Teoría de Digráficas

Digráficas Acíclicas

Tarea 5

Osmar Dominique Santana Reyes

21 de Noviembre de 2024

Resuelve con todo detalle cada uno de los siguientes ejercicios.

42. ¿Cómo son todas las digráficas tales que cada vértice forma una base?

Solución.

Sea D una digráfica en la que cada uno de sus vértices forma una base.

Afirmación. D es fuerte.

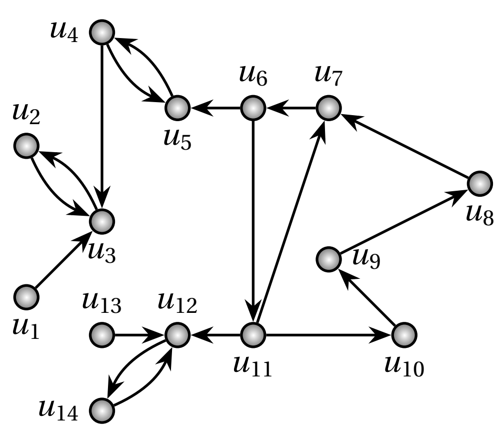
Sean $u, v \in \mathrm{V}(D)$, ya que $\{u\}$ es una base de D, se tiene que, para v, existe una vu – trayectoria en D. De manera similar, $\{v\}$ es una base de D por lo que, para u, existe una uv – trayectoria en D.

Por lo tanto, D es fuerte.

43. Da un ejemplo de una digráfica con exactamente 6 bases y 4 cobases, donde cada base y cada cobase tenga por lo menos dos vértices.

Solución.

Sea D la siguiente digráfica:



Por la Proposición 20, se sabe que los vértices de ingrado 0 pertenencen a cualquier base de una digráfica, por lo que u_1 y u_{13} están en cualquier base. Luego, por el Teorema 21, no puede haber trayectorias entre dos vértices de una base, por lo que u_2, u_3, u_{12} y u_{14} no pueden ser elementos de alguna base, dado que existen las trayectorias (u_1, u_3, u_2), (u_1, u_3), (u_{13}, u_{12}) y (u_{13}, u_{12}, u_{14}), respectivamente. De esta manera, sea B una base de D, se sabe que $u_1, u_{13} \in B$, pero $u_2, u_3, u_{12}, u_{14} \notin B$.

Además, para u_4 no existe ninguna u_1u_4 – trayectoria ni una $u_{13}u_4$ – trayectoria en D, por lo que B tiene más elementos. Ya que la trayectoria $T = (u_{11}, u_{10}, u_9, u_8, u_7, u_6, u_5, u_4)$ contiene a los demás vértices de D, se tiene que solo uno de estos vértices pertenece a B, pues si más de uno perteneciera, entonces es posible hallar una trayectoria contenida en T entre dos vértices de B, lo cual sería a una contradicción al Teorema 21.

Ahora, $u_4, u_5 \notin B$, ya que no es posible hallar una u_4u_6 – trayectoria ni una u_5u_6 – trayectoria en D. Pero si es posible hallar una u_iu_j – trayectoria en D para cada $i = 6, \ldots, 11$ y para cada $j = 4, \ldots, 11$. De esta forma, las siguientes son bases de D:

$B_1 = \{u_1, u_6, u_{13}\}$, $B_2 = \{u_1, u_7, u_{13}\}$, $B_3 = \{u_1, u_8, u_{13}\}$, $B_4 = \{u_1, u_9, u_{13}\}$, $B_5 = \{u_1, u_{10}, u_{13}\}$ y $B_6 = \{u_1, u_{11}, u_{13}\}$.

Por otro lado, los vértices de ingrado cero y exgrado mayor a cero no pertenecen a ninguna cobase de D, puesto que no hay trayectorias que terminen en estos. Así, sea C una cobase de D, se tiene que $u_1, u_{13} \notin C$

Después, si u_4 o u_5 pertenecen a C, entonces $u_i \notin C$, para cada $i = 2, 3, 6, 7, \ldots, 11$, pues $u_j \rightsquigarrow u_i$, para cada $j = 4, 5$ y para cada $i = 2, 3$, además de que $u_i \rightsquigarrow u_j$, para cada $i = 6, 7, \ldots, 11$ y para cada $j = 4, 5$. Sin embargo, para u_2, la única trayectoria que inicia en este vértice es (u_2, u_3), pero $u_3 \notin C$, lo cual contradice que C sea una cobase. De este modo, $u_4, u_5 \notin C$.

