

Ejercicio 1

Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con U un abierto de \mathbb{R}^n . Si existen las derivadas parciales de f y como funciones son continuas en U entonces f es diferenciable.

Demostración.

Sean $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ fijo y $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

$$\text{P.d. } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \frac{\left| f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) (x_j - y_j) \right|}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Para todo $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$, sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$g_j(x) = f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x, y_{j+1}, \dots, y_n)$, donde $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$. Luego, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \dots, y_n) + f_i(x_1, x_2, \dots, y_n) - \\ &\quad f_i(x_1, x_2, \dots, y_{n-1}, y_n) + f_i(x_1, x_2, \dots, y_{n-1}, y_n) - \dots - \\ &\quad f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_n) + f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - \dots - \\ &\quad f_i(x_1, y_2, \dots, y_n) + f_i(x_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= g_n(x_n) - g_n(y_n) + g_{n-1}(x_{n-1}) - g_{n-1}(y_{n-1}) + g_{n-2}(x_{n-1}) - \dots - \\ &\quad g_j(y_j) + g_{j-1}(x_{j-1}) - \dots - g_2(y_2) + g_1(x_1) - g_1(y_1) \end{aligned}$$

Ya que f_i es diferenciable en U , se tiene que, para todo $j = 1, 2, \dots, n$, g_j también lo es. Así, por el Teorema del Valor Medio, para cada $j = 1, 2, \dots, n$ existe $a_j \in [\min\{x_j, y_j\}, \max\{x_j, y_j\}]$ tal que $g_j(x_j) - g_j(y_j) = g'_j(a_j)(x_j - y_j)$. De este modo,

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) &= g'_n(a_n)(x_n - y_n) + g'_{n-1}(a_{n-1})(x_{n-1} - y_{n-1}) + \dots + g'_j(a_j)(x_j - y_j) + \dots + \\ &\quad g'_1(a_1)(x_1 - y_1) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1)(x_1 - y_1) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2)(x_2 - y_2) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j)(x_j - y_j) + \dots + \\ &\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n)(x_n - y_n) \end{aligned}$$

donde $\bar{z}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, y_{j+1}, \dots, y_n)$. Posteriormente,

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})(x_j - y_j) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1)(x_1 - y_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1 - y_1) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2)(x_2 - y_2) - \\ &\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2 - y_2) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j)(x_j - y_j) - \\ &\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})(x_j - y_j) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n)(x_n - y_n) - \\ &\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x})(x_n - y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) \right) (x_1 - y_1) + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) \right) (x_2 - y_2) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right) (x_j - y_j) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) (x_n - y_n) \\
\Rightarrow \left| f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) (x_j - y_j) \right| &= \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) \right) (x_1 - y_1) + \right. \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) \right) (x_2 - y_2) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right) (x_j - y_j) + \cdots + \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) (x_n - y_n) \right| \\
&\leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) \right| |x_1 - y_1| + \\
&\quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) \right| |x_2 - y_2| + \cdots + \\
&\quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| |x_j - y_j| + \cdots + \\
&\quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) \right| |x_n - y_n| \\
&\leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) \right| \|\bar{x} - \bar{y}\| + \\
&\quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) \right| \|\bar{x} - \bar{y}\| + \cdots + \\
&\quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| \|\bar{x} - \bar{y}\| + \cdots + \\
&\quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) \right| \|\bar{x} - \bar{y}\| \\
&= \left(\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) \right| + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) \right| + \cdots + \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) \right| \right) \|\bar{x} - \bar{y}\|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\left| f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) (x_j - y_j) \right|}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} \leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) \right| + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) \right|$$

Después, como las derivadas parciales son continuas en U se da que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{y}) \right| = 0$, y puesto que $\bar{z}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, y_{j+1}, \dots, y_n)$ con $a_j \in [\min \{x_j, y_j\}, \max \{x_j, y_j\}]$, se tiene que \bar{z}_j tiende a \bar{y} conforme \bar{x} tiende a \bar{y} , para todo $j = 1, 2, \dots, n$. De esta manera,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \frac{\left| f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) (x_j - y_j) \right|}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} &\leq \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left(\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) \right| + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) \right| \right) \\ &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}_1) \right| + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{z}_2) \right| + \dots + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}_j) \right| + \dots + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{z}_n) \right| \\ &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{y}) \right| + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{y}) \right| + \dots + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{y}) \right| + \dots + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{y}) \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera, $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \frac{\left| f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) (x_j - y_j) \right|}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$.

Por último,

$$0 \leq \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \frac{\|f(\bar{x}) - f(\bar{y}) - Df(\bar{y})(\bar{x} - \bar{y})\|}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} \leq \sum_{i=1}^m \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}} \frac{\left| f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) (x_j - y_j) \right|}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} = 0$$

Ya que \bar{y} fue arbitrario, se concluye que f es diferenciable en U . ■

Ejercicio 2

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos. Si $a \leq b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, entonces A está acotada superiormente y B está acotado inferiormente, y además, $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Demostración.

