

4 de diciembre de 2023

Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemáticas

Teoría de gráficas

Trabajo de investigación: Gráfica Gradial

Profesora:

Berta Zavala Santana

Alumno:

*Osmar Dominique Santana
Reyes*

Semestre: 2023B

Fecha de Entrega: 4 de diciembre de 2023

Definición 1


Sean G_1 y G_2 gráficas tales que $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Se define a $G_1 \boxplus G_2 = (V, A)$ como la **gráfica gradial de G_1 y G_2** con

$$V(G_1 \boxplus G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) \quad \text{y}$$

$$A(G_1 \boxplus G_2) = \{ uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2) \} \\ \cup \{ uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2) + \Delta(G_1) \}$$

En términos de la definicion anterior, para hallar las aristas de la gráfica gradial, es necesario resolver las siguientes ecuaciones diofantinas:

$$\text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2) \quad \text{y} \\ \text{gr}_{G_2}(u') + \text{gr}_{G_1}(v') = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$$

donde $u, v' \in V(G_1)$ y $v, u' \in V(G_2)$. Algunas soluciones 

particulares para cada ecuación son:

$$\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1), \text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_2), \text{gr}_{G_2}(u') = \delta(G_2) \text{ y} \\ \text{gr}_{G_1}(v') = \Delta(G_1).$$

De esta manera, las soluciones para cada ecuación son:

$$\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + l, \text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_1) - l, \text{ con} \\ l = 0, 1, \dots, \text{máx} \{ \Delta(G_1) - \delta(G_1), \Delta(G_2) \} \text{ y}$$

$$\text{gr}_{G_2}(u') = \delta(G_2) + l, \text{gr}_{G_1}(v') = \Delta(G_1) - l, \text{ con} \\ l = 0, 1, \dots, \text{máx} \{ \Delta(G_2) - \delta(G_2), \Delta(G_1) \}$$

Ejemplo 1

Sean G_1 y G_2 gráficas, como se muestra abajo. Para construir la gráfica gradial de G_1 y G_2 , se puede seguir el siguiente procedimiento:

Ejemplo_1/Ejemplo1_G1.jpg Ejemplo_1/Ejemplo1_G2.jpg

1. Obtener el grado máximo y mínimo de cada gráfica. En este caso, $\delta(G_1) = 1$, $\delta(G_2) = 2$, $\Delta(G_1) = 2$ y $\Delta(G_2) = 4$.
2. Elaborar dos tablas donde la primer fila esté conformada por los grados anteriormente obtenidos como se muestra a continuación:


$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_1) = 2$	$\delta(G_2) = 2$	$\Delta(G_2) = 4$
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

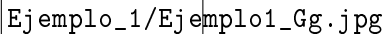
3. En las columnas de las tablas que corresponden a los grados máximos de cada gráfica, se coloca el número de la celda anterior disminuido en uno.

Mientras que las columnas que corresponden a los grados mínimos se coloca el número de la celda anterior aumentado en uno. Este procedimiento termina hasta que en las columnas del grado mínimo se llegue al grado máximo de la gráfica que corresponda, o en las columnas del grado mínimo se obtenga un cero.

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_1)$	$\Delta(G_1) = 2$	$\delta(G_2) = 2$
2		1	3
		0	4

4. Por último, se dibujan los vértices de ambas gráficas y se hacen adyacentes aquellos que tengan el grado indicado en cada fila, en su respectiva gráfica.

G_1  G_2



Ejemplo_1/Ejemplo1_Gg.jpg

Por cómo se definió la gráfica gradial, es claro que ningún par de vértices de cada una de las dos gráficas que la definen son adyacentes entre sí. Esto da lugar a la siguiente proposición.

Proposición 1

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 \boxplus G_2$ es bipartita.

Demostración.

Afirmación. $\{V(G_1), V(G_2)\}$ es una partición de $V(G_1 \boxplus G_2)$.

- ▶ $V(G_1)$ y $V(G_2)$ son no vacíos, por definición de gráfica.
- ▶ $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ por la definición de gráfica gradial.
- ▶ $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G_1 \boxplus G_2)$ por la definición de gráfica gradial.

