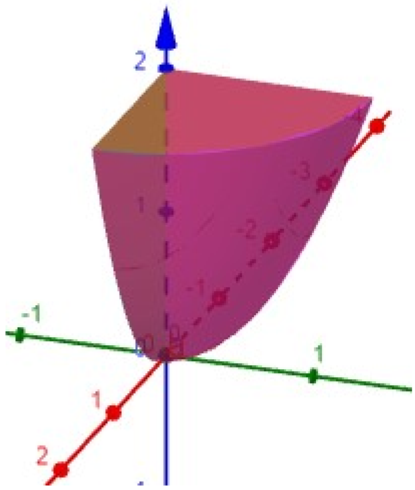
Regiones elementales y sus fronteras

Region elemental (en $\mathbb{R}^3$): Es aquella en la que una de las variables esta acotada, inferior y superiormente, por funciones, γ_1 y γ_2 (donde $\gamma_2 \geq \gamma_1$), que dependen de las otras dos variables y su dominio es una región elemental en $\mathbb{R}^2$.

Por ejemplo:

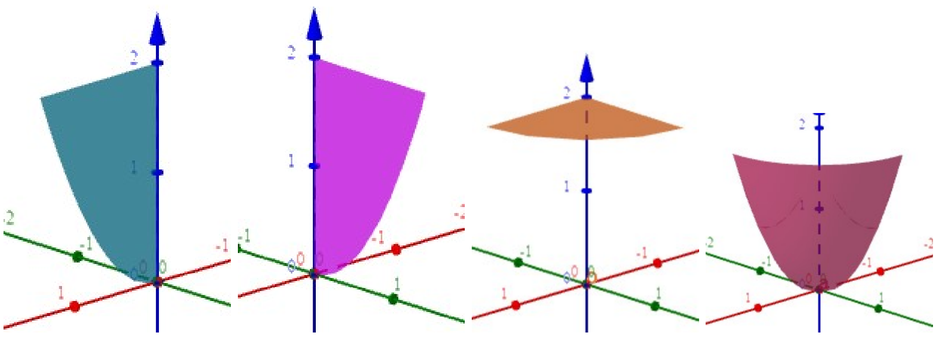
1. $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \text{ y } x^2 + y^2 \leq z \leq 2\right\}$



Superficie cerrada: Sea W una región elemental en $\mathbb{R}^3$. A ∂W se le llama superficie cerrada. Las superficies $S_1, S_2, \ldots, S_6$ que conforman a ∂W, tales que pueden representarse como gráficas de funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, son sus caras.

Por ejemplo, considerando la región W del ejemplo anterior, sus caras son:

- S_1 es la gráfica de la función $f_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $D_1 = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x^2 \leq z \leq 2\right\}$ y $f_1(x, z) = 0$.
- S_2 es la gráfica de la función $f_2 : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $D_2 = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq y \leq \sqrt{2} \text{ y } y^2 \leq z \leq 2\right\}$ y $f_2(y, z) = 0$.
- S_3 es la gráfica de la función $f_3 : D_3 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\right\}$ y $f_3(x, y) = 2$.
- S_4 es la gráfica de la función $f_4 : D_4 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $D_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\right\}$ y $f_4(x, y) = x^2 + y^2$.



(a) S_1 (b) S_2 (c) S_3 (d) S_4

Definición: Sea S una superficie cerrada.

- Si el vector normal a S apunta al exterior de este, entonces la superficie tiene orientación exterior.
- Si el vector normal a S apunta al interior de este, entonces la superficie tiene orientación interior.

Sea $\overrightarrow{F}$ el campo de velocidades de un fluido.

- Si S tiene orientación exterior entonces $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ representa la cantidad de fluido que sale de S por unidad de tiempo.
- Si S tiene orientación interior entonces $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ representa la cantidad de fluido que atraviesa S hacia el interior, por unidad de tiempo.

Ahora, sea $n(x, y, z)$ un vector normal unitario que representa la orientación de S. Se sabe que

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \iint_S \left(\overrightarrow{F} \cdot n\right) \mathrm{d}s$$

Se adoptará el convenio de que una superficie cerrada S, tal que $S = \partial W$, para una región elemental W, tiene orientación exterior unitaria $n(x, y, z)$ para cada $(x, y, z) \in S$. Además, se denotará a la misma superficie, pero con orientación interior, como ∂W_{op}. Así,

$$\iint_{\partial W} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \iint_S \left(\overrightarrow{F} \cdot n\right) \mathrm{d}s = -\iint_S \left[\overrightarrow{F} \cdot (-n)\right] \mathrm{d}s = \iint_{\partial W_{op}} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}.$$

Ejemplo:

Sea $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \text{ y } 0 \le z \le 1\right\}$ el cubo unitario. Cada una de sus caras se pueden escribir como sigue:

$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \text{ y } z = 0\right\}$,

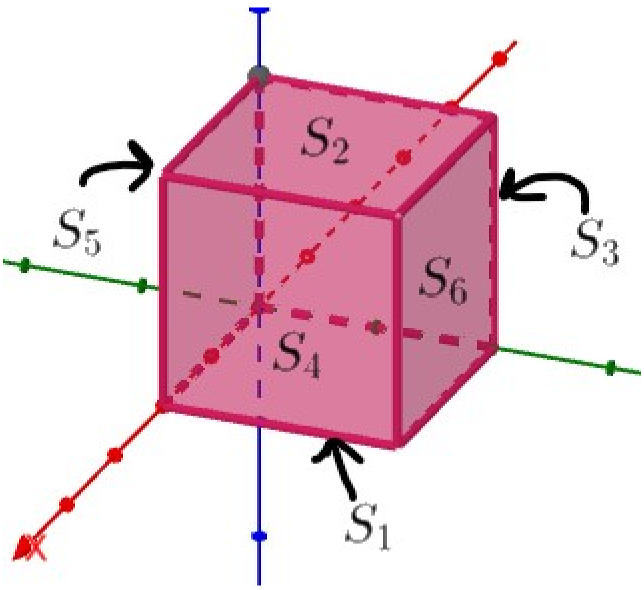
$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \text{ y } z = 1\right\}$,

$S_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \text{ y } x = 0\right\}$,

$S_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \text{ y } x = 1\right\}$,

$S_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x \le 1, 0 \le z \le 1 \text{ y } y = 0\right\}$ y

$S_6 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x \le 1, 0 \le z \le 1 \text{ y } y = 1\right\}$.



De esta manera, para un campo vectorial continuo $F = F_1\widehat{i} + F_2\widehat{j} + F_3\widehat{k}$, se tiene que

$$\iint_{\partial W} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \iint_S \left(\overrightarrow{F} \cdot n\right) \mathrm{d}s = -\iint_{S_1} F_3 \mathrm{d}s + \iint_{S_2} F_3 \mathrm{d}s - \iint_{S_3} F_1 \mathrm{d}s + \iint_{S_4} F_1 \mathrm{d}s - \iint_{S_5} F_2 \mathrm{d}s + \iint_{S_6} F_2 \mathrm{d}s$$