TUD, Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übungen 10.10. bis 14.10.2022

Analysis I

1. Übungsblatt: *Aussagen und Quantoren*

In der Übung werden die folgenden grundlegenden Themen behandelt:

- Was ist eine Aussage?
- Verknüpfungen (Junktoren): Negation $\neg$, Konjunktion $\wedge$, Disjunktion $\vee$, Implikation $\Rightarrow$, Bijunktion (Äquivalenz) $\Leftrightarrow$; Wahrheitswerttabellen
- Allquantor $\forall$ („für alle“, „für jedes“), Existenzquantor $\exists$ („es existiert“, „es existiert mindestens ein(e)“); Verneinung quantisierter Aussagen

Um Ihr Selbststudium zu unterstützen, finden Sie unter OPAL Material zu diesen Themen (Schichl/Steinbauer, Kap. Logik).

Hinweis: *Aussagenlogische Formeln* über einem Variablenvorrat sind die Zeichenketten, die rekursiv definiert sind durch:

(a) Jede Variable aus dem Variablenvorrat ist eine aussagenlogische Formel.

(b) Wenn φ und ψ aussagenlogische Formeln sind , dann sind auch

$$\neg(\varphi), \quad (\varphi) \wedge (\psi), \quad (\varphi) \vee (\psi), \quad (\varphi) \Rightarrow (\psi), \quad (\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$$

aussagenlogische Formeln.

Konvention: In aussagenlogischen Formeln dürfen Klammern um Variable aus dem Variablenvorrat weggelassen werden.

Eine aussagenlogische Formel, die bei jeder Belegung der in ihr auftretenden Variablen durch Wahrheitswerte (*wahr* (w) oder *falsch* (f)) stets den Wahrheitswert *wahr* ergibt, heißt *Tautologie*.

Eine aussagenlogische Formel, die bei jeder Belegung der in ihr auftretenden Variablen durch Wahrheitswerte stets den Wahrheitswert *falsch* ergibt, heißt *Kontradiktion*.

Aufgabe 1.1 Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln über dem Variablenvorrat p, q, r um Tautologien handelt. Benutzen Sie dafür Wahrheitswerttabellen.
(a) $\neg(p \wedge \neg p)$
(„Satz vom Widerspruch")
(b) $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$
(„Satz von de Morgan")
(c) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow (\neg p)$
(„Satz vom modus tollens". Beispiel: Aus den Voraussetzungen *Wenn es regnet, ist die Straße nass* und *Die Straße ist nicht nass* lässt sich der logische Schluss *Es regnet nicht* ziehen.)
(d) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
(Distributivgesetz)
Geben Sie eine Kontradiktion an.

Aufgabe 1.2 Schreiben Sie für den Variablenvorrat p, q die folgende aussagenlogische Formel

$$(\neg((p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \wedge p) \vee (q \Rightarrow q)) \Rightarrow p$$

logisch äquivalent unter Benutzung möglichst weniger Verknüpfungen.

Aufgabe 1.3 Formulieren Sie folgende Aussagen mit Hilfe von Junktoren und Quantoren.

(a) Ist x eine reelle Zahl, die $x^2 = 1$ erfüllt, so gilt $x = 1$ oder $x = -1$.

(b) Es gibt keine reelle Zahl x, die $x^2 = -1$ erfüllt.

(c) Ist eine natürliche Zahl durch 6 oder durch 4 und 9 teilbar, so ist sie auch durch 2 und 3 teilbar.

(d) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere Primzahl.

(e) Jede Menge natürlicher Zahlen besitzt genau ein kleinstes Element.

Negieren Sie nun jede dieser Aussagen.

Hinweis: Hier benötigen Sie die Mengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der Primzahlen $\mathbb{P}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Benutzen Sie die übliche Elementschreibweise $x \in \mathbb{R}$, etc.

Aufgabe 1.4
Wolfgang fühlt sich krank und geht ins Krankenhaus. Dort wird er von einem Professor und einem Medizinstudenten untersucht, die anschließend das folgende Gespräch führen:

Professor: Der Patient kann nur folgende Krankheiten haben: Gummikauzwang, Hirnversalzung, Nasophobie, Denkinsuffizienz, Riechneurose, Zehsyndrom oder Sitzanomalie.
Student: Angenommen es ist Hirnversalzung ...
Professor: Dann kann er nicht an Gummikauzwang leiden.
Student: Wenn er Gummikauzwang hat, jedoch nicht an Riechneurose leidet ...
Professor: Dann hat er Denkinsuffizienz. Und wenn der Patient nicht an Nasophobie leidet, dann hat er, falls er nicht an Gummikauzwang erkrankt ist, das Zehsyndrom oder Denkinsuffizient, oder gar beides.
Student: Wenn er nicht an Sitzanomalie leidet ...
Professor: Dann hat er auch keine Denkinsuffizienz.
Student: Wenn der Patient unter Gummikauzwang leidet ...
Professor: Dann hat er entweder eine Sitzanomalie oder Hirnversalzung. Falls er eine Riechneurose hat, dann hat er entweder Nasophobie oder Gummikauzwang.
Student: Wenn das Zehsyndrom vorliegt ...
Professor: Dann hat er auch eine Riechneurose. Und falls er an Sitzanomalie erkrankt ist, hat er auch Nasophobie. Falls er Nasophobie hat, ist zwar eine Riechneurose auszuschließen, jedoch liegt dann Gummikauzwang vor.
Begründen Sie, dass Wolfgang tatsächlich erkrankt ist, und stellen Sie fest, welche Erkrankungen der Patient hat.

Aufgabe 1.5(H) [6] Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln über dem Variablenvorrat p, q, r um Tautologien handelt.

(a) $((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$,

(b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$

(c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$.

Aufgabe 1.6 (H) [4] φ und ψ seien aussagenlogische Verknüpfungen über einem gegebenen Variablenvorrat. Die Verknüpfung $|$ sei definiert mittels

$$(\varphi|\psi) \Leftrightarrow (\neg(\varphi \wedge \psi))$$

(„Shefferscher Strich“ bzw. „NAND“). Drücken Sie die Negation von φ und die Konjunktion und Disjunktion von φ und ψ durch diese Verknüpfung allein aus.