Luego, si $u_i \in C$, para algún $i = 6, \ldots, 11$, entonces $C = \{u_i\}$, puesto que $u_i \rightsquigarrow u_j$, para cada $i = 6, 7, \ldots, 11$ y para cada $j = 2, 3, 4, 5, 12, 14$. Sin embargo, para u_5, no existe ninguna trayectoria que inicie en este vértice y termine en u_i, para cada $i = 6, \ldots, 11$, lo cual contradice que C sea una cobase. De este modo, $u_i \notin C$, para todo $i = 6, \ldots, 11$.

De esta forma, ya que para cada $i = 1, 4, \ldots, 11$ y para cada $j = 2, 3$, se da que $u_i \rightsquigarrow u_j$ en D, además de que $u_{13} \rightsquigarrow u_{12}$, $u_{13} \rightsquigarrow u_{14}$ y $(u_2, u_3), (u_3, u_2), (u_{12}, u_{14}), (u_{14}, u_{12}) \in \mathrm{F}(D)$, se tiene que las cobases de D son:

$C_1 = \{u_2, u_{12}\}$, $C_2 = \{u_2, u_{14}\}$, $C_3 = \{u_3, u_{12}\}$ y $C_4 = \{u_3, u_{14}\}$.

44. ¿Cómo son todas las digráficas tales que el conjunto de todos los vértices es una base de D.

    Solución.

    Sea D una digráfica tal que $\mathrm{V}(D)$ es una base de D.

    Afirmación. $\mathrm{V}(D)$ es la única base de D y $\mathrm{F}(D) = \emptyset$.

    Como $\mathrm{V}(D)$ es una base de D, se tiene que $\mathrm{V}(D)$ es un conjunto minimal de $(\mathcal{B}_D, \subseteq)$, pero todo elemento de este conjunto está contenido en $\mathrm{V}(D)$, por lo que $\mathcal{B}_D = \{\mathrm{V}(D)\}$. Así, $\mathrm{V}(D)$ es la única base de D.

    Ahora, por el Teorema 21, no puede haber trayectorias entre dos vértices de una base. De este modo, dado que $\mathrm{V}(D)$ es la única base de D, se obtiene que entre cualquier par de vértices de D no hay trayectorias, en particular, no hay flechas. Por lo tanto, $\mathrm{F}(D) = \emptyset$.

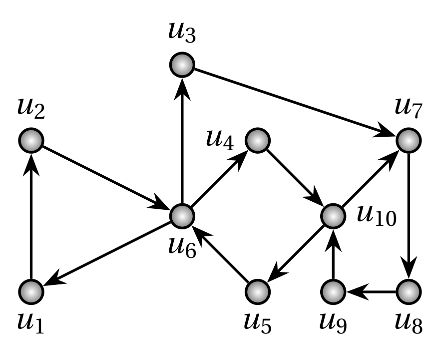
45. Da un ejemplo de una digráfica tal que todas sus bases sean también cobases.

    Solución.

    Sea D la digráfica de la izquierda. Ya que

    $C = (u_4, u_{10}, u_5, u_6, u_1, u_2, u_6, u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_5, u_6, u_4)$

    es un camino cerrado generador en D, se tiene que D es fuerte. Así, para cada $u \in \mathrm{V}(D)$, existe una uv – trayectoria y una vu – trayectoria, para todo $v \in \mathrm{V}(D)$, pues D es fuerte. De esta forma, por el Teorema 21, cualquier base y cobase de D debe tener un solo elemento, más aún, cada vértice de D forma una base y una cobase de D.



46. ¿Cómo son todas las digráficas tales que todas sus bases son cobases?

Solución.

a) Si alguna base de de D solo tiene un elemento, digamos u, entonces u es tanto fuente como pozo de D, pues por definición de base y cobase, para todo $v \in \mathrm{V}(D)$ existen una uv – trayectoria y una vu – trayectoria en D.

