Ecuaciones Diferenciables Parciales
Tarea 5
Osmar Dominique Santana Reyes
No. de cuenta: 2125197

I. Verifique si el problema dado es un problema de auto valor de S-L regular.

***a*)** $f''(x) + \lambda f(x) = 0$**,** $0 < x < 1$**,** $f(0) + 2f'(0) = 0$**,** $f'(1) = 0$**.**

Solución.

Sean $p(x) = 1, q(x) = 0, \sigma(x) = 1, \alpha_1 = \beta_2 = 1, \beta_1 = 2$ y $\alpha_2 = 0$, la ED se puede escribir como $(p(x)f'(x))' + [q(x) + \lambda\sigma(x)]\, f(x) = 0$, con $0 < x < 1$, $\alpha_1 f(0) + \beta_1 f'(0) = 0$, $\alpha_2 f(1) + \beta_2 f'(1) = 0$. Además,

i) $p(x) = 1, p'(x) = 0, q(x) = 0$ y $\sigma(x) = 1$ son funciones reales y continuas sobre $0 < x < 1$,

ii) $p(x) > 0$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $0 < x < 1$ y

iii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 5 \neq 0$ y $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \neq 0$

Por lo tanto, este es un problema de auto valor de S-L regular.

***b*)** $f''(x) - xf(x) + \lambda(x^2 + 1)f(x) = 0$**,** $0 < x < 1$**,** $f(0) = 0$**,** $f'(1) = 0$**.**

Solución.

Sean $p(x) = 1, q(x) = -x, \sigma(x) = x^2 + 1, \alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = \alpha_2 = 0$, la ED se puede escribir como $(p(x)f'(x))' + [q(x) + \lambda\sigma(x)]\, f(x) = 0$, con $0 < x < 1$, $\alpha_1 f(0) + \beta_1 f'(0) = 0$, $\alpha_2 f(1) + \beta_2 f'(1) = 0$. Además,

i) $p(x) = 1, p'(x) = 0, q(x) = -x$ y $\sigma(x) = x^2 + 1$ son funciones reales y continuas sobre $0 < x < 1$,

ii) $p(x) > 0$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $0 < x < 1$ y

iii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \neq 0$ y $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \neq 0$

Por lo tanto, este es un problema de auto valor de S-L regular.

II. Calcule los valores propios y las funciones propias del problema regular S-L dado.

***a*)** $f''(x) + \lambda f(x) = 0$**,** $0 < x < \pi$**,** $f(0) = 0$**,** $f'(\pi) = 0$**.**

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cosh(\mu x) + b\,\mathrm{senh}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) = a\cosh(\mu\cdot 0) + b\,\mathrm{senh}(\mu\cdot 0) = a$$

Así, $f(x) = b\,\mathrm{senh}(\mu x)$ y

$$0 = f'(\pi) = b\mu\cosh(\mu\pi) \implies b = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f(0) = B \text{ y } 0 = f'(\pi) = A$$

De este modo, $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cos(\mu x) + b\,\mathrm{sen}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) = a\cos(\mu\cdot 0) + b\,\mathrm{sen}(\mu\cdot 0) = a$$

Así, $f(x) = b\,\mathrm{sen}(\mu x)$ y

$$0 = f'(\pi) = b\mu\cos(\mu\pi) \implies \cos(\mu\pi) = 0 \implies \mu\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son: $\lambda_n = \dfrac{(2n+1)^2}{4}$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)$, con $n \in \mathbb{N}$.

b) $f''(x) + \lambda f(x) = 0$**,** $0 < x < 1$**,** $f'(0) = 0$**,** $f(1) = 0$**.**

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cosh(\mu x) + b\operatorname{senh}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = a\mu\operatorname{senh}(\mu\cdot 0) + b\mu\cosh(\mu\cdot 0) = b\mu \implies b = 0$$

Así, $f(x) = a\cosh(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = a\cosh(\mu) \implies a = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f'(0) = A \text{ y } 0 = f(1) = B$$

