

Analysis II

23. Übungsblatt: *Integration: Hauptsatz, Anwendungen*

Aufgabe 23.1

- (a) Ermitteln Sie eine Stammfunktion der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan x$.
(b) Geben Sie eine rekursive Formel an, um die Stammfunktion von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n \sinh x$$

für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

Aufgabe 23.2

Ermitteln Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\cos x)^4 dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx$

(c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{x-2}{x}\right) dx$

Aufgabe 23.3

- (a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- (b) Sei $a \in (0, \infty)$. Ermitteln Sie

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \arctan(a \tan z).$$

- (c) Berechnen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx$ (siehe Aufgabe 22.2(b)).
- (d) Bestimmen Sie $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx$.

Aufgabe 23.4 (H)

[4] Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Parabeln $x^2 - 4y = 0$ und $y^2 - 4x = 0$ im ersten Quadranten eingeschlossen wird. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 23.5 (H)

[6] Ermitteln Sie das folgende bestimmte Integral:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 - x + \frac{5}{4}}} dx.$$