De esta forma, $\{V(G_1), V(G_2)\}$ es una partición de $V(G_1 \boxplus G_2)$.

Luego, para $uv \in A(G_1 \boxplus G_2)$ se tiene que $u \in V(G_1)$ y $v \in V(G_2)$ ó, $v \in V(G_2)$ y $u \in V(G_1)$, por definición de gráfica gradial.

Ya que la gráfica gradial es bipartita se tiene que su número cromático es 2, por lo que hablar de coloración en esta gráfica no es relevante. Por lo tanto, este tema no se tratará.

Proposición 2

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 \boxplus G_2 = G_2 \boxplus G_1$.

Demostración.

Por definición de gráfica gradial, se da que $V(G_1 \boxplus G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) = V(G_2) \cup V(G_1) = V(G_2 \boxplus G_1)$. Luego,

$$\begin{aligned} A(G_1 \boxplus G_2) &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta\} \\ &\quad \cup \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta\} \\ &= \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta\} \\ &\quad \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta\} \\ &= A(G_2 \boxplus G_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G_1 \cong G_2 = G_1$.

concretas a las gráficas que definen la gráfica gradial. Debido a la Proposición (??), estas propiedades se le pueden atribuir a las gráficas de forma indistinta.

Observación. Debido a que toda gráfica siempre tiene vértices de grado mínimo o máximo, la gráfica gradial siempre tendrá al menos una arista, cuyos extremos son estos vértices. De esta manera, $A(G_1 \boxtimes_{\text{gradial}} G_2) \neq \emptyset$, para cualesquiera dos gráficas G_1 y G_2 .

Teorema 3

Sean G_1 y G_2 gráficas tal que G_1 es r -regular. Si $V' = \{v \in V(G_2) \mid \text{gr}(v) = \delta(G_2) \text{ ó } \text{gr}(v) = \Delta(G_2)\}$, entonces

1. la subgráfica inducida de $G_1 \boxtimes_{\text{gradial}} G_2$ por $V(G_1) \cup V'$ es bipartita completa.
2. Todo $v \in V(G_2) \setminus V'$ es aislado.

Demostración.

1. Sea $H = \langle V(G_1) \cup V' \rangle_{G_1 \sqcup G_2}$ grado 1.png se tiene que $\{V(G_1), V'\}$ es una partición de $V(G_1) \cup V'$, pues $V' \neq \emptyset$, $V(G_1) \cap V' \subseteq V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ y $V(G_1) \cup V' = V(H)$, por ser inducida.

Después, sea $uv \in A(H)$, por definición de gráfica gradial, $u \in V(G_1)$ y $v \in V' \subseteq V(G_2)$, ó $v \in V(G_1)$ y $v \in V' \subseteq V(G_2)$. Así, H es bipartita.

Ahora, sean $w \in V(G_1)$ y $x \in V'$. Como G_1 es r -regular, se da que $\Delta(G_1) = r = \delta(G_1) = \text{gr}_{G_1}(w)$. Y ya que $x \in V'$ se tiene que $w \text{ ady}_H x$, puesto que

$$\begin{aligned} \text{gr}_{G_1}(w) + \text{gr}_{G_2}(x) &= r + \Delta(G_2) = \delta(G_1) + \Delta(G_2) \quad \text{o} \\ \text{gr}_{G_1}(w) + \text{gr}_{G_2}(x) &= \delta(G_2) + r = \delta(G_2) + \Delta(G_1) \end{aligned}$$

(no hay más posibilidades, pues G_1 es r -regular y los vértices de V' son aquellos cuyo grado es

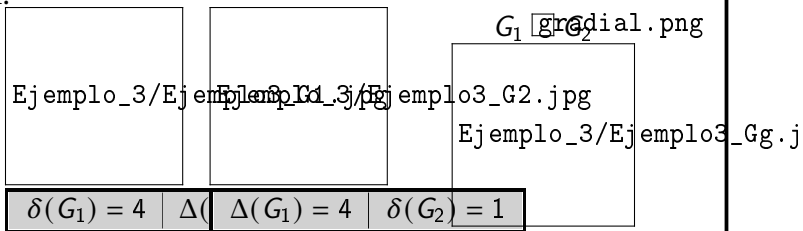
máximo o mínimo).

