Ejercicio 1

Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si existen las derivadas parciales de f y como funciones son continuas en U entonces f es diferenciable.

Demostración.

Sean $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ fijo y $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

P.d. $\displaystyle\lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \frac{\left| f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\left(x_j - y_j\right) \right|}{\|\overline{x} - \overline{y}\|} = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m.$

Para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g_j(x) = f_i\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, y_{j+1}, \ldots, y_n\right)$, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Luego, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) &= f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - f_i\left(x_1, x_2, \ldots, y_n\right) + f_i\left(x_1, x_2, \ldots, y_n\right) - \\
&\quad f_i\left(x_1, x_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\right) + f_i\left(x_1, x_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\right) - \cdots - \\
&\quad f_i\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n\right) + f_i\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n\right) - \cdots - \\
&\quad f_i\left(x_1, y_2, \ldots, y_n\right) + f_i\left(x_1, y_2, \ldots, y_n\right) - f_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\
&= g_n(x_n) - g_n(y_n) + g_{n-1}(x_{n-1}) - g_{n-1}(y_{n-1}) + g_{n-2}(x_{n-1}) - \cdots - \\
&\quad g_j(y_j) + g_{j-1}(x_{j-1}) - \cdots - g_2(y_2) + g_1(x_1) - g_1(y_1)
\end{aligned}$$

Ya que f_i es diferenciable en U, se tiene que, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, g_j también lo es. Así, por el Teorema del Valor Medio, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ existe $a_j \in \left[\text{mín}\left\{x_j, y_j\right\}, \text{máx}\left\{x_j, y_j\right\}\right]$ tal que $g_j(x_j) - g_j(y_j) = g_j(a_j)\left(x_j - y_j\right)$. De este modo,

$$\begin{aligned}
f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) &= g_n'(a_n)\left(x_n - y_n\right) + g_{n-1}'(a_{n-1})\left(x_{n-1} - y_{n-1}\right) + \cdots + g_j'(a_j)\left(x_j - y_j\right) + \cdots + \\
&\quad g_1'(a_1)\left(x_1 - y_1\right) \\
&= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1})\left(x_1 - y_1\right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2})\left(x_2 - y_2\right) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j})\left(x_j - y_j\right) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n})\left(x_n - y_n\right)
\end{aligned}$$

donde $\overline{z_j} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$. Posteriormente,

$$\begin{aligned}
f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\left(x_j - y_j\right) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1})\left(x_1 - y_1\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x})\left(x_1 - y_1\right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2})\left(x_2 - y_2\right) - \\
&\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x})\left(x_2 - y_2\right) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j})\left(x_j - y_j\right) - \\
&\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\left(x_j - y_j\right) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n})\left(x_n - y_n\right) - \\
&\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x})\left(x_n - y_n\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x})\right)(x_1 - y_1) + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x})\right)(x_2 - y_2) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)(x_j - y_j) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x})\right)(x_n - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \left| f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\,(x_j - y_j) \right| &= \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x})\right)(x_1 - y_1) + \right. \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x})\right)(x_2 - y_2) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)(x_j - y_j) + \cdots + \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x})\right)(x_n - y_n) \right| \\
&\le \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x})\right| |x_1 - y_1| + \\
&\quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x})\right| |x_2 - y_2| + \cdots + \\
&\quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| |x_j - y_j| + \cdots + \\
&\quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x})\right| |x_n - y_n| \\
&\le \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x})\right| \|\overline{x} - \overline{y}\| + \\
&\quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x})\right| \|\overline{x} - \overline{y}\| + \cdots + \\
&\quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| \|\overline{x} - \overline{y}\| + \cdots + \\
&\quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x})\right| \|\overline{x} - \overline{y}\| \\
&= \left(\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1})\right| + \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2})\right| + \cdots + \right. \\
&\quad \left. \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j})\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n})\right| \right) \|\overline{x} - \overline{y}\|
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \frac{\left|f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\left(x_j - y_j\right)\right|}{\|\overline{x} - \overline{y}\|} \leq \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1})\right| + \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2})\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j})\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n})\right|$$

