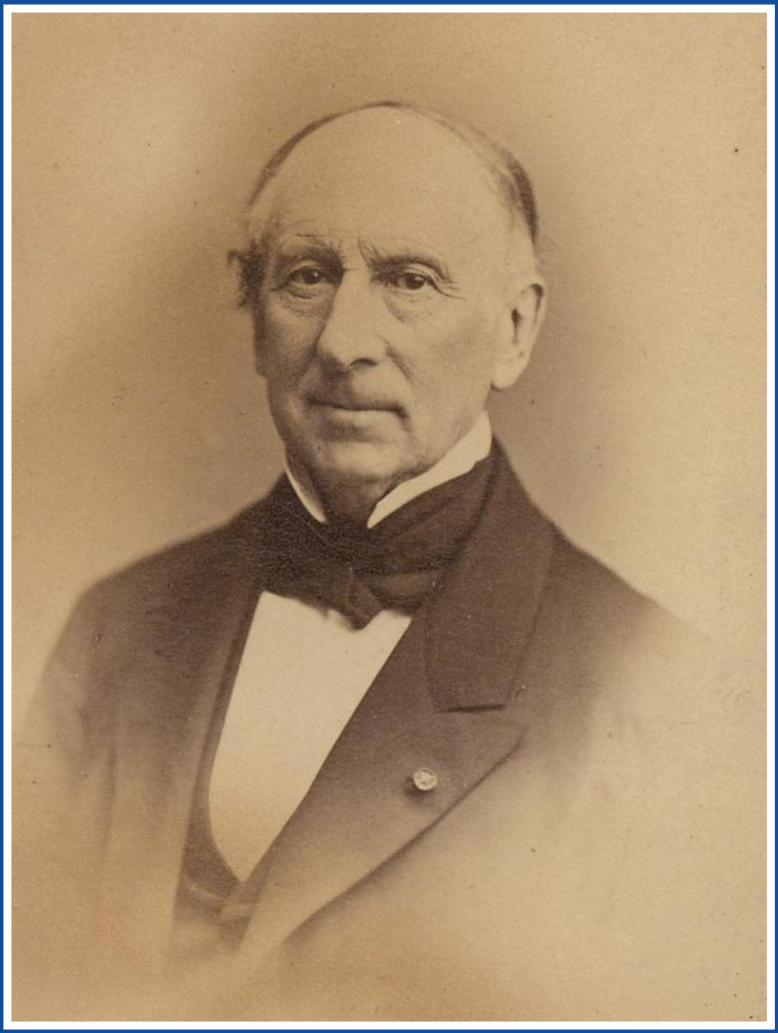
Übungen & Hausaufgaben
Analysis

WS2022/23-SS2023



Zehao Gao
M.Nummer 5052835

LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 1. Übungsblatt: *Aussagen und Quantoren*

1.1 Aufgabe 1.1

1.1.1 (a)

Beweis.
Sei p $wahr$:

$$p\ wahr \Rightarrow \neg p\ falsch \tag{1}$$
$$\Rightarrow (p \wedge \neg p)\ falsch \tag{2}$$
$$\Rightarrow \neg(p \wedge \neg p)\ wahr \tag{3}$$

Sei p $falsch$:

$$p\ falsch \Rightarrow \neg p\ wahr \tag{4}$$
$$\Rightarrow (p \wedge \neg p)\ falsch \tag{5}$$
$$\Rightarrow \neg(p \wedge \neg p)\ wahr \tag{6}$$

$Folgerung$: Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.2 (b)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	w	w

$Folgerung$: Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.3 (c)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)$	$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow (\neg p)$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w

$Folgerung$: Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.4 (d)

Beweis.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f	w
f	f	w	f	f	w	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w

$Folgerung$: Diese Formel ist Tautologie. □

1.1.5 (e)

Die Negation von Satz "Satz vom Widerspruch" ist einfach eine Kontradiktion:

$$\neg(\neg(p \wedge \neg p)) \Leftrightarrow p \wedge \neg p \quad (stets\ falsch)$$

1.2 Aufgabe 1.2

1.2.1

Lösung.
Wir vereinfachen nun die Formel $(\neg((p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \wedge p) \vee (q \Rightarrow q)) \Rightarrow p$
Nach Wahrheitstabelle gilt es:

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow p,\ (q \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$$

Damit vereinfachen wir die Formel zu:

$$(\neg(p \wedge p) \vee q) \Rightarrow p \tag{1}$$

Nach Wahrheitstabelle gilt es:

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

Damit vereinfachen wir die Formel zu:

$$(\neg p \vee q) \Rightarrow p \tag{2}$$

Nach Priorität von Verknüpfungen können wir noch vereinfachen:

$$\neg p \vee q \Rightarrow p \tag{3}$$

Bemerkung. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge b)$

1.3 Aufgabe 1.3

1.3.1 (a)

Lösung.
$(x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1) \wedge (x = -1)$

Negation
$\forall x \in \mathbb{R}$ und $x^2 = 1 \Rightarrow (x = 1) \vee (x = -1)$

1.3.2 (b)

Lösung.
$\neg(\exists x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x^2 = -1)$

Negation
$(\exists x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x^2 = -1)$

Bemerkung. Es gilt auch $\nexists x \in \mathbb{R}$

1.3.3 (c)

Lösung.
$(x \in \mathbb{N}) \wedge ((\frac{x}{6} \in \mathbb{Z}) \vee ((\frac{x}{4} \in \mathbb{Z}) \wedge (\frac{x}{9} \in \mathbb{Z}))) \Rightarrow (\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}) \wedge (\frac{x}{3} \in \mathbb{Z})$

Negation
$\exists n \in \mathbb{N} : \; (6|n) \vee ((4|n) \wedge (9|n)) \Rightarrow (2 \nmid n) \vee (3 \nmid n)$

Bemerkung. $(a|b)$ bedeutet: b durch a teilbar

1.3.4 (d)

Lösung.
$(\forall x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{P}) \wedge (y > x)$

Negation
$\exists n \in \mathbb{N} \; \forall p \in \mathbb{P} : \; p \leq n$

1.3.5 (e)

Lösung.
$(M \subset \mathbb{Z}) \Rightarrow (\exists! k \in M) \wedge (\forall g \in M \setminus k) \wedge (g > k)$

Negation
$\exists M \subset \mathbb{N} : \; \forall m \in \; M \; \exists n \in \; M \setminus \{m\} : \; m \geq n$
oder
$\exists m_1, \; m_2 \in \; M, \; m_1 \neq m_2 : \; m_1 < n, \; m_2 < n$

1.4 Aufgabe 1.4

Wir nennen: $G,\ H,\ N,\ D,\ R,\ Z,\ S$

$$H \Rightarrow \neg G \tag{1}$$
$$G \wedge \neg R \Rightarrow D \tag{2}$$
$$\neg N \wedge \neg G \Rightarrow Z \vee D \tag{3}$$
$$\neg S \Rightarrow \neg D \tag{4}$$
$$G \Rightarrow S \veebar H \tag{5}$$
$$R \Rightarrow N \veebar G \tag{6}$$
$$Z \Rightarrow R \tag{7}$$
$$S \Rightarrow N \tag{8}$$
$$N \Rightarrow \neg R \wedge G \tag{9}$$

$Folgerung$: Er ist krank.
Nehmen wir an, dass:

$$\neg N \wedge \neg G$$

gilt:

$$\Rightarrow^{(3)} Z \vee G$$

falls:

$$\begin{aligned}
Z = 1 \Rightarrow^{(1)} R \Rightarrow^{(6)} N \veebar G \\
D = 1 \Rightarrow^{(4)} S \Rightarrow^{(8)} N \\
N = 1 \Rightarrow^{(9)} \neg R \wedge G \Rightarrow^{(7)} \neg Z \\
\Rightarrow^{(2)} S \veebar H \\
\Rightarrow^{(1)} \neg H
\end{aligned}$$

$$N \wedge S \wedge \neg H \wedge \neg R \wedge G \wedge \neg Z \wedge D$$

Falls:

$$G \wedge \neg N$$

gilt es:

$$S \veebar H$$

1.5 Aufgabe 1.5(H)

1.5.1 (a)

Beweis.

