

**Universidad Autónoma del Estado de
México**

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemáticas

Teoría de gráficas

**Trabajo de investigación:
Gráfica Gradial**

Profesora:

Berta Zavala Santana

Alumno:

Osmar Dominique Santana Reyes

Semestre: 2023B

Fecha de Entrega: 4 de diciembre de 2023

Definición 1

Sean G_1 y G_2 gráficas tales que $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Se define a $G_1 \nabla G_2 = (V, A)$ como la **gráfica gradial de G_1 y G_2** con

$$V(G_1 \nabla G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) \quad \text{y}$$

$$A(G_1 \nabla G_2) = \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2)\} \cup \\ \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)\}$$

En términos de la definicion anterior, para hallar las aristas de la gráfica gradial, es necesario resolver las siguientes ecuaciones diofantinas:

$$\text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2) \quad \text{y} \quad \text{gr}_{G_2}(u') + \text{gr}_{G_1}(v') = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$$

donde $u, v' \in V(G_1)$ y $v, u' \in V(G_2)$. Algunas soluciones particulares para cada ecuación son:

$$\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1), \text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_2), \text{gr}_{G_2}(u') = \delta(G_2) \quad \text{y} \quad \text{gr}_{G_1}(v') = \Delta(G_1).$$

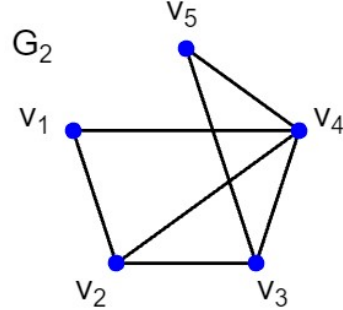
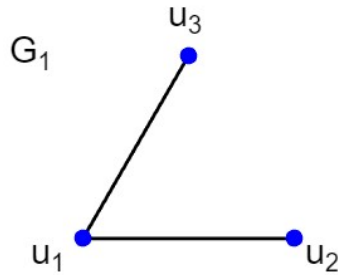
De esta manera, las soluciones para cada ecuación son:

$$\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + l, \text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_1) - l, \text{con } l = 0, 1, \dots, \text{máx} \{\Delta(G_1) - \delta(G_1), \Delta(G_2)\} \quad \text{y}$$

$$\text{gr}_{G_2}(u') = \delta(G_2) + l, \text{gr}_{G_1}(v') = \Delta(G_1) - l, \text{con } l = 0, 1, \dots, \text{máx} \{\Delta(G_2) - \delta(G_2), \Delta(G_1)\}$$

Ejemplo 1

Sean G_1 y G_2 gráficas, como se muestra abajo. Para construir la gráfica gradial de G_1 y G_2 , se puede seguir el siguiente procedimiento:



1. Obtener el grado máximo y mínimo de cada gráfica. En este caso, $\delta(G_1) = 1$, $\delta(G_2) = 2$, $\Delta(G_1) = 2$ y $\Delta(G_2) = 4$.
2. Elaborar dos tablas donde la primer fila esté conformada por los grados anteriormente obtenidos como se muestra a continuación:

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_2) = 4$
-------------------	-------------------

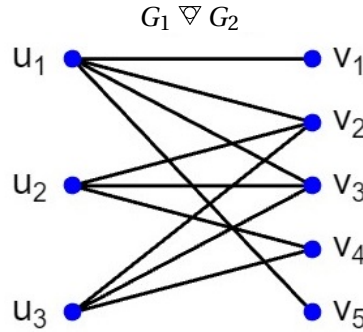
$\Delta(G_1) = 2$	$\delta(G_2) = 2$
-------------------	-------------------

3. En las columnas de las tablas que corresponden a los grados máximos de cada gráfica, se coloca el número de la celda anterior disminuido en uno. Mientras que las columnas que corresponden a los grados mínimos se coloca el número de la celda anterior aumentado en uno. Este procedimiento termina hasta que en las columnas del grado mínimo se llegue al grado máximo de la gráfica que corresponda, o en las columnas del grado mínimo se obtenga un cero.

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_2) = 4$
2	3

$\Delta(G_1) = 2$	$\delta(G_2) = 2$
1	3
0	4

4. Por último, se dibujan los vértices de ambas gráficas y se hacen adyacentes aquellos que tengan el grado indicado en cada fila, en su respectiva gráfica.



