UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Cálculo Diferencial Vectorial
Profesores: Dr. Félix Capulín Pérez
Dr. Enrique Castañeda Alvarado
Tarea: Multiplicadores de Lagrange

Nombre: Osmar Dominique Santana Reyes No. de cuenta: 2125197

Instrucciones: Resuelve cada uno de los ejercicios, justifica cada respuesta.

Ejercicio 1. Utiliza multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximos y mínimos de la función, sujeta a la(s) restricción(es) dada(s).

a) $f(x,y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$

Solución.

$\nabla f = \lambda \nabla(x^2 + 2y^2)$

$\Longrightarrow (2xy, x^2) = \lambda(2x, 4y)$

$$\Longrightarrow 2xy = 2\lambda x \tag{1}$$
$$x^2 = 4\lambda y \tag{2}$$
$$x^2 + 2y^2 = 6 \tag{3}$$

- Si $x = 0$ entonces, por (3) $2y^2 = 6 \Longrightarrow y = \sqrt{3}$ o $y = -\sqrt{3}$.
- Luego, si $x \neq 0$ entonces $y = \lambda$, por (1). Sustituyendo esto en (2) se tiene que $x^2 = 4y^2 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{2} = 2y^2$. De lo anterior, y por 3, se da que $x^2 + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3x^2}{2} = 6 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2$ o $x = -2$. Como $x^2 = 4$, $\lambda = y$ y por (2) se obtiene que $4 = 4y^2 \Longrightarrow y = 1$ o $y = -1$.

Así, se tienen los puntos $\left(0, \sqrt{3}\right)$, $\left(0, -\sqrt{3}\right)$, $(2,1)$, $(-2,1)$, $(2,-1)$ y $(-2,-1)$. Evaluandolos en la función se tiene que

$f\left(0, \sqrt{3}\right) = 0^2 \cdot \sqrt{3} = 0 = 0^2 \cdot -\sqrt{3} = f\left(0, -\sqrt{3}\right)$

$f(2,1) = 2^2 \cdot 1 = 4 = (-2)^2 \cdot 1 = f(-2,1)$

$f(2,-1) = 2^2 \cdot -1 = -4 = (-2)^2 \cdot -1 = f(-2,-1)$

Por lo tanto, el valor máximo de f es 4 y su valor mínimo es -4.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

Solución.

$\nabla f = \lambda \nabla(x^4 + y^4 + z^4)$

$\Longrightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda(4x^3, 4y^3, 4z^3)$

$\Longrightarrow (x, y, z) = \lambda(2x^3, 2y^3, 2z^3)$

$$\Longrightarrow x = 2\lambda x^3 \tag{4}$$
$$y = 2\lambda y^3 \tag{5}$$
$$z = 2\lambda z^3 \tag{6}$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = 1 \tag{7}$$

$\lambda \neq 0$, pues de lo contrario, de (4), (5) y (6), se tendría que $x = y = z = 0$ y no se cumpliría (7). Luego, considerando los siguientes casos:

- Si $x = 0$.
  - Si $y = 0$ entonces de (7) $z^4 = 1 \Longrightarrow z = 1 \quad \text{o} \quad z = -1$.
  - Si $y \neq 0$.
    - Si $z = 0$ entonces de (7) $y^4 = 1 \Longrightarrow y = 1 \quad \text{o} \quad y = -1$.
    - Si $z \neq 0$ entonces de (5) $\lambda = \dfrac{1}{2y^2}$ y de (6) $\lambda = \dfrac{1}{2z^2}$. Así, $\dfrac{1}{2y^2} = \dfrac{1}{2z^2} \Longrightarrow z^2 = y^2 \Longrightarrow z^4 = y^4$. Sustituyendo en (7): $y^4 + y^4 = 1 \Longrightarrow 2y^4 = 1 \Longrightarrow y^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. De esta manera, $z^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow z = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad z = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
- Si $x \neq 0$.
  - Si $y = 0$.
    - Si $z = 0$ entonces de (7) $x^4 = 1 \Longrightarrow x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$.
    - Si $z \neq 0$ entonces de (4) $\lambda = \dfrac{1}{2x^2}$ y de (6) $\lambda = \dfrac{1}{2z^2}$. Así, $\dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2z^2} \Longrightarrow z^2 = x^2 \Longrightarrow z^4 = x^4$. Sustituyendo en (7): $x^4 + x^4 = 1 \Longrightarrow 2x^4 = 1 \Longrightarrow x^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. De esta manera, $z^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow z = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad z = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
  - Si $y \neq 0$.
    - Si $z = 0$ entonces de (4) $\lambda = \dfrac{1}{2x^2}$ y de (5) $\lambda = \dfrac{1}{2y^2}$. Así, $\dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2y^2} \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y^4 = x^4$. Sustituyendo en (7): $x^4 + x^4 = 1 \Longrightarrow 2x^4 = 1 \Longrightarrow x^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. De esta manera, $y^4 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{o} \quad y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
    - Si $z \neq 0$ entonces de (4), (5) y (6) se tiene que