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	f	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w

$Folgerung$: Diese Formel ist Tautologie. □

1.5.2 (b)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

$Folgerung$: Diese Formel ist Tautologie. □

1.5.3 (c)

Beweis.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

$Folgerung$: Diese Formel ist Tautologie. □

1.6 Aufgabe 1.6(H)

1.6.1 Negation von φ

Beweis.

$$(\varphi|\varphi) \Leftrightarrow (\neg(\varphi \wedge \varphi)) \Leftrightarrow (\neg\varphi)$$

$\square$

1.6.2 Konjunktion von φ und ψ

Beweis.

$$((\varphi|\psi)|(\varphi|\psi)) \Leftrightarrow (\neg((\neg(\varphi \wedge \psi)) \wedge (\neg(\varphi \wedge \psi)))) \Leftrightarrow (\neg(\neg(\varphi \wedge \psi))) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)$$

$\square$

1.6.3 Disjunktion von φ und ψ

Beweis.

$$((\varphi|\varphi)|(\psi|\psi)) \Leftrightarrow ((\neg\varphi)|(\neg\psi)) \Leftrightarrow (\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))) \Leftrightarrow (\neg(\neg(\varphi \vee \psi))) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$\square$

1.7 Tutorium

1.7.1 1. Aussagen

Wir nehmen $wahr$ 1 und $falsch$ 0
Sei a ein Aussagen, dann gilt:

$$a = 1 \ oder \ 0$$

1.7.2 2.Verknüpfungen

$$\neg \ Negation$$
$$\wedge \ Konjugtion$$
$$\vee \ Disjunktion$$
$$\veebar \ XOR \ \triangleq \ "entweder \ldots oder \ldots"$$

1.7.3 3.Wahrheitstabelle

Beispiel 1.1.

a	$\neg a$
0	1
1	0

1.7.4 4.Quantor

$\forall$ "für alle"
$\exists$ "existiert"
$\exists!$ "existiert genau eine"

Bemerkung.
Tautologie: Immer *wahr*

$$p \lor \neg p = 1$$

2 2. Übungsblatt: *Mengen, vollstndige Induktion*

2.1 Aufgabe 2.1

2.1.1 (a)

(i)

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{2\} \\
D \setminus B &= \{5\} \\
A \cup C &= \{1,2,3,4\} \\
A \cap D &= \emptyset \\
C \setminus D &= \{1,2\} \\
D \setminus C &= \{5,6\} \\
A \setminus (B \cap C) &= \{1,3\} \\
C \setminus (B \setminus A) &= \{1,2\} \\
(C \setminus B) \setminus A &= \emptyset
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\} \\
\mathcal{P}(B) \setminus \{B\} &= \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}\} \\
\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D) &= \{\emptyset, \{4\}\}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6)\} \\
(C \times D) \setminus (A \times B) &= \{(1,5), (2,5), (4,4), (4,5), (4,6)\} \\
(A \times B) \cap (C \times D) &= \{(1,4), (1,6), (2,4), (2,6)\}
\end{aligned}$$

2.1.2 (b)

M enthält 5 Elementen.

Bemerkung. $\{\emptyset, \emptyset\}$ ist $\{\emptyset\}$, deshalb verschwindet.

$$\begin{gathered}
\emptyset \in M,\ \emptyset \subseteq M \\
\{\emptyset\} \in M,\ \{\emptyset\} \subseteq M \\
\{\{\emptyset\}\} \in M,\ \{\{\emptyset\}\} \subseteq M \\
\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in M,\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq M \\
\{\{\{\emptyset\}\}\} \notin M,\ \{\{\{\emptyset\}\}\} \subseteq M \\
\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \notin M,\ \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \subseteq M
\end{gathered}$$

2.2 Aufgabe 2.2

2.2.1 (a)

Beweis.

$$B \cap C = \{x \in B \wedge x \in C\} \tag{1}$$
$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = \{x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \tag{2}$$

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\} \tag{3}$$
$$A \cup C = \{x \in A \vee x \in C\} \tag{4}$$
$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \tag{5}$$
$$= \{x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} = A \cup (B \cap C) \tag{6}$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{7}$$

□

2.2.2 (b)

Beweis.

$$B \cap C = \{x \in B \wedge x \in C\} \tag{8}$$
$$\Rightarrow A \setminus (B \cap C) = \{x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)\} \tag{9}$$

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \tag{10}$$
$$A \setminus C = \{x \in A \wedge (x \notin C)\} \tag{11}$$
$$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in A \wedge (x \notin C))\} \tag{12}$$
$$= \{x \in A \wedge ((x \notin B) \vee (x \notin C))\} \tag{13}$$
$$= \{x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)\} = A \setminus (B \cap C) \tag{14}$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{15}$$

□

2.3 Aufgabe 2.3

2.3.1 (a)

Bemerkung. sehe Tutorium

Beweis.

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \tag{1}$$
$$\Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \wedge (x \notin C)\} \tag{2}$$
$$= \{x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)\} \tag{3}$$

$$B \setminus C = \{x \in B \wedge (x \notin C)\} \tag{4}$$
$$\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) = \{x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge (x \notin C))\} \tag{5}$$
$$= \{x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)\} \tag{6}$$

dann:

$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \tag{7}$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C) \tag{8}$$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C) \tag{9}$$

□

2.3.2 (b)

(i)

Beweis.

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{(S \in \mathcal{P}(A)) \wedge (S \in \mathcal{P}(B)\} \tag{10}$$
$$= \{(S \subseteq A) \wedge (S \subseteq B)\} \tag{11}$$
$$= \{((x \in S) \wedge (x \in A)) \wedge ((x \in S) \wedge (x \in B))\} \tag{12}$$
$$= \{(\forall x \in S) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)\} \tag{13}$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \{S \in \mathcal{P}(A \cap B)\} \tag{14}$$
$$= \{(\forall x \in S) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)\} \tag{15}$$
$$= \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \tag{16}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) \tag{17}$$

□

(ii)

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &= \{(S \in \mathcal{P}(A)) \vee (S \in \mathcal{P}(B))\} && (18)\\
&= \{((\forall x \in S) \wedge (x \in A)) \vee ((\forall x \in S) \wedge (x \in B))\} && (19)\\
&= \{\forall x \in S \wedge (x \in A \vee x \in B)\} && (20)
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{P}(A \cup B) = \qquad (21)
$$

□

2.4 Aufgabe 2.4

2.4.1 (a)

Beweis.
Wir beweisen nun $\forall (n \geq 5) \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$.

$Induktionsanfang:$
Sei $n = 5$, dann gilt:

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

$Induktionsvorraussetzung:$
$\forall (n \geq 5) \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$

$Induktionsschritt:$
Wir setzen $\tilde{n} = n + 1$, dann gilt:

$$2^{\tilde{n}} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\mathbf{IV}}{>} n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n - 1 = (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2$$

Offenb. $(n-1)^2 - 2 > 0$ für $\forall (n \geq 5) \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

□

2.4.2 (b)

Beweis.
Wir beweisen nun $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$Induktionsanfang:$
Sei $n = 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}$$

$Induktionsvorraussetzung:$
Sei $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsschritt :
Wir setzen $\tilde{n} = n + 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\tilde{n}} k^2 = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\tilde{n}} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{\textbf{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

$\square$

2.5 Aufgabe 2.5(H)

2.5.1 (a)

(i) $\forall m \in M$, $\exists f \in F$, die mit m getanzt hat.

(ii) $\exists f \in F$, die mit $\forall m \in M$ getanzt hat.

