Fakultät Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 24.4. bis 28.4.23

Analysis II

19. Übungsblatt: *Treppenfunktionen, Riemann-Integral*

Aufgabe 19.1

Zur Erinnerung: Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet man mit $\lfloor x \rfloor$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl m mit $m \leq x < m+1$. Sind die angegebenen Funktionen $\varphi_k \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ $(k = 1,2,3,4)$ Treppenfunktionen? Wenn ja, ist ihr Integral zu ermitteln.

(a) $\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor$;

(b) $\varphi_2(x) = \lfloor 2x \rfloor$;

(c) $\varphi_3(x) = 7\lfloor x \rfloor - 5\lfloor 2x \rfloor$;

(d) $\varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

Aufgabe 19.2

Seien $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Zeigen Sie:
$\int\limits_a^{b} {}^{*}(f+g)(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^{b} {}^{*}f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^{b} {}^{*}g(x)\mathrm{d}x$. Gilt auch die Gleichheit?

Aufgabe 19.3

Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie das Riemannsche Integrierbarkeitskriterium:

$$f \text{ ist integrierbar } \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b] : \varphi \leq f \leq \psi \text{ und } \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 19.4

Die rationalen Zahlen im Intervall $[0, 2)$ seien als Folge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ geschrieben. Entscheiden Sie, ob die angegebenen Funktionen $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ Riemann-integrierbar sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $f_1(x) = \lfloor 2x \rfloor$;

(b) $f_2(x) = e^{-x^2}$;

(c) $f_3(x) = \displaystyle\sum_{k:\ r_k<x} 2^{-k}$;

(d) $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^{-2} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

Aufgabe 19.5 (H)

[4] Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ setze

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{falls } x \geq \frac{\pi}{2} \\ a(x+b)^2 + c & \text{falls } x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ermitteln Sie alle Parameter a, b, c, für die f differenzierbar ist.

Aufgabe 19.6 (H)

Die Legendreschen Polynome L_n sind für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

(a) [1] Geben Sie L_0, L_1, L_2 konkret an.

(b) [2] Berechnen Sie $L_n(1)$ und $L_n(-1)$.
Hinweis: Leibniz-Regel auf $f(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ anwenden.

(c) [3] Zeigen Sie: L_n hat im Intervall $(-1, 1)$ genau n verschiedene Nullstellen.
Hinweis: Ableitungen von $f(x) := [(x-1)(x+1)]^n$ mit Satz von Rolle auf Nullstellen untersuchen $(n > 0)$.