      $\lambda = \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2y^2} = \dfrac{1}{2z^2}$

      $\Longrightarrow x^2 = y^2 = z^2$

$\Longrightarrow x^4 = y^4 = z^4$

Sustituyendo en (7):

$x^4 + x^4 + x^4 = 1$

$\Longrightarrow 3x^4 = 1$

$\Longrightarrow x^4 = \dfrac{1}{3}$

$\Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{o} \quad x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

De esta forma, $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{o} \quad y = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{y} \quad z = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{o} \quad z = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

De todo lo anterior, se obtienen los siguientes puntos:

$(0,0,1), (0,0,-1), (0,1,0), (0,-1,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),$
$\left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), (1,0,0), (-1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),$
$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right),$
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right),$
$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right).$

Si $(x,y,z) \in \{(0,0,1), (0,0,-1), (0,1,0), (0,-1,0), (1,0,0), (-1,0,0)\}$ entonces $f(x,y,z) = 1$.

Si $(x,y,z) \in \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),\right.$
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right),$
$\left.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right)\right\}$ entonces $f(x,y,z) = \sqrt{2}$.

Si $(x,y,z) \in \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right),\right.$
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right),$
$\left.\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\right\}$ entonces $f(x,y,z) = \sqrt{3}$.

Por lo tanto, el valor máximo de f es $\sqrt{3}$ y su valor mínimo es 1.

c) $f(x,y,z,t) = x+y+z+t; \; x^2+y^2+z^2+t^2=1$

Solución.

$\nabla f = \lambda \nabla (x^2+y^2+z^2+t^2)$

$\Rightarrow (1,1,1,1) = \lambda(2x, 2y, 2z, 2t)$

$\Rightarrow 1 = 2\lambda x \cdots ①$

$1 = 2\lambda y \cdots ②$

$1 = 2\lambda z \cdots ③$

$1 = 2\lambda t \cdots ④$

$x^2+y^2+z^2+t^2 = 1 \cdots ⑤$

$\lambda \neq 0$, pues de lo contrario, en ① se tendría que $1=0$, lo cual no puede ser. Así, de ①, ②, ③ y ④, se tiene que

$x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$, $z = \frac{1}{2\lambda}$ y $t = \frac{1}{2\lambda}$

Sustituyendo esto en ⑤:

$4\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ ó $\lambda = -1$

• Si $\lambda = 1$ entonces de ①, ②, ③ y ④ se tiene que

$1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $1 = 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$,

$1 = 2z \Rightarrow z = \frac{1}{2}$ y $1 = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

• Si $\lambda = -1$ entonces de ①, ②, ③ y ④ se tiene que

$1 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, $1 = -2y \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$,

$1 = -2z \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$ y $1 = -2t \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

Después, evaluando los puntos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ en f:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

Por lo tanto, el máximo valor de f es 2 y su mínimo valor es -2.

d) $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$

Solución.

$$\nabla f = \lambda \nabla(x + y + z) + \alpha \nabla(y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow (1, 2, 0) = \lambda(1, 1, 1) + \alpha(0, 2y, 2z)$$

$\Rightarrow 1 = \lambda$

$2 = \lambda + 2\alpha y \Rightarrow 1 = 2\alpha y \cdots$ ①

$0 = \lambda + 2\alpha z \Rightarrow -1 = 2\alpha z \cdots$ ②

$x + y + z = 1 \cdots$ ③

$y^2 + z^2 = 4 \cdots$ ④

$\alpha \neq 0$, pues de lo contrario, de ① se tendría que $1=0$, lo cual no puede ser. Luego, de ① y ②:

$$y = \frac{1}{2\alpha} \quad y \quad z = -\frac{1}{2\alpha}$$

Sustituyendo esto en ③: $x + \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} = 1 \Rightarrow x = 1$.
Así, de ③ se tiene que $1 + y + z = 1 \Rightarrow y + z = 0$
$\Rightarrow y = -z$. Después, de ④: $(-z)^2 + z^2 = 4 \Rightarrow z^2 + z^2 = 4$
$\Rightarrow 2z^2 = 4 \Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \sqrt{2}$ ó $z = -\sqrt{2}$. De esta forma, $y = \sqrt{2}$ ó $y = -\sqrt{2}$.

De lo anterior, se obtienen los siguientes puntos:
$(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Evaluándolos en f:

$$f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$$
$$f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el máximo valor de f es $1 + 2\sqrt{2}$ y su mínimo valor es $1 - 2\sqrt{2}$.

e) $f(x,y,z) = yz + xy$; $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

Solución.

$$\nabla f = \lambda \nabla(xy) + \alpha \nabla(y^2 + z^2)$$
$$\Rightarrow (y, z + x, y) = \lambda(y, x, 0) + \alpha(0, 2y, 2z)$$
$$\Rightarrow y = \lambda y \cdots ①$$
$$z + x = \lambda x + 2\alpha y \cdots ②$$
$$y = 2\alpha z \cdots ③$$
$$xy = 1 \cdots ④$$
$$y^2 + z^2 = 1 \cdots ⑤$$

Si $y=0$ entonces, de ④ se obtiene que $0=1$, lo cual es una contradicción, de esta manera $y\neq 0$.

