Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übungen 14.11. bis 18.11.

Analysis I

6. Übungsblatt: *Folgen reeller Zahlen*

Aufgabe 6.1

Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes (ohne Verwendung von Grenzwertsätzen), dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n}{3n^3-6} = \frac{1}{3}$ ist.

Aufgabe 6.2

Untersuchen Sie, ob die Folgen

(a) $\left(\frac{4n^2+1}{9n^2-n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\left(\frac{1-(1-1/n)^5}{1-(1-1/n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ (c) $\left(\frac{2+1/n}{(1+1/n)/n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ (d) $\left(\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$

konvergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.3

Für eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ wird die Folge der arithmetischen Mittel (b_n) definiert durch

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}_{\geq 1}).$$

(a) Zeigen Sie: Aus $a_n \to a$ folgt $b_n \to a$.

(b) Geben Sie eine divergente Folge (a_n) an, für welche die Folge (b_n) konvergiert.

Aufgabe 6.4

(a) Beweisen Sie den „Sandwich-Satz“: Seien (a_n), (b_n), (x_n) Folgen in $\mathbb{R}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq x_n \leq b_n,$$

und sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: x$. Dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(b) Ermitteln Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ mit Hilfe von (a).

Aufgabe 6.5 (H)

Untersuchen Sie, ob die Folgen

(a) [1] $\left(\frac{2n+1}{3n} + \frac{3n}{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$

(b) [3] $\left(\binom{2n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$

konvergent sind, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.6 (H)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie (mittels Gegenbeispiel):

(a) [2] $\Big(\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent }\big) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ b_n \neq 0\big) \wedge \Big(\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge }\Big)\Big)$
$\implies \Big((b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist keine Nullfolge}\Big)$.

(b) [2] $\Big(\big((b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge }\big) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N}\colon b_n \neq 0\big)\Big)$
$\implies \Big(\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist nicht konvergent }\Big)$.

(c) [2] $\Big(\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent }\big) \wedge \big((a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent }\big)\Big)$
$\implies \Big((b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent }\Big)$.

Griechische Buchstaben:

A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Υ	υ	Ypsilon
E	ϵ	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega