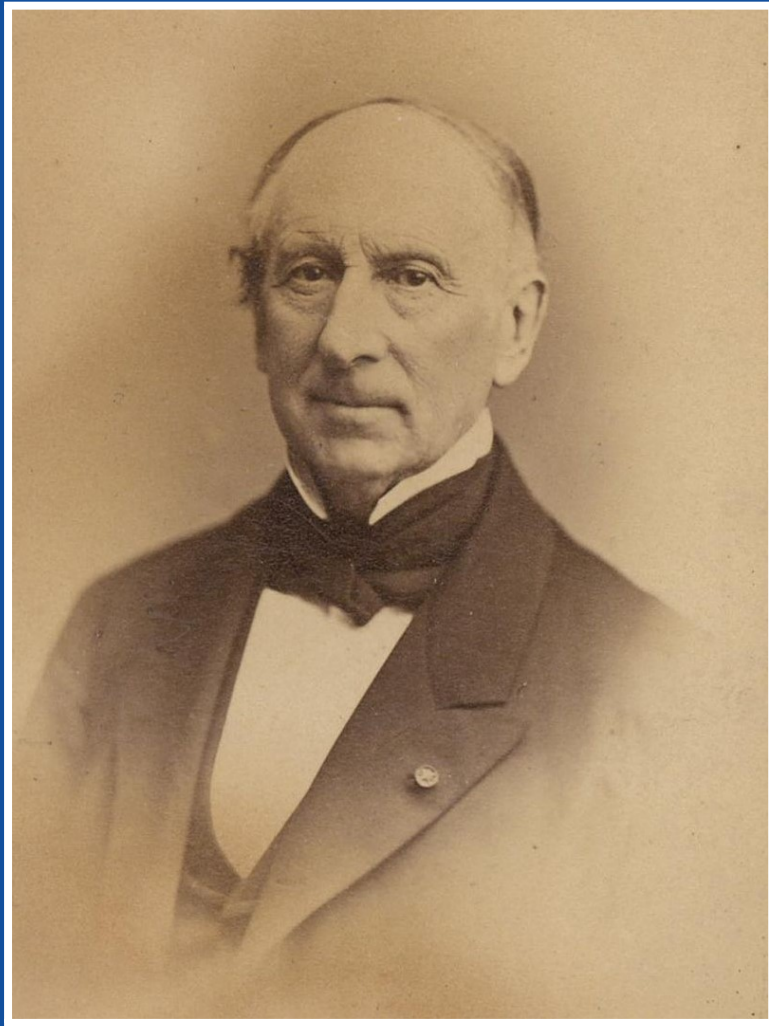


Übungen & Hausaufgaben

Analysis

WS2022/23-SS2023



Zehao Gao
M.Nummer 5052835

Inhaltsverzeichnis

1	1. Übungsblatt: Aussagen und Quantoren	6
1.1	Aufgabe 1.1	6
1.1.1	(a)	6
1.1.2	(b)	6
1.1.3	(c)	6
1.1.4	(d)	7
1.1.5	(e)	7
1.2	Aufgabe 1.2	8
1.2.1	8
1.3	Aufgabe 1.3	9
1.3.1	(a)	9
1.3.2	(b)	9
1.3.3	(c)	9
1.3.4	(d)	9
1.3.5	(e)	9
1.4	Aufgabe 1.4	10
1.5	Aufgabe 1.5(H)	11
1.5.1	(a)	11
1.5.2	(b)	11
1.5.3	(c)	11
1.6	Aufgabe 1.6(H)	12
1.6.1	Negation von φ	12
1.6.2	Konjunktion von φ und ψ	12
1.6.3	Disjunktion von φ und ψ	12
1.7	Tutorium	13
1.7.1	1. Aussagen	13
1.7.2	2. Verknüpfungen	13
1.7.3	3. Wahrheitstabelle	13
1.7.4	4. Quantor	13
2	2. Übungsblatt: Mengen, vollständige Induktion	15
2.1	Aufgabe 2.1	15
2.1.1	(a)	15
2.1.2	(b)	15
2.2	Aufgabe 2.2	16
2.2.1	(a)	16
2.2.2	(b)	16
2.3	Aufgabe 2.3	17
2.3.1	(a)	17
2.3.2	(b)	17
2.4	Aufgabe 2.4	19
2.4.1	(a)	19
2.4.2	(b)	19
2.5	Aufgabe 2.5(H)	21
2.5.1	(a)	21
2.5.2	(b)	21
2.5.3	(c)	21
2.6	Aufgabe 2.6(H)	22
2.6.1	(a)	22
2.6.2	(b)	23
2.7	Tutorium	24

3	3. Übungsblatt: <i>Relationen, vollständige Induktion, binomischer Satz</i>	25
3.1	Aufgabe 3.1	25
3.1.1	(a)	25
3.1.2	(b)	25
3.2	Aufgabe 3.2	26
3.3	Aufgabe 3.3	27
3.3.1	(a)	27
3.3.2	(b)	27
3.4	Aufgabe 3.4	28
3.4.1	(a)	28
3.5	Aufgabe 3.5	29
3.5.1	(a)	29
3.5.2	(b)	29
3.6	Aufgabe 3.6(H)	30
3.6.1	(a)	30
3.6.2	(b)	31
3.7	Aufgabe 3.7(H)	32
3.7.1	(a)	32
3.7.2	(b)	33
3.7.3	(c)	33
3.8	Tutorium	34
4	4. Übungsblatt:	35
4.1	Aufgabe 4.1	35
4.1.1	(a)	35
4.1.2	(b)	35
4.1.3	(c)	35
4.2	Aufgabe 4.2	36
4.2.1	(a)	36
4.2.2	(b)	36
4.3	Aufgabe 4.3	37
4.3.1	(a)	37
4.3.2	(b)	37
4.3.3	(c)	37
4.4	Aufgabe 4.4	38
4.5	Aufgabe 4.5	39
4.5.1	(a)	39
4.5.2	(b)	39
4.6	Aufgabe 4.6(H)	40
4.6.1	(a)	40
4.6.2	(b)	41
4.7	Aufgabe 4.7(H)	42
4.8	Tutorium	43
5	5. Übungsblatt:	44
5.1	Aufgabe 5.1	44
5.2	Aufgabe 5.2	45
5.2.1	(a)	45
5.2.2	(b)	45
5.2.3	(c)	46
5.3	Aufgabe 5.3	47
5.4	Aufgabe 5.4	48
5.4.1	(a)	48
5.4.2	(b)	48

5.4.3	(c)	48
5.5	Aufgabe 5.5	48
5.6	Aufgabe 5.6(H)	49
5.6.1	(a)	49
5.6.2	(b)	49
5.7	Aufgabe 5.7(H)	50
5.7.1	(a)	50
5.7.2	(b)	50
5.7.3	(c)	51
6	6. Übungsblatt:	52
6.1	Aufgabe 6.1	52
6.2	Aufgabe 6.2	52
6.3	Aufgabe 6.3	52
6.4	Aufgabe 6.4	52
6.5	Aufgabe 6.5(H)	53
6.5.1	(a)	53
6.5.2	(b)	53
6.6	Aufgabe 6.6(H)	53
6.6.1	(a)	53
6.6.2	(b)	53
6.6.3	(c)	54
7	7. Übungsblatt	55
7.1	Aufgabe 7.1	55
7.2	Aufgabe 7.2	55
7.3	Aufgabe 7.3	55
7.4	Aufgabe 7.4	55
7.5	Aufgabe 7.5	55
7.6	Aufgabe 7.6(H)	56
7.7	Aufgabe 7.7(H)	57
8	8. Übungsblatt	59
8.1	Aufgabe 8.1	59
8.2	Aufgabe 8.2	59
8.3	Aufgabe 8.3	60
8.4	Aufgabe 8.4	61
8.4.1	(a)	61
8.4.2	(b)	61
8.4.3	(c)	61
8.4.4	(d)	62
8.4.5	(e)	63
8.4.6	(f)	63
8.5	Aufgabe 8.5(H)	64
8.5.1	(a)	64
8.5.2	(b)	64
8.5.3	(c)	66
8.5.4	(d)	66
8.6	Aufgabe 8.6(H)	67
8.7	Tutorium	68

9	9. Übungsblatt	69
9.1	Aufgabe 9.1	69
9.2	Aufgabe 9.2	70
9.3	Aufgabe 9.3	71
9.4	Aufgabe 9.4	72
9.5	Aufgabe 9.5(H)	73
9.6	Aufgabe 9.6(H)	74
9.7	Tutorium	75
10	10. Übungsblatt	76
10.1	Aufgabe 10.1	76
10.2	Aufgabe 10.2	76
10.3	Aufgabe 10.3	77
10.3.1	(a)	77
10.3.2	(b)	77
10.3.3	(c)	77
10.3.4	(d)	77
10.4	Aufgabe 10.4	78
10.5	Aufgabe 10.5	78
10.6	Aufgabe 10.6	79
10.6.1	(a)	79
10.6.2	(b)	79
10.7	Tutorium	80
11	11. Übungsblatt	81
12	12. Übungsblatt	82
12.1	12.1	82
12.2	12.2	82
12.2.1	(c)	82
12.3	Aufgabe 12.3	83
12.4	Aufgabe 12.4	83
12.4.1	(a)	83
12.4.2	(c)	83
12.4.3	(d)	84
12.5	12.5	84
12.6	12.6	84
12.7	12.7	84
12.8	Tutorium	85
13	13. Übungsblatt	86
13.1	13.1	86
13.2	13.2	86
13.3	13.3	86
13.3.1	(a)	86
13.3.2	(b)	86
13.3.3	(c)	86
13.3.4	(d)	86
13.3.5	(e)	86
13.3.6	(f)	87
13.4	13.4	88
13.5	tut	90
14	14. Übungsblatt	91

15	15. Übungsblatt	93
16	16. Übungsblatt	94
17	17. Übungsblatt	97
18	18. Übungsblatt	104
19	19. Übungsblatt	109

1 1. Übungsblatt: Aussagen und Quantoren

1.1 Aufgabe 1.1

1.1.1 (a)

Beweis.

Sei p wahr:

$$p \text{ wahr} \Rightarrow \neg p \text{ falsch} \quad (1)$$

$$\Rightarrow (p \wedge \neg p) \text{ falsch} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \neg(p \wedge \neg p) \text{ wahr} \quad (3)$$

Sei p falsch:

$$p \text{ falsch} \Rightarrow \neg p \text{ wahr} \quad (4)$$

$$\Rightarrow (p \wedge \neg p) \text{ falsch} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \neg(p \wedge \neg p) \text{ wahr} \quad (6)$$

Folgerung : Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.2 (b)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	w	w

Folgerung : Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.3 (c)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)$	$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow (\neg p)$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Folgerung : Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.4 (d)

Beweis.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f	w
f	f	w	f	f	w	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w

Folgerung : Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.5 (e)

Die Negation von Satz "Satz vom Widerspruch" ist einfach eine Kontradiktion:

$$\neg(\neg(p \wedge \neg p)) \Leftrightarrow p \wedge \neg p \quad (\text{stets falsch})$$

1.2 Aufgabe 1.2

1.2.1

Lösung.

Wir vereinfachen nun die Formel $(\neg((p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \wedge p) \vee (q \Rightarrow q)) \Rightarrow p$
Nach Wahrheitstabelle gilt es:

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow p, (q \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$$

Damit vereinfachen wir die Formel zu:

$$(\neg(p \wedge p) \vee q) \Rightarrow p \tag{1}$$

Nach Wahrheitstabelle gilt es:

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

Damit vereinfachen wir die Formel zu:

$$(\neg p \vee q) \Rightarrow p \tag{2}$$

Nach Priorität von Verknüpfungen können wir noch vereinfachen:

$$\neg p \vee q \Rightarrow p \tag{3}$$

Bemerkung. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge b)$

1.3 Aufgabe 1.3

1.3.1 (a)

Lösung.

$$(x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1) \wedge (x = -1)$$

Negation

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 1 \Rightarrow (x = 1) \vee (x = -1)$$

1.3.2 (b)

Lösung.

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x^2 = -1)$$

Negation

$$(\exists x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x^2 = -1)$$

Bemerkung. Es gilt auch $\nexists x \in \mathbb{R}$

1.3.3 (c)

Lösung.

