Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 09.01. bis 13.01.

Analysis I

12. Übungsblatt: *Zwischenwertsatz, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit*

Aufgabe 12.1

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$. Zeigen Sie, dass für

$$c := \inf\{x \in [a,b] :\ f(x) \geq 0\}$$

die Gleichung $f(c) = 0$ gilt (anderer Beweis des Zwischenwertsatzes).

Aufgabe 12.2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit dem Zwischenwertsatz.

(a) Die Gleichung $(1 + x^2) \cdot \sqrt{x} = 1$ besitzt eine Lösung $x > 0$.

(b) Jedes Polynom

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

von geradem Grad n, mit reellen Koeffizienten und mit $a_n \cdot a_0 < 0$, hat mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

(c) Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) = x^*$.

Aufgabe 12.3

Eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}_+$, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 12.4
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen f, g, h, k Lipschitz-stetig bzw. gleichmäßig stetig sind, und geben Sie jeweils eine Begründung an.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,

(b) $g\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$,

(c) $h\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x}$,

(d) $k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $k(x) = \sqrt{x}$.

Aufgabe 12.5
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Sind $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beschränkt, so ist auch $f \cdot g$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 12.6 (H) [4] Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)),$$
$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

(Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus) stetig sind und dass für $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Formeln gelten:

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$
$$\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y),$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Aufgabe 12.7 (H)
Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ und $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) [2] Gibt es solche Funktionen überhaupt? Geben Sie (zwei) Beispiele an!

(b) [4] Zeigen Sie: Ist f in $x = 0$ stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.