De este modo, $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cos(\mu x) + b\operatorname{sen}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = -a\mu\operatorname{sen}(\mu\cdot 0) + b\mu\cos(\mu\cdot 0) = b\mu \implies b = 0$$

Así, $f(x) = a\cos(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = a\cos(\mu) \implies \cos(\mu) = 0 \implies \mu = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son: $\lambda_n = \dfrac{\pi^2(2n+1)^2}{4}$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi x\right)$, con $n \in \mathbb{N}$.

c) $f''(x) + \lambda f(x) = 0$**,** $0 < x < 1$**,** $f(0) - f'(0) = 0$**,** $f(1) = 0$**.**

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cosh(\mu x) + b\operatorname{senh}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) - f'(0) = a\cosh(\mu\cdot 0) + b\operatorname{senh}(\mu\cdot 0) - a\mu\operatorname{senh}(\mu\cdot 0) - b\mu\cosh(\mu\cdot 0) = a - b\mu \implies a = b\mu$$

Así, $f(x) = b\mu\cosh(\mu x) + b\operatorname{senh}(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = b\mu\cosh(\mu) + b\operatorname{senh}(\mu) \implies b\left(\mu + \tanh(\mu)\right) = 0 \implies b = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f(0) - f'(0) = B - A \text{ y } 0 = f(1) = A + B$$

De este modo, $A = B = 0$ por lo que $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cos(\mu x) + b\operatorname{sen}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) - f'(0) = a\cos(\mu\cdot 0) + b\operatorname{sen}(\mu\cdot 0) + a\mu\operatorname{sen}(\mu\cdot 0) - b\mu\cos(\mu\cdot 0) = a - b\mu \implies a = b\mu$$

Así, $f(x) = b\mu\cos(\mu x) + b\,\text{sen}(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = b\mu\cos(\mu) + b\,\text{sen}(\mu) \implies b\,(\mu + \tan(\mu)) = 0 \implies \mu = -\tan(\mu)$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son todos los μ_n^2 tales que $\mu_n = -\tan(\mu_n)$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \mu_n\cos(\mu_n x) + \text{sen}(\mu_n x)$, con $n \in \mathbb{N}$.

***d*)** $f''(x) + \lambda f(x) = 0$**,** $0 < x < 1$**,** $f'(0) = 0$**,** $f(1) + f'(1) = 0$**.**

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cosh(\mu x) + b\,\text{senh}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = a\mu\,\text{senh}(\mu\cdot 0) + b\mu\cosh(\mu\cdot 0) = b\mu \Longrightarrow b = 0$$

Así, $f(x) = a\cosh(\mu x)$ y

$$0 = f(1) + f'(1) = a\cosh(\mu) + a\mu\,\text{senh}(\mu) \Longrightarrow a\,(1 + \mu\tanh(\mu)) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f'(0) = A \text{ y } 0 = f(1) + f'(1) = B + 0 = B$$

De este modo, $A = B = 0$ por lo que $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a\cos(\mu x) + b\,\text{sen}(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = -a\mu\,\text{sen}(\mu\cdot 0) + b\mu\cos(\mu\cdot 0) = b\mu \Longrightarrow b = 0$$

Así, $f(x) = a\cos(\mu x)$ y

$$0 = f(1) + f'(1) = a\cos(\mu) - a\mu\,\text{sen}(\mu) \implies a\,(1 - \mu\tan(\mu)) = 0 \implies 1 = \mu\tan(\mu)$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son todos los μ_n^2 tales que $1 = \mu_n\tan(\mu_n)$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \cos(\mu_n x)$, con $n \in \mathbb{N}$.

III. Construya la expansión de la serie de Fourier generalizada para la función dada U en las funciones propias.

$$\left\{\text{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Del problema S-L con $L = \pi$.