Después, como las derivadas parciales son continuas en U se da que $\lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{y})\right| = 0$, y puesto que $\overline{z_j} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$ con $a_j \in \left[\text{mín}\left\{x_j, y_j\right\}, \text{máx}\left\{x_j, y_j\right\}\right]$, se tiene que $\overline{z_j}$ tiende a $\overline{y}$ conforme $\overline{x}$ tiende a $\overline{y}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \frac{\left|f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\left(x_j - y_j\right)\right|}{\|\overline{x} - \overline{y}\|} &\leq \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \Bigg(\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1})\right| + \bigg|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x}) - \\
&\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2})\bigg| + \cdots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j})\right| + \cdots + \\
&\qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n})\right| \Bigg) \\
&= \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{z_1})\right| + \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \bigg|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x}) - \\
&\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{z_2})\bigg| + \cdots + \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{z_j})\right| + \cdots + \\
&\qquad \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{z_n})\right| \\
&= \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{y})\right| + \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \bigg|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x}) - \\
&\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{y})\bigg| + \cdots + \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{y})\right| + \cdots + \\
&\qquad \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{y})\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

De esta manera, $\lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \frac{\left|f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\left(x_j - y_j\right)\right|}{\|\overline{x} - \overline{y}\|} = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m.$

Por último,

$$0 \leq \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \frac{\|f(\overline{x}) - f(\overline{y}) - Df(\overline{y})\,(\overline{x} - \overline{y})\|}{\|\overline{x} - \overline{y}\|} \leq \sum_{i=1}^{m} \lim_{\overline{x}\to\overline{y}} \frac{\left|f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\left(x_j - y_j\right)\right|}{\|\overline{x} - \overline{y}\|} = 0$$

Ya que $\overline{y}$ fue arbitrario, se concluye que f es diferenciable en U. ■

Ejercicio 2

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos. Si $a \leq b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, entonces A está acotada superiormente y B está acotado inferiormente, y además, $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Demostración.

Sea $b \in B$, ya que $a \leq b$ para todo $a \in A$, se tiene que A está acotado superiormente. De igual forma, sea $a \in A$ como $a \leq b$ para todo $b \in B$, se da que B está acotado inferiormente. Además, dado que A y B son no vacíos, se obtiene que el supremo y el ínfimo de A y B existen, respectivamente. Como todo elemento de B es cota superior de A se tiene que $\sup(A)$ es una cota inferior de B. Por lo tanto, $\sup(A) \leq \inf(B)$, pues $\inf(B)$ es la mayor cota inferior de B.

Ejercicio 3

Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ y $a < c < b$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha = \int_a^c f \, \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f \, \mathrm{d}\alpha$$

Demostración.

Afirmación. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,c]$ y en $[c,b]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ existe $P_\varepsilon = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \gamma_{[a,b]}$ tal que $U(f, P_\varepsilon, \alpha) - L(f, P_\varepsilon, \alpha) < \varepsilon$. Luego, para cada $j = 1, \ldots, n$ sean $M_j = \sup\left\{f(x) \mid x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]\right\}$ y $m_j = \inf\left\{f(x) \mid x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]\right\}$. Ya que $a < c < b$, existe $i = 1, \ldots, n$ tal que $x_{i-1} < c \leq x_i$, por lo que se definen $M_c' = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, c]\}$, $M_c'' = \sup\{f(x) \mid x \in [c, x_i]\}$, $m_c' = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, c]\}$ y $m_c'' = \inf\{f(x) \mid x \in [c, x_i]\}$.

Después, considerando las particiones $P_\varepsilon' = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, c\} \in \gamma_{[a,c]}$ y $P_\varepsilon'' = \{c, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \in \gamma_{[c,b]}$, se tiene que

$$\mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) = \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta\alpha_j + M_c' \left[\alpha(c) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right],$$

$$\mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) = M_c'' \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(c\right)\right] + \sum_{j=i+1}^{n} M_j \Delta\alpha_j,$$

$$\mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) = \sum_{j=1}^{i-1} m_j \Delta\alpha_j + m_c' \left[\alpha(c) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] \qquad \text{y}$$

$$\mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) = m_c'' \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(c\right)\right] + \sum_{j=i+1}^{n} m_j \Delta\alpha_j.$$

