

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Tarea 5

Osmar Dominique Santana Reyes

No. de cuenta: 2125197

I. Verifique si el problema dado es un problema de auto valor de S-L regular.

a) $f''(x) + \lambda f(x) = 0, 0 < x < 1, f(0) + 2f'(0) = 0, f'(1) = 0.$

Solución.

Sean $p(x) = 1, q(x) = 0, \sigma(x) = 1, \alpha_1 = \beta_2 = 1, \beta_1 = 2$ y $\alpha_2 = 0$, la ED se puede escribir como $(p(x)f'(x))' + [q(x) + \lambda\sigma(x)]f(x) = 0$, con $0 < x < 1$, $\alpha_1 f(0) + \beta_1 f'(0) = 0, \alpha_2 f(1) + \beta_2 f'(1) = 0$. Además,

i) $p(x) = 1, p'(x) = 0, q(x) = 0$ y $\sigma(x) = 1$ son funciones reales y continuas sobre $0 < x < 1$,

ii) $p(x) > 0$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $0 < x < 1$ y

iii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 5 \neq 0$ y $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \neq 0$

Por lo tanto, este es un problema de auto valor de S-L regular.

b) $f''(x) - xf(x) + \lambda(x^2 + 1)f(x) = 0, 0 < x < 1, f(0) = 0, f'(1) = 0.$

Solución.

Sean $p(x) = 1, q(x) = -x, \sigma(x) = x^2 + 1, \alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = \alpha_2 = 0$, la ED se puede escribir como $(p(x)f'(x))' + [q(x) + \lambda\sigma(x)]f(x) = 0$, con $0 < x < 1$, $\alpha_1 f(0) + \beta_1 f'(0) = 0, \alpha_2 f(1) + \beta_2 f'(1) = 0$. Además,

i) $p(x) = 1, p'(x) = 0, q(x) = -x$ y $\sigma(x) = x^2 + 1$ son funciones reales y continuas sobre $0 < x < 1$,

ii) $p(x) > 0$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $0 < x < 1$ y

iii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \neq 0$ y $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \neq 0$

Por lo tanto, este es un problema de auto valor de S-L regular.

II. Calcule los valores propios y las funciones propias del problema regular S-L dado.

a) $f''(x) + \lambda f(x) = 0, 0 < x < \pi, f(0) = 0, f'(\pi) = 0.$

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) = a \cosh(\mu \cdot 0) + b \sinh(\mu \cdot 0) = a$$

Así, $f(x) = b \sinh(\mu x)$ y

$$0 = f'(\pi) = b\mu \cosh(\mu\pi) \implies b = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f(0) = B \text{ y } 0 = f'(\pi) = A$$

De este modo, $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) = a \cos(\mu \cdot 0) + b \sin(\mu \cdot 0) = a$$

Así, $f(x) = b \sin(\mu x)$ y

$$0 = f'(\pi) = b\mu \cos(\mu\pi) \implies \cos(\mu\pi) = 0 \implies \mu\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son: $\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4}$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$, con $n \in \mathbb{N}$.

b) $f''(x) + \lambda f(x) = 0, 0 < x < 1, f'(0) = 0, f(1) = 0$.

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = a\mu \sinh(\mu \cdot 0) + b\mu \cosh(\mu \cdot 0) = b\mu \implies b = 0$$

Así, $f(x) = a \cosh(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = a \cosh(\mu) \implies a = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f'(0) = A \text{ y } 0 = f(1) = B$$

De este modo, $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = -a\mu \sin(\mu \cdot 0) + b\mu \cos(\mu \cdot 0) = b\mu \implies b = 0$$

Así, $f(x) = a \cos(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = a \cos(\mu) \implies \cos(\mu) = 0 \implies \mu = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son: $\lambda_n = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$, con $n \in \mathbb{N}$.

c) $f''(x) + \lambda f(x) = 0, 0 < x < 1, f(0) - f'(0) = 0, f(1) = 0$.