2.5.2 (b)

When (ii) is true, (i) must be true.
When (ii) is false, (i) can be either true or false.
This corresponds *logical implication*
conclusion : (ii)$\Rightarrow$(i)

2.5.3 (c)

(i) $\exists m \in M$, $\nexists f \in F$, die mit m getanzt hat.

(ii) $\forall f \in F$, $\exists m \in M$, die nicht mit f getanzt hat.

2.6 Aufgabe 2.6(H)

2.6.1 (a)

Beweis.

$$A \bigtriangleup B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{1}$$
$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \tag{2}$$
$$B \setminus A = \{x \in B \wedge (x \notin A)\} \tag{3}$$
$$\Rightarrow A \bigtriangleup B = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))\} \tag{4}$$

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\} \tag{5}$$
$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\} \tag{6}$$
$$\Rightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \tag{7}$$
$$= \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))\} = A \bigtriangleup B \tag{8}$$

$$\Rightarrow A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \tag{9}$$

□

2.6.2 (b)

Beweis.

$$A \bigtriangleup B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{10}$$

$$\Rightarrow (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = (((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C) \cup (C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))) \tag{11}$$

$$\textit{und } A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = (A \setminus ((B \setminus C) \cup (C \setminus B))) \cup (((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \setminus A) \tag{12}$$

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge (x \notin B)\} \tag{13}$$

$$B \setminus A = \{x \in B \wedge (x \notin A)\} \tag{14}$$

$$\Rightarrow A \bigtriangleup B = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \{(x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))\} \tag{15}$$

dann:

$$\begin{aligned}\Rightarrow (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = &\{(((x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))) \wedge (x \notin C)) \\ &\vee (x \in C \wedge \neg((x \in A \wedge (x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A))))\}\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}= &\{(((x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)) \wedge (x \notin C)) \\ &\vee (x \in C \wedge \neg((x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)))\}\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}= &\{(x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \\ &\wedge \neg(((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C)) \\ &\wedge (((x \in B \wedge x \in C) \wedge (x \notin A)) \\ &\wedge (((x \in C \wedge x \in A) \wedge (x \notin B)))\}\end{aligned} \tag{18}$$

$$= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \tag{19}$$

analog:

$$\begin{aligned}\Rightarrow A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = &\{(x \in A \wedge \neg((x \in B \wedge (x \notin C)) \vee (x \in C \wedge (x \notin B)))) \\ &\vee (((x \in B \wedge (x \notin C)) \vee (x \in C \wedge (x \notin B))) \wedge (x \notin A))\}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}= &\{(x \in A \wedge \neg((x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C))) \\ &\vee (((x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)) \wedge (x \notin A))\}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}= &\{(x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \\ &\wedge \neg(((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C)) \\ &\wedge (((x \in B \wedge x \in C) \wedge (x \notin A)) \\ &\wedge (((x \in C \wedge x \in A) \wedge (x \notin B)))\}\end{aligned} \tag{22}$$

$$= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)) \tag{23}$$

$$\Rightarrow (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) \tag{24}$$

$\square$

2.7 Tutorium

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$A \setminus B \Rightarrow \forall x : (x \in A \wedge x \notin B)$
$A \setminus B = \{x \in M \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

3 3. Übungsblatt: *Relationen*, *vollstndige Induktion*, *binomischer Satz*

3.1 Aufgabe 3.1

3.1.1 (a)

1 = ja, 0 = nein						
	reflexiv	*transitiv*	*symmetrisch*	*antisym.*	Äquivalenzrelation	Ordnungsrelation
R_1	1	0	1	0	0	0
R_2	1	0	0	0	0	0
R_3	1	1	1	0	1	0

3.1.2 (b)

R umkehren und x, y umkehren.

3.2 Aufgabe 3.2

1 = ja, 0 = nein				
	reflexiv	*transitiv*	*symmetrisch*	Äquivalenzrelation
(a)	1	1	1	1
(b)	1	0	1	0
(c)	1	1	1	1

$x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$, dnan $x - z = x - y + y - z \in \mathbb{Z}$

Äquivalenzklasse:

(a)
$xR_1y \Leftrightarrow x - \lfloor x \rfloor = y = \lfloor y \rfloor$
$\lfloor \bullet \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \sup\{z \in \mathbb{Z} | z \leq x\}$
$R/R_1 = \{[\alpha] | \alpha \in [0, 1)\}$
$[\alpha] = \{\alpha + z | z \in \mathbb{Z}\}$

(b)
keine

(c)
Äquivalenzklasse sind immer TM von ganzen Mengen.
$[n] = \{n, -n\} \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3.3 Aufgabe 3.3

3.3.1 (a)

Beweis.
Es sei:

$$R \subset A \times A,\ S \subset A \times A$$

Aequivalenzrelationen

refl.:$\forall x \in A$, $(x,x) \in R$, $(x,x) \in S$, da:
$\Rightarrow (x,x) \in R \cap S \Rightarrow R \cap S$ ist refl.

symm.:$\forall (x,y) \in R \cap S$,
$\Rightarrow (x,y) \in R$, (x,y)
$inS \Rightarrow$(symm. von S und R) $(y,x) \in R$, $(y,x) \in S$
$\Rightarrow (y,x) \in R \cap S$

trans.:$\forall (x,y), (y,z) \in R \cap S$,
$\Rightarrow (x,y), (y,z) \in R$ und $\in S$
$\Rightarrow$(transi. von R und S) $(x,z) \in R \cap (x,z) \in S$
$\Rightarrow (x,z) \in R \cap S$ ☐

3.3.2 (b)

R	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	
c			x

S	a	b	c
a	x		
b		x	x
c		x	x

$R \cup S$	a	b	c
a	x	x	
b	x	x	x
c		x	x

$(a,b) \in R \cup S$, $(b,c) \in R \cup S$, $(a,c) \notin R \cup S$ contradiction.

3.4 Aufgabe 3.4

3.4.1 (a)

refl.: $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \leq \alpha \wedge \beta \leq \beta$ gilt.

trans.: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ wobei $x \leq y \wedge y \leq z$
$\overset{def}{\Rightarrow} (x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \cap (y_1 \leq z_1 \wedge y_2 \leq z_2)$
$\Rightarrow x \leq z$

anti.sym.: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
s.d. $x \leq y \wedge y \leq x$
$\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \cap (y_1 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_2)$
$\Rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$
$\Rightarrow x = y$

3.5 Aufgabe 3.5

3.5.1 (a)

Beweis. IA: $n = 6$,

$$2^6 \cdot 6! = 46080 < 6^6$$

IV: Sei für n gilt $2^n \cdot n! < n^n$

IS:

$$\begin{aligned} &2^{n+1}(n+1)! < (n+1)^{n+1} \\ =&2^n \cdot n! \cdot 2 \cdot (n+1) < 2(n+1) \cdot n^n \end{aligned}$$

z.z $2 < (1 + \dfrac{1}{n})^n, \ \forall n > 6$
(Binomische Satz.) □

3.5.2 (b)

Beweis. IA: $n = 1$

$$11^2 + 12 = 133$$

IV: $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133k$ für n gilt.

IS:

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{N}, \ &sodass \\ 11^{n+2} + 12(2n+1) &= 133 \cdot k' \\ 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} & \\ 11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + (133 + 11) \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot k \cdot 133 + 133 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot k \cdot 133 + 133 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 133(11 \cdot k + 12^{2n-1}) \end{aligned}$$

□

3.6 Aufgabe 3.6(H)

3.6.1 (a)

Beweis.

