Fakultät Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 15.05. bis 19.05.

Analysis II

22. Übungsblatt: *Integration rationaler Funktionen*

Aufgabe 22.1

Rationale Funktionen können integriert werden, indem man den Polynomanteil abspaltet und für den echt gebrochen rationalen Restanteil eine *Partialbruchzerlegung* der Form

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{(x-a)^k \cdot \dots \cdot (x^2+bx+c)^\ell \cdot \dots} \\ &= \frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+bx+c} + \dots + \frac{B_\ell x + C_\ell}{(x^2+bx+c)^\ell} + \dots\end{aligned}$$

($a, b, c, \dots \in \mathbb{R};\ k, \ell, \dots \in \mathbb{N}$) ansetzt. Die Ansatzkoeffizienten $A_1, \dots, A_k, \dots, B_1, \dots, B_\ell, \dots, C_1, \dots, C_\ell, \dots$ lassen sich nach Multiplikation mit $q(x)$ durch *Koeffizienten-vergleich* ermitteln und die entstehenden Partialbrüche sind (mehr oder weniger) einfach integrierbar.
Berechnen Sie auf diesem Weg die folgenden Integrale.

(a) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x+3)(x-1)(x-4)} \mathrm{d}x$,

(b) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} \mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{x^2+11x-1}{(x^2+1)(x-2)} \mathrm{d}x$,

(d) $\int \frac{x^3}{x^2-2x+2} \mathrm{d}x$.

Aufgabe 22.2

Für Integrale, in denen rationale Funktionen trigonometrischer Funktionen auftreten, hilft die *universelle trigonometrische Substitution* weiter: $t = \tan \frac{x}{2}$, wobei $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ gilt (überprüfen Sie dies).
(a) Zeigen Sie mittels der Doppelwinkelformeln, dass $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ und $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ gilt.
(b) Ermitteln Sie $\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

(c) Überführen Sie das folgende Integral mittels (a) in ein Integral über eine rationale Funktion:

$$\int \frac{3\cos x + 2\sin x}{2\cos x + 3\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 22.3

Ermitteln Sie das folgende Integral mittels einer geeigneten hyperbolischen Substitution:

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Verwenden Sie dazu die üblichen Beziehungen zwischen den Funktionen cosh und sinh bzw. Formeln für doppelte Argumente.

Aufgabe 22.4 (H)

[2] Für ein Integral der Form $\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\mathrm{d}x$ benutzt man die Substitution $t = \frac{x-a}{b}$. Ermitteln Sie

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 22.5 (H)

Bestimmen Sie die Stammfunktionen F der folgenden Funktionen f.

(a) [3] $f(x) = \frac{x^2+9x+17}{x^3+3x^2-4}$.

(b) [5] $f(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$.