Por cómo se definió la gráfica gradial, es claro que ningún par de vértices de cada una de las dos gráficas que la definen son adyacentes entre sí. Esto da lugar a la siguiente proposición.

Proposición 1

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 \nabla G_2$ es bipartita.

Demostración.

Afirmación. $\{V(G_1), V(G_2)\}$ es una partición de $V(G_1 \nabla G_2)$.

- $V(G_1)$ y $V(G_2)$ son no vacíos, por definición de gráfica.
- $V(G_1) \cap V(G_2) \neq \emptyset$ por la definición de gráfica gradial.
- $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G_1 \nabla G_2)$ por la definición de gráfica gradial.

De esta forma, $\{V(G_1), V(G_2)\}$ es una partición de $V(G_1 \nabla G_2)$.

Luego, para $uv \in A(G_1 \nabla G_2)$ se tiene que $u \in V(G_1)$ y $v \in V(G_2)$ ó, $v \in V(G_2)$ y $u \in V(G_1)$, por definición de gráfica gradial.

Por lo tanto, $G_1 \nabla G_2$ es bipartita.

Ya que la gráfica gradial es bipartita se tiene que su número cromático es 2, por lo que hablar de coloración en esta gráfica no es relevante. Por lo tanto, este tema no se tratará.

Proposición 2

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 \nabla G_2 = G_2 \nabla G_1$.

Demostración.

Por definición de gráfica gradial, se da que $V(G_1 \nabla G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) = V(G_2) \cup V(G_1) = V(G_2 \nabla G_1)$.

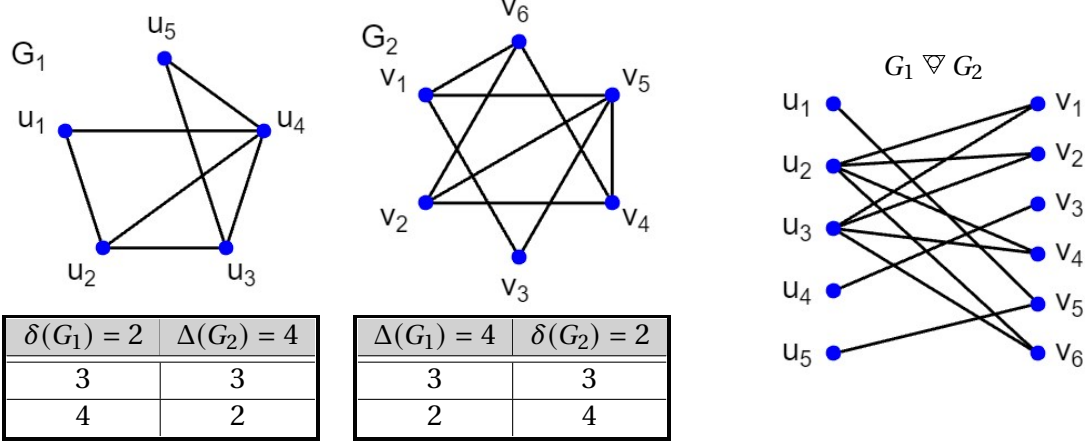
Luego,

$$\begin{aligned}
A(G_1 \nabla G_2) &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2)\} \cup \\
&\quad \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)\} \\
&= \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)\} \cup \\
&\quad \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2)\} \\
&= A(G_2 \nabla G_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $G_1 \nabla G_2 = G_2 \nabla G_1$.

Ejemplo 2

Sean G_1 y G_2 gráficas, como se muestran abajo, y obteniendo su gráfica gradial.



Si se construye la gráfica $G_2 \nabla G_1$, lo único que cambia es el orden de las columnas de las tablas de arriba, las adyacencias siguen siendo las mismas en cualquiera de las dos gráficas gradiales.

En los próximos enunciados se pueden atribuir propiedades concretas a las gráficas que definen la gráfica gradial. Debido a la Proposición (2), estas propiedades se le pueden atribuir a las gráficas de forma indistinta.

Observación. Debido a que toda gráfica siempre tiene vértices de grado mínimo o máximo, la gráfica gradial siempre tendrá al menos una arista, cuyos extremos son estos vértices. De esta manera, $A(G_1 \nabla G_2) \neq \emptyset$, para cualesquiera dos gráficas G_1 y G_2 .