$reflexiv$
Sei $a \in M = \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 5 \cdot 0$
$\Rightarrow (a, a) \in R_1$
$\Rightarrow R_1$ $reflexiv$

$symmetrisch$
Sei $a, b \in M = \mathbb{Z}$ und $(a, b) \in R_1$
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $a - b = 5k$
mit $b - a = -(a - b) = -5k = 5 \cdot (-k)$, $\exists \tilde{k} = -k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (b, a) \in R_1$
$\Rightarrow R_1$ $symmetrisch$

$transitiv$
Sei $a, b, c \in M = \mathbb{Z}$, und $(a, b), (b, c) \in R_1$
$\Rightarrow \exists k_1$, $a - b = 5k_1$ und $\exists k_2$, $b - c = 5k_2$
mit $a - c = a - b + b - c = 5k_1 + 5k_2 = 5(k_1 + k_2)$, $\exists \tilde{k} = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (a, c) \in R_1$
$\Rightarrow R_1$ $transitiv$

$\Rightarrow R_1$ ist Äquivalenzrelation auf M □

Äquivalenzklassen:
$[a] = \{x \in M \mid x = a - 5k,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$[b] = \{x \in M \mid x = b + 5k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

3.6.2 (b)

Beweis.

$reflexiv$

Sei $a, b \in M$, $(a, b) \in M \times M$
mit $((a, b), (a, b)) : a^2 + b^2 = a^2 + b^2$
$\Rightarrow ((a, b), (a, b)) \in R_2$
$\Rightarrow R_2\ reflexiv$

$symmetrisch$

Sei $a, b, c, d \in M$, $(a, b), (c, d) \in M \times M$, mit $((a, b), (c, d)) \in R_2$
$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
mit $((c, d), (a, b)) : c^2 + d^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
$\Rightarrow ((c, d), (a, b)) \in R_2$
$\Rightarrow R_2\ symmtrisch$

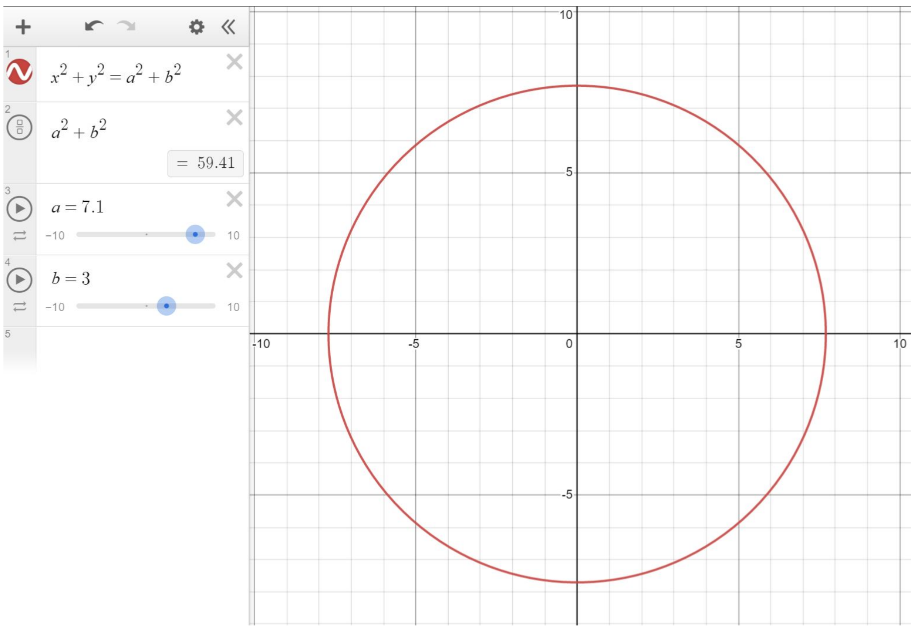
$transitiv$

Sei $a, b, c, d, e, f \in M$, $(a, b), (c, d), (e, f) \in M \times M$, mit $((a, b), (c, d)), ((c, d), (e, f)) \in R_2$
dann gilt

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = c^2 + d^2,\ c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \\ \Rightarrow & a^2 + b^2 = e^2 + f^2 \\ \Rightarrow & ((a, b), (e, f)) \in R_2 \\ \Rightarrow & R_2\ transitiv \end{aligned}$$

$\Rightarrow R_2$ ist Äquivalenzrelation auf M □

Äquivalenzklassen:
Wir konstruieren eine Ebene $\mathbb{R}^2$, mit Koordinaten x und y.
Dann $[a, b] = \{(x, y) \in M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = a^2 + b^2,\ a, b, x, y \in \mathbb{R}\}$
d.h. nehmen wir beliebig (a, b) aus M, dann haben wir in $\mathbb{R}^2$ einen Kreis mit Radius $a^2 + b^2$.
Alle (x, y), die aus Punkten von diesem Kreis besteht, erfüllt $(x, y)R_2(a, b)$.
Hier ein Beispiel:



3.7 Aufgabe 3.7(H)

3.7.1 (a)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt:

$$a_n = a_0 = 0 + 0 + 0 = 0 \in \mathbb{N}$$

IV: $a_n = \dfrac{n}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{3}$

IS: $\tilde{n} = n + 1$

$$\begin{aligned}
a_{\tilde{n}} = a_{n+1} = a_n &= \frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} \\
&= \frac{n+1}{6} + \frac{n^2+2n+1}{2} + \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3} \\
&= \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{2} + \frac{3n^2+3n+1}{3} \\
&\overset{\textbf{IV}}{=} a_n + \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{2} + \frac{3n^2+3n+1}{3} \\
&= a_n + \frac{6n^2+12n+6}{6} \\
&= a_n + n^2 + 2n + 1 \\
&= a_n + (n+1)^2 \\
(n+1)^2 \in \mathbb{N} &\Rightarrow a_n + (n+1)^2 \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow a_{n+1} \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$\square$

3.7.2 (b)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt

$$b_n = b_0 = 5^0 - 1 = 4 \cdot k, \ k = 0 \in \mathbb{N}$$

IV: $b_n = 5^n - 1 = 4 \cdot k, \ \exists k \in \mathbb{N}$

IS: $\tilde{n} = n + 1$

$$\begin{aligned} b_{\tilde{n}} = b_{n+1} &= 5^{n+1} - 1 \\ &= 5^n \cdot 5 - 1 \\ &= 5^n \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 4 \\ &\overset{\textbf{IV}}{=} 5 \cdot 4 \cdot k - 4 \\ &= 4 \cdot (5 \cdot k - 1) \end{aligned}$$

$$\exists \tilde{k} = 5 \cdot k - 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow b_{n+1} = 4 \cdot \tilde{k} \in \mathbb{N}$$

□

3.7.3 (c)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt

$$c_n = c_0 = 6^0 - 5 \cdot 0 + 4 = 5 = 5 \cdot k, \ k = 1 \in \mathbb{N}$$

IV: $c_n = 6^n - 5n + 4 = 5 \cdot k, \ \exists k \in \mathbb{N}$

IS: $\tilde{n} = n + 1$

$$\begin{aligned} c_{\tilde{n}} = c_{n+1} &= 6^{n+1} - 5(n+1) + 4 \\ &= 6^n \cdot 6 - 5n - 1 \\ &= (6^n - 5n + 4 + 5n - 4) \cdot 6 - 5n - 1 \\ &\overset{\textbf{IV}}{=} (5 \cdot k + 5n - 4) \cdot 6 - 5n - 1 \\ &= 30k + 30n - 24 - 5n - 1 \\ &= 5(6k + 7n - 5) \end{aligned}$$

$$\exists \tilde{k} = 6k + 7n - 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow c_{n+1} = 5 \cdot \tilde{k} \in \mathbb{N}$$

□

3.8 Tutorium

M, N Mengen, $M \times N$
$R \subseteq M \times N$
Falls $\#M < \infty \wedge \#N < \infty$
z.B. $M = \{a, b\}$, $N = \{c, d\}$, dann $R = \{(a, c), (b, d)\}$ und $R^{-1} = \{(c, a), (d, b)\}$

4 4. Übungsblatt:

4.1 Aufgabe 4.1

4.1.1 (a)

$\binom{2}{5}$

$$\binom{2}{5} = \frac{2-4}{5}\binom{2}{4} = -\frac{2}{5}\frac{2-3}{4}\binom{2}{3} = \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{2-2}{3}\binom{2}{2} = 0$$

4.1.2 (b)

$\binom{-1}{k}$

$$\binom{-1}{0} = 1, \binom{-1}{1} = -1, \binom{-1}{2} = 1,$$

Beh. $\binom{-1}{k} = (-1)^k$, mit Induktion.

