Ecuaciones Diferenciables Parciales
Tarea 4
Osmar Dominique Santana Reyes
No. de cuenta: 2125197

I. Construya la serie de Fourier completa de la función dada f. En cada caso, utilice esquemas apropiados y analice la convergencia de la serie en el intervalo $[-L, L]$ donde f está definida.

(1) $f(x) = \begin{cases} -2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Solución.

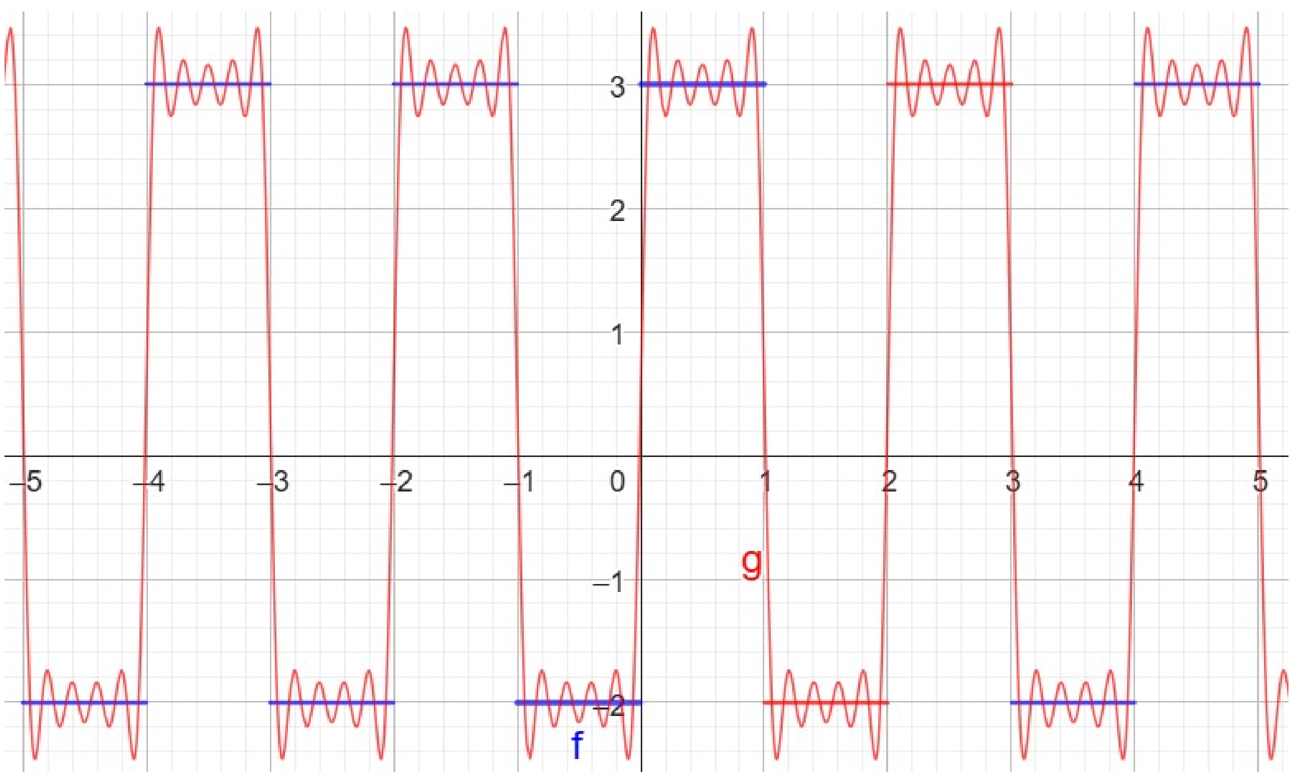
$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 3\,\mathrm{d}x = -2 + 3 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -2\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 3\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -2\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 3\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} + \frac{3(-(-1)^n + 1)}{n\pi} = \frac{5(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

Así, $f(x) \sim \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(1-(-1)^n)}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$