***a*)** $U(x) = 1$**,** $0 \le x \le \pi$**.**

Solución.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ distintos, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \text{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{(2m-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\left(\left(\frac{2n-1}{2} - \frac{2m-1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(\frac{2n-1}{2} + \frac{2m-1}{2}\right)x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\left((n-m)\,x\right) - \cos\left((n+m-1)\,x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}\left((n-m)x\right)}{n-m} - \frac{\text{sen}\left((n+m-1)x\right)}{n+m-1}\right]_0^\pi \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así, $\left\{\text{sen}\left(\dfrac{(2n-1)x}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal.

Después, calculando los coeficientes de la serie de Fourier generalizada:

$$a_n = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} U(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x} = \frac{\left[\dfrac{2}{1-2n}\cos\left(\dfrac{(2n-1)x}{2}\right)\right]_0^{\pi}}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{\dfrac{2}{2n-1}}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

Por lo tanto, $U(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)$

***b*)** $U(x) = 2x-1$**,** $0 \le x \le \pi$**.**

Solución.

Calculando los coeficientes de la serie de Fourier generalizada:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} U(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} (2x-1)\,\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\left[\dfrac{2(2x-1)}{1-2n}\cos\left(\dfrac{(2n-1)x}{2}\right)\right]_0^{\pi} + \dfrac{4}{2n-1}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\dfrac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\dfrac{2}{2n-1} + \dfrac{4}{2n-1}\left[\dfrac{2}{2n-1}\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)x}{2}\right)\right]_0^{\pi}}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{\dfrac{2}{2n-1} + \dfrac{4}{2n-1}\left[\dfrac{2(-1)^{n+1}}{2n-1}\right]}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{\dfrac{2}{2n-1} + \dfrac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}}{\dfrac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{\pi(2n-1)}\left(1 + \frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $U(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)}\left(1+\frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)$

IV. Construya la expansión de la serie de Fourier generalizada para la función dada U en las funciones propias.

$$\left\{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Del problema S-L con $L = 1$.

***a*)** $U(x) = \dfrac{1}{2}$**,** $0 \le x \le 1$**.**

Solución.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ distintos, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\left(\left(\frac{2n-1}{2}-\frac{2m-1}{2}\right)\pi x\right) + \cos\left(\left(\frac{2n-1}{2}+\frac{2m-1}{2}\right)\pi x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\left((n-m)\,\pi x\right) - \cos\left((n+m-1)\,\pi x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\left((n-m)\pi x\right)}{(n-m)\pi} - \frac{\operatorname{sen}\left((n+m-1)\pi x\right)}{(n+m-1)\pi}\right]_0^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así, $\left\{\cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal.

Después, calculando los coeficientes de la serie de Fourier generalizada:

$$a_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 U(x)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x} = \frac{\left[\dfrac{1}{\pi(2n-1)}\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right]_0^1}{\dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}$$

Por lo tanto, $U(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$

***b*)** $U(x) = x+1$**,** $0 \le x \le 1$**.**

Solución.

Calculando los coeficientes de la serie de Fourier generalizada:

$$a_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 U(x)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^1 (x+1)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{2(x+1)}{(2n-1)\pi}\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \dfrac{2}{(2n-1)\pi}\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x}{\dfrac{1}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} + \dfrac{2}{(2n-1)\pi}\left[\dfrac{2}{(2n-1)\pi}\cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right]_0^1}{\dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} - \dfrac{4}{(2n-1)^2\pi^2}}{\dfrac{1}{2}}$$

$$= \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} - \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} = \frac{8}{(2n-1)\pi}\left((-1)^{n+1} - \frac{1}{(2n-1)\pi}\right)$$

Por lo tanto, $U(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi}\left((-1)^{n+1} - \frac{1}{(2n-1)\pi}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$

V. Usar el cociente de Rayleigh para obtener una cota superior (razonablemente precisa) del autovalor mínimo de los siguientes problemas.

***a*)** $\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda - x^2)\phi = 0$ **con** $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0) = 0$ **y** $\phi(1) = 0$**.**

Solución.

***b*)** $\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda - x)\phi = 0$ **con** $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0) = 0$ **y** $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0) + 2\phi(1) = 0$**.**

Solución.