Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 19.12. bis 5.1.2015

Analysis I

11. Übungsblatt: *Limes superior und limes inferior, Stetigkeit*

Aufgabe 11.1

Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) (a_n) hat endlich viele Häufungspunkte $\Longrightarrow$ (a_n) ist beschränkt,

(b) $\limsup\,(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$,

(c) $\limsup\,(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$,

(d) $\liminf\,(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \liminf b_n$.

(In (b), (c), (d) sei keine der vorkommenden Größen gleich $+\infty$ oder $-\infty$).

Aufgabe 11.2

Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und

$$H := \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}$$

(nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist H nichtleer).
Zeigen Sie: $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H$.

<u>Aufgabe 11.3</u>
Note that $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ are dense in $\mathbb{R}$, i.e.,

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0 \colon \mathbb{Q} \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \varnothing \text{ and } (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \varnothing.$$

Define $f, g, h : (0,1) \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is rational,} \\ 1 & \text{if } x \text{ is irrational,} \end{cases}$$
$$g(x) := \begin{cases} x & \text{if } x \text{ is rational,} \\ 1-x & \text{if } x \text{ is irrational,} \end{cases}$$
$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is irrational,} \\ \frac{1}{q} & \text{if } x = \frac{p}{q} \text{ with relatively prime } p, q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Determine the points at which f, g and h are continuous, respectively.

<u>Aufgabe 11.4</u>
Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$. Bestimmen Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ erfüllt ist.

<u>Aufgabe 11.5</u> (H)
Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f \colon D \to \mathbb{R},\ a \in D$. Untersuchen Sie (Nachweis oder Gegenbeispiel), aus welchen der folgenden Bedingungen die Stetigkeit von f in a folgt.
Hinweis: Benutzen Sie Forster, Kapitel 11, Satz 3.

(a) [1] $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D \colon |x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(b) [2] $\forall \alpha \in (0,1)\ \exists \beta > 0 \colon |f(x) - f(a)| \leq \alpha$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| \leq \beta$.

(c) [2] $\forall \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0 \colon |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$.

<u>Aufgabe 11.6</u> (H)

(a) [1] Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in X$ ein *isolierter Punkt* von X, d.h. es gibt ein $\delta > 0$ so, dass $(a-\delta, a+\delta) \cap X = \{a\}$ ist. Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ in a stetig ist.

(b) [2] Sei $X := \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie die Menge aller stetigen Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$ an.

(c) [2] Sei $X := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie die Menge aller stetigen Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$ an.