UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTEMENTO DE MATEMÁTICAS
Cálculo Diferencial Vectorial
Profesores: Dr. Félix Capulín Pérez
Dr. Enrique Castañeda Alvarado
Tarea: Máximos y mínimos

Nombre: Osmar Dominique Santana Reyes　　　　No. de cuenta: 2125197

Instrucciones: Resuelve cada uno de los ejercicios, justica cada respuesta.

Ejercicio 1. Encontrar los valores máximos y mínimos locales, asi como los puntos silla de las funciones siguientes, después usar un software graficador en tres dimensiones y grafica las funciones teniendo en cuenta que se visualicen todos los aspectos importantes de la función correspondiente.

a) $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0$$

$$\Longrightarrow 2y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 2y = 0$$

$$\Longrightarrow y = x$$

Asi, el conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y\right\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f.

Luego, se sabe que

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

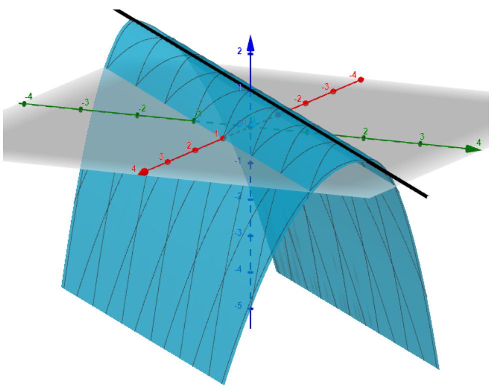
$$\Longrightarrow 2xy - x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\Longrightarrow 1 + 2xy - x^2 - y^2 \leq 1$$

Pero si $(x, y) \in A$ entonces

$$f(x, y) = 1 + 2xx - x^2 - x^2 = 1$$

Por lo tanto, f alcanza su máximo absoluto en los puntos del conjunto A.



b) $f(x,y) = xy - 2x - 2y$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2 = 0$$

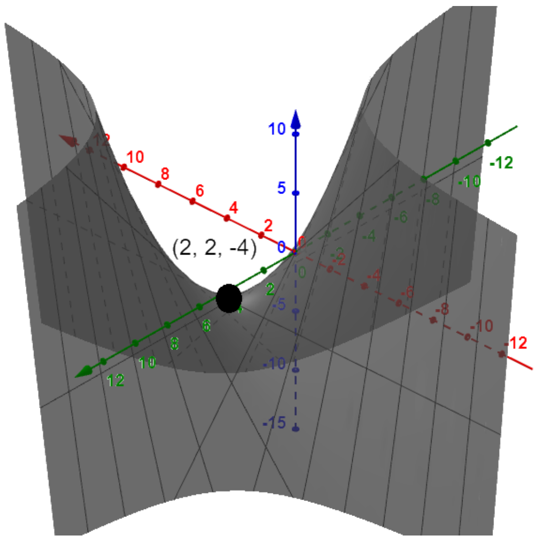
$$\Longrightarrow y = 2 \quad \text{y} \quad x = 2$$

Asi, $(2,2)$ es un punto crítico de f.

Si $y = x$ entonces $f(x,y) = x^2 - 4x$, el cual alcanza su mínimo en $x = 2$.

Si $y = 4 - x$ entonces $f(x,y) = x(4-x) - 2x - 2(4-x) = 4x - x^2 - 8$, el cual alcanza su máximo en $x = 2$.

Por lo tanto, $(2,2)$ es un punto silla de f.



c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(xy)(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)(y)}{x^2y^2} = 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xy)(2x^2y + 1) - (x^2y^2 - 8x + y)(x)}{x^2y^2} = 0$$

$$\Longrightarrow (xy)(2xy^2 - 8) - (x^2y^2 - 8x + y)(y) = 0 \quad \text{y}$$

$$(xy)(2x^2y + 1) - (x^2y^2 - 8x + y)(x) = 0$$

$$\Longrightarrow 2x^2y^3 - 8xy - x^2y^3 + 8xy - y^2 = 0 \quad \text{y}$$

$$2x^3y^2 + xy - x^3y^2 + 8x^2 - xy = 0$$

$\Longrightarrow x^2y^3 - y^2 = 0 \quad \text{y} \quad x^3y^2 + 8x^2 = 0$

$\Longrightarrow y^2(x^2y - 1) = 0 \quad \text{y} \quad x^2(xy^2 + 8) = 0$

$\Longrightarrow x = 0, \quad y = 0$ y se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$x^2y - 1 = 0 \tag{1}$$
$$xy^2 + 8 = 0 \tag{2}$$

