Ejercicio 1. Si a es un número racional y b es un número irracional,

1. ¿$a + b$ es necesariamente irracional?
2. ¿ab es necesariamente irracional?
3. Responder las dos preguntas anteriores asumiendo que a y b son irracionales

Ejercicio 2. Sean A y B conjuntos acotados de reales (es decir, acotados inferior y superiormente). Probar que si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cap B$ es acotado y además

$$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Demostración.

Como A es un conjunto acotado, existen $\inf(A)$ y $\sup(A)$. Ya que $\inf(A) \leq a \leq \sup(A), \forall\, a \in A$, en particular, $\forall\, a \in A \cap B$, se tiene que $A \cap B$ está acotado inferior y superiormente, por lo que existen $\inf(A \cap B)$ y $\sup(A \cap B)$, de los cuales se da que

$$\inf(A \cap B) \leq c \leq \sup(A \cap B), \forall\, c \in A \cap B \tag{1}$$

Después, suponiendo que $\inf(A \cap B) < \max\{\inf(A), \inf(B)\}$, y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\max\{\inf(A), \inf(B)\} = \inf(A)$, se tiene que $\inf(A \cap B) < \inf(A)$. Y como $\inf(A) \leq a, \forall\, a \in A$, en particular $\forall\, a \in A \cap B$, se da que $\inf(A)$ es una cota inferior de $A \cap B$ mayor que $\inf(A \cap B)$, lo cual es una contradicción, pues $\inf(A \cap B)$ es la máxima cota inferior de $A \cap B$.

De esta forma,

$$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leq \inf(A \cap B) \tag{2}$$

Ahora, suponiendo que $\min\{\sup(A), \sup(B)\} < \sup(A \cap B)$, y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\min\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(A)$, se tiene que $\sup(A) < \sup(A \cap B)$. Y como $\sup(A) \geq a, \forall\, a \in A$, en particular $\forall\, a \in A \cap B$, se da que $\sup(A)$ es una cota superior de $A \cap B$ menor que $\sup(A \cap B)$, lo cual es una contradicción, pues $\sup(A \cap B)$ es la mínima cota superior de $A \cap B$.

De esta manera,

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\} \tag{3}$$

$\therefore \max\{\inf(A), \inf(B)\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$, por (2), (1) y (3). $\blacksquare$

Ejercicio 4. Sea S un conjunto no vacío de números reales y sea α una cota superior de S. Demostrar que α es el supremo de S si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $\alpha - \epsilon < x$.

Demostración.

$\Longrightarrow]$ Suponiendo que α es el supremo de S.
Suponiendo que existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall\, x \in S$ se tiene que $x \leq \alpha - \epsilon$.
De esta manera, $\alpha - \epsilon$ es una cota superior de S pero $\alpha - \epsilon < \alpha$, lo cual es una contradicción, pues α es el supremo de S.
$\therefore$ para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $\alpha - \epsilon < x$.

$\Longleftarrow]$ Suponiendo que para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $\alpha - \epsilon < x$.
Sea β una cota superior de S y suponiendo que $\beta < \alpha$, se tiene que $0 < \alpha - \beta$. Así, existe $x \in S$ tal que $\alpha - (\alpha - \beta) < x$, es decir, $\beta < x$, lo cual es una contradicción, pues β es cota superior de S.
De esta forma, no existe una cota superior de S que sea menor a α.
$\therefore$ α es el supremo de S.