Definición 1.

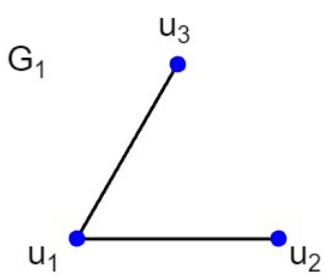
Sean G_1 y G_2 gráficas tales que $\mathrm{V}(G_1) \cap \mathrm{V}(G_2) = \emptyset$. Se define a $G_1 * G_2 = (\mathrm{V}, \mathrm{A})$ como la **gráfica de grados** con

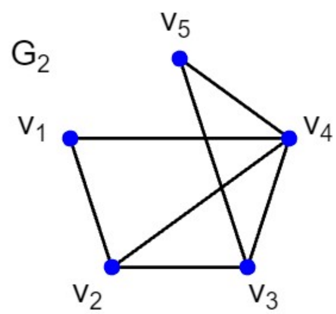
$$\mathrm{V}(G_1 * G_2) = \mathrm{V}(G_1) \cup \mathrm{V}(G_2) \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(G_1 * G_2) = \big\{ & uv \mid u \in \mathrm{V}(G_1),\ v \in \mathrm{V}(G_2),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_1) + l \ \text{ y } \ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2) - l, \\ & \text{con } l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_2)| \big\} \cup \big\{ uv \mid u \in \mathrm{V}(G_2),\ v \in \mathrm{V}(G_1),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_2) + l \ \text{ y} \\ & \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_1) - l,\ \text{con } l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_1)| \big\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.

Sean G_1 y G_2 gráficas como se muestra abajo. Para construir la gráfica de grados de G_1 y G_2, se puede seguir el siguiente procedimiento:





1. Obtener el grado máximo y mínimo de cada gráfica. En este caso, $\delta(G_1) = 1, \delta(G_2) = 2$, $\Delta(G_1) = 2$ y $\Delta(G_2) = 4$.

2. Elaborar dos tablas donde la primer fila esté conformada por los grados anteriormente obtenidos como se muestra a continuación:

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_2) = 4$

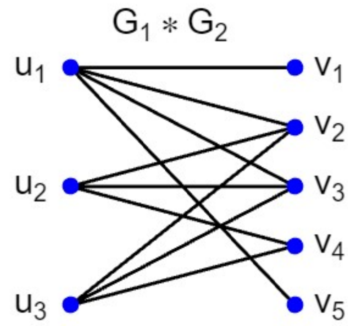
$\delta(G_2) = 2$	$\Delta(G_1) = 2$

3. En las columnas de las tablas que corresponden a los grados máximos de cada gráfica, se coloca el número de la celda anterior disminuido en uno, hasta llegar al cero. Mientras que las columnas que corresponden a los grados mínimos se coloca el número de la celda anterior aumentado en uno.

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_2) = 4$
2	3
3	2
4	1
5	0

$\delta(G_2) = 2$	$\Delta(G_1) = 2$
3	1
4	0

4. Por último, se dibujan los vértices de ambas gráficas y se hacen adyacentes aquellos que tengan el grado indicado en cada fila, en su respectiva gráfica.



Proposición 1.

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 * G_2$ es bipartita.

Proposición 2.

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 * G_2 = G_2 * G_1$.

Teorema 3.

Sean G_1 y G_2 gráficas tal que G_1 es r-regular. Si $V' = \{v \in \mathrm{V}(G_2) \mid \mathrm{gr}(v) = \delta(G_2)\ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2)\}$, entonces

i) la subgráfica inducida de $G_1 * G_2$ por $\mathrm{V}(G_1) \cup V'$ es bipartita completa.
ii) Todo $v \in \mathrm{V}(G_2) \setminus V'$ es aislado.

Corolario 4.

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si G_1 es r-regular y $\forall v \in \mathrm{V}(G_2)$ se da que $\mathrm{gr}(v) = \delta(G_2)$ ó $\mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2)$, entonces $G_1 * G_2$ es bipartita completa.

Corolario 5.

Si G_1 y G_2 son gráficas r-regular y s-regular, respectivamente, entonces $G_1 * G_2$ es bipartita completa.

Observaciones.

1. $K_n * K_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues K_n y K_m son $(n-1)$-regular y $(m-1)$-regular, respectivamente.
2. $C_n * C_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues C_n y C_m son gráficas 2-regular.

Teorema 6.

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 * G_2 = G_1^C * G_2^C$.

Teorema 7.

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si para $u, v \in \mathrm{V}(G_1)$ existe una uv-trayectoria en $G_1 * G_2$ entonces existe una uv-trayectoria T en $G_1 * G_2$ de longitud 2, con $T = (u, w, v)$ donde $w \in \mathrm{V}(G_2)$.

Teorema 8.

Sean G_1 y G_2 gráficas, con G_1 disconexa. Si $\delta(G_1) = \delta(G_2) < \Delta(G_1) = \Delta(G_2)$ entonces $G_1 * G_2$ es disconexa.