Beweis.

IA:..

IV:..

IS: $\binom{-1}{k+1}$

$$\binom{-1}{k+1} = \frac{-1-k}{k+1}\binom{-1}{k} = (-1)^{k+1}$$

□

4.1.3 (c)

$\binom{-\frac{1}{2}}{3}$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}-2}{3}\binom{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{5}{6}\frac{-0.5-1}{2}\binom{-0.5}{1} = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{-0.5-0}{1}\binom{-0.5}{0} = -\frac{5}{16}$$

4.2 Aufgabe 4.2

4.2.1 (a)

z.z. $\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1}\frac{x}{k}$

Beweis.

IA: $k = 1$, LS$= \binom{x}{1} = \frac{x-0}{1}\binom{x}{0} = \frac{x}{1}\binom{x-1}{0}$

IV: für k gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x}{k}\binom{x-1}{k-1}$$

Ziel:

$$\binom{x}{k+1} = \frac{x}{k+1}\binom{x-1}{k}$$

IS:

$$\begin{aligned}
\binom{x}{k+1} = \frac{x}{k+1}\binom{x}{k} &\overset{\mathbf{IV}}{=} \frac{x-k}{k+1}\frac{x}{k}\binom{x-1}{k-1} \\
&= \frac{x}{k+1}\frac{x-k}{k}\frac{k}{x-k}\frac{x-k}{k}\binom{x-1}{k-1} \\
&= \frac{x}{k+1}\binom{x-1}{k}
\end{aligned}$$

□

4.2.2 (b)

z.z. $\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}$

Beweis.

$$\binom{x+1}{k} = \frac{x+1}{k}\binom{x+1-1}{k-1} = \frac{x+1+k-k}{k}\binom{x}{k-1} = \underbrace{\frac{\overbrace{x+1-k}^{x-(k-1)}}{k}\binom{x}{k-1}}_{\binom{x}{k}} + \binom{x}{k-1}$$

□

4.3 Aufgabe 4.3

$$x^0 := 1, \; x^{n+1} = x^n \cdot x$$

4.3.1 (a)

Beweis. z.z. $x^m x^n = x^{m+n}$

Sei $\forall n \in \mathbb{N}_0$ fest $\rightarrow$ Induktion.

IA: $n = 0$: $x^m x^n = x^m \cdot 1 = x^m = x^{m+n}$

IV: $x^m x^n = x^{m+n}$

Ziel: $x^m x^{n+1} = x^{m+n+1}$

IS: LS$= x^m(x^n x) \overset{Ass.Mult}{=} (x^m x^n)x = x^{m+n}x = x^{(m+n)+1} = x^{m+(n+1)}$ □

4.3.2 (b)

z.z. $(x^m)^n = x^{mn}$

Beweis.

Sei $\forall m \in \mathbb{N}_0$ fest

IA: $n = 0$,: $(x^m)^0 = 1 = x^0 = x^{m \cdot 0}$

IV: $(x^m)^n = x^{mn}$

Ziel: $(x^m)^{n+1} = x^{m(n+1)}$

IS: $(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot x^m \overset{\textbf{IV}}{=} x^{mn} x^n \overset{(a)}{=} x^{mn+n}$

□

4.3.3 (c)

Beweis.

IA: $n = 0 \rightarrow (x \cdot y)^n = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 y^0$

IV: ......

IS: $(xy)^{n+1} = (xy)^n (xy) \overset{\textbf{IV}}{=} (x^n y^n)(xy) \overset{Field-Axiom}{=} (x^n x)(y^n y) = x^{n+1} y^{n+1}$ □

4.4 Aufgabe 4.4

See definition of Group, Monoid etc.

4.5 Aufgabe 4.5

Inverse: Sei $(G, \cdot)$ Gruppe
Man sagte dass $f \in G$ ist Inverse von $g \in G$
$\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ $f \cdot g = g \cdot f = e$, Notation: $f =: g^{-1}$

4.5.1 (a)

Beweis.

z.z. $(a^{-1})^{-1} = a$ falls $a \neq 0$

$\Leftrightarrow$ a ist Inv. von a^{-1} $\Leftrightarrow$ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Das gilt da a Inv. von a^{-1} □

4.5.2 (b)

Beweis.

z.z. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$(ab)(a^{-1}b^{-1}) \overset{F.Axiom}{=} (a \cdot a^{-1})(b \cdot b^{-1}) = 1$

$(a^{-1}b^{-1})(ab) \overset{F.Axiom}{=} (a^{-1} \cdot a)(b^{-1} \cdot b) = 1$

□

4.6 Aufgabe 4.6(H)

4.6.1 (a)

Beweis.

z.z. $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ \binom{n+1}{k+1} &= \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} \\ \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

betrachten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+1} \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

dann, z.z. $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} = 1$$

IA: Sei $n = 1$, es gilt

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1+1}{k+1} = 1 \binom{2}{1} + (-1) \binom{2}{2} = 2 - 1 = 1$$

IV: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} = 1$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$, wir betrachten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\tilde{n}} (-1)^k \binom{\tilde{n}+1}{k+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+2}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} \\ &\stackrel{\textbf{IV}}{=} 1 + 0 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1} \\ &= 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$\square$

4.6.2 (b)

Vermutung: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) = \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^{m} (n+i)$$

Beweis.

IA: Sei $n = 1$, es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) = \prod_{i=0}^{m-1} (1+i) = \frac{1}{1+m} \prod_{i=0}^{m} (1+i)$$

IV: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) = \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^{m} (n+i)$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$, wir betrachten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\tilde{n}} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) &= \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i) + \prod_{i=0}^{m-1} (n+1+i) \\
&\overset{\textbf{IV}}{=} \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^{m} (n+i) + \prod_{i=0}^{m-1} (n+1+i) \\
&= \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^{m} (n+i) + \frac{1}{n} \prod_{i=0}^{m} (n+i) \\
&= \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} \right) \prod_{i=0}^{m} (n+i) \\
&= \frac{n+m+1}{n(m+1)} \prod_{i=0}^{m} (n+i) \\
&= \frac{1}{m+1} \frac{n+m+1}{n} \prod_{i=0}^{m} (n+i) \\
&= \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^{m} (n+1+i)
\end{aligned}$$

$\square$

4.7 Aufgabe 4.7(H)

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} = (-1)^0 \cdot \binom{x}{0} = 1 = (-1)^0 \cdot \binom{x-1}{0}$$

IV: $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} = (-1)^n \cdot \binom{x-1}{n}$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$, wir betrachten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\tilde{n}} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{x}{k} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{x}{n+1} \\
&\overset{\textbf{IV}}{=} (-1)^n \cdot \binom{x-1}{n} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{x}{n+1} \\
&= -(-1)^{n+1} \cdot \binom{x-1}{n} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{x}{n+1} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \left(\binom{x}{n+1} - \binom{x-1}{n} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \left(\binom{x-1}{n+1} + \binom{x-1}{n} - \binom{x-1}{n} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \binom{x-1}{n+1}
\end{aligned}$$

□

4.8 Tutorium

Gauss Klammern oder Floor and Ceiling Function

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x - y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$

"$\Leftarrow$" $x - y = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$

$\Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

"$\Rightarrow$" $x - y \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$: $x - y = k$

$\Rightarrow x - \lfloor x \rfloor - (y - \lfloor y \rfloor) =$

5 5. Übungsblatt:

5.1 Aufgabe 5.1

$n^{n+1} \begin{pmatrix} = \\ < \\ > \end{pmatrix} (n+1)^n$

$n = 3$, $LS = 3^4 = 81$ $RS = 4^3 = 64$

Vermutung: $n^{n+1} > (n+1)^n$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 1 > \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} &= \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}(\frac{1}{n})^k\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k}\right) \\
(n-k)! \text{ hat } k \text{ Faktoren} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\prod_{i=1}^{k}\frac{n-k+i}{n}}_{\leq 1}\cdot\frac{1}{k!}\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{5}{2}+\underbrace{\sum_{k=3}^{n}\underbrace{\frac{1}{k!}}_{\leq\frac{1}{6}}}_{\leq\frac{n-2}{6}}\right) \\
&\leq \frac{1}{6}+\frac{13}{6n} \\
n \in \mathbb{N}_{>3} &= \frac{1}{6}+\frac{13}{18} = \frac{16}{18} < 1
\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 5.2

$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ mit $b \neq a$

5.2.1 (a)

(i)

Beweis.

z.z. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$$
\begin{aligned}
&(a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) \\
&a \cdot (b^{-1}(c \cdot d^{-1})) \\
&a(b^{-1}(d^{-1} \cdot c)) \\
&a((b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot c) \\
&a(c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1})) \\
&(a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) \\
&(a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1}
\end{aligned}
$$

$\square$

(ii)

Beweis.

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

$$
\begin{aligned}
LS = \frac{(a \cdot b^{-1})}{c \cdot d^{-1}} &= (a \cdot b^{-1})((c \cdot d^{-1})^{-1}) \\
&= (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot d) \\
&= a \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1}) \cdot d \\
&= a \cdot d \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1}) \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

$\square$

5.2.2 (b)

Field axioms

`https://en.wikipedia.org/wiki/Field_(mathematics)#Classic_definition`

5.2.3 (c)

5.3 Aufgabe 5.3

5.4 Aufgabe 5.4

5.4.1 (a)

$|x - a| < \epsilon \Leftrightarrow x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$

dann $x \geq a$ oder $x < a$

5.4.2 (b)

5.4.3 (c)

$\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$

falls $x > 0$, dann $x + 1 < x$

$((x+1) + x)\frac{1}{x} < (x+1)x\frac{1}{x+1}$

dann $x + 1 < x$ *contradiction* denn $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 > x$
!!!!!!3 Falle.

5.5 Aufgabe 5.5

5.6 Aufgabe 5.6(H)

5.6.1 (a)

Beweis.

$$\text{z.z. } \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{ad}{bd} &= (ad)(bd)^{-1} \\
&= (ad)(b^{-1}d^{-1}) \\
&= a(d(b^{-1}d^{-1})) \\
&= a(d(d^{-1}b^{-1})) \\
&= a((dd^{-1})b^{-1}) \\
&= ab^{-1} \\
&= \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

□

5.6.2 (b)

Beweis.

$$\text{z.z. } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\begin{aligned}
\frac{ad+bc}{bd} &= (ad+bc)(bd)^{-1} \\
&= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} \\
&= (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) \\
&= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(b^{-1}d^{-1}) \\
&= a(d(d^{-1}b^{-1})) + c(b(b^{-1}d^{-1})) \\
&= a((dd^{-1})b^{-1}) + c((bb^{-1})d^{-1}) \\
&= ab^{-1} + cd^{-1} \\
&= \frac{a}{b} + \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

□

5.7 Aufgabe 5.7(H)

$Ohne\ weitere\ Meldung\ sei\ x \in \mathbb{R}$

5.7.1 (a)

Wenn $x - 3 > 0$, daraus folgt $x > 3$ und $x + 1 > 0$, dann

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} &< \frac{1}{x-3} \\ 2(x-3) &< x+1 \\ x &< 7 \quad widerspruchsfrei \\ \Rightarrow \quad 3 &< x < 7 \end{aligned}$$

Wenn $x - 3 < 0$ und $x + 1 > 0$, daraus folgt $-1 < x < 3$, dann

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} &< \frac{1}{x-3} \\ 2(x-3) &> x+1 \\ x &> 7 \quad \lightning \end{aligned}$$

Wenn $x + 1 < 0$, daraus folgt $x < -1$ und $x - 3 < 0$, dann

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} &< \frac{1}{x-3} \\ 2(x-3) &< x+1 \\ x &< 7 \quad widerspruchsfrei \\ \Rightarrow \quad x &< -1 \end{aligned}$$

$Folgerung : (x < -1) \vee (3 < x < 7)$

5.7.2 (b)

Wenn $x - 3 \geq 0$, daraus folgt $x \geq 3$ und $x + 1 > 0$, dann

$$\begin{aligned} |x+1| + |x-3| &< 6 \\ x+1+x-3 &< 6 \\ x &< 4 \quad widerspruchsfrei \\ \Rightarrow \quad 3 \leq x &< 4 \end{aligned}$$

Wenn $x - 3 < 0$ und $x + 1 \geq 0$, daraus folgt $-1 \leq x < 3$, dann

$$\begin{aligned} |x+1| + |x-3| &< 6 \\ x+1+3-x &< 6 \\ 4 &< 6 \quad widerspruchsfrei \\ \Rightarrow \quad -1 \leq x &< 3 \end{aligned}$$

Wenn $x + 1 < 0$, daraus folgt $x < -1$ und $x - 3 < 0$, dann

$$\begin{aligned} |x+1| + |x-3| &< 6 \\ -x-1+3-x &< 6 \\ -2 &< x \quad widerspruchsfrei \\ \Rightarrow \quad -2 &< x < -1 \end{aligned}$$

$Folgerung : -2 < x < 4$

5.7.3 (c)

Wenn $|x+3| > 1$, $||x+3|-1| = |x+3|-1$, daraus folgt $-2 \leq x$ oder $x \leq -4$

$-2 \leq x$:
$||x+3|-1| = |x+3|-1 = x+3-1 = x+2 = 2$ folgt $x = 0$ $widerspruchsfrei$

$x \leq -4$:
$||x+3|-1| = |x+3|-1 = -x-3-1 = -x-4 = 2$ folgt $x = -6$ $widerspruchsfrei$

Wenn $|x+3| < 1$, $||x+3|-1| = 1-|x+3|$, daraus folgt $-4 < x < -2$

$-4 < x < -3$:
$||x+3|-1| = 1-|x+3| = 1+x+3 = x+4 = 2$ folgt $x = -2$ ↯

$-3 \leq x < -2$:
$||x+3|-1| = 1-|x+3| = 1-x-3 = -x-2 = 2$ folgt $x = -4$ ↯

$Folgerung : (x = 0) \vee (x = -6)$

6 6. Übungsblatt:

6.1 Aufgabe 6.1

6.2 Aufgabe 6.2

6.3 Aufgabe 6.3

6.4 Aufgabe 6.4

6.5 Aufgabe 6.5(H)

6.5.1 (a)

$$\begin{aligned}
\frac{2n+1}{3n}+\frac{3n}{2n-1} &= \frac{2}{3}+\frac{1}{3n}+\frac{3n}{2n-1}\\
&= \frac{2}{3}+\frac{1}{3n}+\frac{3n}{n(2-\frac{1}{n})}\\
&= \frac{2}{3}+\frac{1}{3n}+\frac{3}{2-\frac{1}{n}}\\
\text{offenbar } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3n}+\frac{3}{2-\frac{1}{n}}\right) &= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}
\end{aligned}$$

6.5.2 (b)

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} k\cdot\prod_{k=1}^{n} k}\\
&= \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{\prod_{k=n+2}^{2n+2} k}{\prod_{k=1}^{n+1} k}\frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=n+1}^{2n} k} &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\\
&= \frac{4n^2+5n+2}{n^2+2n+1}\\
&= \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\\
\text{offenbar } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right| &= 4>0\\
&\Rightarrow \binom{2n}{n} \text{ divergent}
\end{aligned}$$