Luego, de ①: $y=\lambda y \Rightarrow 1=\lambda$

Sustituyendo esto en ②: $z+x=x+2\alpha y \Rightarrow z=2\alpha y$.

Después, de ③: $y=2\alpha(2\alpha y)=4\alpha^2 y \Rightarrow 1=4\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ o $\alpha=-\frac{1}{2}$. Así, sustituyendo en ③: $y=z$ o $y=-z$. Posteriormente de ⑤, ya sea que $y=z$ o $y=-z$, se da que $z^2+z^2=1 \Rightarrow 2z^2=1$

$\Rightarrow z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ o $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. De esta forma, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ o $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego, de ④: $x=\frac{1}{y}$

$\Rightarrow x=\sqrt{2}$ o $x=-\sqrt{2}$.

De esta manera, se obtienen los siguientes puntos: $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Evaluandolos en f:

$$
\begin{aligned}
f\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&=\frac{1}{2}+1\\
&=\frac{3}{2}\\
&=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&=f\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= f\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Por lo tanto, el máximo valor de f es $\frac{3}{2}$ y su mínimo valor es $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2. Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de f en la región descrita por la desigualdad:

a) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5;\quad x^2 + y^2 \leq 16$

Solución.

b) $f(x,y) = e^{-xy};\quad x^2 + 4y^2 \leq 1$

Solución.

$\nabla f = \lambda \nabla(x^2 + 4y^2)$

$\Longrightarrow (-ye^{-xy}, -xe^{-xy}) = \lambda(2x, 8y)$

$$\Longrightarrow \; -ye^{-xy} = 2\lambda x \tag{8}$$
$$-xe^{-xy} = 8\lambda y \tag{9}$$
$$x^2 + 4y^2 \leq 1 \tag{10}$$

Ejercicio 3. Usa multiplicadores de Lagrange para demostrar que el rectángulo con máxima área, que tiene un perímetro dado p es un cuadrado.

Solución.

Sean x, y la base y la altura de un rectángulo, respectivamente; $P(x,y) = 2x + 2y = p$ su perímetro y $A(x,y) = xy$ su área. Usando multiplicadores de Lagrange se tiene que

$\nabla A = \lambda \nabla P$

$\Longrightarrow (y, x) = \lambda(2,2)$

$$\Longrightarrow y = 2\lambda \tag{11}$$
$$x = 2\lambda \tag{12}$$
$$2x + 2y = p \tag{13}$$

Sustituyendo (11) y (12) en (13): $2(2\lambda) + 2(2\lambda) = p \Longrightarrow 8\lambda = p \Longrightarrow \lambda = \dfrac{p}{8}$. Así, de (11) y (12) se obtiene que $y = \dfrac{p}{4}$ y $x = \dfrac{p}{4}$.

Por lo tanto, el rectángulo alcanza su máxima área cuando la longitud de su base y altura son iguales, es decir, cuando es un cuadrado cuyos lados tienen una medida de un cuarto de su perímetro.

Ejercicio 4. Encuentra los volúmenes máximo y mínimo de una caja rectangular cuya superficie tiene un área de 1500 cm^2 y para la cual la longitud total de las aristas es de 200 cm.

Solución.

Sean x, y, z el largo, el ancho y la altura de la caja, respectivamente; $V(x, y, z) = xyz$ el volumen de la caja, $A(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz = 1500$ su área superficial y $L(x, y, z) = 4x + 4y + 4z = 200$ la longitud total de las aristas. Usando multiplicadores de Lagrange se tiene que

$\nabla V = \alpha \nabla A + \lambda \nabla L$

$\Longrightarrow (yz, xz, xy) = \alpha(2y + 2z, 2x + 2z, 2y + 2x) + \lambda(4, 4, 4)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow yz &= 2\alpha y + 2\alpha z + 4\lambda \qquad (14)\\
xz &= 2\alpha x + 2\alpha z + 4\lambda \qquad (15)\\
xy &= 2\alpha y + 2\alpha x + 4\lambda \qquad (16)\\
2xy + 2yz + 2xz &= 1500 \Longrightarrow xy + yz + xz = 750 \qquad (17)\\
4x + 4y + 4z &= 200 \Longrightarrow x + y + z = 50 \qquad (18)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. El plano $x + y + 2z = 2$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Encontrar los puntos de esta elipse que estan más cerca y más lejos del origen.

Ejercicio 6.

a) Encontrar el máximo valor de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos y que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$ donde c es una constante.

b) Deducir del inciso a) que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos, entonces

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Note que esta desigualdad dice que la media geométrica de n números no es más grande que la media geométrica de los números. ¿Bajo qué circunstancias estas dos medias son iguales entre sí?

Ejercicio 7.

1. Maximizar

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

sujeta a las restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$$

2. Haga

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \quad \text{y} \quad x_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

para demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

para cualesquiera números $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz.