Fakultät Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 02.05. bis 05.05.

# Analysis II

20. Übungsblatt: *Riemann-Integral*

**Aufgabe 20.1**

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $(\varphi_n)$ in $\mathcal{T}[a,b]$ und es gelte $\sup\{|f(x) - \varphi_n(x)|\,;\, x \in [a,b]\} \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass $f$ integrierbar auf $[a,b]$ ist und dass

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

gilt.

**Aufgabe 20.2**

Sei $a > 0$, $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ und $f$ integrierbar auf $[0,a]$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f$ gerade, dann ist $f$ integrierbar auf $[-a,a]$ und $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Ist $f$ ungerade, dann ist $f$ integrierbar auf $[-a,a]$ und $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

**Aufgabe 20.3**

Sei $a > 1$. Berechnen Sie mit Hilfe Riemannscher Summen das Integral

$$\int\limits_1^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Unterteilung $1 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = a$ mit $x_k^{(n)} := a^{k/n}$ $(k \in \{0,1,2,\ldots,n\})$ und die Stützstellen $\xi_k^{(n)} := x_{k-1}^{(n)}$.

**Aufgabe 20.4**

Ermitteln Sie eine Stammfunktion $F$ zu folgenden Funktionen $f$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x > 0)$,

(c) $f(x) = e^x \cdot \cosh x$,

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \quad (x > 0)$,

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} \quad (|x| < 1)$.

**Aufgabe 20.5 (H)** [5]

Sei $0 < a < b$. Berechnen Sie das Riemann-Integral

$$\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Riemannschen Summe und äquidistanter Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

**Aufgabe 20.6 (H)** [5]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass für

$$F(x) = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin(\tfrac{x}{a}))$$

gilt $F'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.