TUD, Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 17.10. bis 21.10.

# Analysis I

2. Übungsblatt: *Mengen, vollständige Induktion*

In der Übung werden die folgenden Themen behandelt:

- Operationen auf Mengen: Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, Komplement, Potenzmenge, kartesisches Produkt
  (siehe Schichl/Steinbauer, Kap. Mengenlehre 4.1)

- Vollständige Induktion
  (siehe Forster)

## Aufgabe 2.1

(a) Seien $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 4\}, D = \{4, 5, 6\}$. Geben Sie die folgenden Mengen an.

(i) $A \cap B$, $D \setminus B$, $A \cup C$, $A \cap D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$, $A \setminus (B \cap C)$, $C \setminus (B \setminus A)$, $(C \setminus B) \setminus A$.

(ii) $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B) \setminus \{B\}$, $\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D)$.

(iii) $A \times B$, $(C \times D) \setminus (A \times B)$, $(A \times B) \cap (C \times D)$.

(b) Gegeben sei die Menge

$$M := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}.$$

Wieviele Elemente enthält $M$? Entscheiden Sie ferner, ob die nachfolgenden Mengen Elemente oder Teilmengen von $M$ sind:

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\{\{\emptyset\}\}\},\ \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

**Aufgabe 2.2** Es seien $A$, $B$ und $C$ Teilmengen einer Menge $M$. Beweisen Sie die folgenden Mengengleichheiten.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Hinweis: Für zwei Mengen $A$ und $B$ zeigt man die Mengengleichheit $A = B$, indem man $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ verifiziert. Eine Mengeninklusion $A \subseteq B$ beweist man, indem man die Implikation $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ zeigt.

**Aufgabe 2.3** Es seien $A$, $B$ und $C$ Teilmengen einer Menge $M$.

(a) Zeigen Sie

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C).$$

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Inklusion echt sein kann.

(b) Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

(i) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Gilt in (i) bzw. (ii) die Mengengleichheit?

**Aufgabe 2.4**

(a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, dass $2^n > n^2$ gilt.

(b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt.

**Aufgabe 2.5 (H)** Auf einer Party gibt es eine Menge $F$ von Frauen und eine Menge $M$ von Männern. Gegeben seien folgende Aussagen:
(i) Zu jedem Mann auf der Party gibt es eine Frau, die mit ihm getanzt hat.
(ii) Es gibt eine Frau auf der Party, die mit jedem Mann getanzt hat.
(a) [1] Drücken Sie die beiden Aussagen mittels der Quantoren $\forall$ und $\exists$ aus.

(b) [2] Welcher logische Zusammenhang besteht zwischen beiden Aussagen? (Falls eine Implikation nicht gilt, ist ein Gegenbeispiel anzugeben.)
(c) [1] Negieren Sie die beiden Aussagen.
(Dabei soll die Negation von (i) nicht mit "Nicht zu jedem" beginnen, und die Negation von (ii) nicht mit "Es gibt keine".)

**<u>Aufgabe 2.6</u> (H)** Es seien $A$, $B$ und $C$ Teilmengen einer Menge $M$. Die symmetrische Differenz $A \triangle B$ ist definiert durch $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Beweisen Sie die folgenden Mengengleichheiten.
(a) [3] $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(b) [3] $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (Assoziativgesetz für die symmetrische Differenz)