6.6 Aufgabe 6.6(H)

6.6.1 (a)

Sei $a_n = 0$, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mit $\frac{a_n}{b_n} = 0$, dann $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}} = 0$ für beliebige b_n inkl. Nullfolge. $\lightning$

6.6.2 (b)

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, dann $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \infty$ folgt $\frac{1}{b_n}$ divergent. □

6.6.3 (c)

Sei $a_n = 0$, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mit $(a_n \cdot b_n) = 0$, dann $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$ für beliebige b_n inkl. divg. Folge. $\lightning$

7 7. Übungsblatt

7.1 Aufgabe 7.1

7.2 Aufgabe 7.2

7.3 Aufgabe 7.3

7.4 Aufgabe 7.4

7.5 Aufgabe 7.5

7.6 Aufgabe 7.6(H)

Wir beweisen zuerst die folgende Gleichung

$$\underbrace{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})}_{\geq\sqrt{a}}\cdot|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| = |a_n - a|$$

Beweis.

$$(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})\cdot|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| = \begin{cases} (\sqrt{a_n}>\sqrt{a}) & (\sqrt{a_n}+\sqrt{a})\cdot(\sqrt{a_n}-\sqrt{a}) = (a_n-a) = |a_n-a| \\ (\sqrt{a_n}<\sqrt{a}) & (\sqrt{a_n}+\sqrt{a})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{a_n}) = -(a_n-a) = |a_n-a| \end{cases}$$

$a_n \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_n} \geq 0$
$\sqrt{a_n} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_n}+\sqrt{a} \geq \sqrt{a}$

□

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}_{>N}, |a_n-a|<\varepsilon$

dann

$$(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})\cdot|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| = |a_n-a|$$
$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| = \frac{|a_n-a|}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$$

Sei $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{a}} \in \mathbb{R}_{>0}$, dann $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| < \tilde{\varepsilon}$
$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

7.7 Aufgabe 7.7(H)

Wir beweisen nun mittels Vollständige Induktion, dass a_n monoton wachsend ist.

Beweis.

Sei $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$

IA:
Sei $n = 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{a_1} &= \frac{\sqrt{c+\sqrt{c}}}{\sqrt{c}} \\
\frac{a_2^2}{a_1^2} &= \frac{c+\sqrt{c}}{c} \overset{(c>0)}{>} 1 \\
\overset{(c>0)}{\Leftrightarrow} \frac{a_2}{a_1} &> 1
\end{aligned}$$

IV:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{c+a_n}}{a_n} > 1$$

IS:
Wir setzen $\tilde{n} = n + 1$ ein,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{\tilde{n}+1}}{a_{\tilde{n}}} = \frac{a_{(n+1)+1}}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{c+a_{n+1}}}{\sqrt{c+a_n}} \\
\frac{\left(a_{(n+1)+1}\right)^2}{a_{n+1}^2} &= \frac{c+\sqrt{c+a_n}}{c+a_n} \underset{(c>0)}{\overset{\textbf{IV}}{>}} 1 \\
\overset{(c>0)}{\Leftrightarrow} \frac{a_{\tilde{n}+1}}{a_{\tilde{n}}} &> 1
\end{aligned}$$

□

Wir beweisen nun, dass a_n von oben beschränkt ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{c+a_n} \\ a_n &= \sqrt{c+a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}(c+a_{n-1})} \\ &= \sqrt{c+\lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \end{aligned}$$

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$, dann

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c+a} \\ a^2 &= c+a \\ a^2-a-c &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \overset{(c>0)}{>} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4c}}{2} \overset{(c>0)}{<} 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wir haben schon gezeigt, dass $a_n > 0$ monoton wachsend ist, dann muss $a > 0$ sein. Deshalb haben wir $a = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$

□

8 8. Übungsblatt

8.1 Aufgabe 8.1

Beweis.

□

8.2 Aufgabe 8.2

c) geo. Reihe mit

8.3 Aufgabe 8.3

Maj. Krit. : Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n > 0$
Falls $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_{>N}$: $|a_n| \leq c \cdot b_n$
und falls $\sum_1^\infty b_n$ konv. dann konv. $\sum_1^\infty$ abs.

Beweis.

$(a_n)_n \in \mathbb{R}$ und $\exists \theta \in (0, 1)$ und $\exists N \in \mathbb{N}$
sodass: $\forall n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} < \theta$
da $\sum_{n=1}^\infty \theta^n$ konv. (geom. Reihe) $\Leftrightarrow |a_n| < \theta^n$
nach Maj. Krit. konv. $\sum a_n$ abs. $\square$

8.4 Aufgabe 8.4

8.4.1 (a)

$a_n = \dfrac{n!}{n^n}$
Quotient-Krit.

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right| \\ &= \left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right| \\ ()^{-1} &= \underbrace{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1}}_{(n\to 0)\to e} \end{aligned}$$

$e^x := \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n$
$\Rightarrow |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = ((1+\dfrac{1}{n})^n)^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$
Sei nun $\tilde{\epsilon} = 1 - e^{-1}$ dann: $\underbrace{e^{-1} + \dfrac{\tilde{\epsilon}}{2}}_{\theta} < 1$
$e^{-1} + \dfrac{\tilde{\epsilon}}{2} = e^{-1} + \dfrac{1-e^{-1}}{2} = \dfrac{1+e^{-1}}{2} < 1$
dann $\lim_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = e^{-1}$ for $\epsilon_i = \dfrac{\tilde{\epsilon}}{2}$ $\exists N \in \mathbb{N}$ sind
$\forall n \in \mathbb{N}_{>N}$: $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - e^{-1}| < \dfrac{\tilde{\epsilon}}{2}$
$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < e^{-1} + \dfrac{\tilde{\epsilon}}{2}$

8.4.2 (b)

$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$
dann $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n}-1)^n} = \sqrt[n]{n} - 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
z.B. Sei $\theta_i = \dfrac{1}{2} = \epsilon$ $\exists N \in \mathbb{N}$
$\forall n \in \mathbb{N}_{>N}$: $|\sqrt[n]{n} - 1 - 0| < \epsilon = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < \dfrac{1}{2}$

8.4.3 (c)

$a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$
a_n kein Nullfolge
nicht konv.

8.4.4 (d)

$a_N = \dfrac{n+4}{n^3 - 3n + 1}$
mit Harmonische Reihe ($n > 1$ konv.)

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n^3 - 3n + 1} + \frac{4}{n^3 - 3n + 1} \\
&\leq \frac{n}{n^3 - 3n} + \frac{4}{n^3 - 3n} \\
&= \frac{1}{n^2 - 3} + \frac{4}{n^3 - 3n} \\
&\leq \frac{1}{(n-3)^2} + \frac{1}{(n-4)^3} \quad for \quad n > 20
\end{aligned}$$

8.4.5 (e)

$$\begin{aligned} a_n &= \dots \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{n-1} \\ &\geq \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}\ div. \end{aligned}$$

8.4.6 (f)

8.5 Aufgabe 8.5(H)

8.5.1 (a)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

We determine with ratio test:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\
&\text{for } n \to \infty \text{ we have} \\
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{1}{2} < 1 \\
&\Rightarrow \text{this series is convergent}
\end{aligned}$$