Teorema 3

Sean G_1 y G_2 gráficas tal que G_1 es r -regular. Si $V' = \{v \in V(G_2) \mid \text{gr}(v) = \delta(G_2) \text{ ó } \text{gr}(v) = \Delta(G_2)\}$, entonces

- I. la subgráfica inducida de $G_1 \nabla G_2$ por $V(G_1) \cup V'$ es bipartita completa.
- II. Todo $v \in V(G_2) \setminus V'$ es aislado.

Demostración.

- I. Sea $H = \langle V(G_1) \cup V' \rangle_{G_1 \nabla G_2}$, se tiene que $\{V(G_1), V'\}$ es una partición de $V(G_1) \cup V'$, pues $V' \neq \emptyset$, $V(G_1) \cap V' \subseteq V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ y $V(G_1) \cup V' = V(H)$, por ser inducida.

Después, sea $uv \in A(H)$, por definición de gráfica gradial, $u \in V(G_1)$ y $v \in V' \subseteq V(G_2)$, ó $v \in V(G_1)$ y $v \in V' \subseteq V(G_2)$. Así, H es bipartita.

Ahora, sean $w \in V(G_1)$ y $x \in V'$. Como G_1 es r -regular, se da que $\Delta(G_1) = r = \delta(G_1) = \text{gr}_{G_1}(w)$. Y ya que $x \in V'$ se tiene que $w \text{ ady}_H x$, puesto que

$$\text{gr}_{G_1}(w) + \text{gr}_{G_2}(x) = r + \Delta(G_2) = \delta(G_1) + \Delta(G_2) \quad \text{o} \quad \text{gr}_{G_1}(w) + \text{gr}_{G_2}(x) = \delta(G_2) + r = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$$

(no hay más posibilidades, pues G_1 es r -regular y los vértices de V' son aquellos cuyo grado es máximo o mínimo).

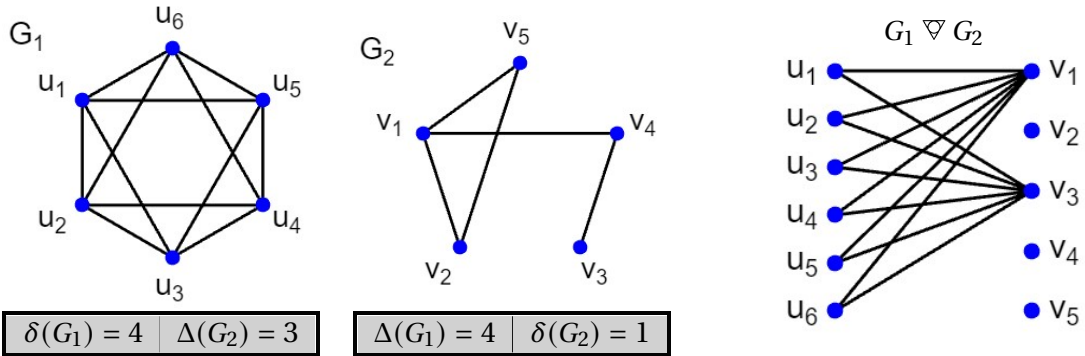
Por lo tanto, H es una gráfica bipartita completa.

- II. Sea $v \in V(G_2) \setminus V'$ existen $i, j \in \{1, 2, \dots, \Delta(G_2) - 1\}$ tales que $\text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_2) + i = \Delta(G_2) - j$ (i, j son distintos de cero y de $\Delta(G_2)$, pues $v \notin V'$). Sea $u \in V(G_1)$ se da que $\text{gr}_{G_1}(u) = r$, por lo que u no es adyacente a v , ya que de lo contrario, $\text{gr}_{G_1}(u) = \Delta(G_1) - i = r - i$ o $\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + j = r + j$, lo cual no puede ser.

De esta forma, como $\forall v \in V(G_2) \setminus V'$, v no es adyacente a ningún otro vértice, se obtiene que v es un vértice aislado.

Ejemplo 3

Sean G_1 una gráfica 4-regular y G_2 una gráfica, como se muestran a continuación. Construyendo su gráfica gradial:



Como se puede observar, la subgráfica inducida por $V(G_1) \cup \{v_1\}$ de la gráfica gradial es bipartita completa.

En base al ejemplo anterior, es posible deducir que si una gráfica es regular y la otra solo tiene vértices de a lo más dos grados distintos, la gráfica gradial de estas es bipartita completa.

