3. Determinar el conjunto donde la función

$$H(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2-z}$$

es continua.

Solución.

La función H está definida cuando $x^2+y^2-z \neq 0$. Ya que $x^2+y^2-z=0$ si y solo si $x^2+y^2=z$, se tiene que la función H está definida en el conjunto

$$C = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z\right\}$$

Sean $(x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in C$, $\epsilon > 0$, $\delta_1 = \sqrt[3]{\epsilon - |xyz_1+xy_1z+x_1yz-xy_1z_1-x_1yz_1-x_1y_1z|}$ y $f,g : C \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tales que $f(x,y,z)=xyz$ y $g(x,y,z)=x^2+y^2-z$.

Si $0 < \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_1$ entonces

$$|x-x_1| <= \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_1,$$
$$|y-y_1| <= \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_1 \text{ y}$$
$$|z-z_1| <= \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_1.$$

Así, $|x-x_1|\,|y-y_1|\,|z-z_1| < \delta_1^3$. Luego, como $\delta_1 = \sqrt[3]{\epsilon - |xyz_1+xy_1z+x_1yz-xy_1z_1-x_1yz_1-x_1y_1z|}$ se da que

$$|(x-x_1)(y-y_1)(z-z_1)| < \left(\sqrt[3]{\epsilon - |xyz_1+xy_1z+x_1yz-xy_1z_1-x_1yz_1-x_1y_1z|}\right)^3$$

$$\implies |xyz-xyz_1-xy_1z+xy_1z_1-x_1yz+x_1yz_1+x_1y_1z-x_1y_1z_1| < \epsilon - |xyz_1+xy_1z+x_1yz-xy_1z_1-x_1yz_1-x_1y_1z|$$

$$\implies |xyz-xyz_1-xy_1z+xy_1z_1-x_1yz+x_1yz_1+x_1y_1z-x_1y_1z_1|+|xyz_1+xy_1z+x_1yz-xy_1z_1-x_1yz_1 - x_1y_1z| < \epsilon$$

$$\implies |xyz-xyz_1-xy_1z+xy_1z_1-x_1yz+x_1yz_1+x_1y_1z-x_1y_1z_1+xyz_1+xy_1z+x_1yz-xy_1z_1-x_1yz_1 -x_1y_1z| \leq |xyz-xyz_1-xy_1z+xy_1z_1-x_1yz+x_1yz_1+x_1y_1z-x_1y_1z_1|+|xyz_1+xy_1z+x_1yz-xy_1z_1 - x_1yz_1 - x_1y_1z| < \epsilon$$

$$\implies |xyz-x_1y_1z_1| < \epsilon$$

Es decir, $|f(x,y,z)-f(x_1,y_1,z_1)| < \epsilon$. Y como ϵ fue arbitrario, se concluye que f es continua.

Ahora, sea $\delta_2 = \dfrac{\epsilon - 2(|xx_1|+|yy_1|+x_1^2+y_1^2)}{|x-x_1|+|y-y_1|+1}$. Si $0 < \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_2$ entonces

$$|x-x_1| <= \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_2, \tag{1}$$

$$|y-y_1| <= \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_2 \text{ y} \tag{2}$$

$$|z-z_1| <= \|(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)\| < \delta_2. \tag{3}$$

De (1) se tiene que

$$|x-x_1| < \delta_2\,|x-x_1|$$
$$\implies \left|x^2-2xx_1+x_1^2\right| < \delta_2\,|x-x_1|$$
$$\implies \left|x^2+x_1^2\right| - |2xx_1| \leq \left|x^2-2xx_1+x_1^2\right| < \delta_2\,|x-x_1|$$
$$\implies \left|x^2+x_1^2\right| < \delta_2\,|x-x_1| + |2xx_1|$$
$$\implies \left|x^2+x_1^2\right| + \left|2x_1^2\right| < \delta_2\,|x-x_1| + |2xx_1| + \left|2x_1^2\right|$$
$$\implies \left|x^2+x_1^2-2x_1^2\right| \leq \left|x^2+x_1^2\right| + \left|2x_1^2\right| < \delta_2\,|x-x_1| + |2xx_1| + 2x_1^2$$

$$\implies \left|x^2-x_1^2\right| < \delta_2\,|x-x_1| + |2xx_1| + 2x_1^2 \tag{4}$$

Después, de (2) se da que

$|y-y_1|^2 < \delta_2 |y-y_1|$

$\implies \left|y^2-2yy_1+y_1^2\right| < \delta_2 |y-y_1|$

$\implies \left|y^2+y_1^2\right| - |2yy_1| \le \left|y^2-2yy_1+y_1^2\right| < \delta_2 |y-y_1|$

$\implies \left|y^2+y_1^2\right| < \delta_2 |y-y_1| + |2yy_1|$

$\implies \left|y^2+y_1^2\right| + \left|2y_1^2\right| < \delta_2 |y-y_1| + |2yy_1| + \left|2y_1^2\right|$

$\implies \left|y^2+y_1^2-2y_1^2\right| \le \left|y^2+y_1^2\right| + \left|2y_1^2\right| < \delta_2 |y-y_1| + |2yy_1| + 2y_1^2$

$$\implies \left|y^2-y_1^2\right| < \delta_2 |y-y_1| + |2yy_1| + 2y_1^2 \tag{5}$$

Y de (3) se obtiene que

$$|z_1-z| < \delta_2 \tag{6}$$

Sumando (4), (5) y (6) se tiene que

$$\begin{aligned}\left|x^2-x_1^2\right| + \left|y^2-y_1^2\right| + |z_1-z| &< \delta_2 |x-x_1| + |2xx_1| + 2x_1^2 + \delta_2 |y-y_1| + |2yy_1| + 2y_1^2 + \delta_2 \\ &= \delta_2(|x-x_1| + |y-y_1| + 1) + 2(|xx_1| + |yy_1| + x_1^2 + y_1^2)\end{aligned}$$

Pero $\delta_2 = \dfrac{\epsilon - 2(|xx_1| + |yy_1| + x_1^2 + y_1^2)}{|x-x_1| + |y-y_1| + 1}$. De esta forma,

$\left|x^2-x_1^2\right| + \left|y^2-y_1^2\right| + |z_1-z| < \left(\dfrac{\epsilon - 2(|xx_1| + |yy_1| + x_1^2 + y_1^2)}{|x-x_1| + |y-y_1| + 1}\right)(|x-x_1| + |y-y_1| + 1) + 2(|xx_1| + |yy_1| + x_1^2 + y_1^2)$

$\implies \left|x^2-x_1^2\right| + \left|y^2-y_1^2\right| + |z_1-z| < \epsilon$

$\implies \left|x^2-x_1^2+y^2-y_1^2+z_1-z\right| \le \left|x^2-x_1^2\right| + \left|y^2-y_1^2\right| + |z_1-z| < \epsilon$

$\implies \left|x^2+y^2-z-x_1^2-y_1^2+z_1\right| < \epsilon$

$\implies \left|x^2+y^2-z-(x_1^2+y_1^2-z_1)\right| < \epsilon$

Es decir, $|g(x,y,z) - g(x_1,y_1,z_1)| < \epsilon$. Y como ϵ fue arbitrario, se concluye que g es continua.

Por lo tanto, $H(x,y,z) = \dfrac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)}$, con $g(x,y,z)$ distinto de cero en su dominio, es continua.