Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 01.11. bis 04.11.

Analysis I

4. Übungsblatt: *Rekursive Definitionen, Körperaxiome für* $\mathbb{R}$

Vorbemerkung: Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist der Binomialkoeffizient wie folgt rekursiv definiert:

$$\binom{x}{0} := 1, \quad \binom{x}{k+1} := \frac{x-k}{k+1} \cdot \binom{x}{k}.$$

Für $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, ist x^n rekursiv definiert durch $x^0 := 1,\ x^{n+1} := x^n \cdot x$.

Aufgabe 4.1 Sei $k \in \mathbb{N}$. Werten Sie folgende allgemeine Binomialkoeffizienten aus:

$$\binom{2}{5}, \quad \binom{-1}{k} \quad \text{und} \quad \binom{-1/2}{3}.$$

Aufgabe 4.2 Seien $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\binom{x}{k} = \frac{x}{k} \cdot \binom{x-1}{k-1}.$$

(b) Bestätigen Sie mittels (a) die Additionsregel für Binomialkoeffizienten

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}.$$

Aufgabe 4.3 Beweisen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$,

(b) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$,

(c) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ (siehe auch Forster).

Aufgabe 4.4 In Schichl/Steinbauer 5.2 werden für eine Menge G und eine Operation $\circ\colon G \times G \to G$ die Begriffe Halbgruppe, Monoid, Gruppe, abelsche Gruppe definiert. Geben Sie für die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jeweils an, um welche Struktur es sich handelt, wenn als Operation die Addition $+$ bzw. die Multiplikation $\cdot$ betrachtet wird. Wie kann man die Ihnen bekannten Körperaxiome für $\mathbb{R}$ mit Hilfe dieser Begriffe formulieren?

Aufgabe 4.5

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Rechenregeln

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$, falls $a \neq 0$,

(b) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, falls $a \neq 0,\ b \neq 0$.

Aufgabe 4.6 (H)

(a) [3] Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

(b) [3] Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \ .$$

Stellen Sie eine Vermutung auf, welche Formel allgemein für

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m-1)$$

gilt, wobei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Beweisen Sie die Vermutung durch vollständige Induktion.

Aufgabe 4.7 (H) [4] Sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} = (-1)^n \cdot \binom{x-1}{n}.$$

Hinweis: Aufgabe 4.2(b) benutzen.