Corolario 4

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si G_1 es r -regular y para todo $v \in V(G_2)$ se da que $\text{gr}(v) = \delta(G_2)$ ó $\text{gr}(v) = \Delta(G_2)$, entonces $G_1 \nabla G_2$ es bipartita completa.

Demostración.

Ya que $\{v \in V(G_2) \mid \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_2) \text{ ó } \text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_2)\} = V(G_2)$, por hipótesis. Por el inciso I del Teorema (3), se tiene que $G_1 \nabla G_2$ es bipartita completa.

Corolario 5

Si G_1 y G_2 son gráficas r -regular y s -regular, respectivamente, entonces $G_1 \nabla G_2$ es bipartita completa.

Demostración.

Debido a que $\text{gr}_{G_2}(v) = s, \forall v \in V(G_2)$, se da que $\Delta(G_2) = s = \delta(G_2) = \text{gr}_{G_2}(v) \forall v \in V(G_2)$, De esta forma, por el Teorema (3), $G_1 \nabla G_2$ es bipartita completa.

Observaciones.

- I. $K_n \nabla K_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues K_n y K_m son $(n-1)$ -regular y $(m-1)$ -regular, respectivamente.
- II. $C_n \nabla C_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues C_n y C_m son gráficas 2-regular.

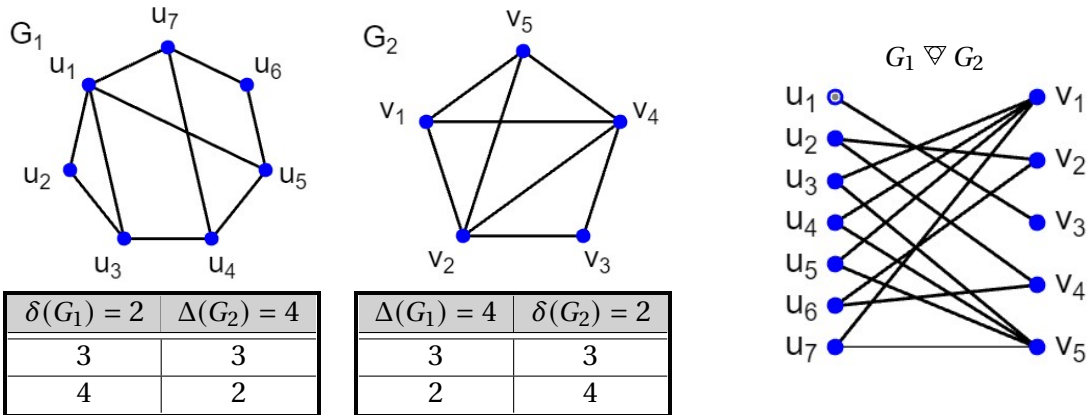
Ahora bien, si G_1 y G_2 son gráficas tales que $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$ entonces

$$\begin{aligned} A(G_1 \nabla G_2) &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2)\} \\ &= \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)\} \end{aligned}$$

De esta manera, si hay dos gráficas que cumplan lo anterior solo es necesario seguir el procedimiento del Ejemplo (1), para construir la gráfica de gradial de ambas gráficas, pero con solo una de las dos tablas.

Ejemplo 4

Sean G_1 y G_2 gráficas, como se muestran enseguida. Ya que $\delta(G_1) = 2, \Delta(G_2) = 4, \delta(G_2) = 2$ y $\Delta(G_1) = 4$. Se tiene que $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$. Luego, construyendo su gráfica gradial:



Las tablas tienen los mismos valores en sus respectivas filas, por lo cual solo es necesario hacer una para construir la gráfica gradial.

Teorema 6

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 \nabla G_2 = G_1^C \nabla G_2^C$.

Demostración.

Por definición de gráfica gradial y del complemento de una gráfica, se da que $V(G_1 \nabla G_2) = V(G_1) \cup$

