Fakultät Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 3.4. bis 6.4.2023

Analysis I

16. Übungsblatt: *Differentiation*

Aufgabe 16.1

(a) Compute the derivatives of sinh, cosh.

(b) Show that $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ and $\tanh' = \frac{1}{\cosh^2}$, where $\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$.

Aufgabe 16.2

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (auf dem jeweils sinnvollen Definitionsbereich):

$$f_1(x) = x^4 e^x, \qquad f_2(x) = \sin(x + x^2), \qquad f_3(x) = x^x,$$

$$f_4(x) = x^{(a^x)} \ (a > 0), \qquad f_5(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}, \qquad f_6(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x},$$

$$f_7(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1}, \qquad f_8(x) = \sin\left(\frac{x^3}{\cos x^3}\right), \qquad f_9(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Aufgabe 16.3 (H)

(a) [7] Bestimmen Sie die n-te Ableitung ($n > 0$) von $f(x) := x \cdot e^x$ und $g(x) := \sin^2 x$.

Hinweis: Berechnen Sie jeweils die Ableitungen für $n = 1$ und $n = 2$, erraten Sie die Formel für n und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(b) [3] Sei $h(x) := x^2 \cdot e^x$. Berechnen Sie $h^{(1000)}(x)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Leibnizsche Produktregel:
Für $h = u \cdot v$ gilt $h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$.

Aufgabe 16.4

Für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x^k \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f_0 ist nicht stetig in 0.

(b) f_1 ist stetig, aber nicht in 0 differenzierbar.

(c) f_2 ist differenzierbar, aber die Ableitung nicht in 0 stetig.

(d) f_3 ist stetig differenzierbar, aber f_3' nicht in 0 differenzierbar.

Aufgabe 16.5

Zeigen Sie: Die Funktion $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, und für ihren Wertebereich gilt $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Welche Ableitung hat die Umkehrfunktion $\operatorname{Artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$?

Anmerkung: Für die Umkehrfunktion $\operatorname{Arcoth}\colon (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$ der Funktion $\coth := \frac{\cosh}{\sinh}$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arcoth}(x) = \frac{1}{1-x^2}$.