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge ((\frac{x}{6} \in \mathbb{Z}) \vee ((\frac{x}{4} \in \mathbb{Z}) \wedge (\frac{x}{9} \in \mathbb{Z}))) \Rightarrow (\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}) \wedge (\frac{x}{3} \in \mathbb{Z})$$

Negation

$$\exists n \in \mathbb{N} : (6|n) \vee ((4|n) \wedge (9|n)) \Rightarrow (2 \nmid n) \vee (3 \nmid n)$$

Bemerkung. $(a|b)$ bedeutet: b durch a teilbar

1.3.4 (d)

Lösung.

$$(\forall x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{P}) \wedge (y > x)$$

Negation

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{P} : p \leq n$$

1.3.5 (e)

Lösung.

$$(M \subset \mathbb{Z}) \Rightarrow (\exists! k \in M) \wedge (\forall g \in M \setminus k) \wedge (g > k)$$

Negation

$$\exists M \subset \mathbb{N} : \forall m \in M \exists n \in M \setminus \{m\} : m \geq n$$

oder

$$\exists m_1, m_2 \in M, m_1 \neq m_2 : m_1 < n, m_2 < n$$

1.4 Aufgabe 1.4

Wir nennen: G , H , N , D , R , Z , S

$$H \Rightarrow \neg G \quad (1)$$

$$G \wedge \neg R \Rightarrow D \quad (2)$$

$$\neg N \wedge \neg G \Rightarrow Z \vee D \quad (3)$$

$$\neg S \Rightarrow \neg D \quad (4)$$

$$G \Rightarrow S \vee H \quad (5)$$

$$R \Rightarrow N \vee G \quad (6)$$

$$Z \Rightarrow R \quad (7)$$

$$S \Rightarrow N \quad (8)$$

$$N \Rightarrow \neg R \wedge G \quad (9)$$

Folgerung : Er ist krank.

Nehmen wir an, dass:

$$\neg N \wedge \neg G$$

gilt:

$$\Rightarrow^{(3)} Z \vee G$$

falls:

$$Z = 1 \Rightarrow^{(1)} R \Rightarrow^{(6)} N \vee G$$

$$D = 1 \Rightarrow^{(4)} S \Rightarrow^{(8)} N$$

$$N = 1 \Rightarrow^{(9)} \neg R \wedge G \Rightarrow^{(7)} \neg Z$$

$$\Rightarrow^{(2)} S \vee H$$

$$\Rightarrow^{(1)} \neg H$$

$$N \wedge S \wedge \neg H \wedge \neg R \wedge G \wedge \neg Z \wedge D$$

Falls:

$$G \wedge \neg N$$

gilt es:

$$S \vee H$$

1.5 Aufgabe 1.5(H)

1.5.1 (a)

Beweis.

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	f	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w

Folgerung : Diese Formel ist Tautologie. □

1.5.2 (b)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Folgerung : Diese Formel ist Tautologie. □

1.5.3 (c)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Folgerung : Diese Formel ist Tautologie. □

1.6 Aufgabe 1.6(H)

1.6.1 Negation von φ

Beweis.

$$(\varphi|\varphi) \Leftrightarrow (\neg(\varphi \wedge \varphi)) \Leftrightarrow (\neg\varphi)$$

□

1.6.2 Konjunktion von φ und ψ

Beweis.

$$((\varphi|\psi)|(\varphi|\psi)) \Leftrightarrow (\neg((\neg(\varphi \wedge \psi)) \wedge (\neg(\varphi \wedge \psi)))) \Leftrightarrow (\neg(\neg(\varphi \wedge \psi))) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)$$

□

1.6.3 Disjunktion von φ und ψ

Beweis.

$$((\varphi|\varphi)|(\psi|\psi)) \Leftrightarrow ((\neg\varphi)|(\neg\psi)) \Leftrightarrow (\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))) \Leftrightarrow (\neg(\neg(\varphi \vee \psi))) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi)$$

□

1.7 Tutorium

1.7.1 1. Aussagen

Wir nehmen *wahr* 1 und *falsch* 0

Sei a ein Aussagen, dann gilt:

$$a = 1 \text{ oder } 0$$

1.7.2 2. Verknüpfungen

\neg *Negation*

\wedge *Konjuktion*

\vee *Disjunktion*

$\underline{\vee} \text{ XOR} \triangleq \text{ "entweder ... oder ... "}$

1.7.3 3. Wahrheitstabelle

Beispiel 1.1.

a	$\neg a$
0	1
1	0

1.7.4 4. Quantor

\forall "für alle"

\exists "existiert"

$\exists!$ "existiert genau eine"

Bemerkung.

Tautologie: Immer *wahr*

$$p \vee \neg p = 1$$

2 2. Übungsblatt: Mengen, vollständige Induktion

2.1 Aufgabe 2.1

2.1.1 (a)

(i)

$$A \cap B = \{2\}$$

$$D \setminus B = \{5\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap D = \emptyset$$

$$C \setminus D = \{1, 2\}$$

$$D \setminus C = \{5, 6\}$$

$$A \setminus (B \cap C) = \{1, 3\}$$

$$C \setminus (B \setminus A) = \{1, 2\}$$

$$(C \setminus B) \setminus A = \emptyset$$

(ii)

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

$$\mathcal{P}(B) \setminus \{B\} = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}\}$$

$$\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{4\}\}$$

(iii)

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$$

$$(C \times D) \setminus (A \times B) = \{(1, 5), (2, 5), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6)\}$$

2.1.2 (b)

M enthält 5 Elementen.

Bemerkung. $\{\emptyset, \emptyset\}$ ist $\{\emptyset\}$, deshalb verschwindet.

$$\emptyset \in M, \emptyset \subseteq M$$

$$\{\emptyset\} \in M, \{\emptyset\} \subseteq M$$

$$\{\{\emptyset\}\} \in M, \{\{\emptyset\}\} \subseteq M$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in M, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq M$$

$$\{\{\{\emptyset\}\}\} \notin M, \{\{\{\emptyset\}\}\} \subseteq M$$

$$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \notin M, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \subseteq M$$

2.2 Aufgabe 2.2

2.2.1 (a)

Beweis.

$$B \cap C = \{x \in B \wedge x \in C\} \quad (1)$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = \{x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \quad (2)$$

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\} \quad (3)$$

$$A \cup C = \{x \in A \vee x \in C\} \quad (4)$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \quad (5)$$

$$= \{x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} = A \cup (B \cap C) \quad (6)$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (7)$$

□

2.2.2 (b)

Beweis.

$$B \cap C = \{x \in B \wedge x \in C\} \quad (8)$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \cap C) = \{x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)\} \quad (9)$$

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \quad (10)$$

$$A \setminus C = \{x \in A \wedge (x \notin C)\} \quad (11)$$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in A \wedge (x \notin C))\} \quad (12)$$

$$= \{x \in A \wedge ((x \notin B) \vee (x \notin C))\} \quad (13)$$

$$= \{x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)\} = A \setminus (B \cap C) \quad (14)$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (15)$$

□

2.3 Aufgabe 2.3

2.3.1 (a)

Bemerkung. siehe Tutorium

Beweis.

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \quad (1)$$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \wedge (x \notin C)\} \quad (2)$$

$$= \{x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)\} \quad (3)$$

$$B \setminus C = \{x \in B \wedge (x \notin C)\} \quad (4)$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) = \{x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge (x \notin C))\} \quad (5)$$

$$= \{x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)\} \quad (6)$$

dann:

$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \quad (7)$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C) \quad (8)$$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C) \quad (9)$$

□

2.3.2 (b)

(i)

Beweis.

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{(S \in \mathcal{P}(A)) \wedge (S \in \mathcal{P}(B))\} \quad (10)$$

$$= \{(S \subseteq A) \wedge (S \subseteq B)\} \quad (11)$$

$$= \{((x \in S) \wedge (x \in A)) \wedge ((x \in S) \wedge (x \in B))\} \quad (12)$$

$$= \{(\forall x \in S) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (13)$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \{S \in \mathcal{P}(A \cap B)\} \quad (14)$$

$$= \{(\forall x \in S) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (15)$$

$$= \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \quad (16)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) \quad (17)$$

□

(ii)

Beweis.

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{(S \in \mathcal{P}(A)) \vee (S \in \mathcal{P}(B))\} \quad (18)$$

$$= \{((\forall x \in S) \wedge (x \in A)) \vee ((\forall x \in S) \wedge (x \in B))\} \quad (19)$$

$$= \{\forall x \in S \wedge (x \in A \vee x \in B)\} \quad (20)$$

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \quad (21)$$

□

2.4 Aufgabe 2.4

2.4.1 (a)

Beweis.

Wir beweisen nun $\forall (n \geq 5) \in \mathbb{N}, 2^n > n^2$.

Induktionsanfang :

Sei $n = 5$, dann gilt:

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

Induktionsvoraussetzung :

$\forall (n \geq 5) \in \mathbb{N}, 2^n > n^2$

Induktionsschritt :

Wir setzen $\tilde{n} = n + 1$, dann gilt:

$$2^{\tilde{n}} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \stackrel{\text{IV}}{>} n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n - 1 = (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2$$

Offenb. $(n-1)^2 - 2 > 0$ für $\forall (n \geq 5) \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

□

2.4.2 (b)

Beweis.

Wir beweisen nun $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsanfang :

Sei $n = 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=0}^0 k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}$$

Induktionsvoraussetzung :

Sei $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsschritt :

Wir setzen $\tilde{n} = n + 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\tilde{n}} k^2 &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \\&= \sum_{k=0}^{\tilde{n}} k^2 + (n+1)^2 \\&\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

□

2.5 Aufgabe 2.5(H)

2.5.1 (a)

(i) $\forall m \in M, \exists f \in F$, die mit m getanzt hat.

(ii) $\exists f \in F$, die mit $\forall m \in M$ getanzt hat.

2.5.2 (b)

When (ii) is true, (i) must be true.

When (ii) is false, (i) can be either true or false.

This corresponds *logical implication*

conclusion : (ii) \Rightarrow (i)

2.5.3 (c)

(i) $\exists m \in M, \nexists f \in F$, die mit m getanzt hat.

(ii) $\forall f \in F, \exists m \in M$, die nicht mit f getanzt hat.

2.6 Aufgabe 2.6(H)

2.6.1 (a)

Beweis.

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (1)$$

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \quad (2)$$

$$B \setminus A = \{x \in B \wedge (x \notin A)\} \quad (3)$$

$$\Rightarrow A \triangle B = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))\} \quad (4)$$

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\} \quad (5)$$

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\} \quad (6)$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \quad (7)$$

$$= \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))\} = A \triangle B \quad (8)$$

$$\Rightarrow A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (9)$$

□

2.6.2 (b)

Beweis.

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (10)$$

$$\Rightarrow (A \triangle B) \triangle C = (((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C) \cup (C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))) \quad (11)$$

$$\text{und } A \triangle (B \triangle C) = (A \setminus ((B \setminus C) \cup (C \setminus B))) \cup (((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \setminus A) \quad (12)$$

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \quad (13)$$

$$B \setminus A = \{x \in B \wedge (x \notin A)\} \quad (14)$$

$$\Rightarrow A \triangle B = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))\} \quad (15)$$

dann:

$$\Rightarrow (A \triangle B) \triangle C = \{(((x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))) \wedge (x \notin C)) \vee (x \in C \wedge \neg((x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))))\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &= \{(((x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)) \wedge (x \notin C)) \vee (x \in C \wedge \neg((x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)))\} \\ &= \{(x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C)) \wedge ((x \in B \wedge x \in C) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in C \wedge x \in A) \wedge (x \notin B)))\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= \{(x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C)) \wedge ((x \in B \wedge x \in C) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in C \wedge x \in A) \wedge (x \notin B)))\} \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \end{aligned} \quad (19)$$

analog:

$$\Rightarrow A \triangle (B \triangle C) = \{(x \in A \wedge \neg((x \in B \wedge (x \notin C)) \vee (x \in C \wedge (x \notin B)))) \vee (((x \in B \wedge (x \notin C)) \vee (x \in C \wedge (x \notin B))) \wedge (x \notin A))\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= \{(x \in A \wedge \neg((x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C))) \vee (((x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)) \wedge (x \notin A))\} \\ &= \{(x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C)) \wedge ((x \in B \wedge x \in C) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in C \wedge x \in A) \wedge (x \notin B)))\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &= \{(x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C)) \wedge ((x \in B \wedge x \in C) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in C \wedge x \in A) \wedge (x \notin B)))\} \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Rightarrow (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \quad (24)$$

□

2.7 Tutorium

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \setminus B \Rightarrow \forall x : (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$A \setminus B = \{x \in M \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

3 3. Übungsblatt: *Relationen, vollständige Induktion, binomischer Satz*

3.1 Aufgabe 3.1

3.1.1 (a)

1 = ja, 0 = nein						
	<i>reflexiv</i>	<i>transitiv</i>	<i>symmetrisch</i>	<i>antisym.</i>	Äquivalenzrelation	Ordnungsrelation
R_1	1	0	1	0	0	0
R_2	1	0	0	0	0	0
R_3	1	1	1	0	1	0

3.1.2 (b)

R umkehren und x, y umkehren.