Sea $b \in B$, ya que $a \leq b$ para todo $a \in A$, se tiene que A está acotado superiormente. De igual forma, sea $a \in A$ como $a \leq b$ para todo $b \in B$, se da que B está acotado inferiormente. Además, dado que A y B son no vacíos, se obtiene que el supremo y el ínfimo de A y B existen, respectivamente. Como todo elemento de B es cota superior de A se tiene que $\sup(A)$ es una cota inferior de B . Por lo tanto, $\sup(A) \leq \inf(B)$, pues $\inf(B)$ es la mayor cota inferior de B .

Ejercicio 3

Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y $a < c < b$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha$$

Demostración.

Afirmación. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ existe $P_\varepsilon = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \in \mathcal{Y}_{[a,b]}$ tal que $U(f, P_\varepsilon, \alpha) - L(f, P_\varepsilon, \alpha) < \varepsilon$. Luego, para cada $j = 1, \dots, n$ sean $M_j = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ y $m_j = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}$. Ya que $a < c < b$, existe $i = 1, \dots, n$ tal que $x_{i-1} < c \leq x_i$, por lo que se definen $M'_c = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, c]\}$, $M''_c = \sup \{f(x) \mid x \in [c, x_i]\}$, $m'_c = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, c]\}$ y $m''_c = \inf \{f(x) \mid x \in [c, x_i]\}$.

Después, considerando las particiones $P'_\varepsilon = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, c\} \in \mathcal{Y}_{[a,c]}$ y $P''_\varepsilon = \{c, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} \in \mathcal{Y}_{[c,b]}$, se tiene que

$$\mathcal{U}(f, P'_\varepsilon, \alpha) = \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta \alpha_j + M'_c [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})],$$

$$\mathcal{U}(f, P''_\varepsilon, \alpha) = M''_c [\alpha(x_i) - \alpha(c)] + \sum_{j=i+1}^n M_j \Delta \alpha_j,$$

$$\mathcal{L}(f, P'_\varepsilon, \alpha) = \sum_{j=1}^{i-1} m_j \Delta \alpha_j + m'_c [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] \quad \text{y}$$

$$\mathcal{L}(f, P''_\varepsilon, \alpha) = m''_c [\alpha(x_i) - \alpha(c)] + \sum_{j=i+1}^n m_j \Delta \alpha_j.$$

Puesto que $[x_{i-1}, c] \cup [c, x_i] = [x_{i-1}, x_i]$ se da que $M'_c \leq M_i$, $M''_c \leq M_i$, $m_i \leq m'_c$ y $m_i \leq m''_c$. Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f, P'_\varepsilon, \alpha) + \mathcal{U}(f, P''_\varepsilon, \alpha) &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta \alpha_j + M'_c [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M''_c [\alpha(x_i) - \alpha(c)] + \\
&\quad \sum_{j=i+1}^n M_j \Delta \alpha_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta \alpha_j + M_i [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M_i [\alpha(x_i) - \alpha(c)] + \\
&\quad \sum_{j=i+1}^n M_j \Delta \alpha_j \\
&= \sum_{j=1}^n M_j \Delta \alpha_j \\
&= U(f, P_\varepsilon, \alpha)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}(f, P'_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P''_\varepsilon, \alpha) &= -\sum_{j=1}^{i-1} m_j \Delta \alpha_j - m'_c [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] - m''_c [\alpha(x_i) - \alpha(c)] \\
&\quad - \sum_{j=i+1}^n m_j \Delta \alpha_j \\
&\leq -\sum_{j=1}^{i-1} m_j \Delta \alpha_j - m_i [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] - m_i [\alpha(x_i) - \alpha(c)] - \\
&\quad \sum_{j=i+1}^n m_j \Delta \alpha_j \\
&= -\sum_{j=1}^n m_j \Delta \alpha_j \\
&= -\mathcal{L}(f, P_\varepsilon, \alpha)
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}(f, P'_\varepsilon, \alpha) + \mathcal{U}(f, P''_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P'_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P''_\varepsilon, \alpha) \leq U(f, P_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P_\varepsilon, \alpha) < \varepsilon \\
&\implies \mathcal{U}(f, P'_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P'_\varepsilon, \alpha) + \mathcal{U}(f, P''_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P''_\varepsilon, \alpha) < \varepsilon \\
&\implies \mathcal{U}(f, P'_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P'_\varepsilon, \alpha) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \mathcal{U}(f, P''_\varepsilon, \alpha) - \mathcal{L}(f, P''_\varepsilon, \alpha) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

