Fakultät Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 17.04. bis 21.04.

Analysis II

18. Übungsblatt: *Regeln von de l'Hospital, konvexe Funktionen*

Aufgabe 18.1

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)^\alpha - (1-\alpha x)}{x^2}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$,

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x}$.

Aufgabe 18.2

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ setze $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Zeigen Sie, dass

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$$

gilt.

Aufgabe 18.3

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in I$ ein Häufungspunkt von I. Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) f ist in a differenzierbar und $f(a) = 0$.

(ii) g ist in a stetig.

Zeigen Sie: Die Funktion $f \cdot g\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$, ist in a differenzierbar mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a).$$

<u>Aufgabe 18.4</u>

Seien $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, und die Funktion $f\colon (b, c) \to \mathbb{R}$ sei konvex. Beweisen Sie, dass f stetig auf (b, c) ist.

<u>Aufgabe 18.5</u> (H) [4]

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Ermitteln Sie die lokalen/globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n e^{-x}.$$

<u>Aufgabe 18.6</u> (H) [6]

Beweisen Sie den *verallgemeinerten Mittelwertsatz*: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die in (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ so, dass

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$