3.2 Aufgabe 3.2

1 = ja, 0 = nein				
	<i>reflexiv</i>	<i>transitiv</i>	<i>symmetrisch</i>	Äquivalenzrelation
(a)	1	1	1	1
(b)	1	0	1	0
(c)	1	1	1	1

$x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$, dann $x - z = x - y + y - z \in \mathbb{Z}$

Äquivalenzklasse:

(a)

$xR_1y \Leftrightarrow x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$
 $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \sup\{z \in \mathbb{Z} | z \leq x\}$
 $R/R_1 = \{[\alpha] | \alpha \in [0, 1)\}$
 $[\alpha] = \{\alpha + z | z \in \mathbb{Z}\}$

(b)

keine

(c)

Äquivalenzklasse sind immer TM von ganzen Mengen.
 $[n] = \{n, -n\} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$

3.3 Aufgabe 3.3

3.3.1 (a)

Beweis.

Es sei:

$$R \subset A \times A, S \subset A \times A$$

Äquivalenzrelationen

refl.: $\forall x \in A, (x, x) \in R, (x, x) \in S$, da:

$\Rightarrow (x, x) \in R \cap S \Rightarrow R \cap S$ ist refl.

symm.: $\forall (x, y) \in R \cap S$,

$\Rightarrow (x, y) \in R, (x, y) \in S$

in $S \Rightarrow$ (symm. von S und R) $(y, x) \in R, (y, x) \in S$

$\Rightarrow (y, x) \in R \cap S$

trans.: $\forall (x, y), (y, z) \in R \cap S$,

$\Rightarrow (x, y), (y, z) \in R$ und $\in S$

\Rightarrow (transi. von R und S) $(x, z) \in R \cap (x, z) \in S$

$\Rightarrow (x, z) \in R \cap S$

□

3.3.2 (b)

R	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	
c			x

S	a	b	c
a	x		
b		x	x
c		x	x

$R \cup S$	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	x
c		x	x

$(a, b) \in R \cup S, (b, c) \in R \cup S, (a, c) \notin R \cup S$ contradiction.

3.4 Aufgabe 3.4

3.4.1 (a)

refl.: $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \leq \alpha \wedge \beta \leq \beta$ gilt.

trans.: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ wobei $x \leq y \wedge y \leq z$
 $\stackrel{def}{\Rightarrow} (x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \cap (y_1 \leq z_1 \wedge y_2 \leq z_2)$
 $\Rightarrow x \leq z$

anti.sym.: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
s.d. $x \leq y \wedge y \leq x$
 $\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \cap (y_1 \leq x_1 \wedge y_2 \leq x_2)$
 $\Rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$
 $\Rightarrow x = y$

3.5 Aufgabe 3.5

3.5.1 (a)

Beweis. IA: $n = 6$,

$$2^6 \cdot 6! = 46080 < 6^6$$

IV: Sei für n gilt $2^n \cdot n! < n^n$

IS:

$$\begin{aligned} 2^{n+1}(n+1)! &< (n+1)^{n+1} \\ &= 2^n \cdot n! \cdot 2 \cdot (n+1) < 2(n+1) \cdot n^n \end{aligned}$$

z.z $2 < (1 + \frac{1}{n})^n, \forall n > 6$
(Binomische Satz.)

□

3.5.2 (b)

Beweis. IA: $n = 1$

$$11^2 + 12 = 133$$

IV: $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133k$ für n gilt.

IS:

$$\begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{N}, \text{ sodass} \\ &11^{n+2} + 12(2n+1) = 133 \cdot k' \\ &11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + (133 + 11) \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot k \cdot 133 + 133 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot k \cdot 133 + 133 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 133(11 \cdot k + 12^{2n-1}) \end{aligned}$$

□

3.6 Aufgabe 3.6(H)

3.6.1 (a)

Beweis.

reflexiv

Sei $a \in M = \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 5 \cdot 0$

$\Rightarrow (a, a) \in R_1$

$\Rightarrow R_1$ *reflexiv*

symmetrisch

Sei $a, b \in M = \mathbb{Z}$ und $(a, b) \in R_1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a - b = 5k$

mit $b - a = -(a - b) = -5k = 5 \cdot (-k)$, $\exists \tilde{k} = -k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (b, a) \in R_1$

$\Rightarrow R_1$ *symmetrisch*

transitiv

Sei $a, b, c \in M = \mathbb{Z}$, und $(a, b), (b, c) \in R_1$

$\Rightarrow \exists k_1, a - b = 5k_1$ und $\exists k_2, b - c = 5k_2$

mit $a - c = a - b + b - c = 5k_1 + 5k_2 = 5(k_1 + k_2)$, $\exists \tilde{k} = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (a, c) \in R_1$

$\Rightarrow R_1$ *transitiv*

$\Rightarrow R_1$ ist Äquivalenzrelation auf M

□

Äquivalenzklassen:

$[a] = \{x \in M \mid x = a - 5k, k \in \mathbb{Z}\}$

$[b] = \{x \in M \mid x = b + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$

3.6.2 (b)

Beweis.

reflexiv

Sei $a, b \in M$, $(a, b) \in M \times M$
 mit $((a, b), (a, b)) : a^2 + b^2 = a^2 + b^2$
 $\Rightarrow ((a, b), (a, b)) \in R_2$
 $\Rightarrow R_2$ *reflexiv*

symmetrisch

Sei $a, b, c, d \in M$, $(a, b), (c, d) \in M \times M$, mit $((a, b), (c, d)) \in R_2$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
 mit $((c, d), (a, b)) : c^2 + d^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
 $\Rightarrow ((c, d), (a, b)) \in R_2$
 $\Rightarrow R_2$ *symmetrisch*

transitiv

Sei $a, b, c, d, e, f \in M$, $(a, b), (c, d), (e, f) \in M \times M$, mit $((a, b), (c, d)), ((c, d), (e, f)) \in R_2$
 dann gilt

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 + d^2, \quad c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= e^2 + f^2 \\ \Rightarrow ((a, b), (e, f)) &\in R_2 \\ \Rightarrow R_2 &\text{ transitiv} \end{aligned}$$

$\Rightarrow R_2$ ist Äquivalenzrelation auf M

□

Äquivalenzklassen:

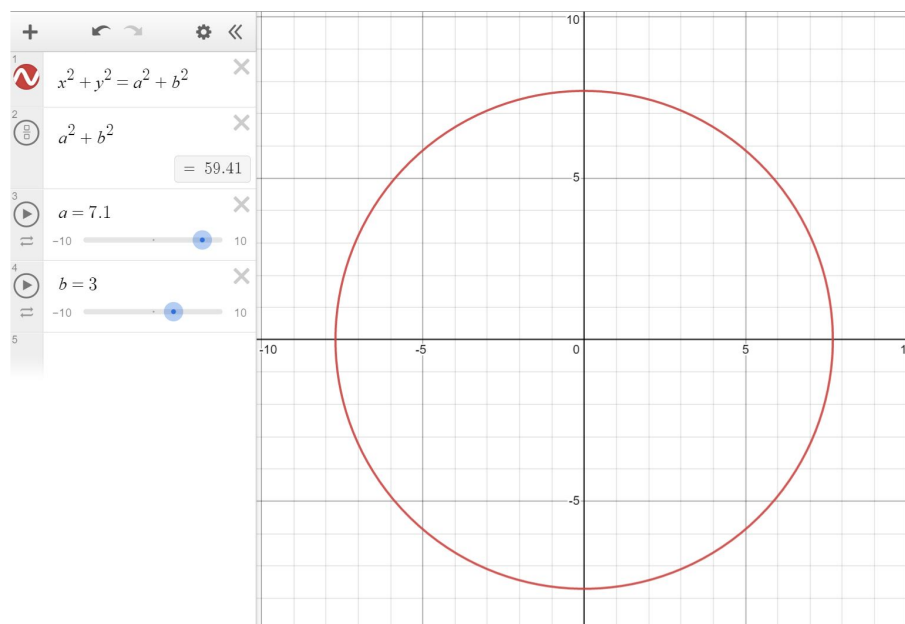
Wir konstruieren eine Ebene \mathbb{R}^2 , mit Koordinaten x und y .

Dann $[a, b] = \{(x, y) \in M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = a^2 + b^2, a, b, x, y \in \mathbb{R}\}$

d.h. nehmen wir beliebig (a, b) aus M , dann haben wir in \mathbb{R}^2 einen Kreis mit Radius $a^2 + b^2$.

Alle (x, y) , die aus Punkten von diesem Kreis besteht, erfüllt $(x, y) R_2 (a, b)$.

Hier ein Beispiel:



3.7 Aufgabe 3.7(H)

3.7.1 (a)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt:

$$a_n = a_0 = 0 + 0 + 0 = 0 \in \mathbb{N}$$

$$\text{IV: } a_n = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$$

$$\text{IS: } \tilde{n} = n + 1$$

$$\begin{aligned} a_{\tilde{n}} = a_{n+1} &= a_n = \frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} \\ &= \frac{n+1}{6} + \frac{n^2+2n+1}{2} + \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3} \\ &= \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{2} + \frac{3n^2+3n+1}{3} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} a_n + \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{2} + \frac{3n^2+3n+1}{3} \\ &= a_n + \frac{6n^2+12n+6}{6} \\ &= a_n + n^2 + 2n + 1 \\ &= a_n + (n+1)^2 \\ (n+1)^2 \in \mathbb{N} &\Rightarrow a_n + (n+1)^2 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow a_{n+1} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

3.7.2 (b)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt

$$b_n = b_0 = 5^0 - 1 = 4 \cdot k, \quad k = 0 \in \mathbb{N}$$

IV: $b_n = 5^n - 1 = 4 \cdot k, \quad \exists k \in \mathbb{N}$

IS: $\tilde{n} = n + 1$

$$\begin{aligned} b_{\tilde{n}} &= b_{n+1} = 5^{n+1} - 1 \\ &= 5^n \cdot 5 - 1 \\ &= 5^n \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 4 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 5 \cdot 4 \cdot k - 4 \\ &= 4 \cdot (5 \cdot k - 1) \\ \exists \tilde{k} &= 5 \cdot k - 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow b_{n+1} = 4 \cdot \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

3.7.3 (c)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt

$$c_n = c_0 = 6^0 - 5 \cdot 0 + 4 = 5 = 5 \cdot k, \quad k = 1 \in \mathbb{N}$$

IV: $c_n = 6^n - 5n + 4 = 5 \cdot k, \quad \exists k \in \mathbb{N}$

IS: $\tilde{n} = n + 1$

$$\begin{aligned} c_{\tilde{n}} &= c_{n+1} = 6^{n+1} - 5(n+1) + 4 \\ &= 6^n \cdot 6 - 5n - 1 \\ &= (6^n - 5n + 4 + 5n - 4) \cdot 6 - 5n - 1 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} (5 \cdot k + 5n - 4) \cdot 6 - 5n - 1 \\ &= 30k + 30n - 24 - 5n - 1 \\ &= 5(6k + 7n - 5) \\ \exists \tilde{k} &= 6k + 7n - 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow c_{n+1} = 5 \cdot \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

3.8 Tutorium

M, N Mengen, $M \times N$

$R \subseteq M \times N$

Falls $\#M < \infty \wedge \#N < \infty$

z.B. $M = \{a, b\}$, $N = \{c, d\}$, dann $R = \{(a, c), (b, d)\}$ und $R^{-1} = \{(c, a), (d, b)\}$

4 4. Übungsblatt:

4.1 Aufgabe 4.1

4.1.1 (a)

$$\binom{2}{5}$$

$$\binom{2}{5} = \frac{2-4}{5} \binom{2}{4} = -\frac{2}{5} \frac{2-3}{4} \binom{2}{3} = \frac{2}{5} \frac{1}{4} \frac{2-2}{3} \binom{2}{2} = 0$$

4.1.2 (b)

$$\binom{-1}{k}$$

$$\binom{-1}{0} = 1, \binom{-1}{1} = -1, \binom{-1}{2} = 1,$$

Beh. $\binom{-1}{k} = (-1)^k$, mit Induktion.

