Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 23.01. bis 27.01.2023

Analysis I

14. Übungsblatt: *Komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen*

Aufgabe 14.1

Prove or disprove:

(a) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}y; y \in \mathbb{R}\}:$ $\quad \mathrm{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\mathrm{Re} z},$

(b) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}:$ $\quad \mathrm{Im}\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{|z|^2}\mathrm{Im} z,$

(c) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}:$ $\quad \mathrm{Re}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = 0 \iff \mathrm{Re}\ z = 0.$

Aufgabe 14.2

(a) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{Re}(\exp(z)) = \exp(\mathrm{Re} z).$$

Wie lautet die Formel für $\mathrm{Im}(\exp(z))$?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist jeweils die folgende Gleichung erfüllt?

(i) $\frac{1}{2} + \mathrm{i}x = \exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{3})$ (ii) $\frac{\cos x - \mathrm{i}\sin x}{\mathrm{e}^{-1-\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}$

Aufgabe 14.3

(a) Bestätigen Sie die Moivresche Formel

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi \qquad (n \in \mathbb{N}_0, \varphi \in \mathbb{R}).$$

(b) Wählen Sie in der Moivreschen Formel $n = 3$ und wenden Sie auf die linke Seite den binomischen Satz an. Welche Formeln erhält man durch Vergleich von Real- und Imaginärteil?

(c) Sei $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $x = \tan\varphi$. Zeigen Sie:

$$\frac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x} = \exp(2\mathrm{i}\varphi).$$

<u>Aufgabe 14.4</u>

Die Funktionen Cosinus und Sinus werden im Komplexen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad & z \mapsto \tfrac{1}{2}\left(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)\right) \\ \sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad & z \mapsto \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)\right) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos(x + \mathrm{i}y) &= \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y \\ \sin(x + \mathrm{i}y) &= \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y \end{aligned}$$

<u>Aufgabe 14.5</u>

Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die $\tan x$, $\tan y$ und $\tan(x + y)$ definiert sind, das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$