Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 12.12. bis 16.12.

Analysis I

10. Übungsblatt: *Eigenschaften von Abbildungen, Mächtigkeit von Mengen, Supremum und Infimum*

Aufgabe 10.1

(a) Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^2$;

(ii) $g\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\},\ \ x \mapsto x^2$;

(iii) $h\colon \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^2$;

(iv) $p\colon \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\},\ \ x \mapsto x^2$.

(b) Es sei eine Menge $M = \{a, b, c, d\}$ gegeben. Ermitteln Sie die Menge 2^M aller Abbildungen[1] von M in die Menge $N = \{0, 1\}$. Gibt es einen Zusammenhang zwischen dieser Menge von Abbildungen und der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$?

Aufgabe 10.2

Seien A, B Mengen, $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Für $M \subseteq A$ bzw. $N \subseteq B$ setze

$$f[M] := \{b \in B; \exists m \in M\colon f(m) = b\}, \quad f^{-1}[N] := \{a \in A; \exists n \in N\colon f(a) = n\}.$$

Zeigen Sie, dass für $M_1, M_2 \subseteq A$ und $N_1, N_2 \subseteq B$ gilt

(a) $M_1 \subseteq M_2 \Longrightarrow f[M_1] \subseteq f[M_2]$; $\qquad N_1 \subseteq N_2 \Longrightarrow f^{-1}[N_1] \subseteq f^{-1}[N_2]$.

(b) $f[M_1 \cup M_2] = f[M_1] \cup f[M_2]$; $\qquad f^{-1}[N_1 \cup N_2] = f^{-1}[N_1] \cup f^{-1}[N_2]$.

[1] Als Bezeichnung für die Menge der Abbildungen von einer Menge M in eine Menge N ist in der Literatur die Bezeichnung N^M gebräuchlich. Für eine zweielementige Menge $N = \{0, 1\}$ schreibt man auch 2^M.

Aufgabe 10.3

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Begründen Sie, dass die folgenden Mengen jeweils gleichmächtig sind.

(a) $\mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{U}$ der ungeraden natürlichen Zahlen;

(b) $[0, 1]$ und $[a, b]$;

(c) $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$;

(d) $(0, 1)$ und $[0, 1]$.

Hinweis: Hilberts Hotel.

Aufgabe 10.4

Bestimmen Sie für die folgenden Teilmengen X von $\mathbb{R}$ jeweils $\sup X$ und $\inf X$.

(i) $X = \left\{\frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\right\}$;

(ii) $X = \{x \in \mathbb{R}; x^{16} \leq 16\}$;

(iii) $X = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 10x \leq 24\}$;

(iv) $X = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\right\}$;

(v) $X = \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n}; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\right\}$.

Existiert jeweils $\max X$ oder $\min X$?

Aufgabe 10.5

(a) Sei M eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $S = \sup M$ genau dann gilt, wenn S eine obere Schranke von M ist und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ existiert mit $S - \varepsilon < x$.

(b) Es seien X und Y nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Setze

$$X + Y := \{x + y; x \in X, y \in Y\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass gilt $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Aufgabe 10.6

Ermitteln Sie Limes superior und Limes inferior der Folgen

(a) $\left(\dfrac{1+(-1)^n \cdot n}{2n+(-1)^n}\right)$,

(b) $\left(\dfrac{n}{3n+(-1)^n \cdot (n-1)}\right)$.

Aufgabe 10.7 (H)

Seien A, B Mengen, $f\colon A \to B$ eine Abbildung, $M_1, M_2 \subseteq A$ und $N_1, N_2 \subseteq B$. Zeigen Sie:

(a) [2] $f[M_1 \cap M_2] \subseteq f[M_1] \cap f[M_2]$; $\qquad f^{-1}[N_1 \cap N_2] = f^{-1}[N_1] \cap f^{-1}[N_2]$.

(b) [2] Unter welcher Voraussetzung an f gilt für alle Mengen $M_1, M_2 \subseteq A$ die Beziehung $f[M_1 \cap M_2] = f[M_1] \cap f[M_2]$? (Beweis!)

Aufgabe 10.8 (H)

(a) [2] Sei M eine Menge und $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Menge $M_0 := \{x \in M; x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(M)$ und zeigen Sie, dass M_0 kein Urbild hat.

(b) [2] Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

(c) [2] Zeigen Sie: Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.