Puesto que $[x_{i-1}, c] \cup [c, x_i] = [x_{i-1}, x_i]$ se da que $M_c' \leq M_i$, $M_c'' \leq M_i$, $m_i \leq m_c'$ y $m_i \leq m_c''$. Así,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) + \mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta\alpha_j + M_c' \left[\alpha(c) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] + M_c'' \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(c\right)\right] + \\
&\qquad \sum_{j=i+1}^{n} M_j \Delta\alpha_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta\alpha_j + M_i \left[\alpha(c) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] + M_i \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(c\right)\right] + \\
&\qquad \sum_{j=i+1}^{n} M_j \Delta\alpha_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta\alpha_j \\
&= U(f, P_\varepsilon, \alpha)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) - \mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) &= -\sum_{j=1}^{i-1} m_j \Delta\alpha_j - m_c' \left[\alpha(c) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] - m_c'' \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(c\right)\right] \\
&\qquad - \sum_{j=i+1}^{n} m_j \Delta\alpha_j \\
&\leq -\sum_{j=1}^{i-1} m_j \Delta\alpha_j - m_i \left[\alpha(c) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] - m_i \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(c\right)\right] - \\
&\qquad \sum_{j=i+1}^{n} m_j \Delta\alpha_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta\alpha_j \\
&= -\mathcal{L}(f, P_\varepsilon, \alpha)
\end{aligned}
$$

De esta manera,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) + \mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) - \mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) - \mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) \leq U(f, P_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P_\varepsilon, \alpha) < \varepsilon \\
&\implies \mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) - \mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) + \mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) - \mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) < \varepsilon \\
&\implies \mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) - \mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon', \alpha\right) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \mathcal{U}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) - \mathcal{L}\left(f, P_\varepsilon'', \alpha\right) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Por lo que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

Ahora, sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \gamma_{[a,b]}$, procediendo como antes, se da que existen $P' = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, c\} \in \gamma_{[a,c]}$ y $P'' = \{c, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = b\} \in \gamma_{[c,b]}$ tales que $\mathcal{U}\left(f, P', \alpha\right) + \mathcal{U}\left(f, P'', \alpha\right) \leq \mathcal{U}\left(f, P, \alpha\right)$ y $\mathcal{L}\left(f, P', \alpha\right) + \mathcal{L}\left(f, P'', \alpha\right) \geq \mathcal{L}\left(f, P, \alpha\right)$. Posteriormente, se tiene que

$$\mathcal{L}(f,P',\alpha) \leq \int_a^c f\ \mathrm{d}\alpha \leq \mathcal{U}(f,P',\alpha) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(f,P'',\alpha) \leq \int_c^b f\ \mathrm{d}\alpha \leq \mathcal{U}(f,P'',\alpha)$$
$$\implies \mathcal{L}(f,P',\alpha) + \mathcal{L}(f,P'',\alpha) \leq \int_a^c f\ \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\ \mathrm{d}\alpha \leq \mathcal{U}(f,P',\alpha) + \mathcal{U}(f,P'',\alpha)$$
$$\implies \mathcal{L}(f,P,\alpha) \leq \int_a^c f\ \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\ \mathrm{d}\alpha \leq \mathcal{U}(f,P,\alpha)$$

Como P fue arbitraria, se obtiene que $\displaystyle\int_a^b f\ \mathrm{d}\alpha = \int_a^c f\ \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\ \mathrm{d}\alpha$.

Ejercicio 4

Sea $f\colon (X,\mathrm{d}_X) \to (Y,\mathrm{d}_Y)$. Si f es continua y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $p_n \to p$, entonces $f(p_n) \to f(p)$.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $\mathrm{d}_X(x,p) < \delta$ entonces $\mathrm{d}_Y\big(f(x),f(p)\big) < \varepsilon$. Luego, ya que $p_n \to p$, para δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{d}_X(p_n,p) < \delta$, para todo $n \geq N$. Así, $\mathrm{d}_Y\big(f(p_n),f(p)\big) < \varepsilon$, para todo $n \geq N$.

Por lo tanto, $f(p_n) \to f(p)$.