Por lo tanto, H es una gráfica bipartita completa.

2. Sea $v \in V(G_2) \setminus V'$ existen $i, j \in \{1, 2, \dots, \Delta(G_2) - 1\}$ tales que $\text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_2) + i = \Delta(G_2) - j$ (i, j son distintos de cero y de $\Delta(G_2)$, pues $v \notin V'$). Sea $u \in V(G_1)$ se da que $\text{gr}_{G_1}(u) = r$, por lo que u no es adyacente a v , ya que de lo contrario,
- $$\text{gr}_{G_1}(u) = \Delta(G_1) - i = r - i \text{ o}$$
- $$\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + j = r + j, \text{ lo cual no puede ser.}$$
- De esta forma, como $\forall v \in V(G_2) \setminus V'$, v no es adyacente a ningún otro vértice, se obtiene que v es un vértice aislado.

Ejemplo 3

Sean G_1 una gráfica 4-regular y G_2 una gráfica, como se muestran a continuación. Construyendo su gráfica gradial:



Como se puede observar, la subgráfica inducida por $V(G_1) \cup \{v_1\}$ de la gráfica gradial es bipartita completa.

En base al ejemplo anterior, es posible deducir que si una gráfica es regular y la otra solo tiene vértices de a lo más dos grados distintos, la gráfica gradial de estas es bipartita completa.

Corolario 4

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si G_1 es r -regular y para todo $v \in V(G_2)$ se da que $\text{gr}(v) = \delta(G_2)$ ó $\text{gr}(v) = \Delta(G_2)$, entonces $G_1 \boxtimes G_2$ es bipartita completa.

Demostración.

Ya que $\{v \in V(G_2) \mid \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_2) \text{ ó } \text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_2)\} = V(G_2)$, por hipótesis. Por el inciso I del Teorema (??), se tiene que $G_1 \boxtimes G_2$ es bipartita completa.

Corolario 5

Si G_1 y G_2 son gráficas r -regular y s -regular, respectivamente, entonces $G_1 \square G_2$ es bipartita completa.

Demostración.

Debido a que $\text{gr}_{G_2}(v) = s, \forall v \in V(G_2)$, se da que $\Delta(G_2) = s = \delta(G_2) = \text{gr}_{G_2}(v) \forall v \in V(G_2)$. De esta forma, por el Teorema (??), $G_1 \square G_2$ es bipartita completa.

Observaciones.

1. $K_n \square K_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues K_n y K_m son $(n-1)$ -regular y $(m-1)$ -regular, respectivamente.
2. $C_n \square C_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues C_n y C_m son gráficas 2-regular.

Ahora bien, si G_1 y G_2 son gráficas tales que

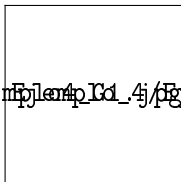
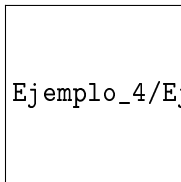
$\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$ entonces

$$A(G_1 \boxplus G_2) = \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) + \Delta(G_2)\} \\ = \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)\}$$

De esta manera, si hay dos gráficas que cumplan lo anterior solo es necesario seguir el procedimiento del Ejemplo (??), para construir la gráfica de gradial de ambas gráficas, pero con solo una de las dos tablas.

Ejemplo 4

Sean G_1 y G_2 gráficas, como se muestran enseguida. Ya que $\delta(G_1) = 2, \Delta(G_2) = 4, \delta(G_2) = 2$ y $\Delta(G_1) = 4$. Se tiene que $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$. Luego, construyendo su gráfica gradial:



G_1 gradial.png


Ejemplo_4/Ejemplo_4_G1.jpg

Ejemplo_4/Ejemplo_4_Gg.jpg

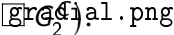
$\delta(G_1) = 2$	$\Delta(G_1) = 4$	$\delta(G_2) = 2$	$\Delta(G_2) = 4$
3	3	3	3
4	2	4	2

Las tablas tienen los mismos valores en sus respectivas filas, por lo cual solo es necesario hacer una para construir la gráfica gradial.

