\right| \\
&= \left|\frac{m(u^m-(u-h_p)^m)}{(u-h_p)^m u^{m+1}}\right|+\frac{\sum_{k=2}^m \binom{m}{k}\left|u^{-k}h_p^{k-1}\right|}{|u-h_p|^m} \\
&\leq \frac{m}{(N-h_p)^m N^{m+1}}\left|u^m-(u-h_p)^m\right|+\frac{m^m}{(N-h_p)^m N^m}\sum_{k=2}^m |h_p|^{k-1}
\end{aligned}
$$

Por lo cual

$$
\lim_{p\to\infty}\frac{(w-z_0-h_p)^n-(w-z_0)^n}{h_p}=-n(w-z_0)^{n-1}
$$

Luego, dado que ϕ está definida en γ y es continua, se tiene que ϕ es uniformemente continua, lo que implica que ϕ está acotada. De este modo,

$$
\lim_{p\to\infty}\frac{(w-z_0-h_p)^n-(w-z_0)^n}{h_p}\phi(w)=-n\phi(w)(w-z_0)^{n-1}
$$

Y por el Teorema anterior, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
g'(z_0)=\lim_{p\to\infty}\frac{g(z_0+h_p)-g(z_0)}{h_p} &= \lim_{p\to\infty}\frac{\int_\gamma \phi(w)\left[(w-z_0-h_p)^n-(w-z_0)^n\right]\,\mathrm{d}w}{h_p} \\
&= \int_\gamma \lim_{p\to\infty}\frac{\phi(w)\left[(w-z_0-h_p)^n-(w-z_0)^n\right]}{h_p} w\,\mathrm{d} \\
&= -n\int_\gamma \phi(w)(w-z_0)^{n-1}\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

Como z fue arbitaria, la igualdad anterior se cumple para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Después, notemos que

$$
g''(z_0)=-n\left((1-n)\int_\gamma \phi(w)(w-z_0)^{n-2}\,\mathrm{d}w\right)=n(n-1)\int_\gamma \phi(w)(w-z_0)^{n-2}\,\mathrm{d}w
$$

Y siguiendo así se concluye que g es $\mathcal{C}^\infty$ en el sentido complejo en $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$, además de que es analítica.

Por último, si $n=-1$ entonces, procediendo por inducción sobre k, el orden de la derivada de g:

Si $k=1$ entonces, por lo anterior se obtiene que

$$g'(z) = -(-1) \int_\gamma \phi(w)(w-z)^{-1-1} \, \mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^2} \, \mathrm{d}w$$

Posteriormente, suponiendo que para $k = m$ se cumple que

$$g^{(m)}(z) = m! \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^{m+1}} \, \mathrm{d}w$$

Entonces para $k = m + 1$ se da que

$$g^{(m+1)}(z) = m! \left((m+1) \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^{m+2}} \, \mathrm{d}w \right) = (m+1)! \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^{m+2}} \, \mathrm{d}w$$

Por lo tanto,

$$g^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^{k+1}} \, \mathrm{d}w.$$