$$V(G_2) = V(G_1^C) \cup V(G_2^C) = V(G_1^C \nabla G_2^C).$$

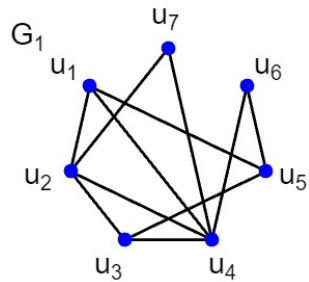
Ahora, sean $p_1 = |V(G_1)|$ y $p_2 = |V(G_2)|$. Como para cada $u \in V(G_1)$ se da que $\text{gr}_{G_1^C}(u) = p_1 - 1 - \text{gr}_{G_1}(u)$, en particular, $\Delta(G_1^C) = p_1 - 1 - \delta(G_1)$ y $\delta(G_1^C) = p_1 - 1 - \Delta(G_1)$. De forma análoga, para cada $v \in V(G_2)$ se tiene que $\text{gr}_{G_2^C}(v) = p_2 - 1 - \text{gr}_{G_2}(v)$, en particular, $\Delta(G_2^C) = p_2 - 1 - \delta(G_2)$ y $\delta(G_2^C) = p_2 - 1 - \Delta(G_2)$. De esta forma,

$$\begin{aligned} A(G_1 \nabla G_2) &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2)\} \cup \\ &\quad \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)\} \\ &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), p_1 - 1 - \text{gr}_{G_1}(u) + p_2 - 1 - \text{gr}_{G_2}(v) = p_1 - 1 - \delta(G_1) + p_2 - 1 - \Delta(G_2)\} \cup \\ &\quad \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), p_2 - 1 - \text{gr}_{G_2}(u) + p_1 - 1 - \text{gr}_{G_1}(v) = p_2 - 1 - \delta(G_2) + p_1 - 1 - \Delta(G_1)\} \\ &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1^C}(u) + \text{gr}_{G_2^C}(v) = \Delta(G_1^C) + \delta(G_2^C)\} \cup \\ &\quad \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2^C}(u) + \text{gr}_{G_1^C}(v) = \Delta(G_2^C) + \delta(G_1^C)\} \\ &= \{vu \mid v \in V(G_1), u \in V(G_2), \text{gr}_{G_1^C}(v) + \text{gr}_{G_2^C}(u) = \delta(G_1^C) + \Delta(G_2^C)\} \cup \\ &\quad \{vu \mid v \in V(G_2), u \in V(G_1), \text{gr}_{G_2^C}(v) + \text{gr}_{G_1^C}(u) = \delta(G_2^C) + \Delta(G_1^C)\} \\ &= A(G_1^C \nabla G_2^C) \end{aligned}$$

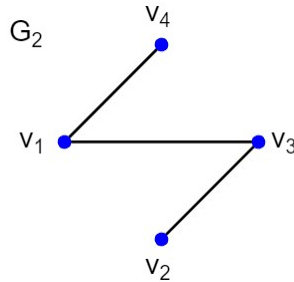
Por lo tanto, $G_1 \nabla G_2 = G_2 \nabla G_1$.

Ejemplo 5

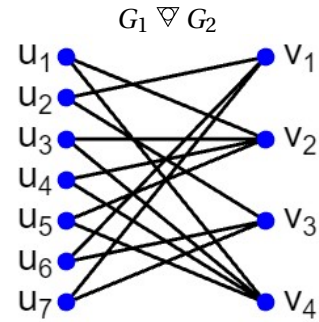
Sean G_1 y G_2 gráficas, como se muestran abajo y construyendo su gráfica gradial:



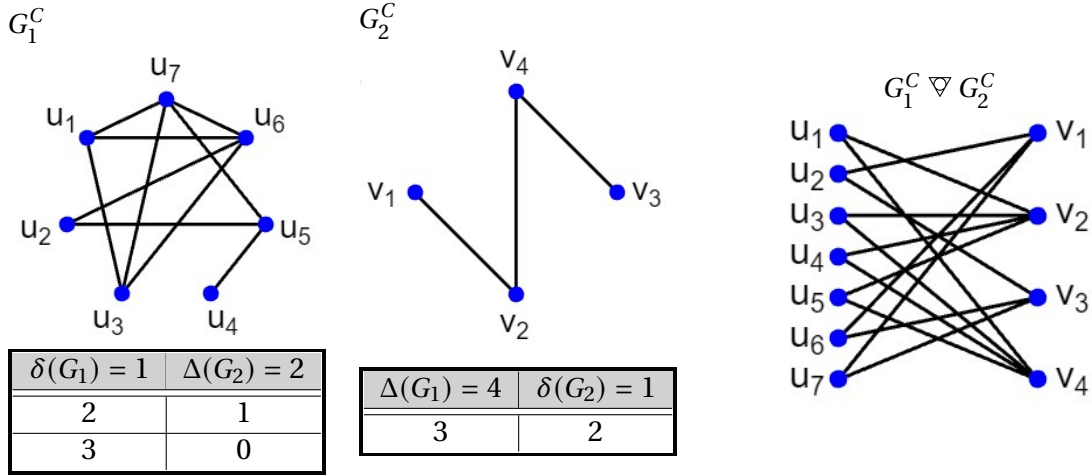
$\delta(G_1) = 2$	$\Delta(G_2) = 2$
3	1
4	0



$\Delta(G_1) = 5$	$\delta(G_2) = 1$
4	2



Ahora, se obtiene la gráfica gradial de sus complementos.



