Fakultät Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 11.04. bis 14.04.

Analysis II

17. Übungsblatt: *Lokale Extrema, Mittelwertsatz*

Aufgabe 17.1

In Edinburgh, a female mathematics student notices a bagpiper wearing a kilt and walking along a street. Because of his exceptionally well-formed legs she decides to follow him at a distance showing his legs—as far as they show below his kilt—at the largest possible angle. Calculate this distance if the height of the seam of the kilt above ground is 60 cm and the height of the eyes of the student is 1,68 m.
(Adapted from F. Rellich, Göttingen, formerly Marburg and Dresden.)

Aufgabe 17.2

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es gelte $0 \leq f'(x) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Besitzt f eine Nullstelle, so gilt $f = 0$.
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x} \cdot f(x)$.

Aufgabe 17.3

Bestätigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die folgenden Ungleichungen:

(a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$; Lipschitz-Stetigkeit von arctan),

(b) $1 + \frac{x}{x+2} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ ($x > 0$).

Aufgabe 17.4

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 + ax^2 + bx.$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf lokale Extrema (in Abhängigkeit von a und b).

<u>Aufgabe 17.5</u> (H)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Berechnen Sie dort die jeweiligen Ableitungen.

(a) [1] $f_1(x) = \sin(\cos x)$,

(b) [2] $f_2(x) = x \cdot |x|$,

(c) [1] $f_3(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$,

(d) [1] $f_4(x) = x^{(x^x)}$.

<u>Aufgabe 17.6</u> (H)

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) [1] Zeigen Sie: Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade, und die Ableitung einer ungeraden Funktion ist gerade.

(b) [4] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom n-ten Grades, d.h. es gibt $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ so, dass $f\colon x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Beweisen Sie:
(i) f ist genau dann gerade, wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden Indizes k.
(ii) f ist genau dann ungerade, wenn $a_k = 0$ für alle geraden Indizes k.