Beweis.

IA:..

IV:..

IS: $\binom{-1}{k+1}$

$$\binom{-1}{k+1} = \frac{-1-k}{k+1} \binom{-1}{k} = (-1)^{k+1}$$

□

4.1.3 (c)

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}-2}{3} \binom{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{5}{6} \frac{-0.5-1}{2} \binom{-0.5}{1} = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{-0.5-0}{1} \binom{-0.5}{0} = -\frac{5}{16}$$

4.2 Aufgabe 4.2

4.2.1 (a)

$$\text{z.Z. } \binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} \frac{x}{k}$$

Beweis.

$$\text{IA: } k=1, \text{ LS} = \binom{x}{1} = \frac{x-0}{1} \binom{x}{0} = \frac{x}{1} \binom{x-1}{0}$$

IV: für k gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x}{k} \binom{x-1}{k-1}$$

Ziel:

$$\binom{x}{k+1} = \frac{x}{k+1} \binom{x-1}{k}$$

IS:

$$\begin{aligned} \binom{x}{k+1} &= \frac{x}{k+1} \binom{x}{k} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{x-k}{k+1} \frac{x}{k} \binom{x-1}{k-1} \\ &= \frac{x}{k+1} \frac{x-k}{k} \frac{k}{x-k} \frac{x-k}{k} \binom{x-1}{k-1} \\ &= \frac{x}{k+1} \binom{x-1}{k} \end{aligned}$$

□

4.2.2 (b)

$$\text{z.Z. } \binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}$$

Beweis.

$$\binom{x+1}{k} = \frac{x+1}{k} \binom{x+1-1}{k-1} = \frac{x+1+k-k}{k} \binom{x}{k-1} = \underbrace{\frac{\overbrace{x+1-k}^{x-(k-1)}}{k} \binom{x}{k-1}}_{\binom{x}{k}} + \binom{x}{k-1}$$

□

4.3 Aufgabe 4.3

$$x^0 := 1, \quad x^{n+1} = x^n \cdot x$$

4.3.1 (a)

Beweis. z.Z. $x^m x^n = x^{m+n}$

Sei $\forall n \in \mathbb{N}_0$ fest \rightarrow Induktion.

$$\text{IA: } n = 0: x^m x^n = x^m \cdot 1 = x^m = x^{m+n}$$

$$\text{IV: } x^m x^n = x^{m+n}$$

$$\text{Ziel: } x^m x^{n+1} = x^{m+n+1}$$

$$\text{IS: LS} = x^m (x^n x) \stackrel{\text{Ass. Mult}}{=} (x^m x^n) x = x^{m+n} x = x^{(m+n)+1} = x^{m+(n+1)} \quad \square$$

4.3.2 (b)

z.Z. $(x^m)^n = x^{mn}$

Beweis.

Sei $\forall m \in \mathbb{N}_0$ fest

$$\text{IA: } n = 0, : (x^m)^0 = 1 = x^0 = x^{m \cdot 0}$$

$$\text{IV: } (x^m)^n = x^{mn}$$

$$\text{Ziel: } (x^m)^{n+1} = x^{m(n+1)}$$

$$\text{IS: } (x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot x^m \stackrel{\text{IV}}{=} x^{mn} x^m \stackrel{(a)}{=} x^{mn+n}$$

\square

4.3.3 (c)

Beweis.

$$\text{IA: } n = 0 \rightarrow (x \cdot y)^n = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 y^0$$

IV:

$$\text{IS: } (xy)^{n+1} = (xy)^n (xy) \stackrel{\text{IV}}{=} (x^n y^n) (xy) \stackrel{\text{Field-Axiom}}{=} (x^n x) (y^n y) = x^{n+1} y^{n+1} \quad \square$$

4.4 Aufgabe 4.4

See definition of Group, Monoid etc.

4.5 Aufgabe 4.5

Inverse: Sei (G, \cdot) Gruppe

Man sage dass $f \in G$ ist Inverse von $g \in G$

$\stackrel{Def}{\Leftrightarrow} f \cdot g = g \cdot f = e$, Notation: $f =: g^{-1}$

4.5.1 (a)

Beweis.

z.z. $(a^{-1})^{-1} = a$ falls $a \neq 0$

$\Leftrightarrow a$ ist Inv. von $a^{-1} \Leftrightarrow a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Das gilt da a Inv. von a^{-1}

□

4.5.2 (b)

Beweis.

z.z. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$(ab)(a^{-1}b^{-1}) \stackrel{F.Axiom}{=} (a \cdot a^{-1})(b \cdot b^{-1}) = 1$

$(a^{-1}b^{-1})(ab) \stackrel{F.Axiom}{=} (a^{-1} \cdot a)(b^{-1} \cdot b) = 1$

□

4.6 Aufgabe 4.6(H)

4.6.1 (a)

Beweis.

z.z. $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, es gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ \binom{n+1}{k+1} &= \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} \\ \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

betrachten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n+1} \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

dann, z.z. $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1} = 1$$

IA: Sei $n = 1$, es gilt

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1+1}{k+1} = 1 \binom{2}{1} + (-1) \binom{2}{2} = 2 - 1 = 1$$

IV: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, es gilt

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1} = 1$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$, wir betrachten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\tilde{n}} (-1)^k \binom{\tilde{n}+1}{k+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+2}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+2} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 1 + 0 + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1} \\ &= 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

□

4.6.2 (b)

Vermutung: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) = \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^m (n+i)$$

Beweis.

IA: Sei $n = 1$, es gilt

$$\sum_{k=1}^1 \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) = \prod_{i=0}^{m-1} (1+i) = \frac{1}{1+m} \prod_{i=0}^m (1+i)$$

IV: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) = \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^m (n+i)$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$, wir betrachten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) &= \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) \\ &= \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) + \prod_{i=0}^{m-1} (n+1+i) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^m (n+i) + \prod_{i=0}^{m-1} (n+1+i) \\ &= \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^m (n+i) + \frac{1}{n} \prod_{i=0}^m (n+i) \\ &= \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} \right) \prod_{i=0}^m (n+i) \\ &= \frac{n+m+1}{n(m+1)} \prod_{i=0}^m (n+i) \\ &= \frac{1}{m+1} \frac{n+m+1}{n} \prod_{i=0}^m (n+i) \\ &= \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^m (n+1+i) \end{aligned}$$

□

4.7 Aufgabe 4.7(H)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt

$$\sum_{k=0}^0 (-1)^k \cdot \binom{x}{k} = (-1)^0 \cdot \binom{x}{0} = 1 = (-1)^0 \cdot \binom{x-1}{0}$$

IV: $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{x}{k} = (-1)^n \cdot \binom{x-1}{n}$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$, wir betrachten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\tilde{n}} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{x}{k} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{x}{n+1} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} (-1)^n \cdot \binom{x-1}{n} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{x}{n+1} \\ &= -(-1)^{n+1} \cdot \binom{x-1}{n} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{x}{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \left(\binom{x}{n+1} - \binom{x-1}{n} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \left(\binom{x-1}{n+1} + \binom{x-1}{n} - \binom{x-1}{n} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \binom{x-1}{n+1} \end{aligned}$$

□

4.8 Tutorium

GAUSS KLAMMERN oder FLOOR AND CEILING FUNCTION

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x - y \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$

$$\text{"}\Leftarrow\text{" } x - y = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

$$\Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{" } x - y \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: x - y = k$$

$$\Rightarrow x - \lfloor x \rfloor - (y - \lfloor y \rfloor) =$$

5 5. Übungsblatt:

5.1 Aufgabe 5.1

$$n^{n+1} \begin{pmatrix} (=) \\ (<) \\ (>) \end{pmatrix} (n+1)^n$$

$$n = 3, LS = 3^4 = 81 \quad RS = 4^3 = 64$$

Vermutung: $n^{n+1} > (n+1)^n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 &> \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} \right) \\ (n-k)! \text{ hat } k \text{ Faktoren} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \underbrace{\prod_{i=1}^k \frac{n-k+i}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{k!} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{5}{2} + \underbrace{\sum_{k=3}^n \frac{1}{k!}}_{\substack{\leq \frac{1}{6} \\ \leq \frac{n-2}{6}}} \right) \\ &\leq \frac{1}{6} + \frac{13}{6n} \\ n \in \mathbb{N}_{>3} &= \frac{1}{6} + \frac{13}{18} = \frac{16}{18} < 1 \end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 5.2

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \text{ mit } b \neq a$$

5.2.1 (a)

(i)

Beweis.

$$\text{z.Z. } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\begin{aligned} & (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) \\ & a \cdot (b^{-1}(c \cdot d^{-1})) \\ & a(b^{-1}(d^{-1} \cdot c)) \\ & a((b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot c) \\ & a(c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1})) \\ & (a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) \\ & (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} \end{aligned}$$

□

(ii)

Beweis.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

$$\begin{aligned} LS &= \frac{(a \cdot b^{-1})}{c \cdot d^{-1}} = (a \cdot b^{-1})((c \cdot d^{-1})^{-1}) \\ &= (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot d) \\ &= a \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1}) \cdot d \\ &= a \cdot d \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

□

5.2.2 (b)

Field axioms

[https://en.wikipedia.org/wiki/Field_\(mathematics\)#Classic_definition](https://en.wikipedia.org/wiki/Field_(mathematics)#Classic_definition)

5.2.3 (c)

5.3 Aufgabe 5.3

5.4 Aufgabe 5.4

5.4.1 (a)

$$|x - a| < \epsilon \Leftrightarrow x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

dann $x \geq a$ oder $x < a$

5.4.2 (b)

5.4.3 (c)

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$$

falls $x > 0$, dann $x + 1 < x$

$$((x+1) + x) \frac{1}{x} < (x+1)x \frac{1}{x+1}$$

dann $x + 1 < x$ *contradiction* denn $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > x$
!!!!!!3 Falle.

5.5 Aufgabe 5.5

5.6 Aufgabe 5.6(H)

5.6.1 (a)

Beweis.

$$\text{z.z. } \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned}\frac{ad}{bd} &= (ad)(bd)^{-1} \\ &= (ad)(b^{-1}d^{-1}) \\ &= a(d(b^{-1}d^{-1})) \\ &= a(d(d^{-1}b^{-1})) \\ &= a((dd^{-1})b^{-1}) \\ &= ab^{-1} \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

□

5.6.2 (b)

Beweis.

$$\text{z.z. } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\begin{aligned}\frac{ad + bc}{bd} &= (ad + bc)(bd)^{-1} \\ &= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} \\ &= (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) \\ &= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(b^{-1}d^{-1}) \\ &= a(d(d^{-1}b^{-1})) + c(b(b^{-1}d^{-1})) \\ &= a((dd^{-1})b^{-1}) + c((bb^{-1})d^{-1}) \\ &= ab^{-1} + cd^{-1} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d}\end{aligned}$$

□

5.7 Aufgabe 5.7(H)

Ohne weitere Meldung sei $x \in \mathbb{R}$

5.7.1 (a)

Wenn $x - 3 > 0$, daraus folgt $x > 3$ und $x + 1 > 0$, dann

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1} &< \frac{1}{x-3} \\ 2(x-3) &< x+1 \\ x &< 7 \quad \text{widerspruchsfrei} \\ \Rightarrow \quad 3 &< x < 7\end{aligned}$$

Wenn $x - 3 < 0$ und $x + 1 > 0$, daraus folgt $-1 < x < 3$, dann

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1} &< \frac{1}{x-3} \\ 2(x-3) &> x+1 \\ x &> 7 \quad \nexists\end{aligned}$$

Wenn $x + 1 < 0$, daraus folgt $x < -1$ und $x - 3 < 0$, dann

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1} &< \frac{1}{x-3} \\ 2(x-3) &< x+1 \\ x &< 7 \quad \text{widerspruchsfrei} \\ \Rightarrow \quad x &< -1\end{aligned}$$

Folgerung : $(x < -1) \vee (3 < x < 7)$

5.7.2 (b)

Wenn $x - 3 \geq 0$, daraus folgt $x \geq 3$ und $x + 1 > 0$, dann

$$\begin{aligned}|x+1| + |x-3| &< 6 \\ x+1 + x-3 &< 6 \\ x &< 4 \quad \text{widerspruchsfrei} \\ \Rightarrow \quad 3 &\leq x < 4\end{aligned}$$

