Definición 1

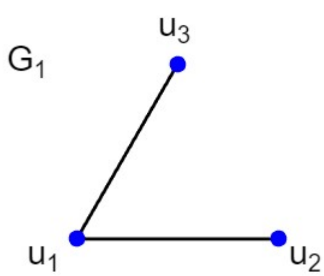
Sean G_1 y G_2 gráficas tales que $\mathrm{V}(G_1) \cap \mathrm{V}(G_2) = \emptyset$. Se define a $G_1 \triangledown G_2 = (\mathrm{V}, \mathrm{A})$ como la **gráfica gradial de** G_1 **y** G_2 con

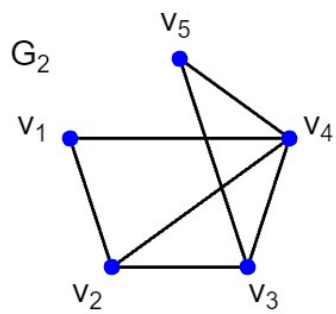
$$\mathrm{V}(G_1 \triangledown G_2) = \mathrm{V}(G_1) \cup \mathrm{V}(G_2) \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(G_1 \triangledown G_2) = \big\{ uv \mid u \in \mathrm{V}(G_1),\ v \in \mathrm{V}(G_2),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_1) + l \ \text{ y } \ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2) - l, \\ \text{con } l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_2)| \big\} \cup \big\{ uv \mid u \in \mathrm{V}(G_2),\ v \in \mathrm{V}(G_1),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_2) + l \ \text{ y } \\ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_1) - l,\ \text{con } l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_1)| \big\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Sean G_1 y G_2 gráficas como se muestra abajo. Para construir la gráfica de grados de G_1 y G_2, se puede seguir el siguiente procedimiento:





1. Obtener el grado máximo y mínimo de cada gráfica. En este caso, $\delta(G_1) = 1, \delta(G_2) = 2$, $\Delta(G_1) = 2$ y $\Delta(G_2) = 4$.

2. Elaborar dos tablas donde la primer fila esté conformada por los grados anteriormente obtenidos como se muestra a continuación:

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_2) = 4$

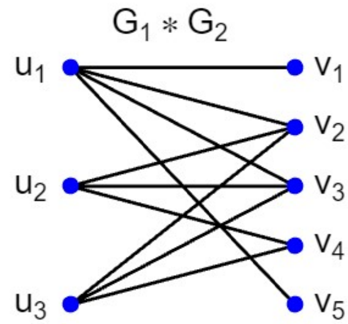
$\delta(G_2) = 2$	$\Delta(G_1) = 2$

3. En las columnas de las tablas que corresponden a los grados máximos de cada gráfica, se coloca el número de la celda anterior disminuido en uno, hasta llegar al cero. Mientras que las columnas que corresponden a los grados mínimos se coloca el número de la celda anterior aumentado en uno.

$\delta(G_1) = 1$	$\Delta(G_2) = 4$
2	3
3	2
4	1
5	0

$\delta(G_2) = 2$	$\Delta(G_1) = 2$
3	1
4	0

4. Por último, se dibujan los vértices de ambas gráficas y se hacen adyacentes aquellos que tengan el grado indicado en cada fila, en su respectiva gráfica.



Por cómo se definió la gráfica de grados, es claro que ningún par de vértices de cada una de las dos gráficas que la definen son adyacentes entre sí. Esto da lugar a la siguiente proposición.

Proposición 1

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 * G_2$ es bipartita.

Observación. Ya que la gráfica de grados es bipartita, su número cromático es 2.

Proposición 2

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 * G_2 = G_2 * G_1$.

En los próximos enunciados se pueden atribuir propiedades concretas a las gráficas que definen la gráfica de grados. Debido a la Proposición (2), estas propiedades también se le pueden atribuir a la otra gráfica.

Teorema 3

Sean G_1 y G_2 gráficas tal que G_1 es r-regular. Si $V' = \{v \in \mathrm{V}(G_2) \mid \mathrm{gr}(v) = \delta(G_2)\ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2)\}$, entonces

I) la subgráfica inducida de $G_1 * G_2$ por $\mathrm{V}(G_1) \cup V'$ es bipartita completa.
II) Todo $v \in \mathrm{V}(G_2) \setminus V'$ es aislado.

Corolario 4

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si G_1 es r-regular y para todo $v \in \mathrm{V}(G_2)$ se da que $\mathrm{gr}(v) = \delta(G_2)$ ó $\mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2)$, entonces $G_1 * G_2$ es bipartita completa.

Corolario 5

Si G_1 y G_2 son gráficas r-regular y s-regular, respectivamente, entonces $G_1 * G_2$ es bipartita completa.

Observaciones.

1. $K_n * K_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues K_n y K_m son $(n-1)$-regular y $(m-1)$-regular, respectivamente.

2. $C_n * C_m$ es bipartita completa $\forall n, m \in \mathbb{N}$, pues C_n y C_m son gráficas 2-regular.

Proposición 6

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si $\delta(G_1) + \Delta(G_2) = \delta(G_2) + \Delta(G_1)$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(G_1 * G_2) &= \{uv \mid u \in \mathrm{V}(G_1),\ v \in \mathrm{V}(G_2),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_1) + l \ \text{ y } \ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2) - l,\ \text{con} \\
&\qquad l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_2)|\} \\
&= \{uv \mid u \in \mathrm{V}(G_2),\ v \in \mathrm{V}(G_1),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_2) + l \ \text{ y } \ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_1) - l,\ \text{con} \\
&\qquad l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_1)|\}
\end{aligned}$$

Si dos gráficas cumplen la hipótesis de la Proposición (6), entonces solo es necesario seguir el procedimiento del Ejemplo (1), pero con solo una de las dos tablas, para construir la gráfica de grados de ambas gráficas.

Teorema 7

Si G_1 y G_2 son gráficas, entonces $G_1 * G_2 = G_1^C * G_2^C$.

Teorema 8

Sean G_1 y G_2 gráficas. Si para $u, v \in \mathrm{V}(G_1)$ existe una uv-trayectoria en $G_1 * G_2$ entonces existe una uv-trayectoria T en $G_1 * G_2$ de longitud 2, con $T = (u, w, v)$ donde $w \in \mathrm{V}(G_2)$.

Teorema 9

Sean G_1 y G_2 gráficas, con G_1 disconexa. Si $\delta(G_1) = \delta(G_2) < \Delta(G_1) = \Delta(G_2)$ entonces $G_1 * G_2$ es disconexa.

Teorema 10

Si G_1 y G_2 son gráficas no regulares tales que $G_1 \cong G_2$, entonces

1. $\mathrm{A}(G_1 * G_2) = \{uv \mid u \in \mathrm{V}(G_1),\ v \in \mathrm{V}(G_2),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_1) + l \ \text{ y } \ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_2) - l,$ con $l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_2)|\}$
   $\{uv \mid u \in \mathrm{V}(G_2),\ v \in \mathrm{V}(G_1),\ \mathrm{gr}(u) = \delta(G_2) + l \ \text{ y } \ \mathrm{gr}(v) = \Delta(G_1) - l,$ con $l = 0, 1, \ldots, |\mathrm{V}(G_1)|\}$
2. $G_1 * G_2$ es disconexa.