Las gráficas gradiales son iguales.

Teorema 7

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si para $u, v \in V(G_1)$ existe una uv -trayectoria en $G_1 \nabla G_2$ entonces existe una uv -trayectoria T en $G_1 \nabla G_2$ de longitud 2, con $T = (u, w, v)$ donde $w \in V(G_2)$.

Demostración.

Sea $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$ una uv -trayectoria en $G_1 \nabla G_2$ de longitud mínima. Suponiendo que $l(T) \neq 2$, ya que $G_1 \nabla G_2$ es bipartita con partición $\{V(G_1), V(G_2)\}$, se tiene que $l(T)$ es par, pues de lo contrario, se tendría que $v \in V(G_2)$, lo cual no puede ser. Así, $l(T) \geq 4$, por lo que se puede asegurar que cuanto menos existen $w_1, w_3 \in V(G_2)$ y $w_2 \in V(G_1)$ vértices de T .

Luego, sea $i \in \{0, 1, \dots, \Delta(G_1)\}$ tal que $\text{gr}_{G_1}(u) = \Delta(G_1) - i$. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que pasa lo siguiente: Como $uw_1 \in A(G_1 \nabla G_2)$ se da que $\text{gr}_{G_2}(w_1) = \delta(G_2) + i$, luego, ya que $w_1w_2 \in A(G_1 \nabla G_2)$, se obtiene que $\text{gr}_{G_1}(w_2) = \Delta(G_1) - i$ y puesto que $w_2w_3 \in A(G_1 \nabla G_2)$ se tiene que $\text{gr}_{G_2}(w_3) = \delta(G_2) + i$. De esta forma, $uw_3 \in A(G_1 \nabla G_2)$, por definición.

Después, sea $T' = (u = w_0, w_3, \dots, w_n = v)$ se da que $l(T) > l(T')$, lo cual es una contradicción a que T es de longitud mínima. Por lo tanto, $l(T) = 2$ y $T = (u, w_1, v)$ con $w_1 \in V(G_2)$.

Teorema 8

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si $\delta(G_1) = \delta(G_2) < \Delta(G_1) = \Delta(G_2)$ entonces $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

Demostración.

Sean $u, v \in V(G_1)$ tales que $\text{gr}_{G_1}(u) \neq \text{gr}_{G_1}(v)$ (esto se puede asegurar pues $\delta(G_1) < \Delta(G_1)$, por hipótesis). Suponiendo que existe una uv -trayectoria en $G_1 \nabla G_2$, por el Teorema (7), se tiene que existe una uv -trayectoria $T = (u, w, v)$ en $G_1 \nabla G_2$, con $w \in V(G_2)$.

Luego, sean $i, j \in \{0, 1, \dots, \Delta(G_1) - \delta(G_2)\}$ tales que $\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + i$ y $\text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_1) + j$. Debido a que $uw, wv \in A(G_1 \nabla G_2)$, suponiendo, sin pérdida de generalidad que, $\text{gr}_{G_2}(w) = \Delta(G_2) - i$ y $\text{gr}_{G_2}(w) = \Delta(G_2) - j$, por lo cual, $\Delta(G_2) - i = \Delta(G_2) - j \implies i = j$. Así, $\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + i = \delta(G_1) + j = \text{gr}_{G_1}(v)$, lo cual contradice que u y v tengan distinto grado en G_1 . De esta manera, no existe una uv -trayectoria en $G_1 \nabla G_2$.

Por lo tanto, $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

En el Ejemplo (4), se visualiza lo del teorema anterior.

Corolario 9

Si G_1 y G_2 son gráficas no regulares tales que $G_1 \cong G_2$, entonces $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

Demostración.