Teorema 6

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 \boxplus G_2 = G_1 \boxplus G_2$. 

Demostración.

Por definición de gráfica gradial y del complemento de una gráfica, se da que $V(G_1 \boxplus G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) = V(G_1^C) \cup V(G_2^C) = V(G_1^C \boxplus G_2^C)$. 

Ahora, sean $p_1 = |V(G_1)|$ y $p_2 = |V(G_2)|$. Como para cada $u \in V(G_1)$ se da que $\text{gr}_{G_1^C}(u) = p_1 - 1 - \text{gr}_{G_1}(u)$, en particular, $\Delta(G_1^C) = p_1 - 1 - \delta(G_1)$ y $\delta(G_1^C) = p_1 - 1 - \Delta(G_1)$. De forma análoga, para cada $v \in V(G_2)$ se tiene que $\text{gr}_{G_2^C}(v) = p_2 - 1 - \text{gr}_{G_2}(v)$, en particular, $\Delta(G_2^C) = p_2 - 1 - \delta(G_2)$ y

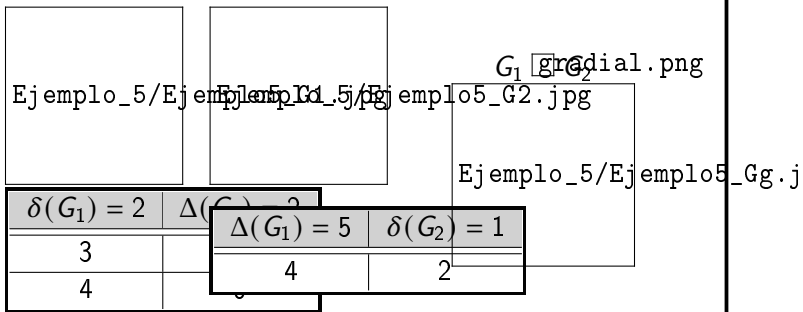
$\delta(G_2^C) = p_2 - 1 - \Delta(G_2)$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
 A(G_1 \boxtimes G_2) &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1}(u) + \text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_1) \\
 &\quad \text{or } \text{gr}_{G_2}(u) + \text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_2)\} \\
 &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), p_1 - 1 - \text{gr}_{G_1}(u) + p_2 - 1 - \text{gr}_{G_2}(v) \\
 &\quad = 1 - \Delta(G_2)\} \cup \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), p_2 - 1 - \text{gr}_{G_2}(v) \\
 &\quad + p_1 - 1 - \text{gr}_{G_1}(u) = 1 - \delta(G_2) + p_1 - 1 - \Delta(G_1)\} \\
 &= \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2), \text{gr}_{G_1^C}(u) + \text{gr}_{G_2^C}(v) = \Delta(G_1 \boxtimes G_2)\} \\
 &\quad \cup \{uv \mid u \in V(G_2), v \in V(G_1), \text{gr}_{G_2^C}(u) + \text{gr}_{G_1^C}(v) = \Delta(G_1 \boxtimes G_2)\} \\
 &= \{vu \mid v \in V(G_1), u \in V(G_2), \text{gr}_{G_1^C}(v) + \text{gr}_{G_2^C}(u) = \delta(G_1 \boxtimes G_2)\} \\
 &\quad \cup \{vu \mid v \in V(G_2), u \in V(G_1), \text{gr}_{G_2^C}(v) + \text{gr}_{G_1^C}(u) = \delta(G_1 \boxtimes G_2)\} \\
 &= A(G_1^C \boxtimes G_2^C)
 \end{aligned}$$

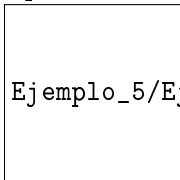
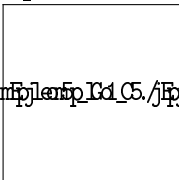
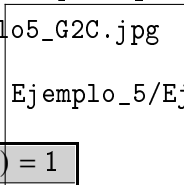
Por lo tanto, $G_1 \boxtimes G_2 = G_2 \boxtimes G_1$.

Ejemplo 5

Sean G_1 y G_2 gráficas, como se muestran abajo y construyendo su gráfica gradial:



Ahora, se obtiene la gráfica gradial de sus complementos.