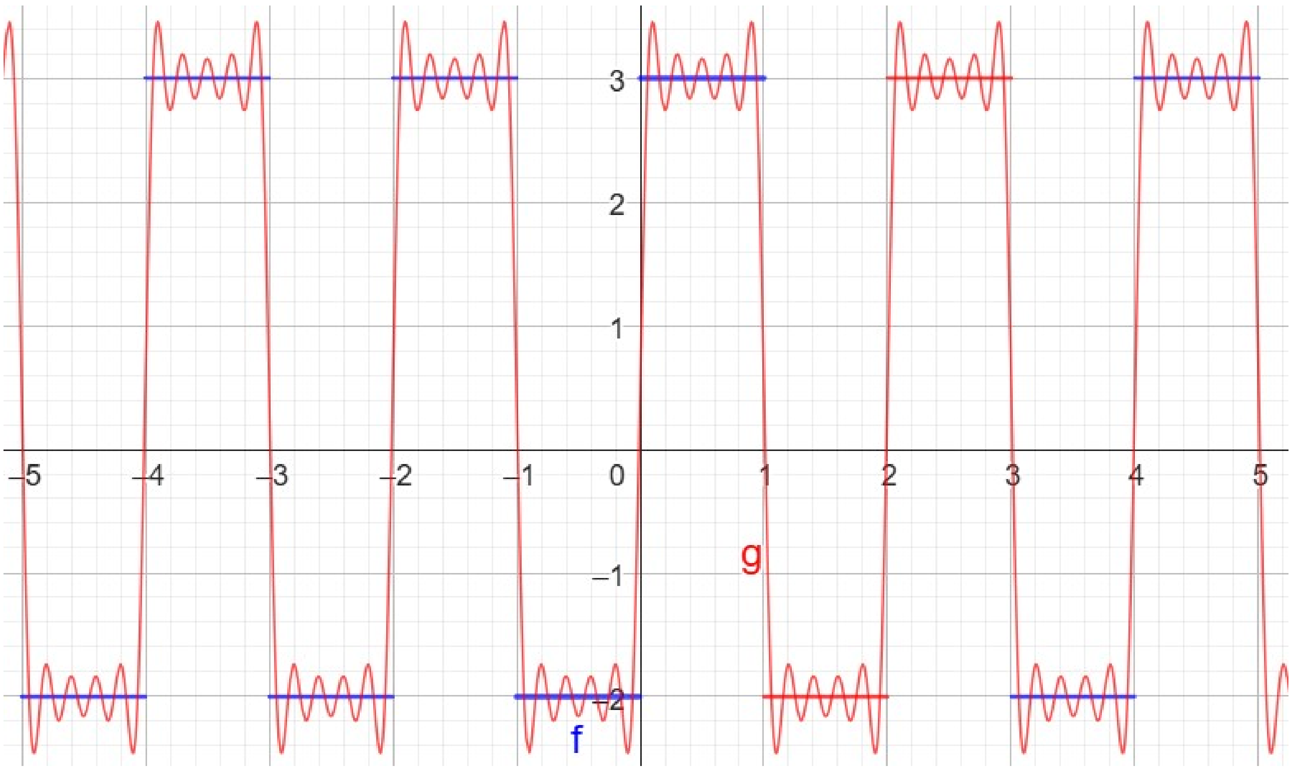
Luego, como f es suave por tramos en $[-1, 1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y a $\dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2}$ en todo $x \in \mathbb{Z}$.

(2) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Solución.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 2x-1\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(2x-1)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2} = \frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2} \\
b_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(2x-1)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{(-1)^n+1}{n\pi} = -\frac{2(-1)^n+1}{n\pi}
\end{aligned}
$$

Así, $f(x) \sim -\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos(n\pi x) - \frac{2(-1)^n+1}{n}\,\mathrm{sen}(n\pi x)\right]$



Luego, como f es suave por tramos en $[-1,1]$, se tiene que la serie de fourier de f converge puntualmente a la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todo $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ y a $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ en todo $x \in \mathbb{Z}$.

(3) $1-2x, -2 \le x \le 2$

Solución.

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 0 \\ 1+2x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$

Solución.

(5) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le -1 \\ 1+x, & -1 < x \le 2 \end{cases}$

Solución.

II. Construya la serie de senos de Fourier y la serie de cosenos de Fourier de la función dada f. En cada caso, utilice esquemas apropiados y analice la convergencia de la serie en el intervalo $[0, L]$ donde f está definida.

(1) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Solución.

(2) $f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 3, & \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

Solución.

(3) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Solución.

(4) $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -1, & \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

Solución.

(5) $f(x) = x + \operatorname{sen}(x), 0 \leq x \leq \pi$

Solución.