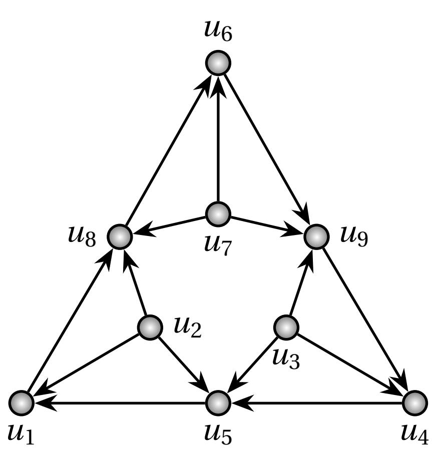
b) Si las bases (que también son cobases) tienen más de un elemento, entonces sean $u \in \mathrm{V}(D)$ tal que no pertenece a niinguna base de D y B una base de D, existe T_1 una xu – trayectoria en D, para algún $x \in B$, y también existe T_2 una uy – trayectoria en D, para algún $y \in B$. Pero $T_1 \cup T_2$ es un xy – camino en D, el cual contiene una xy – trayectoria de D, por lo que $x = y$, pues de lo contrario se contradecería el Teorema 21. Así, $T_1 \cup T_2$ es un camino cerrado de D y contiene un ciclo. De esta manera, D no es acíclica.

c) Si las bases tienen más de un elemento, entonces sean B una base de D, $u, v \in \mathrm{V}(D)$ tal que no pertenecen a niinguna base de D y $x, y \in B$ distintos tales que $u \rightsquigarrow x$ y $v \rightsquigarrow y$. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $u \rightsquigarrow v$. Como $v \rightsquigarrow y$, se da que $u \rightsquigarrow y$ y puesto que B también es cobase, se obtiene que $x \rightsquigarrow u$, lo cual implica que $x \rightsquigarrow y$, lo cual contradice que B sea base y cobase. Por lo tanto, no hay trayectorias entre cualquier par de vértices que forman trayecorias con distintos elementos de una base. De esta manera, D no es débil.

47. Dá un ejemplo de una digráfica tal que tenga una base que también sea un conúcleo.

Solución.

Sea D la siguiente digráfica:



Afirmación. $B = \{u_2, u_3, u_7\}$ es una base y un conúcleo de D.

Ya que u_2, u_3, u_7 son de ingrado 0, se tiene que no hay flechas ni trayectorias entre ellos, por lo que B es independiente y cumple el inciso (ii) del Teorema 21.

Luego, dado que $u_1, u_4, u_5, u_6, u_8, u_9 \notin B$ y $\{(u_2, u_1), (u_2, u_5), (u_2, u_8), (u_3, u_4), (u_3, u_9), (u_7, u_6)\} \subseteq \mathrm{F}(D)$, se obtiene que B es absorbente y para cada $u_i \in \mathrm{V}(D)$, con $i = 1, \ldots, 9$, existe $v \in B$ tal que $v \rightsquigarrow u_i$, cumpliéndose el inciso (i) del Teorema 21.

Por todo lo anterior, B es tanto base como conúcleo de D.

48. Decimos que una digráfica es transitiva si para cualesquiera tres vértices distintos u, v, w, tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq \mathrm{F}(D)$ se tiene que $(u, w) \in \mathrm{F}(D)$. Prueba que si D es una digráfica transitiva entonces toda cobase de D es un núcleo de D.

Demostración.

Sea C una cobase de D, por el Teorema 21', no hay trayectorias entre los vértices que pertenecen a C, en particular, no hay flechas, lo cual implica que C es un conjunto independiente de D.

Después, para cada $u \in C$, sea $\tau_u = \{v \in \mathrm{V}(D) \setminus \{u\} : v \rightsquigarrow u\}$, que es no vacío, pues de lo contrario $C \setminus \{u\}$, donde $\tau_u = \emptyset$, también sería una cobase de D, lo cual contradice la definición de cobase. Luego, sea $u \in C$ y para cada $v \in \tau_u$ sea T_v^u una vu – trayectoria.

Afirmación. $(v,u) \in \mathrm{F}(D)$ para cada $v \in \tau_u$.

Sea $v \in \tau_u$. Procediendo por inducción sobre $n = l(T_v^u)$:

Para $n = 1$: $T_v^u = (v,u)$, por lo que $(v,u) \in \mathrm{F}(D)$.

Para $n = 2$: $T_v^u = (v,x,u)$, con $x \in \mathrm{V}(D)$, por lo que $\{(v,x),(x,u)\} \subseteq \mathrm{F}(D)$. Así, $(v,u) \in \mathrm{F}(D)$, pues D es transitiva.