G_1^C  G_2^C  G_1^C gradal.png

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_1) = 2$
2	
3	

$\Delta(G_1) = 4$	$\delta(G_2) = 1$
3	2

Las gráficas gradiales son iguales.

Teorema 7

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si para $u, v \in V(G_1)$ existe una uv -trayectoria en $G_1 \boxtimes G_2$, entonces existe una uv -trayectoria T en $G_1 \boxtimes G_2$ de longitud 2, con $T = (u, w, v)$ donde $w \in V(G_2)$.

Demostración.

Sea $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$ una uv -trayectoria en $G_1 \boxtimes G_2$ de longitud mínima. Suponiendo que $l(T) \neq 2$, ya que $G_1 \boxtimes G_2$ es bipartita con partición $\{V(G_1), V(G_2)\}$, se tiene que $l(T)$ es par, pues de lo contrario, se tendría que $v \in V(G_2)$, lo cual no puede ser. Así, $l(T) \geq 4$, por lo que se puede asegurar que cuanto menos existen $w_1, w_3 \in V(G_2)$ y $w_2 \in V(G_1)$ vértices de T .

Luego, sea $i \in \{0, 1, \dots, \Delta(G_1)\}$ tal que $\text{gr}_{G_1}(u) = \Delta(G_1) - i$. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que pasa lo siguiente: Como $uw_1 \in A(G_1 \boxtimes G_2)$ se da que $\text{gr}_{G_2}(w_1) = \delta(G_2) + i$, luego, ya que $w_1w_2 \in A(G_1 \boxtimes G_2)$, se tiene


Teorema 8

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si $\delta(G_1) = \delta(G_2) < \Delta(G_1) = \Delta(G_2)$ entonces $G_1 \square G_2$ es conexa.

Demostración.

Sean $u, v \in V(G_1)$ tales que $\text{gr}_{G_1}(u) \neq \text{gr}_{G_1}(v)$ (esto se puede asegurar pues $\delta(G_1) < \Delta(G_1)$, por hipótesis). Suponiendo que existe una uv -trayectoria en $G_1 \square G_2$, por el Teorema (??), se tiene que existe una uv -trayectoria $T = (u, w, v)$ en $G_1 \square G_2$, con $w \in V(G_2)$.


Luego, sean $i, j \in \{0, 1, \dots, \Delta(G_1) - \delta(G_2)\}$ tales que $\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + i$ y $\text{gr}_{G_1}(v) = \delta(G_1) + j$. Debido a que $uw, wv \in A(G_1 \square G_2)$, suponiendo, sin pérdida de generalidad que, $\text{gr}_{G_2}(w) = \Delta(G_2) - i$ y $\text{gr}_{G_2}(w) = \Delta(G_2) - j$, por lo cual, $\Delta(G_2) - i = \Delta(G_2) - j \implies i = j$. Así, $\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + i = \delta(G_1) + j = \text{gr}_{G_1}(v)$, lo cual contradice que u y v tengan distinto grado en G_1 . De esta manera, no existe

una uv -trayectoria en G_1 


Por lo tanto, G_1  G_2 es conexa.

En el Ejemplo (??), se visualiza lo del teorema anterior.

Corolario 9

Si G_1 y G_2 son gráficas no regulares tales que $G_1 \cong G_2$, entonces G_1  G_2 es conexa.

Demostración.

Ya que $G_1 \cong G_2$ se tiene que $\delta(G_1) = \delta(G_2) < \Delta(G_1) = \Delta(G_2)$, puesto que G_1 y G_2 no son regulares. Así, por el Teorema (??), G_1  G_2 es conexa.

Definición 2

Sea G una gráfica con $\{\text{gr}(u) \mid u \in V(G)\} = \{\delta(G), \delta(G) + 1, \dots, \Delta(G) - 1, \Delta(G)\}$, se dice que G es **gradialmente sucesiva**.

Ejemplo 6

La gráfica G_1 del Ejemplo (??), es gradialmente sucesiva, porque los grados de sus vértices son 2, 3 y 4, los cuales son números consecutivos.