De (1) se tiene que $y = \dfrac{1}{x^2}$. Sustituyendo esto en (2), se tiene que

$x\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2 + 8 = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{x^3} = -8$

$\Longrightarrow x^3 = -\dfrac{1}{8}$

$\Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Sustituyendo en (1):

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 y - 1 = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{y}{4} = 1$

$\Longrightarrow y = 4$

Pero $(0,0)$ no pertenece al dominio de f, pues $f(0,0) = \dfrac{0}{0}$, por lo que no es un punto crítico.

Así, $\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right)$ es un punto crítico de f.

d) $f(x,y) = e^x \cos(y)$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

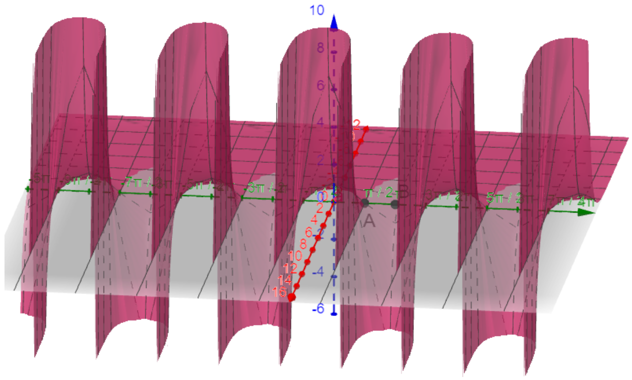
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen}(y) = 0$

$\Longrightarrow e^x \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -e^x \operatorname{sen}(y) = 0$

$\Longrightarrow \cos(y) = 0 \quad \text{y} \quad -\operatorname{sen}(y) = 0$

$\Longrightarrow y = k\,\dfrac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$

Asi, el conjunto $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = k\,\dfrac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{N}\right\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f.



Luego, se sabe que $0 < e^x < \infty$ y $-1 \leq \cos(y) \leq 1$. Si $-1 \leq \cos(y) < 0$ entonces $-\infty < e^x \cos(y) < 0$. Y si $0 < \cos(y) \leq 1$ entonces $0 < e^x cos(y) < \infty$. De esta manera, $-\infty < e^x \cos(y) < \infty$. Por lo tanto, f no tine máximos ni mínimos locales y los puntos del conjunto B son puntos silla.

e) $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(y)$.

Solución.

Calculando los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{sen}(y) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(y) = 0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{sen}(y) = 0 \quad \text{y} \quad x\cos(y) = 0$$

$$\Longrightarrow y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x\cos(y) = 0$$

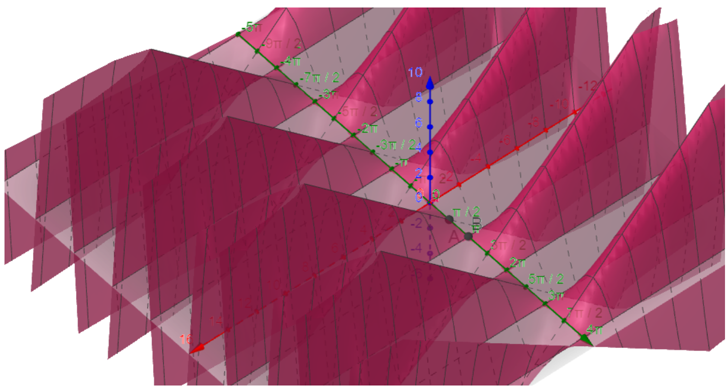
$$\Longrightarrow y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x|1| = 0$$

$$\Longrightarrow y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x = 0$$

Asi, el conjunto $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0, y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N}\right\}$ contiene a todos los puntos críticos de la función f.