Ya que $G_1 \cong G_2$ se tiene que $\delta(G_1) = \delta(G_2) < \Delta(G_1) = \Delta(G_2)$, puesto que G_1 y G_2 no son regulares. Así, por el Teorema (8), $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

Definición 2

Sea G una gráfica con $\{\text{gr}(u) \mid u \in V(G)\} = \{\delta(G), \delta(G) + 1, \dots, \Delta(G) - 1, \Delta(G)\}$, se dice que G es **gradialmente sucesiva**.

Ejemplo 6

La gráfica G_1 del Ejemplo (4), es gradialmente sucesiva, porque los grados de sus vértices son 2, 3 y 4, los cuales son números consecutivos.

Observación. Sea G una gráfica. Para cualesquiera $u, v \in V(G)$, se define la relación " u se relaciona con v " si y solo si $\text{gr}(u) = \text{gr}(v)$.

- Ya que $\forall u \in V(G)$, se da que $\text{gr}(u) = \text{gr}(u)$ se tiene que " u se relaciona con u ".
- Si " u se relaciona con v " entonces $\text{gr}(u) = \text{gr}(v)$ si y solo si $\text{gr}(v) = \text{gr}(u)$, por lo que " v se relaciona con u ".
- Si " u se relaciona con v " y " v se relaciona con w ", entonces $\text{gr}(u) = \text{gr}(v)$ y $\text{gr}(v) = \text{gr}(w)$, por lo cual, $\text{gr}(u) = \text{gr}(w)$. De esta manera, " u se relaciona con w ".

Por lo tanto, la relación antes definida es de equivalencia, dando lugar a la siguiente definición.

Definición 3

Sea G una gráfica. La **clase i -gradial de G** , se define y denota como

$$C_G(i) = \{u \in V(G) \mid \text{gr}(u) = i\} \text{ para cada } i = \delta(G), \delta(G) + 1, \dots, \Delta(G).$$

Observaciones.

1. Cuando se hable de cualquier clase i -gradial de alguna gráfica, solo se le llamará **clase gradial**.
2. Sean G_1, G_2 gráficas y $u \in V(G_1)$ tal que $\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + i = \Delta(G_1) - j$ para algunos $i, j \in \{0, 1, \dots, \max\{\Delta(G_1) - \delta(G_1), \Delta(G_1)\}\}$. Si $u \text{ ady}_{G_1 \nabla G_2} v$, para algún $v \in V(G_2)$, entonces $\text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_2) - i$ o $\text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + j$. Además de que todos los vértices que tengan estos grados también serán adyacentes a u . De esta manera, cada $u \in V(G_1)$ puede ser adyacente a los vértices de a lo más 2 clases gradiales distintas de G_2 . Esto también se cumple de forma inversa.

Teorema 10

Sean G_1 y G_2 gráficas, con G_1 gradialmente sucesiva y no regular. Si hay n clases gradiales de G_2 y G_1 tiene más de $2n$ clases gradiales, entonces $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

Demostración.

Caso 1. Si existe $v \in V(G_2)$ tal que v no es adyacente a algún $u \in V(G_1)$, entonces $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

Caso 1. Si para cada $v \in V(G_2)$ se da que $v \text{ ady}_{G_1 \nabla G_2} u$ para algún $u \in V(G_1)$, entonces cada vértice de G_2 es adyacente a los vértices de a lo más 2 clases gradiales de G_1 . De esta manera, los vértices de G_2 son adyacentes a todos los vértices de hasta $2n$ clases gradiales de G_1 , por lo que existe $j \in \{\delta(G_1), \delta(G_1) + 1, \dots, \Delta(G_2)\}$ tal que los vértices de la clase j -gradial de G_1 no son adyacentes a ningún vértice de G_2 .

Por lo tanto, $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

Proposición 11

Sean G_1 y G_2 gráficas no regulares. Si hay $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$ y G_1 es gradialmente sucesiva, pero G_2 no lo es, entonces $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.

Demostración.

Como G_2 no es gradialmente sucesiva, existe $i \in \{0, 1, \dots, \Delta(G_2)\}$ tal que $C_{G_2}(\Delta(G_2) - i) = \emptyset$. Ya que $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$ se tiene que cualquier vértice de G_1 es adyacente a los vértices de a lo más una clase gradial de G_2 y viceversa. De esta forma, para todo $v \in C_{G_2}(\delta(G_1) + i) \neq \emptyset$, v es un vértice aislado pues en G_2 no existe un vértice de grado $\Delta(G_2) - i$.

Por lo tanto, $G_1 \nabla G_2$ es desconexa.