Observación. Sea G una gráfica. Para cualesquiera $u, v \in V(G)$, se define la relación " u se relaciona con v " si y solo si $\text{gr}(u) = \text{gr}(v)$.

- ▶ Ya que $\forall u \in V(G)$, se da que $\text{gr}(u) = \text{gr}(u)$ se tiene que " u se relaciona con u ".
- ▶ Si " u se relaciona con v ", entonces $\text{gr}(u) = \text{gr}(v)$ si y solo si

$\text{gr}(v) = \text{gr}(u)$, por lo que " v se relaciona con u ".

- ▶ Si " u se relaciona con v " y " v se relaciona con w ", entonces $\text{gr}(u) = \text{gr}(v)$ y $\text{gr}(v) = \text{gr}(w)$, por lo cual, $\text{gr}(u) = \text{gr}(w)$. De esta manera, " u se relaciona con w ".

Por lo tanto, la relación antes definida es de equivalencia, dando lugar a la siguiente definición.

Definición 3

Sea G una gráfica. La **clase i -gradial de G** , se define y denota como

$$C_G(i) = \{u \in V(G) \mid \text{gr}(u) = i\} \text{ para cada } i = \delta(G), \delta(G) + 1, \dots, \Delta(G).$$

Observaciones.

1. Cuando se hable de cualquier clase i -gradial de alguna gráfica, solo se le llamará **clase gradial**.

2. Sean G_1, G_2 gráficas y $u \in V(G_1)$ tal que $\text{gr}_{G_1}(u) = \delta(G_1) + i = \Delta(G_1) - j$ para algunos $i, j \in \{0, 1, \dots, \max\{\Delta(G_1) - \delta(G_1), \Delta(G_1)\}\}$. Si u es adyacente a v en G_1 para algún $v \in V(G_2)$, entonces $\text{gr}_{G_2}(v) = \Delta(G_2) - i$ o $\text{gr}_{G_2}(v) = \delta(G_2) + j$. Además de que todos los vértices que tengan estos grados también serán adyacentes a u . De esta manera, cada $u \in V(G_1)$ puede ser adyacente a los vértices de a lo más 2 clases gradiales distintas de G_2 . Esto también se cumple de forma inversa.

Teorema 10

Sean G_1 y G_2 gráficas, con G_1 gradualmente sucesiva y no regular. Si hay n clases gradiales de G_2 y G_1 tiene más de $2n$ clases gradiales, entonces $G_1 \boxtimes G_2$ es conexa.

Demostración.

Caso 1. Si existe $v \in V(G_2)$ tal que v no es adyacente a algún $u \in V(G_1)$, entonces $G_1 \boxtimes G_2$ es conexa.

Caso 1. Si para cada $v \in V(G_2)$ se da que v ady para algún $u \in V(G_1)$, entonces cada vértice de G_2 es adyacente a los vértices de a lo más 2 clases gradiales de G_1 . De esta manera, los vértices de G_2 son adyacentes a todos los vértices de hasta $2n$ clases gradiales de G_1 , por lo que existe $j \in \{\delta(G_1), \delta(G_1) + 1, \dots, \Delta(G_2)\}$ tal que los vértices de la clase j -gradial de G_1 no son adyacentes a ningún vértice de G_2 .

Por lo tanto, $G_1 \boxtimes G_2$ es conexa.

Proposición 11

Sean G_1 y G_2 gráficas no regulares. Si hay $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$ y G_1 es gradualmente sucesiva, pero G_2 no lo es, entonces $G_1 \boxtimes G_2$ es conexa.

Demostración.

Como G_2 no es gradualmente sucesiva, existe $i \in \{0, 1, \dots, \Delta(G_2)\}$ tal que $C_{G_2}(\Delta(G_2) - i) = \emptyset$. Ya que $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$ se tiene que cualquier vértice de G_1 es adyacente a los vértices de a lo más una clase gradial de G_2 y viceversa. De esta forma, para todo $v \in C_{G_2}(\delta(G_1) + i) \neq \emptyset$, v es un vértice aislado pues en G_2 no existe un vértice de grado $\Delta(G_2) - i$.

Por lo tanto, $G_1 \boxtimes G_2$ es conexa.