Wenn $x - 3 < 0$ und $x + 1 \geq 0$, daraus folgt $-1 \leq x < 3$, dann

$$\begin{aligned}|x+1| + |x-3| &< 6 \\ x+1 + 3-x &< 6 \\ 4 &< 6 \quad \text{widerspruchsfrei} \\ \Rightarrow \quad -1 &\leq x < 3\end{aligned}$$

Wenn $x + 1 < 0$, daraus folgt $x < -1$ und $x - 3 < 0$, dann

$$\begin{aligned}|x+1| + |x-3| &< 6 \\ -x-1 + 3-x &< 6 \\ -2 &< x \quad \text{widerspruchsfrei} \\ \Rightarrow \quad -2 &< x < -1\end{aligned}$$

Folgerung : $-2 < x < 4$

5.7.3 (c)

Wenn $|x + 3| > 1$, $||x + 3| - 1| = |x + 3| - 1$, daraus folgt $-2 \leq x$ oder $x \leq -4$

$-2 \leq x$:

$$||x + 3| - 1| = |x + 3| - 1 = x + 3 - 1 = x + 2 = 2 \text{ folgt } x = 0 \text{ widerspruchsfrei}$$

$x \leq -4$:

$$||x + 3| - 1| = |x + 3| - 1 = -x - 3 - 1 = -x - 4 = 2 \text{ folgt } x = -6 \text{ widerspruchsfrei}$$

Wenn $|x + 3| < 1$, $||x + 3| - 1| = 1 - |x + 3|$, daraus folgt $-4 < x < -2$

$-4 < x < -3$:

$$||x + 3| - 1| = 1 - |x + 3| = 1 + x + 3 = x + 4 = 2 \text{ folgt } x = -2 \not\leq$$

$-3 \leq x < -2$:

$$||x + 3| - 1| = 1 - |x + 3| = 1 - x - 3 = -x - 2 = 2 \text{ folgt } x = -4 \not\leq$$

Folgerung : $(x = 0) \vee (x = -6)$

6 6. Übungsblatt:

6.1 Aufgabe 6.1

6.2 Aufgabe 6.2

6.3 Aufgabe 6.3

6.4 Aufgabe 6.4

6.5 Aufgabe 6.5(H)

6.5.1 (a)

$$\begin{aligned}
 \frac{2n+1}{3n} + \frac{3n}{2n-1} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} + \frac{3n}{2n-1} \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} + \frac{3n}{n(2-\frac{1}{n})} \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} + \frac{3}{2-\frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3n} + \frac{3}{2-\frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$

6.5.2 (b)

$$\begin{aligned}
 \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k \cdot \prod_{k=1}^n k} \\
 &= \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{n} &= \frac{\prod_{k=n+2}^{2n+2} k}{\prod_{k=1}^{n+1} k} \frac{\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=n+1}^{2n} k} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\
 &= \frac{4n^2 + 5n + 2}{n^2 + 2n + 1} \\
 &= \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}
 \end{aligned}$$

offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right| = 4 > 0$

$\Rightarrow \binom{2n}{n}$ divergent

6.6 Aufgabe 6.6(H)

6.6.1 (a)

Sei $a_n = 0$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ mit $\frac{a_n}{b_n} = 0$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = 0$ für beliebige b_n inkl. Nullfolge.

$\frac{1}{2}$

6.6.2 (b)

Beweis. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \infty$ folgt $\frac{1}{b_n}$ divergent. □

6.6.3 (c)

Sei $a_n = 0$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ mit $(a_n \cdot b_n) = 0$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$ für beliebige b_n inkl. divg. Folge. \nexists

7 7. Übungsblatt

7.1 Aufgabe 7.1

7.2 Aufgabe 7.2

7.3 Aufgabe 7.3

7.4 Aufgabe 7.4

7.5 Aufgabe 7.5

7.6 Aufgabe 7.6(H)

Wir beweisen zuerst die folgende Gleichung

$$\underbrace{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}_{\geq \sqrt{a}} \cdot |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |a_n - a|$$

Beweis.

$$(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}) \cdot |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \begin{cases} (\sqrt{a_n} > \sqrt{a}) & (\sqrt{a_n} + \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) = (a_n - a) = |a_n - a| \\ (\sqrt{a_n} < \sqrt{a}) & (\sqrt{a_n} + \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{a_n}) = -(a_n - a) = |a_n - a| \end{cases}$$

$$a_n \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_n} \geq 0$$

$$\sqrt{a_n} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$$

□

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>N}, |a_n - a| < \varepsilon$$

dann

$$\begin{aligned} (\sqrt{a_n} + \sqrt{a}) \cdot |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| &= |a_n - a| \\ |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| &= \frac{|a_n - a|}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Sei $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} \in \mathbb{R}_{>0}$, dann $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \tilde{\varepsilon}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

7.7 Aufgabe 7.7(H)

Wir beweisen nun mittels Vollständige Induktion, dass a_n monoton wachsend ist.

Beweis.

Sei $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$

IA:

Sei $n = 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{a_1} &= \frac{\sqrt{c + \sqrt{c}}}{\sqrt{c}} \\ \frac{a_2^2}{a_1^2} &= \frac{c + \sqrt{c}}{c} \stackrel{(c>0)}{>} 1 \\ \stackrel{(c>0)}{\Leftrightarrow} \frac{a_2}{a_1} &> 1\end{aligned}$$

IV:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{c + a_n}}{a_n} > 1$$

IS:

Wir setzen $\tilde{n} = n + 1$ ein,

$$\begin{aligned}\frac{a_{\tilde{n}+1}}{a_{\tilde{n}}} &= \frac{a_{(n+1)+1}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{c + a_{n+1}}}{\sqrt{c + a_n}} \\ \frac{(a_{(n+1)+1})^2}{a_{n+1}^2} &= \frac{c + \sqrt{c + a_n}}{c + a_n} \stackrel{\text{IV}}{\stackrel{(c>0)}{>}} 1 \\ \stackrel{(c>0)}{\Leftrightarrow} \frac{a_{\tilde{n}+1}}{a_{\tilde{n}}} &> 1\end{aligned}$$

□

Wir beweisen nun, dass a_n von oben beschränkt ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{c + a_n} \\ a_n &= \sqrt{c + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (c + a_{n-1})} \\ &= \sqrt{c + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} \end{aligned}$$

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$, dann

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c + a} \\ a^2 &= c + a \\ a^2 - a - c &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} & (c > 0) \\ \frac{2}{1 - \sqrt{1 + 4c}} & (c > 0) \\ & < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wir haben schon gezeigt, dass $a_n > 0$ monoton wachsend ist, dann muss $a > 0$ sein. Deshalb haben wir $a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$

□

8 8. Übungsblatt

8.1 Aufgabe 8.1

Beweis.

□

8.2 Aufgabe 8.2

c) geo. Reihe mit

8.3 Aufgabe 8.3

Maj. Krit. : Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: b_n > 0$
Falls $\exists N \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_{>N}: |a_n| \leq c \cdot b_n$
und falls $\sum_1^\infty b_n$ konv. dann konv. \sum_1^∞ abs.

Beweis.

$(a_n)_n \in \mathbb{R}$ und $\exists \theta \in (0, 1)$ und $\exists N \in \mathbb{N}$
sodass: $\forall n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} < \theta$
da $\sum_{n=1}^\infty \theta^n$ konv. (geom. Reihe) $\Leftrightarrow |a_n| < \theta^n$
nach Maj. Krit. konv. $\sum a_n$ abs. □

8.4 Aufgabe 8.4

8.4.1 (a)

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Quotient-Krit.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right| \\ &= \left| \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| \\ ()^{-1} &= \underbrace{\left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right)^{-1}}_{(n \rightarrow \infty) \rightarrow e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \\ \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{\epsilon} = 1 - e^{-1}$ dann: $\underbrace{e^{-1} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}}_{\theta} < 1$

$$e^{-1} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} = e^{-1} + \frac{1 - e^{-1}}{2} = \frac{1 + e^{-1}}{2} < 1$$

dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e^{-1}$ for $\epsilon_i = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \exists N \in \mathbb{N}$ sind

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>N}: \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - e^{-1} \right| < \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < e^{-1} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

8.4.2 (b)

$$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

$$\text{dann } \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} - 1)^n} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

z.B. Sei $\theta_i = \frac{1}{2} = \epsilon \exists N \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>N}: |\sqrt[n]{n} - 1 - 0| < \epsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{1}{2}$$

8.4.3 (c)

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

a_n kein Nullfolge

nicht konv.

8.4.4 (d)

$$a_N = \frac{n+4}{n^3-3n+1}$$

mit Harmonische Reihe ($n > 1$ konv.)

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{n^3-3n+1} + \frac{4}{n^3-3n+1} \\ &\leq \frac{n}{n^3-3n} + \frac{4}{n^3-3n} \\ &= \frac{1}{n^2-3} + \frac{4}{n^3-3n} \\ &\leq \frac{1}{(n-3)^2} + \frac{1}{(n-4)^3} \quad \text{for } n > 20 \end{aligned}$$

8.4.5 (e)

$$\begin{aligned} a_n &= \dots \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{n-1} \\ &\geq \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ div.} \end{aligned}$$

8.4.6 (f)

8.5 Aufgabe 8.5(H)

8.5.1 (a)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

We determine with ratio test:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

for $n \rightarrow \infty$ we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

\Rightarrow this series is convergent

8.5.2 (b)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

We determine with ratio test:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} \\ &= \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{\tilde{n}'}\right)^{\tilde{n}'}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left(\left(1 + \frac{1}{\tilde{n}}\right)^{\tilde{n}}\right)^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

(substitute $\tilde{n} = n^2, \tilde{n}' = (n+1)^2$)

with $n \rightarrow \infty$, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{n}' = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

therefore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{\tilde{n}'}\right)^{\tilde{n}'}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left(\left(1 + \frac{1}{\tilde{n}}\right)^{\tilde{n}}\right)^{\frac{1}{n}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{\frac{1}{n+1}}}{e^{\frac{1}{n}}} \right| = 1$$

with $(1 + \frac{1}{n^2})^n > 1$, the series is divergent

8.5.3 (c)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n}$$

We determine with ratio test

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{(3(n+1))!}{\frac{7^{n+1}(2(n+1))!(n+1)!}{3n!}} \\ &= \frac{(3n+3)!(2n)!n!}{7(2n+2)!(n+1)!3n!} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^{3n+3} k \right) \left(\prod_{k=1}^{2n} k \right) \left(\prod_{k=1}^n k \right)}{7 \left(\prod_{k=1}^{2n+2} k \right) \left(\prod_{k=1}^{n+1} k \right) \left(\prod_{k=1}^{3n} k \right)} \\ &= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{7(2n+1)(2n+2)(n+1)} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{7(2n+1)(2n+2)(n+1)} = \frac{27}{28} < 1 \\ &\Rightarrow \text{this series is convergent} \end{aligned}$$

8.5.4 (d)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

We determine with Leibniz criterion:

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &= \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| < \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = |a_n| \\ &\Rightarrow a_n \text{ monotonically decreases} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

\Rightarrow this series is convergent

8.6 Aufgabe 8.6(H)

Beweis.

Sei b_n beschränkt, dann $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq |b_N|$

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, dann $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>N'} a_n < \varepsilon$

dann $\forall b_N \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_N = 0$

dann mit Majorantenkriterium $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$

□

8.7 Tutorium

Definition 8.1 (Cauchy-Folge). $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist CF, wenn
 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall m, n \in \mathbb{N}_{>N}: |a_n - a_m| < \epsilon$

Definition 8.2 (Reihe). $\sum_{n=1}^{\infty} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $[\forall n \in \mathbb{N}: b_n = \sum_{k=1}^n a_k]$
(see: partial summation convergent)

9 9. Übungsblatt

9.1 Aufgabe 9.1

9.2 Aufgabe 9.2

Beweis.

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}\end{aligned}$$

Term:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^k} \frac{n!}{(n-k)!} &= \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ (n > m) &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\end{aligned}$$

□

9.3 Aufgabe 9.3

9.4 Aufgabe 9.4

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent, aber nicht abs. konv.

s^+ und s^- sind Umordnung von s

$$s_{3n}^+ = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

$$s_{3n}^- = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k}$$

wir zerlegen auch s zur s_{2n}

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

mit $n = 2n$

$$s_{4n} = s_{2(2n)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k}$$

9.5 Aufgabe 9.5(H)

Beweis.

z.z. ist

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot q^n$$

Def. Cauchy-Produkt:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k q^l q^{k-l} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((q^0 q^{k-0}) + (q^1 q^{k-1}) + (q^2 q^{k-2}) + \dots + (q^k q^{k-k}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^k \end{aligned}$$

□

9.6 Aufgabe 9.6(H)

Beweis.

