Ecuaciones Diferenciables Parciales
Tarea 5
Osmar Dominique Santana Reyes
No. de cuenta: 2125197

I. Verifique si el problema dado es un problema de auto valor de S-L regular.

a) $f''(x) + \lambda f(x) = 0$**,** $0 < x < 1$**,** $f(0) + 2f'(0) = 0$**,** $f'(1) = 0$**.**

Solución.

Sean $p(x) = 1, q(x) = 0, \sigma(x) = 1, \alpha_1 = \beta_2 = 1, \beta_1 = 2$ y $\alpha_2 = 0$, la ED se puede escribir como $(p(x)f'(x))' + [q(x) + \lambda\sigma(x)]\, f(x) = 0$, con $0 < x < 1$, $\alpha_1 f(0) + \beta_1 f'(0) = 0$, $\alpha_2 f(1) + \beta_2 f'(1) = 0$. Además,

i) $p(x) = 1, p'(x) = 0, q(x) = 0$ y $\sigma(x) = 1$ son funciones reales y continuas sobre $0 < x < 1$,

ii) $p(x) > 0$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $0 < x < 1$ y

iii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 5 \neq 0$ y $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \neq 0$

Por lo tanto, este es un problema de auto valor de S-L regular.

b) $f''(x) - xf(x) + \lambda(x^2 + 1)f(x) = 0$**,** $0 < x < 1$**,** $f(0) = 0$**,** $f'(1) = 0$**.**

Solución.

Sean $p(x) = 1, q(x) = -x, \sigma(x) = x^2 + 1, \alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = \alpha_2 = 0$, la ED se puede escribir como $(p(x)f'(x))' + [q(x) + \lambda\sigma(x)]\, f(x) = 0$, con $0 < x < 1$, $\alpha_1 f(0) + \beta_1 f'(0) = 0$, $\alpha_2 f(1) + \beta_2 f'(1) = 0$. Además,

i) $p(x) = 1, p'(x) = 0, q(x) = -x$ y $\sigma(x) = x^2 + 1$ son funciones reales y continuas sobre $0 < x < 1$,

ii) $p(x) > 0$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $0 < x < 1$ y

iii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \neq 0$ y $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \neq 0$

Por lo tanto, este es un problema de auto valor de S-L regular.

II. Calcule los valores propios y las funciones propias del problema regular S-L dado.

a) $f''(x) + \lambda f(x) = 0$**,** $0 < x < \pi$**,** $f(0) = 0$**,** $f'(\pi) = 0$**.**

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como soluión general a $f(x) = a\cosh(\mu x) + b\,\mathrm{senh}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) = a\cosh(\mu \cdot 0) + b\,\mathrm{senh}(\mu \cdot 0) = a$$

Así, $f(x) = b\,\mathrm{senh}(\mu x)$ y

$$0 = f'(\pi) = b\mu\cosh(\mu\pi) \Longrightarrow b = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como soluión general a $f(x) = a\cos(\mu x) + b\,\mathrm{sen}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) = a\cos(\mu \cdot 0) + b\,\mathrm{sen}(\mu \cdot 0) = a$$

Así, $f(x) = b\,\mathrm{sen}(\mu x)$ y

$$0 = f'(\pi) = b\mu\cos(\mu\pi) \Longrightarrow \cos(\mu\pi) = 0 \Longrightarrow \mu\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{con } n = 0, 1, \ldots$$

De esta manera, los valores propios del problema son: $\lambda_n = \dfrac{(2n+1)^2}{4}$ con $n = 0, 1, \ldots$, y las funciones propias son: $f_n(x) = \mathrm{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)$.

***b*)** $f''(x) + \lambda f(x) = 0$, $0 < x < 1$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 0$.

Solución.

***c*)** $f''(x) + \lambda f(x) = 0$, $0 < x < 1$, $f(0) - f'(0) = 0$, $f(1) = 0$.

Solución.

***d*)** $f''(x) + \lambda f(x) = 0$, $0 < x < 1$, $f'(0) = 0$, $f(1) + f'(1) = 0$.

Solución.

III. Construya la expansión de la serie de Fourier generalizada para la función dada U en las funciones propias.

$$\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Del problema S-L con $L = \pi$.

***a*)** $U(x) = 1$, $0 \le x \le \pi$.

Solución.

***b*)** $U(x) = 2x - 1$, $0 \le x \le \pi$.

Solución.

IV. Construya la expansión de la serie de Fourier generalizada para la función dada U en las funciones propias.

$$\left\{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Del problema S-L con $L = 1$.

***a*)** $U(x) = \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 1$.

Solución.

***b*)** $U(x) = x + 1$, $0 \le x \le 1$.

Solución.

V. Usar el cociente de Rayleigh para obtener una cota superior (razonablemente precisa) del autovalor mínimo de los siguientes problemas.

***a*)** $\dfrac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - x^2)\phi = 0$ **con** $\dfrac{d\phi}{dx}(0) = 0$ **y** $\phi(1) = 0$.

Solución.

***b*)** $\dfrac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - x)\phi = 0$ **con** $\dfrac{d\phi}{dx}(0) = 0$ **y** $\dfrac{d\phi}{dx}(0) + 2\phi(1) = 0$.

Solución.