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) - f'(0) = a \cosh(\mu \cdot 0) + b \sinh(\mu \cdot 0) - a\mu \sinh(\mu \cdot 0) - b\mu \cosh(\mu \cdot 0) = a - b\mu \implies a = b\mu$$

Así, $f(x) = b\mu \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = b\mu \cosh(\mu) + b \sinh(\mu) \implies b(\mu + \tanh(\mu)) = 0 \implies b = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f(0) - f'(0) = B - A \text{ y } 0 = f(1) = A + B$$

De este modo, $A = B = 0$ por lo que $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f(0) - f'(0) = a \cos(\mu \cdot 0) + b \sin(\mu \cdot 0) + a\mu \sin(\mu \cdot 0) - b\mu \cos(\mu \cdot 0) = a - b\mu \implies a = b\mu$$

Así, $f(x) = b\mu \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$ y

$$0 = f(1) = b\mu \cos(\mu) + b \sin(\mu) \implies b(\mu + \tan(\mu)) = 0 \implies \mu = -\tan(\mu)$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son todos los μ_n^2 tales que $\mu_n = -\tan(\mu_n)$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \mu_n \cos(\mu_n x) + \sin(\mu_n x)$, con $n \in \mathbb{N}$.

d) $f''(x) + \lambda f(x) = 0, 0 < x < 1, f'(0) = 0, f(1) + f'(1) = 0.$

Solución.

i) Si $\lambda < 0$ entonces, sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = a\mu \sinh(\mu \cdot 0) + b\mu \cosh(\mu \cdot 0) = b\mu \implies b = 0$$

Así, $f(x) = a \cosh(\mu x)$ y

$$0 = f(1) + f'(1) = a \cosh(\mu) + a\mu \sinh(\mu) \implies a(1 + \mu \tanh(\mu)) = 0 \implies a = 0$$

De esta forma, $f(x) = 0$.

ii) Si $\lambda = 0$, entonces la ED, queda como $f''(x) = 0$, por lo que $f(x) = Ax + B$ y, por las condiciones de frontera, se obtiene que

$$0 = f'(0) = A \text{ y } 0 = f(1) + f'(1) = B + 0 = B$$

De este modo, $A = B = 0$ por lo que $f(x) = 0$.

iii) Si $\lambda > 0$ entonces, sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ tiene como solución general a $f(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$. Luego, por las condiciones de frontera se da que

$$0 = f'(0) = -a\mu \sin(\mu \cdot 0) + b\mu \cos(\mu \cdot 0) = b\mu \implies b = 0$$

Así, $f(x) = a \cos(\mu x)$ y

$$0 = f(1) + f'(1) = a \cos(\mu) - a\mu \sin(\mu) \implies a(1 - \mu \tan(\mu)) = 0 \implies 1 = \mu \tan(\mu)$$

Por lo tanto, los valores propios del problema son todos los μ_n^2 tales que $1 = \mu_n \tan(\mu_n)$, con $n \in \mathbb{N}$. Mientras que las funciones propias son: $f_n(x) = \cos(\mu_n x)$, con $n \in \mathbb{N}$.

III. Construya la expansión de la serie de Fourier generalizada para la función dada U en las funciones propias.

$$\left\{ \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Del problema S-L con $L = \pi$.

a) $U(x) = 1, 0 \leq x \leq \pi.$

Solución.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ distintos, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{(2m-1)x}{2}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\left(\left(\frac{2n-1}{2} - \frac{2m-1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(\frac{2n-1}{2} + \frac{2m-1}{2}\right)x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)x) - \cos((n+m-1)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m} - \frac{\sin((n+m-1)x)}{n+m-1} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, $\left\{ \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal.

Después, calculando los coeficientes de la serie de Fourier generalizada:

$$a_n = \frac{\int_0^\pi U(x) \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) dx}{\int_0^\pi \sin^2\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) dx} = \frac{\left[\frac{2}{1-2n} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right]_0^\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{2}{2n-1}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

Por lo tanto, $U(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)$

b) $U(x) = 2x - 1, 0 \leq x \leq \pi$.

Solución.

Calculando los coeficientes de la serie de Fourier generalizada:

$$a_n = \frac{\int_0^\pi U(x) \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) dx}{\int_0^\pi \sin^2\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) dx} = \frac{\left[\frac{2}{1-2n} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right]_0^\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{2}{2n-1}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

Por lo tanto, $U(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)$

IV. Construya la expansión de la serie de Fourier generalizada para la función dada U en las funciones propias.

$$\left\{ \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Del problema S-L con $L = 1$.

a) $U(x) = \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 1$.

Solución.

b) $U(x) = x + 1, 0 \leq x \leq 1$.

Solución.

V. Usar el cociente de Rayleigh para obtener una cota superior (razonablemente precisa) del autovalor mínimo de los siguientes problemas.

a) $\frac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - x^2)\phi = 0$ con $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\phi(1) = 0$.

Solución.

b) $\frac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - x)\phi = 0$ con $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(0) + 2\phi(1) = 0$.

Solución.