Ahora, si $y = \dfrac{\pi}{2}$ entonces $f(x,y) = x$ y como $-\infty \leq x \leq \infty$ entonces f no tiene ningún extremo local en $x = 0$.

Por lo tanto, los puntos del conjunto C son puntos silla.



Ejercicio 2. Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de f en la región D.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Solución.

Sea $(x,y) \in D$ entonces $|x| \leq 1 \quad \text{y} \quad |y| \leq 1$

$\Longrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$

$\Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y^2 \leq 1$

$\Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1, \quad 0 \leq y^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq x^2y \leq 1$

$\Longrightarrow 4 \leq x^2 + y^2 + x^2y + 4 \leq 1 + 1 + 1 + 4 = 7$

De esta forma, f está acotada entre 4 y 7. Luego, notemos que

$f(0,0) = 0^2 + 0^2 + 0^2(0) + 4 = 4 \quad \text{y}$

$f(1,1) = 1^2 + 1^2 + 1^2(1) + 4 = 7 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2(1) + 4 = f(-1,1).$

Por lo tanto, f alcanza su mínimo absoluto en $(0,0)$ y su máximo absoluto en $(-1,1)$ y $(1,1)$.

b) $f(x,y) = 1 + xy - x - y$, D es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ejercicio 3. Encontrar el punto del plano $2x - y + z = 1$ que sea más cercano al punto $(-4,1,3)$.

Solución.

Sea (x,y,z) un punto del plano $2x - y + z = 1$ entonces la distancia entre este punto y el punto $(-4,1,3)$ esta dada por

$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$

Luego, de la ecuación del plano $2x - y + z = 1$ se tiene que $z = 1 + y - 2x$. Sustituyendo esto en la expresión anterior se tiene que

$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (1+y-2x-3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2}$

Como la raíz cuadrada es una función creciente entonces basta con encontrar el mínimo absoluto de $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$.

Así, sea $g(x,y) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$. Calculando los puntos críticos de la función, se tiene que

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0$

$\Longrightarrow 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \quad \text{y} \quad 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0$

$\Longrightarrow 2x + 8 - 4y + 8x + 8 = 0 \quad \text{y} \quad 2y - 2 + 2y - 4x - 4 = 0$

$\Longrightarrow 10x - 4y + 16 = 0 \quad \text{y} \quad -4x + 4y - 6 = 0$

De esta manera, se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$10x - 4y = -16 \tag{3}$$
$$-4x + 4y = 6 \tag{4}$$

Sumando (3) y (4): $6x = -10 \Longrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$. Sustituyendo en (4) se tiene que

$-4\left(-\dfrac{5}{3}\right) + 4y = 6 \Longrightarrow 4y = 6 - \dfrac{20}{3} \Longrightarrow y = -\dfrac{2}{12} = -\dfrac{1}{6}$

Por lo tanto, $\left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{6}\right)$ es un punto crítico de g.

Ejercicio 4. Encontrar el punto de la superficie $x^2y^2z = 1$ que sea más cercano al origen.

Ejercicio 5. Encontrar tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea mínimo.

Ejercicio 6. Encontrar el volumen de la mayor caja rectangular con bordes paralelos a los ejes que pueda estar inscrita en el elipsoide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

Ejercicio 7. Encontrar las dimensiones de la caja rectangular con máximo volumen y área superficial total de 64 cm^2.

Ejercicio 8. La base de una pecera con volumen V dado esta hecha de pizarra y, los lados, de vidrio. Si la pizarra cuesta 5 veces (por unidad de área) más que el vidrio encontrar las dimensiones de la pecera que reduzca al mínimo el costo de los materiales.

Ejercicio 9. Tres alelos (formas mutantes de genes) A, B y O, determinan los cuatro tipos sanguíneos A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg expresa que la proporción de individuos en una población que llevan los alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2rp + 2rq$$

donde p, q, r son las proporciones de A, B, O en la población. Utilizar el hecho de que $p + q + r = 1$ para demostrar que P es, a lo sumo $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 10. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,3) y determina el volumen más pequeño en el primer octante.