Gegeben sei $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} (-1)^n$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. □

Beweis.

Mit Cauchy-Produkt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) (-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{n+1}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) (-1)^n \geq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) (-1)^n$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \infty \quad (\text{divergent})$$

dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) (-1)^n$$

divergent □

9.7 Tutorium

Exponentialreihe:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ insb. } e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

10 10. Übungsblatt

10.1 Aufgabe 10.1

10.2 Aufgabe 10.2

10.3 Aufgabe 10.3

10.3.1 (a)

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{U}, n \mapsto 2n + 1, \text{ bij.}$$

10.3.2 (b)

$$f : [a, b] \rightarrow [0, 1], \lambda \mapsto \frac{\lambda - b}{a - b}$$

10.3.3 (c)

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cot \lambda x$$

10.3.4 (d)

$$f : (0, 1) \rightarrow [0, 1], a_n = \frac{1}{2n}$$

10.4 Aufgabe 10.4

10.5 Aufgabe 10.5

10.6 Aufgabe 10.6

10.6.1 (a)

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n \cdot n}{2n + (-1)^n}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (a_k)$$

$$\text{falls } n \text{ gerade: } a_n = \frac{1 + n}{1 + 2n}$$

$$\sup_{k \geq n} (a_k) = \frac{1 + n}{1 + 2n}$$

$$\text{falls } n \text{ ungerade: } a_n = \frac{1 - n}{2n - 1} < 0$$

$$\sup_{k \geq n} (a_k) = \frac{2 + n}{3 + 2n}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - n + \frac{1}{2}}{2n - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4n - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (a_k) = \frac{1}{2}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} (a_k)$$

$$n \text{ gerade: } \inf_{k \geq n} (a_k) = -\frac{1}{2}$$

$$n \text{ ungerade: } \inf_{k \geq n} (a_k) = \frac{1}{2}$$

10.6.2 (b)

$$a_n = \frac{n}{3n + (-1)^n \cdot (n - 1)}$$

$2n$:

$$a_n = \frac{2n}{6n + 2n - 1} = \frac{2n}{8n - 1}, \lim = \frac{1}{4}$$

$2n + 1$:

$$a_n = \frac{2n + 1}{6n + 6 - 2n} = \frac{2n + 1}{4n + 3}, \lim = \frac{1}{2}$$

$$\liminf = \frac{1}{4}, \limsup = \frac{1}{2}$$

10.7 Tutorium

11 11. Übungsblatt

12 12. Übungsblatt

12.1 12.1

12.2 12.2

12.2.1 (c)

12.3 Aufgabe 12.3

(L-Stetigkeit schon gegeben)

Beweis.

Für $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, $\forall x_1, x_2 \in D$, $|x_1 - x_2| < \delta$, gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < L\delta = \varepsilon$$

□

12.4 Aufgabe 12.4

12.4.1 (a)

Beweis.

Verneinung der Def.

$\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in D$ gilt

$$|x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

dann, sei $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{\delta}$ und $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$

es gilt

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2}$$

und

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = \left| \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} + \delta x_1 + \frac{\delta^2}{4} \right|$$

dazu $\delta x_1 = 1 > \frac{1}{2}$

□

12.4.2 (c)

z.B. $L = 1$

Beweis.

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}|} = \frac{1}{2}|x_1 - x_2| < 1$$

□

12.4.3 (d)

Hint: $[0, \infty] = [0, 2] \cup [1, \infty]$

in (c) schon bewiesen $[1, 2]$ glm. stetig, dann $\Rightarrow \square$

12.5 12.5

12.6 12.6

12.7 12.7

12.8 Tutorium

Definition 12.1 (L-stetig). $\exists L \geq 0 \forall x_1, x_2 \in D$ gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

13 13. Übungsblatt

13.1 13.1

Zeigen, dass \log_a und \exp_a umgekehrt sind
wir haben

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : \log_a(\exp_a(x)) &= \log_a(a^x) \\ &= \frac{\log(\exp(x \log a))}{\log a} \\ &= \frac{x \log a}{\log a} \\ &= x\end{aligned}$$

umgekehrt nach y auch gültig

13.2 13.2

13.3 13.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

13.3.1 (a)

$$\lim_{x \downarrow 0} x^x = \lim_{x \downarrow 0} \exp(\log(x^x)) = \exp(\lim_{x \downarrow 0} x \log(x)) = e^0 = 1$$

13.3.2 (b)

Umschreiben $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$

13.3.3 (c)

Umschreiben $\frac{\log(1+x)}{x} = \log((1+x)^{\frac{1}{x}})$, dann offenbar $\lim = 1$

13.3.4 (d)

Umschreiben

$$\frac{3x+5-2(x+3)}{(x+3)(3x+5)} = \frac{x-1}{(x+3)(3x+5)}$$

dann

$$\frac{1}{(x+3)(3x+5)}$$

13.3.5 (e)

$$1 - \sqrt{f(x)} = \frac{1 - f(x)}{1 + \sqrt{f(x)}}$$

$$\frac{1}{2}$$

13.3.6 (f)

$$\begin{aligned}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} &\stackrel{x\geq 0}{=} \sqrt{x^2+1} \rightarrow 1 \\ &\stackrel{\leq 0}{=} -\sqrt{x^2+1} \rightarrow -1\end{aligned}$$

13.4 13.4

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

Frage:

$$f(0) = ?$$

$$f(n \in \mathbb{N}) = ?$$

$$f(z \in \mathbb{Z}) = ?$$

$$f(x \in \mathbb{Q}) = ?$$

$$f(x \in \mathbb{R}) = ?$$

1.

$$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

2.

$$f(n \in \mathbb{N}) = 1 \cdot n, f(x) = ax \Rightarrow a = f(1)$$

dann

$$f(0) = 0$$

$$f(n \in \mathbb{N}) = nf(1) \Leftarrow \text{Induktion}$$

$$f(z \in \mathbb{Z}) = zf(1) \Leftarrow \oplus f(0) = f(n) + f(-n) \Rightarrow f(-n) = -f(n) = -nf(1)$$

$$f(x \in \mathbb{Q}) = xf(1) \Leftarrow \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ sodass } x = \frac{m}{n}, \text{ dann}$$

$$z.z. f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

$$f(m) = nf\left(\frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right) = mf(1) = f(m)$$

$$f(x \in \mathbb{R}) = xf(1) \Leftarrow (\text{tut}) \exists (x_n) \in \mathbb{Q} \text{ sodass } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$$

Folgerung :

$$1. f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$$

$$n = 1, f(1x) = 1f(x) = f(x) \text{ gültig}$$

... \Rightarrow Induktion

$$3. \forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}:$$

$$\text{i) } z \in \mathbb{N} \text{ (nach 2. klar)}$$

$$\text{ii) } z < 0: -z \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$f(z) = f((-1)(-z)) = (-z)f(-1)$$

$$(1.) = (-z)(-f(1)) = zf(1)$$

$$4. \forall x \in \mathbb{Q} \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, x = \frac{m}{n}$$

$$f(1) = f(m) = f\left(n \frac{m}{n}\right)$$

$$= nf\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

$$5. \forall x \in \mathbb{R} \text{ da } \mathbb{Q} \text{ in } \mathbb{R} \text{ dicht ist,}$$

$$\exists x_n \subseteq \mathbb{Q} \text{ sodass } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n f(1) = x f(1)$$

$$f(x) = cx \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

13.5 tut

Definition 13.1 (Stetigkeit). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ heißt:

$\forall (a_n) \subseteq D, f(a_n)$ konvergiert gegen $f(a)$

14 14. Übungsblatt

$$\cos x := \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x := \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

Aufgabe 14.1

(a)

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Re} z} = \frac{2}{z + \bar{z}} \neq \operatorname{Re} \frac{1}{z}$$

Gegenbsp. $z = 1 + i$

(b) $|z|^2 = z\bar{z}$

$$\text{dann } z = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \dots$$

(c) $\operatorname{Re}(z + \frac{1}{z}) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} \frac{1}{z} = (1 + \frac{1}{|z|^2})\operatorname{Re} z = 0$

dann $\operatorname{Re} z = 0$

Aufgabe 14.2

(a) $z = x + iy$ betrachten

(b) (i) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos x - i \sin x = -e^{-ix}$ betrachten

Aufgabe 14.3

(a) $\dots = (e^{ix})^n = e^{inx} = \square$

(b)

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

Links:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin 3x = -\sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x$$

(c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ betrachten

Aufgabe 14.4

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\&= \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) \\&= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)) \\&= \frac{1}{2}(\cos x(e^{-y} + e^y) + i \sin x(e^{-y} - e^y)) \\&= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\&= \square\end{aligned}$$

16 16. Übungsblatt

Aufgabe 16.3(H)

(a) $f(x) := x \cdot e^x$

$$\begin{aligned}f(x) &= f^{(0)} = x \cdot e^x \\f^{(1)} &= e^x + x \cdot e^x \\f^{(2)} &= e^x + e^x + x \cdot e^x\end{aligned}$$

erraten:

$$f^{(n)} = n \cdot e^x + x \cdot e^x \quad (1)$$

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt $f(x) = f^{(0)} = x \cdot e^x$

IV:

$$f^{(n)} = n \cdot e^x + x \cdot e^x \quad (2)$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$

$$f^{(\tilde{n})} = f^{(n+1)} \quad (3)$$

$$= (f^{(n)})' \quad (4)$$

$$= n \cdot e^x + e^x + x \cdot e^x \quad (5)$$

$$= (n + 1) \cdot e^x + x \cdot e^x \quad (6)$$

□

$$g(x) := \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}f(x) &= f^{(0)} = \sin^2 x \\f^{(1)} &= 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \\f^{(2)} &= 2 \cos 2x \\f^{(3)} &= -4 \sin 2x \\f^{(4)} &= -8 \cos 2x \\f^{(5)} &= 16 \sin 2x \\f^{(6)} &= 32 \cos 2x\end{aligned}$$

erraten:

$$n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}_{>0}:$$

$$f^{(n)} = -1 \frac{n-1}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot \sin 2x \quad (7)$$

$$n = 2k, k \in \mathbb{N}_{>0}:$$

$$f^{(n)} = -1 \frac{n-2}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot \cos 2x \quad (8)$$

Induktion für $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}_{>0}$:

Beweis.

IA: Sei $n = 1$, es gilt $f^{(1)} = \sin 2x$

IV:

$$f^{(n)} = -1 \frac{n-1}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot \sin 2x \quad (9)$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 2$

$$f^{(\tilde{n})} = f^{(n+2)} \quad (10)$$

$$= (f^{(n)})'' \quad (11)$$

$$= -1 \frac{n-1}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^2 \cdot -1 \cdot \sin 2x \quad (12)$$

$$= -1 \frac{(n+2)-1}{2} \cdot 2^{(n+2)-1} \cdot \sin 2x \quad (13)$$

□

Induktion für $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$:

Beweis.

