Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übungen 5.12. bis 9.12.

Analysis I

9. Übungsblatt: *Exponentialreihe, Umordnung von Reihen, Cauchy-Produkt*

Aufgabe 9.1

Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $e := \lim_{n\to\infty} s_n$ die Eulersche Zahl.

(a) Bestimmen Sie durch Abschätzen des Reihenrests eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, für die $|e - s_N| \leq 0,5 \cdot 10^{-4}$ gilt, und geben Sie den Wert von s_N an.
Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung $|e - s_n| \leq \frac{1}{n \cdot n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

(b) Zeigen Sie, dass die Eulersche Zahl e irrational ist.
Hinweis: Gegenteil annehmen und $e - s_n$ betrachten.

Aufgabe 9.2

Beweisen Sie die Gleichung $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Hinweis: Wir haben bereits gezeigt, dass die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ monoton wachsend ist. Es gilt die Ungleichung $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$ (warum?).

Aufgabe 9.3

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die binomische Reihe $b_\alpha(x)$ definiert durch

$$b_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots .$$

Zeigen Sie:

(a) Die binomische Reihe $b_\alpha(x)$ ist für die angegebenen α und x absolut konvergent.

(b) Es gilt:

   (i) $b_\alpha(x) \cdot b_\beta(x) = b_{\alpha+\beta}(x) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$,

   (ii) $b_0(x) = 1$,

   (iii) $b_{-\alpha}(x) = b_\alpha(x)^{-1}$,

   (iv) $b_\alpha(x) > 0$.

(c) Es ist $(b_{\frac{1}{2}}(x))^2 = 1 + x$

(d) Es ist $b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$

Hinweis: Für Binomialkoeffizienten gilt

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k},$$

was ohne Beweis verwendet werden darf.

Aufgabe 9.4

Die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

sei s. (Später wird $s = \ln 2$ gezeigt). Weisen Sie die Konvergenz der Reihen

$$s^+ := 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \ldots \quad \text{und} \quad s^- := 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + - - \ldots$$

nach und drücken Sie deren Summe durch s aus.

Hinweis: Stellen Sie Zusammenhänge zwischen den Partialsummen s_{3n}^+, s_{3n}^-, s_{2n} und s_{4n} her.

Aufgabe 9.5 (H)

[4] Sei $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Zeigen Sie:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot q^n.$$

Hinweis: Cauchy-Produkt von Reihen verwenden.

Aufgabe 9.6 (H)

[6] Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ jedoch divergiert.