Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übungen 07.11. bis 11.11.

Analysis I

5. Übungsblatt: *Reelle Zahlen*

Aufgabe 5.1 Entscheiden Sie – ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners – welche der beiden Zahlen $1\,000\,000^{1\,000\,001}$ und $1\,000\,001^{1\,000\,000}$ die größere ist.
Hinweis: Fragestellung auf den Vergleich von n^{n+1} und $(n+1)^n$ abstrahieren, den Quotienten betrachten, binomischen Satz anwenden, Binomialkoeffizienten geeignet abschätzen.

Aufgabe 5.2

(a) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ d \neq 0$ ist mit Hilfe der Körperaxiome nachzuweisen

(i) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, (ii) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$, falls auch $c \neq 0$.

(b) Auf der Menge $\{0, 1\}$ erklären wir Addition und Multiplikation durch folgende Tabellen:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Ist $\mathbb{F}_2 := \big(\{0, 1\}, +, \cdot\big)$ ein Körper? Kann $\mathbb{F}_2$ angeordnet werden?

(c) Betrachte die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aus Aufgabe 3.4(a) und definiere

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad (x \leq y \wedge x \neq y).$$

Welche der Anordnungs-Axiome (O.1) bis (O.3) und der Eigenschaften (3.1) bis (3.11) (siehe Forster) sind für diese Relation erfüllt?

Aufgabe 5.3 Für $x, y \in \mathbb{R}$ wird definiert

$$\max\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y, \\ y & \text{falls } x < y, \end{cases} \qquad \min\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y, \\ y & \text{falls } x > y. \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\max\{x, y\} = \tfrac{1}{2}(x + y + |x - y|), \qquad \min\{x, y\} = \tfrac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Aufgabe 5.4 Geben Sie für die folgenden Ungleichungen jeweils die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{R}$ (als disjunkte Vereinigung von Intervallen) an.

(a) $|x-a| < \varepsilon$ (wobei $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ vorgegeben sind),

(b) $\big||x|-2\big| \leq 1$,

(c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$.

Aufgabe 5.5

(a) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon, \\ &\text{(ii)} && \forall \alpha > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq M : |a_n - a| \leq \alpha, \\ &\text{(iii)} && \forall \beta > 0\ \exists K \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq K : |a_n - a| < 100\beta. \end{aligned}$$

(b) Ermitteln Sie das kleinste $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| \leq 10^{-4}$ erfüllt ist.

Aufgabe 5.6 (H) [2] Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome

(a) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$,

(b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Aufgabe 5.7 (H) Ermitteln Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

(a) [3] $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$,

(b) [3] $|x+1| + |x-3| < 6$,

(c) [2] $||x+3|-1| = 2$.