IA: Sei $n = 2$, es gilt $f^{(2)} = 2 \cos 2x$

IV:

$$f^{(n)} = -1 \frac{n-2}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot \cos 2x \quad (14)$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 2$

$$f^{(\tilde{n})} = f^{(n+2)} \quad (15)$$

$$= (f^{(n)})'' \quad (16)$$

$$= -1 \frac{n-2}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^2 \cdot -1 \cdot \cos 2x \quad (17)$$

$$= -1 \frac{(n+2)-2}{2} \cdot 2^{(n+2)-1} \cdot \cos 2x \quad (18)$$

□

(b)

$$\begin{aligned}h &= h^{(0)} = x^2 \cdot e^x \\h^{(1)} &= (0 + 2x + x^2)e^x \\h^{(2)} &= (2 + 4x + x^2)e^x \\h^{(3)} &= (6 + 6x + x^2)e^x \\h^{(4)} &= (12 + 8x + x^2)e^x \\h^{(5)} &= (20 + 10x + x^2)e^x \\h^{(6)} &= (30 + 12x + x^2)e^x \\&\vdots \\h^{(1000)} &= (999000 + 2000x + x^2)e^x\end{aligned}$$

erraten:

$$h^{(n)} = ((n^2 - n) + 2nx + x^2)e^x$$

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt $h^{(0)} = x^2 \cdot e^x$

IV: *erraten:*

$$h^{(n)} = ((n^2 - n) + 2nx + x^2)e^x$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$

$$h^{(\tilde{n})} = h^{(n+1)} = (h^{(n)})' \tag{19}$$

$$= (2n + 2x + (n^2 - n) + 2nx + x^2)e^x \tag{20}$$

$$= (((n + 1)^2 - (n + 1)) + 2(n + 1)x + x^2)e^x \tag{21}$$

□

17 17. Übungsblatt

Aufgabe 17.1

Es gilt $\alpha + \beta = \gamma$, dann

$$\tan \alpha = \frac{x}{h_2}, \tan \gamma = \frac{x}{h_2 - h_1}$$

$$\Rightarrow \gamma - \beta = \alpha(x) = \arctan \frac{x}{h_2 - h_1} - \arctan \frac{x}{h_2}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{h_2 - h_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{h_2 - h_1} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{h_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{h_2} \\ &= \frac{(h_2 - h_1)^2}{h_2 - h_1} \frac{1}{(h_2 - h_1)^2 + x^2} - \frac{h_2^2}{h_2} \frac{1}{h_2^2 + x^2} \\ &= (h_2 - h_1) \cdot \frac{1}{(h_2 - h_1)^2 + x^2} - h_2 \frac{1}{h_2^2 + x^2} \stackrel{lok.min}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{h_2^2 - h_1 h_2} \text{ nehmen wir } +, \approx 134,7 \text{ cm}$$

$$\alpha''(x) \begin{cases} > 0 & \text{lok.Min} \\ = 0 & ?? \\ < 0 & \text{lok.Max} \end{cases}$$

Aufgabe 17.2

$$f(x) \geq f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ ist mon. ansteigend}$$

$$f(x_0) = 0$$

$$\forall x < x_0 : 0 \leq f(x) \leq f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$g(x) = e^{-x} f(x), \text{ weil } e^{-x} > 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0$$

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) - g(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x))$$

$\begin{matrix} >0 & \leq 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow g'(x) < 0, g(x) \text{ mon. fall.}$$

Aufgabe 17.4

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, ist \bar{x} ein lok. Extremastelle, so gilt $f'(\bar{x}) = 0$

wegen $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ folgt

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{3} + \frac{b}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}} = -\frac{a}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 6x + 2a = 2\sqrt{a^2 - 3b}$$

Aufgabe 17.5(H)

(a) $f_1(x) = \sin(\cos(x))$

Es ist für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$f_1'(x) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$$

(b) $f_2(x) = x \cdot |x|$

Es ist auch für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x & \text{when } x \geq 0 \\ -2x & \text{when } x \leq 0 \end{cases}$$

(c) $f_3(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Es ist für $x \in (\mathbb{R} \setminus 0)$ differenzierbar.

$$f_3'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0, \text{ when } x \neq 0$$

(d) $f_4(x) = x^{(x^x)}$

Es ist für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar.

$$f_4'(x) = \text{nein, wir müssen zuerst umformen}$$

$$\begin{aligned} x^{(x^x)} &= (e^{\ln(x)})^{(x^x)} \\ &= (e^{\ln(x)})^{(e^x \ln(x))} \\ &= e^{(e^x \ln(x)) \ln(x)} \end{aligned}$$

Dann:

$$f_4'(x) = (x^x(\ln(x) + 1) \cdot \ln(x) + x^{x-1}) \cdot e^{(e^x \ln(x)) \ln(x)}$$

Aufgabe 17.6(H)

(a) *Beweis.*

Sei $f(x)$ gerade, sei $g(x) = -x$, sei $h(x) = f(g(x))$

Es gilt

$$h(x) = f(g(x)) = f(-x) = f(x)$$

Dann

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)f'(g(x)) \\ &= -f'(-x) = f'(x) \\ &\Rightarrow f' \text{ ungerade} \end{aligned}$$

□

Beweis.

Sei $f(x)$ ungerade, $g(x) = -x$, $h(x) = f(g(x))$

Es gilt

$$h(x) = f(g(x)) = f(-x) = -f(x)$$

Dann

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)f'(g(x)) \\ &= -f'(-x) = -f'(x) \\ &\Rightarrow f' \text{ gerade} \end{aligned}$$

□

(b) (i) Wir beweisen nun, dass

$$f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = \text{ungerade}$ gerade ist.

Beweis.

IA: sei $n = 0$, es gilt

$$f_0 : x \mapsto a_0 \text{ (gerade)}$$

IV:

$$f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = \text{ungerade}$ gerade ist.

IS: sei $\tilde{n} = n + 2$, dann

$$\begin{aligned} \tilde{f} : x &\mapsto \sum_{i=0}^{\tilde{n}} a_i x^i \\ \tilde{f} : x &\mapsto \sum_{i=0}^{n+2} a_i x^i \\ \tilde{f} : x &\mapsto \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) + a_{n+2} x^{n+2} \\ \Rightarrow \tilde{f} &= f + a_{n+2} x^{n+2} \end{aligned}$$

Die Voraussetzung ist, dass mit $n = \text{ungerade}$ alle Terme $a_{n_{\text{ungerade}}} = 0$ sind, dann entfernen wir alle $a_n x^n$ von ungerade n .

Dann ist $\tilde{f} = f + a_{n+2} x^{n+2}$ gerade, denn alle $n + 2$ sind auch gerade. □

(ii) Wir beweisen nun, dass

$$f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = \textit{gerade}$ ungerade ist.

Beweis.

IA: sei $n = 1$, es gilt

$$f_0 : x \mapsto a_1 x^1 \text{ (ungerade)}$$

IV:

$$f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = \textit{gerade}$ ungerade ist.

IS: sei $\tilde{n} = n + 2$, dann

$$\begin{aligned} \tilde{f} : x &\mapsto \sum_{i=0}^{\tilde{n}} a_i x^i \\ \tilde{f} : x &\mapsto \sum_{i=0}^{n+2} a_i x^i \\ \tilde{f} : x &\mapsto \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) + a_{n+2} x^{n+2} \\ \Rightarrow \tilde{f} &= f + a_{n+2} x^{n+2} \end{aligned}$$

Die Voraussetzung ist, dass mit $n = \textit{gerade}$ alle Terme $a_{n_{\textit{gerade}}} = 0$ sind, dann entfernen wir alle $a_n x^n$ von gerade n .

Dann ist $\tilde{f} = f + a_{n+2} x^{n+2}$ ungerade, denn alle $n + 2$ sind auch ungerade. □

Tutorium

Lokale Extrema:

$D_f \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$

offene Menge:

$B(x, \epsilon) : (x - \epsilon, x + \epsilon)$

$B(x, \epsilon) \subseteq (a, b)$

$x_0 \in d_f$ heißt lokale Min/Max von f , falls gilt:

$\exists \epsilon > 0, \forall y \in B(x_0, \epsilon) :$

$f(x_0) \leq f(y) / \geq f(y)$

$D_f \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

$x_0 \in D_f$ sei lok. Extremasstelle von f

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

18 18. Übungsblatt

Aufgabe 18.1

(a)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan(x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2(x)}}{2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{1-x}} \\ &= (e^{\lim \ln(x)})^{\frac{1}{1-x}} \\ &= e^{\lim \ln(x) \cdot \frac{1}{1-x}} \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^\alpha - (1-\alpha x)}{x^2} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\alpha(1-x)^{\alpha-1} + \alpha}{2x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2}}{2} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= " \infty \cdot 0 " \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = " \frac{0}{0} " \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{x \downarrow 0} (\cot(x))^{\sin(x)} \\&= \lim_{x \downarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(\cot(x))}{\frac{1}{\sin(x)}}\right) = " \frac{\infty}{\infty} " \\&= \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{-\frac{1}{\cot(x)} \cdot \frac{1}{\sin^2(x)}}{-\sin^{-2}(x) \cdot \cos(x)}\right) \\&= \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cot(x)}\right) \\&= \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cot^2(x)}\right) = 1\end{aligned}$$

Aufgabe 18.5(H)

Gegeben sei die Funktion f :

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n e^{-x}$$

deren Ableitung und 2.Ableitung sind

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x &\mapsto nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} \\ f'' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x &\mapsto n(n-1)x^{n-2}e^{-x} - 2nx^{n-1}e^{-x} - f \end{aligned}$$

wir suchen die Nullpunkt(e) von f'

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_0 = n) &= -2ne^{-n} - x^n e^{-n} \\ &= -(2n + x^n)e^{-n} \\ (n \in \mathbb{N}, n > 0) &\Rightarrow f''(n) < 0 \end{aligned}$$

d.h. es existiert eine lokale Maxima bei $x = n$ von f .

Aufgabe 18.6(H)

Zu beweisen ist:

$$\begin{aligned}(f(b) - f(a))g'(\xi) &= (g(b) - g(a))f'(\xi) \\ (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) &= 0\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$

dann gilt

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

und

$$\begin{aligned}h(a) &= (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ h(b) &= (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) \\ &= -f(a)g(b) + g(a)f(b)\end{aligned}$$

deswegen

$$h(a) = h(b)$$

Gegeben seien f, g in $[a, b]$ stetig, in (a, b) differenzierbar, dann ist h auch in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar.

Nach *Satz von Rolle*, es existiert $\xi \in (a, b)$, sodass

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$$

□

Tutorium $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} \stackrel{\text{Formel}}{=} \frac{\lim f}{\lim g} = \frac{\infty}{\infty} \text{ oder } \frac{0}{0}$, dann

Falls $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$ ex., dann ex. auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}$, und die sind gleich.

Beispiel 18.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$, aber $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$ auch.

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{\lim 1 + e^{-2x}}{\lim 1 - e^{-2x}} = 1$

Definition 18.1 (HP).

$$I \subseteq \mathbb{R}, a \in I \text{ sei HP von } I = \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \setminus \{a\} \cap I \neq \emptyset \\ \text{Ex ex. Folge } (x_n) \text{ in } I \setminus \{a\} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{cases}$$

$h(x) = f(x)g(x)$:

Sei (p_n) ein Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $p_n \rightarrow 0$, und $x_n = a + p_n \in I$ für alle $n \in \mathbb{N}$

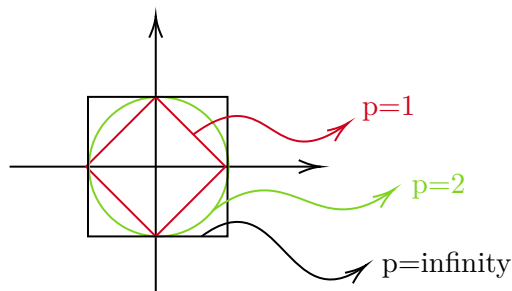
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{h(a + p_n) - h(a)}{p_n} &= \frac{f(a + p_n)g(a + p_n) - f(a)g(a)}{p_n} \\ &= \frac{f(a + p_n)g(a + p_n) - f(a)g(a + p_n)}{p_n} \\ &= g(a + p_n) \frac{f(a + p_n) - f(a)}{p_n} \\ (n \rightarrow \infty) &= g(a)f'(a) \end{aligned}$$

Da dies für jede Folge (p_n) , dieser Art gilt.

Definition 18.2 (Norm). $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ od. \mathbb{C}^n ,

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, \infty)$$

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$



19 19. Übungsblatt

Aufgabe 19.1

(a) aus Grafik ermitteln

$$\int_0^2 \varphi_1 dx = 6$$

(b)

$$\int_0^2 \varphi_2 dx = 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \dots = 3$$

(c)

$$\int_0^2 \varphi_3 dx = 7 \int_0^2 \varphi_1 dx - 5 \int_0^2 \varphi_2 dx = -8$$

(d) Es ist kein TF.

