Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 16.01. bis 20.01.

Analysis I

13. Übungsblatt: *Umkehrfunktion, Logarithmus, allgemeine Potenz*

Aufgabe 13.1

Für $a > 0$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a definiert als

$$\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x \log a).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $a > 1$ ist $\exp_a$ streng monoton wachsend, für $a \in (0,1)$ ist $\exp_a$ streng monoton fallend.

(b) Die Umkehrfunktion $\log_a \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ von $\exp_a$ existiert und ist stetig.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

Aufgabe 13.2

Seien $x, x_1, x_2, a, b > 0$, $a \neq 1$. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen.

(a) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

(b) $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a b$,

(c) Für $b \neq 1$ gilt $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Aufgabe 13.3

Sei $\alpha > 0$. Nach [Forster, (12.5) und (12.6)] gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \cdot \log x = 0 \text{ und } \lim_{x\downarrow 0} x^{\alpha} \cdot \log x = 0.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

(a) $\lim_{x\downarrow 0} x^x$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,

(c) $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$,

(d) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right) \cdot \frac{1}{x-1}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$,

(f) $\lim_{x\to 0} x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

Aufgabe 13.4

Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ genügen.

Aufgabe 13.5 (H)

[4] Zeigen Sie, dass der Sinus Hyperbolicus $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 12.6) streng monoton wachsend und bijektiv ist, und dass die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Area Sinus hyperbolicus) stetig ist und gegeben ist durch

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Bemerkung: Die Funktion $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und bijektiv und besitzt die Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ (Area Cosinus hyperbolicus) mit

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Aufgabe 13.6 (H)

Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Beweisen Sie:

(a) [2] Für alle $a \in [0,1)$ existiert der Grenzwert $f(a^+) := \lim_{x\downarrow a} f(x)$,
für alle $a \in (0,1]$ existiert der Grenzwert $f(a^-) := \lim_{x\uparrow a} f(x)$.

(b) [1] Für alle $a \in [0,1]$ gilt: f ist genau dann unstetig in a, wenn a Sprungstelle von f ist, d.h. wenn $f(a^-) \neq f(a^+)$ für $a \in (0,1)$ bzw. $f(0) \neq f(0^+)$ für $a = 0$ bzw. $f(1^-) \neq f(1)$ für $a = 1$ gilt.

(c) [2] Die Menge der Sprungstellen von f ist abzählbar.
Hinweis: Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_n := \left\{ x \in (0,1) \colon f(x^+) - f(x^-) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

(d) [1] Konstruieren Sie eine monoton wachsende Funktion $f \colon [0,1] \to [0,1]$, welche unendlich viele Sprungstellen besitzt.

(e) [2 Zusatzpunkte] Geben Sie eine monoton wachsende Funktion $f \colon [0,1] \to [0,1]$ an, deren Sprungstellen dicht in $[0,1]$ liegen.