Ahora, sea $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \in \mathcal{Y}_{[a,b]}$, procediendo como antes, se da que existen $P' = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, c\} \in \mathcal{Y}_{[a,c]}$ y $P'' = \{c, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n = b\} \in \mathcal{Y}_{[c,b]}$ tales que $\mathcal{U}(f, P', \alpha) + \mathcal{U}(f, P'', \alpha) \leq \mathcal{U}(f, P, \alpha)$ y $\mathcal{L}(f, P', \alpha) + \mathcal{L}(f, P'', \alpha) \geq \mathcal{L}(f, P, \alpha)$. Posteriormente, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f, P', \alpha) &\leq \int_a^c f \, d\alpha \leq \mathcal{U}(f, P', \alpha) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(f, P'', \alpha) \leq \int_c^b f \, d\alpha \leq \mathcal{U}(f, P'', \alpha) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(f, P', \alpha) + \mathcal{L}(f, P'', \alpha) &\leq \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha \leq \mathcal{U}(f, P', \alpha) + \mathcal{U}(f, P'', \alpha) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(f, P, \alpha) &\leq \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha \leq \mathcal{U}(f, P, \alpha)\end{aligned}$$

Como P fue arbitraria, se obtiene que $\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha$.

Ejercicio 4

Sea $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. Si f es continua y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $p_n \rightarrow p$, entonces $f(p_n) \rightarrow f(p)$.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d_X(x, p) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Luego, ya que $p_n \rightarrow p$, para δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(p_n, p) < \delta$, para todo $n \geq N$. Así, $d_Y(f(p_n), f(p)) < \varepsilon$, para todo $n \geq N$.

Por lo tanto, $f(p_n) \rightarrow f(p)$.

Definición 1

Sea $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una función entre espacios métricos. Se dice que f es **contractiva** si existe $c \in [0, 1)$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq c d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Ejercicio 5

Si $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es contractiva entonces f es uniformemente continua.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que f es contractiva, para todo $x, y \in X$ tal que $d_X(x, y) < \varepsilon$, existe $c \in [0, 1)$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq c d_X(x, y) < c\varepsilon < \varepsilon$.

Por lo tanto, f es uniformemente continua.

Definición 2

Sea $f: A \rightarrow B$ y $x \in A$. Se dice que x es un **punto fijo** si $f(x) = x$.

Ejercicio 6

Sea X un espacio completo. Si $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ es contractiva entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración.

Primero se demostrará que f tiene punto fijo. Sea $x_0 \in X$, se define la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ como $x_{n+1} = f(x_n)$.

Afirmación. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $c \in [0, 1)$ tal que $d(x_{n-1}, x_n) \leq c^n d(x_0, x_1)$.

Procediendo por inducción:

Para $n = 1$ se da que $d(x_0, x_1) \leq c d(x_0, x_1)$, para cualquier $c \in [0, 1)$.

Luego, suponiendo que para cada $k < n$ existe $c \in [0, 1)$ tal que $d(x_{k-1}, x_k) \leq c^k d(x_0, x_1)$. Como f es contractiva, se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_{n-1}, x_n) &= d(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \\ &\leq c_1 d(x_{n-2}, x_{n-1}) && \text{(para algún } c_1 \in [0, 1)) \\ &\leq c_1 c_2^{n-1} d(x_0, x_1) && \text{(para algún } c_2 \in [0, 1) \text{ y por hipótesis de inducción)} \\ &\leq c^n d(x_0, x_1) && \text{(donde } c = \max\{c_1, c_2\}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c \in [0, 1)$ tal que $d(x_{n-1}, x_n) \leq c^n d(x_0, x_1)$.

Afirmación. Para cada $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $n < m$, existe $c \in [0, 1)$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-c} c^{n+1}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Procediendo por inducción sobre n :

Para $n = 0$ se da que

$$d(x_0, x_m) \leq \sum_{i=1}^m d(x_{i-1}, x_i)$$

Por la afirmación anterior, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, existe $c_i \in [0, 1)$ tal que $d(x_{i-1}, x_i) \leq c_i^i d(x_0, x_1)$. Así,

$$\begin{aligned} d(x_0, x_m) &\leq \sum_{i=1}^m c_i^i d(x_0, x_1) \\ &\leq \sum_{i=1}^m c^i d(x_0, x_1) && \text{donde } c = \max\{c_1, c_2, \dots, c_m\} \\ &= d(x_0, x_1) \frac{c - c^{m+1}}{1-c} && \text{donde } c = \max\{c_1, c_2, \dots, c_m\} \end{aligned}$$

y como $0 \leq c < 1 \implies 0 \leq c^m < 1 \implies -1 < -c^m \leq 0 \implies 0 < 1 - c^m \leq 1 \implies 0 < c - c^{m+1} \leq c$, se obtiene que $d(x_0, x_m) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-c} c$. De esta manera, se cumple la afirmación.

Después, suponiendo que para $k < n$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c \in [0, 1)$ tal que $d(x_{n-1}, x_n) \leq c^n d(x_0, x_1)$.