Aufgabe 19.2

zu beweisen:

$$0 \leq \int^* f + \int^* g - \int^* (f + g)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf\left\{\int_a^b \varphi_1 dx : \varphi_1 \in T[a, b], \varphi_1 \geq f\right\} + \inf\cdots \\ &= \inf\left\{\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) dx : \varphi_{1,2} \in T[a, b], \varphi_1 \geq f, \varphi_2 \geq g\right\} - \cdots \end{aligned}$$

Aufgabe 19.3

Aufgabe 19.5(H)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{falls } x \geq \frac{\pi}{2} \\ a(x+b)^2 + c & \text{falls } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

nun offenbar ist $\sin(x)$ in $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ differenzierbar. Die Voraussetzungen für f differenzierbar sind:

- (i) f am Punkt $\frac{\pi}{2}$ stetig und differenzierbar.
- (ii) $a(x+b)^2 + c$ in $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ stetig und differenzierbar.

dazu

(i)

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= a\left(\frac{\pi}{2} + b\right)^2 + c \\ 1 &= a\left(\frac{\pi}{2} + b\right)^2 + c \end{aligned}$$

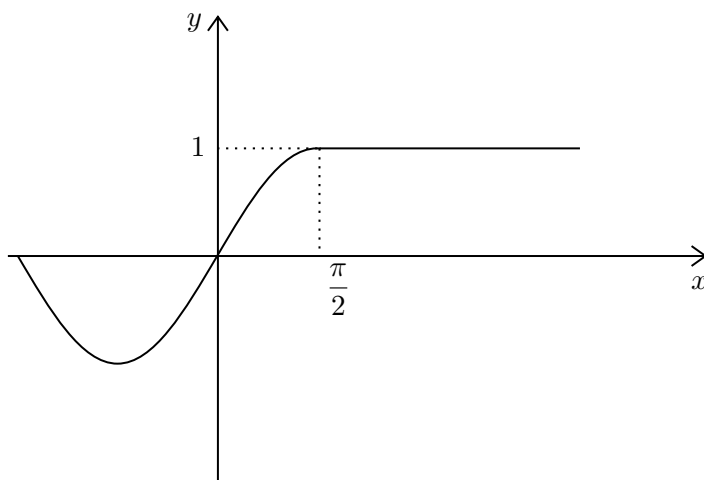
und die Ableitungen am Punkt $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2a\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \\ 0 &= 2a\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

führt zur Lösung

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

- (ii) Nach (i) ist f in $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ Konstant ($f = 1$), offenbar stetig und differenzierbar.



Aufgabe 19.6(H)

(a) Legendreschen Polynome

$$L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

L_0, L_1, L_2 sind

$$L_0 : \quad x \mapsto \frac{1}{2^0 0!} \cdot \frac{d^0}{dx^0} [(x^2 - 1)^0] \\ = 1$$

$$L_1 : \quad x \mapsto \frac{1}{2^1 1!} \cdot \frac{d^1}{dx^1} [(x^2 - 1)^1] \\ = x$$

$$L_2 : \quad x \mapsto \frac{1}{2^2 2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [(x^2 - 1)^2] \\ = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

(b) Legendreschen Polynome

$$L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \\ = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n (x-1)^n]$$

sei $f(x) = (x+1)^n (x-1)^n$, wir wenden Leibniz-Regel an:

$$f(x) = (x+1)^n (x-1)^n$$

$$f^1(x) = \frac{d}{dx} [(x+1)^n (x-1)^n] = (x+1)^n \frac{d}{dx} [(x-1)^n] +$$

$$f^2(x) = \frac{d^2}{dx^2} [(x+1)^n (x-1)^n] = \frac{d}{dx} [(x+1)^n] \frac{d}{dx} [(x-1)^n] + \\ (x+1)^n \frac{d^2}{dx^2} [(x-1)^n] + \frac{d}{dx} [(x+1)^n] \frac{d}{dx} [(x-1)^n]$$

\vdots

$$\text{(mit Binomial-Koeff.)} \quad f^n(x) = \binom{n}{0} [(x+1)^n] \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^n] + \binom{n}{1} \frac{d}{dx} [(x+1)^n] \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x-1)^n] + \\ \binom{n}{2} \frac{d^2}{dx^2} [(x+1)^n] \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x-1)^n] + \dots + \\ \binom{n}{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x+1)^n] \frac{d}{dx} [(x-1)^n] + \binom{n}{n} \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n] (x-1)^n$$

dann gilt

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^i}{dx^i} [(x+1)^n] \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} [(x-1)^n] \right]$$

(i) $x = 1$

wenn $i \neq 0$ ist, es gilt

$$\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}[(x-1)^n] = 0$$

dann

$$\begin{aligned} L_n(1) &= \frac{1}{2^n n!} (x+1)^n \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^n] \\ &= \frac{1}{n!} [n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1] \\ &= \frac{1}{n!} n! = 1 \end{aligned}$$

(ii) $x = -1$

wenn $i \neq 0$ ist, es gilt

$$\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}[(x+1)^n] = 0$$

dann

$$\begin{aligned} L_n(-1) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n] (x-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} [n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} n! = (-1)^n \end{aligned}$$

(c) Sei $f(x) := (x+1)^n(x-1)^n = [(x+1)(x-1)]^n = (x^2-1)^n$

Es gilt $f(1) = f(-1) = 0$, nach S.v.Rolle hat f' in $(-1, 1)$ mindestens einen Nullpunkt $x_{1,1}$. Wir zerbrechen das Intervall $(-1, 1)$ mit dem Punkt $x_{1,1}$, erhalten $(-1, x_{1,1})$ und $(x_{1,1}, 1)$, es gilt $f'(1) = f'(-1) = f'(x_{1,1}) = 0$ dann nach S.v.Rolle hat f'' in zwei Teilintervalle je einen Nullpunkt $x_{2,1}$ und $x_{2,2}$ (mindestens zwei). Dann können wir noch mal zerbrechen und drei Teilintervalle $(-1, x_{2,1})$, $(x_{2,1}, x_{2,2})$ und $(x_{2,2}, 1)$ erhalten, nach S.v.Rolle hat f''' mindestens drei Nullpunkte. Bei der n -te Ableitung hat f^n mindestens n Nullpunkten. Für ein n -te Polynom ist maximal n Nullpunkte möglich. Induktiv können wir zusammenfassen, dass f^n im $(-1, 1)$ insgesamt n Nullpunkte hat.

Dann hat Legendre Polynomial $L_n = \frac{1}{2^n n!} f^n(x)$ im $(-1, 1)$ insgesamt n Nullpunkte.

Tutorium

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in R[a, b]$$

Oberintegral:

$$\int_a^b {}^*f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in J[a, b], \varphi \geq f\right\}$$

Unterintegral:

$$\int_a^b {}_*f(x)dx := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in J[a, b], \varphi \leq f\right\}$$

dann

$$Unterint. < Oberint.$$

$$f \in R[a, b] \Rightarrow Oberint. = Unterint. = \int_a^b f(x)dx$$

$$J[a, b] \subseteq R[a, b]$$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig monoton}$$

sei $c \in [a, b]$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

Blatt 20

Aufgabe 20.1

(*):

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. und $N \in \mathbb{N}$ sei gemäss (*) gewählt.

f.a. $n \geq N$ gilt

$$\varphi_n(x) - \epsilon' \leq f(x) \leq \varphi_n(x) + \epsilon'$$

f.a. $x \in [a, b]$

Die folgt

$$\psi_n^\pm : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \psi_n^\pm(x) = \varphi_n(x) \pm \epsilon'$$

gehoren zu $J[a, b]$

mit $\psi_n^- \leq g \leq \psi_n^+$ auf $[a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_n^+ - \psi_n^-)(x) dx &= \int_a^b (\psi_n(x) + \epsilon') - (\psi_n(x) - \epsilon') dx \\ &= \int_a^b 2\epsilon' dx = 2\epsilon'(b-a) = \frac{\epsilon}{2(b-a)} 2(b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

fuer $n \geq N$

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_n^-(x) dx &\leq \sup\left\{ \int_a^b \psi^-(x) dx \mid \psi^- \in J[a, b], \psi^+ \leq f \right\} = \int_a^b x f(x) dx \leq \int_a^b y f(x) dx = \inf\left\{ \int_a^b \psi^+(x) \mid \psi^+ \in J[a, b], f \leq \psi^+ \right\} \\ &\leq \int_a^b \psi_n^+(x) = \int_a^b \psi_n(x) + \epsilon' dx = \int_a^b f(x) dx + \epsilon' \end{aligned}$$

Aufgabe 20.5(H)

Wir ermitteln das folgende Integral mittels Riemannsche Summe

$$\int_a^b e^x dx$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \quad k \in \mathbb{N}_{[0,n]}$$

eine äquidistante Unterteilung von $[a, b]$, das heißt $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
dann gilt

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{k(b-a)}{n} + a\right) \\ &= \frac{(b-a)\exp(a)}{n} \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)^k \\ &= \frac{(b-a)\exp(a)}{n} \frac{\exp\left(\frac{b-a}{n}\right)(\exp(b-a) - 1)}{\exp\left(\frac{b-a}{n}\right) - 1} \\ &= \frac{(a-b)(e^a - e^b)}{n} + \frac{(a-b)(e^a - e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n} - e^{a/n})} \end{aligned}$$

es gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)(e^a - e^b)}{n} + \frac{(a-b)(e^a - e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n} - e^{a/n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)(e^a - e^b)}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)(e^a - e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n} - e^{a/n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)(e^a - e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n} - e^{a/n})} \right) \\ &= (e^a - e^b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)e^{a/n}}{n(e^{b/n} - e^{a/n})} \right) \\ &= (e^a - e^b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)}{n} \frac{1}{e^{(b-a)/n} - 1} \right) \end{aligned}$$

für den Term $e^{(b-a)/n}$, wir benutzen Taylor-Entwicklung bei Punkt $\frac{b-a}{n}$ mit $n \rightarrow \infty$ (d.h. $\frac{b-a}{n} \rightarrow 0$)

$$e^{(b-a)/n} \simeq 1 + \frac{b-a}{n} + \underbrace{\frac{1}{2!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\right)}_{\text{ignore}}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
 & (e^a - e^b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)}{n} \frac{1}{e^{(b-a)/n} - 1} \right) \\
 & = (e^a - e^b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-b)}{n} \frac{1}{1 + \frac{b-a}{n} - 1} \right) \\
 & = e^b - e^a
 \end{aligned}$$

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

Aufgabe 20.6(H)

The function of the ellipse is given by

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

or

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

therefore, we have

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

to determine the area of the ellipse, we do integration over y

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y dx$$

with $x_0 = 0$, $x_1 = a$. Note that the area A is now only one-fourth of a ellipse, actual area is $A_e = 4A$.

Then:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

now comes the hint given in the question: to find the anti-derivative of function $F'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, or to prove that for function $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right)$$

its derivative is $F'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Beweis. For function

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \end{aligned}$$

its derivative is

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{2} a \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \\ &= \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

□

Therefore, we have

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right)$$

now calculate the definite integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2} \pi a^2$$

therefore

$$A = \frac{b}{a} \frac{1}{2} \pi a^2 = \frac{1}{4} \pi ab$$

the area of the ellipse is $A_e = 4A = \pi ab$

Blatt 21

Aufgabe 21.5(H) Calculate antiderivative of following functions with proper methods:

(a) $f(x) = x^3 e^x$

$$\int f(x) dx = \int x^3 e^x dx \quad (1)$$

$$= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx \quad (2)$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + \int 6x e^x dx \quad (3)$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - \int 6 e^x dx \quad (4)$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C \quad (5)$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C \quad (6)$$

(b) $f(x) = 3e^x \sqrt{e^x + 1}$

Substitute $t = e^x + 1$, therefore

$$dt = e^x dx \quad (7)$$

then we have

$$\int f(x) dx = \int 3e^x \sqrt{e^x + 1} dx = 3 \int \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$= 2t^{3/2} + C \quad (9)$$

$$= 2(e^x + 1)^{3/2} + C \quad (10)$$

(c) $f(x) = x \ln x \quad (x > 0)$

$$\int f(x) dx = \int x \ln x dx \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \int 2x \ln x dx \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} dx \right) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C \right) \quad (14)$$

$$= \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C \quad (15)$$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} \quad (x > 0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = \frac{1}{x^{1/2}(1 + x^{1/3})} = \frac{1}{x^{1/2} + x^{5/6}} = \frac{1}{x^{3/6} + x^{5/6}} \quad (16)$$

Substitute $t = x^{1/6}$ with $dt = \frac{1}{6x^{5/6}}dx$ we get

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^{3/6} + x^{5/6}}dx = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^5}dt \quad (17)$$

$$= 6 \int \frac{t^2}{1 + t^2}dt \quad (18)$$

$$= 6 \int 1dt - 6 \int \frac{1}{1 + t^2}dt \quad (19)$$

$$= 6t - 6 \arctan(t) + C \quad (20)$$

$$= 6(x^{1/6}) - 6 \arctan(x^{1/6}) + C \quad (21)$$

(e) $f(x) = (\ln x)^3$

Substitute $t = \ln x$, with $dt = \frac{1}{x}dx$ and $x = e^t$, we get

$$\int f(x)dx = \int (\ln x)^3 dx = \int t^3 e^t dt \quad (22)$$

use the conclusion from (a) eq.1 to 6, we get

$$\int t^3 e^t dt = (t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + C \quad (23)$$

therefore

$$\int f(x)dx = (\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6)x + C \quad (24)$$