Definición 1

Sea $f\colon (X,\mathrm{d}_X) \to (Y,\mathrm{d}_Y)$ una función entre espacios métricos. Se dice que f es **contractiva** si existe $c \in [0,1)$ tal que

$$\mathrm{d}_Y\big(f(x),f(y)\big) \leq c\,\mathrm{d}_X(x,y) \quad \forall\, x,y \in X$$

Ejercicio 5

Si $f\colon (X,\mathrm{d}_X) \to (Y,\mathrm{d}_Y)$ es contractiva entonces f es uniformemente continua.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que f es contractiva, para todo $x,y \in X$ tal que $\mathrm{d}_X(x,y) < \varepsilon$, existe $c \in [0,1)$ tal que $\mathrm{d}_Y\big(f(x),f(y)\big) \leq c\,\mathrm{d}_X(x,y) < c\varepsilon < \varepsilon$.

Por lo tanto, f es uniformemente continua.

Definición 2

Sea $f\colon A \to B$ y $x \in A$. Se dice que x es un **punto fijo** si $f(x) = x$.

Ejercicio 6

Sea X un espacio completo. Si $f\colon (X,\mathrm{d}) \longrightarrow (X,\mathrm{d})$ es contractiva entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración.

Primero se demostrará que f tiene punto fijo. Sea $x_0 \in X$, se define la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ como $x_{n+1} = f(x_n)$.

Afirmación 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c \in [0,1)$ tal que $\mathrm{d}(x_{n-1}, x_n) \leq c^n \mathrm{d}(x_0, x_1)$.

Procediendo por inducción:

Para $n = 1$ se da que $\mathrm{d}(x_0, x_1) \leq c\mathrm{d}(x_0, x_1)$, para cualquier $c \in [0,1)$.

Luego, suponiendo que para $n = k$ existe $c_0 \in [0,1)$ tal que $\mathrm{d}(x_{k-1}, x_k) \leq c_0^k \mathrm{d}(x_0, x_1)$. Como f es contractiva, para $n = k+1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x_k, x_{k+1}) &= \mathrm{d}\big(f(x_{k-1}), f(x_k)\big) \\
&\leq c_1 \mathrm{d}(x_{k-1}, x_k) && \big(\text{para algún } c_1 \in [0,1)\big) \\
&\leq c_1 c_0^k \mathrm{d}(x_0, x_1) && \big(\text{por hipótesis de inducción}\big) \\
&\leq c^{k+1} \mathrm{d}(x_0, x_1) && \big(\text{donde } c = \max\{c_1, c_0\}\big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c \in [0,1)$ tal que $\mathrm{d}(x_{n-1}, x_n) \leq c^n \mathrm{d}(x_0, x_1)$.

Afirmación 2. Para cada $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $n < m$, existe $c \in [0,1)$ tal que $\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \dfrac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c} c^{n+1}$.

Sean $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tales que $n < m$, se tiene que

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^{m} \mathrm{d}(x_{i-1}, x_i)$$

Por la afirmación anterior, para cada $i = n+1, n+2, \ldots, m$ existe $c_i \in [0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} c_i^i \mathrm{d}(x_0, x_1) \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} c^i \mathrm{d}(x_0, x_1) && \text{donde } c = \max\{c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_m\} \\
&= \mathrm{d}(x_0, x_1) \frac{c^{n+1} - c^{m+1}}{1-c} \\
&\leq \frac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c} c^{n+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $n < m$, existe $c \in [0,1)$ tal que $\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \dfrac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c} c^{n+1}$.

Afirmación 3. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c} c^N < \varepsilon$ para cualquier $c \in [0,1)$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $c \in [0,1)$ para $\varepsilon \dfrac{1-c}{\mathrm{d}(x_0, x_1)} > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $c^N < \varepsilon \dfrac{1-c}{\mathrm{d}(x_0, x_1)}$. Por lo tanto, $\dfrac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c} c^N < \varepsilon$.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$, por la afirmación anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c}c^N < \varepsilon$ para cualquier $c \in [0,1)$. Luego, para todo $m > n \geq N$ existe $c \in [0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x_n, x_m) &\leq \frac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c}c^{n+1} && \text{por la Afirmación 2} \\
&\leq \frac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c}c^{N+1} \\
&< \frac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-c}c^{N} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

De este modo, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es de Cauchy y como X es un espacio completo $x_n \to x$, para algún $x \in X$. Luego, por el Ejercicio 5, f es uniformemente continua, lo cual implica que es continua. Así,