Ahora, suponiendo que para $n = k$ se cumple la afirmación. Si $n = k+1$ entonces $T_v^u = (v = x_0, x_1, \ldots, x_{k+1} = u)$. Sea $t_v^u = (x_1, \ldots, x_{k+1} = u)$, como $l(t_v^u) = k$ y $x_1 \in \tau_u$, por hipótesis de inducción, se obtiene que $(x_1,u) \in \mathrm{F}(D)$. De esta manera, $(v,u) \in \mathrm{F}(D)$, pues $\{(v,x_1),(x_1,u)\} \subseteq \mathrm{F}(D)$ y D es transitiva.

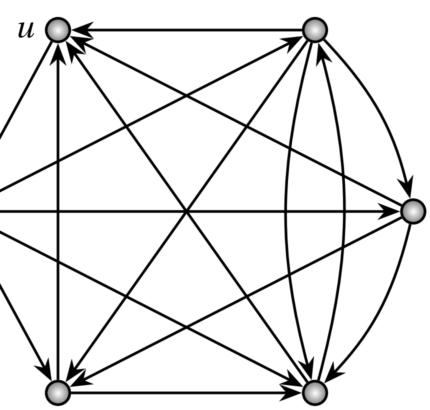
Por lo tanto, $(v,u) \in \mathrm{F}(D)$ para cada $v \in \tau_u$, y como u fue arbitrario, lo anterior se cumple para todo $u \in C$. Así, para cada $v \in \mathrm{V}(D) \setminus C$, existe $u \in C$ tal que $(v,u) \in \mathrm{F}(D)$, dado que C es una cobase, por lo cual C es absorbente.

En conclusión, toda cobase de D es un núcleo de D, pues C fue arbitrario.

49. Prueba que si D es una digráfica tal que toda cobase de D es un núcleo entonces D es transitiva.

50. Para cada $n \geq 3$, dá un ejemplo de una digráfica semicompleta con n vértices que no tenga núcleo.

Solución.



Para cada $n \geq 3$, sea D una digráfica semicompleta de orden n en la que existen $u, v \in \mathrm{V}(D)$ tales que:

a) $(x,u) \in \mathrm{F}(D)$ y $(u,x) \notin \mathrm{F}(D)$ para cada $x \in \mathrm{V}(D) \setminus \{v\}$,

b) $(v,x) \in \mathrm{F}(D)$ y $(x,v) \notin \mathrm{F}(D)$ para cada $x \in \mathrm{V}(D) \setminus \{u\}$ y

c) $(u,v) \in \mathrm{F}(D)$.

Ya que D es semicompleta, los únicos conjuntos independientes de D son los vértices. Pero ningún conjunto formado por un vértice es absorbente dado que u no es adyacente hacia todos los demás vértices, excepto v, y v solo es adyacente desde u.

Por lo tanto, D no tiene núcleo, para todo $n \geq 3$.

51. Sea D una digráfica transitiva, demuestra que D tiene núcleo.

52. Decimos que una digráfica es núcleo imperfecta crítica si no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida sí tiene núcleo. Prueba que un ciclo dirigido de longitud impar es núcleo imperfecta crítica.

Demostración.

Sea $C = \{u_0, u_1, \ldots, u_n = u_0\}$ un ciclo de longitud impar. Suponiendo que C tiene un nucleo N y que $u_i \in N$, para algún $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Además, suponiendo, sin pérdida de generalidad que i es par, se tiene que $u_{i-1}, u_{i+1} \notin N$, donde $i-1, i+1$ son impares. Siguiendo así, se obtiene que $u_i \notin N$, para todo $i = 0, \ldots, n-1$ impar y $u_i \in N$, para todo $i = 0, \ldots, n-1$ par. Pero C es de longitud impar, por lo que $u_n \notin N$, lo cual no puede ser pues $u_0 \in N$ y $u_0 = u_n$. De esta manera, C no tiene núcleo.

Ahora, ya que cualquier subdigráfica propia inducida de C es acíclica (pues de lo contrario el ciclo de esta subdigráfica también está en C pero al menos una flecha del ciclo no está en $\mathrm{F}(C)$, lo cual no puede ser), se sabe que la subdigráfica tiene un núcleo. Por lo tanto, C es núcleo imperfecta crítica.