8.5.2 (b)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

We determine with ratio test:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1+\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} \\
&= \frac{\left((1+\frac{1}{(n+1)^2})^{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left((1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} \\
(\text{substitute } \tilde{n} = n^2, \tilde{n}' = (n+1)^2) &= \frac{\left((1+\frac{1}{\tilde{n}'})^{\tilde{n}'}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left((1+\frac{1}{\tilde{n}})^{\tilde{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

with $n \to \infty$, we have

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{n} = \lim_{n\to\infty} \tilde{n}' = \lim_{n\to\infty} n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

therefore

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left((1+\frac{1}{\tilde{n}'})^{\tilde{n}'}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left((1+\frac{1}{\tilde{n}})^{\tilde{n}}\right)^{\frac{1}{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{\frac{1}{n+1}}}{e^{\frac{1}{n}}} \right| = 1$$

with $(1+\dfrac{1}{n^2})^n > 1$, the series is divergent

8.5.3 (c)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n}$$

We determine with ratio test

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\frac{(3(n+1))!}{7^{n+1}(2(n+1))!(n+1)!}}{\frac{3n!}{7^n(2n)!n!}} \\
&= \frac{(3n+3)!(2n)!n!}{7(2n+2)!(n+1)!3n!} \\
&= \frac{\left(\prod_{k=1}^{3n+3} k\right)\left(\prod_{k=1}^{2n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)}{7\left(\prod_{k=1}^{2n+2} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n+1} k\right)\left(\prod_{k=1}^{3n} k\right)} \\
&= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{7(2n+1)(2n+2)(n+1)} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{7(2n+1)(2n+2)(n+1)} = \frac{27}{28} < 1 \\
&\Rightarrow \text{this series is convergent}
\end{aligned}$$

8.5.4 (d)

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

We determine with Leibniz criterion:

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| < \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = |a_n|$$

$\Rightarrow a_n$ monotonically decreases

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\Rightarrow$ this series is convergent

8.6 Aufgabe 8.6(H)

Beweis.

Sei b_n beschränkt, dann $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ |b_n| \leq |b_N|$

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>N'}\ a_n < \varepsilon$

dann $\forall b_N \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_N = 0$

dann mit Majorantenkriterium $a_n \cdot b_n \to 0$

□

8.7 Tutorium

Definition 8.1 (Cauchy-Folge)**.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist CF, wenn
$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall m, n \in \mathbb{N}_{>N}$: $|a_n - a_m| < \epsilon$

Definition 8.2 (Reihe)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $[\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k]$
(see: partial summation convergent)

9 9. Übungsblatt

9.1 Aufgabe 9.1

9.2 Aufgabe 9.2

Beweis.

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}\end{aligned}$$

Term:

$$\frac{1}{n^k} \frac{n!}{(n-k)!} = (1 - \frac{k-1}{n})(1 - \frac{k-2}{n}) \cdots$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \\ (n > m) &= 1 + 1 + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + (1 - \frac{m-1}{n})\end{aligned}$$

□

9.3 Aufgabe 9.3

9.4 Aufgabe 9.4

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent, aber nicht abs. konv.

s^+ und s^- sind Umordnung von s

$$s_{3n}^+ = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

$$s_{3n}^- = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k}$$

wir zerlegen auch s zur s_{2n}

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

mit $n = 2n$

$$s_{4n} = s_{2(2n)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k}$$

9.5 Aufgabe 9.5(H)

Beweis.

z.z. ist

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot q^n$$

Def. Cauchy-Produkt:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} q^l q^{k-l}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left((q^0 q^{k-0}) + (q^1 q^{k-1}) + (q^2 q^{k-2}) + \ldots + (q^k q^{k-k})\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot q^k
\end{aligned}$$

□

9.6 Aufgabe 9.6(H)

Beweis.

Gegeben sei $a_n := b_n := \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}(-1)^n$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. □

Beweis.

Mit Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)(-1)^n$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{n+1}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)(-1)^n \geq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right)(-1)^n$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \infty \text{ (divergent)}$$

dann

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)(-1)^n$$

divergent □

9.7 Tutorium

Exponentialreihe:

$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!}$ insb. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

10 10. Übungsblatt

10.1 Aufgabe 10.1

10.2 Aufgabe 10.2

10.3 Aufgabe 10.3

10.3.1 (a)

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{U}, n \mapsto 2n + 1, \text{ bij.}$$

10.3.2 (b)

$$f : [a, b] \to [0, 1], \lambda \mapsto \frac{\lambda - b}{a - b}$$

10.3.3 (c)

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \cot \lambda x$$

10.3.4 (d)

$$f : (0, 1) \to [0, 1], a_n = \frac{1}{2n}$$

10.4 Aufgabe 10.4

10.5 Aufgabe 10.5

10.6 Aufgabe 10.6

10.6.1 (a)

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n \cdot n}{2n + (-1)^n}$$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(a_k)$

falls n gerade: $a_n = \dfrac{1+n}{1+2n}$

$\sup_{k\geq n}(a_k) = \dfrac{1+n}{1+2n}$

falls n ungerade: $a_n = \dfrac{1-n}{2n-1} < 0$

$\sup_{b\geq n}(a_k) = \dfrac{2+n}{3+2n}$

$\dfrac{\frac{1}{2} - n + \frac{1}{2}}{2n-1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4n-2}$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(a_k) = \dfrac{1}{2}$

$\liminf_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}(a_n)$

n gerade: $\inf_{k\geq n}(a_k) = -\dfrac{1}{2}$

n ungerade: $\inf_{k\geq n}(a_k) = \dfrac{1}{2}$

10.6.2 (b)

$$a_n = \frac{n}{3n + (-1)^n \cdot (n-1)}$$

$2n$:

$$a_n = \frac{2n}{6n+2n-1} = \frac{2n}{8n-1}, \lim = \frac{1}{4}$$

$2n+1$:

$$a_n = \frac{2n+1}{6n+6-2n} = \frac{2n+1}{4n+3}, \lim = \frac{1}{2}$$

$\liminf = \dfrac{1}{4}$, $\limsup = \dfrac{1}{2}$

10.7 Tutorium

11 11. Übungsblatt

12 12. Übungsblatt

12.1 12.1

12.2 12.2

12.2.1 (c)

12.3 Aufgabe 12.3

(L-Stedigkeit schon gegeben)

Beweis.

Für $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, $\forall x_1, x_2 \in D$, $|x_1 - x_2| < \delta$, gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2| < L\delta = \varepsilon$$

$\square$

12.4 Aufgabe 12.4

12.4.1 (a)

Beweis.

Verneinung der Def.
$\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists x_1, x_2 \in D$ gilt

$$|x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon$$

dann, sei $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{\delta}$ und $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$
es gilt

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2}$$

und

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} + \delta x_1 + \frac{\delta^2}{4}|$$

dazu $\delta x_1 = 1 > \frac{1}{2}$

$\square$

12.4.2 (c)

z.B. $L = 1$

Beweis.

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}|} = \frac{1}{2}|x_1 - x_2| < 1$$

$\square$

12.4.3 (d)

Hint: $[0, \infty] = [0, 2] \cup [1, \infty]$
in (c) schon bewiesen $[1, 2]$ glm. stetig, dann $\Rightarrow \square$

12.5 12.5

12.6 12.6

12.7 12.7

12.8 Tutorium

Definition 12.1 (L-stetig)**.** $\exists L \geq 0 \; \forall x_1, x_2 \in D$ gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

13 13. Übungsblatt

13.1 13.1

Zeigen, dass $\log_a$ und $\exp_a$ umgekehrt sind
wir haben

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : \log_a(\exp_a(x)) &= \log_a(a^x) \\ &= \frac{\log(\exp(x \log a))}{\log a} \\ &= \frac{x \log a}{\log a} \\ &= x\end{aligned}$$

umgekehrt nach y auch gültig

13.2 13.2

13.3 13.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

13.3.1 (a)

$$\lim_{x\downarrow 0} x^x = \lim_{x\downarrow 0} \exp(\log(x^x)) = \exp(\lim_{x\downarrow 0} x \log(x)) = e^0 = 1$$

13.3.2 (b)

Umschreiben $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$

13.3.3 (c)

Umschreiben $\frac{\log(1+x)}{x} = \log((1+x)^{\frac{1}{x}})$, dann offenbar $\lim = 1$

13.3.4 (d)

Umschreiben

$$\frac{3x + 5 - 2(x+3)}{(x+3)(3x+5)} = \frac{x-1}{(x+3)(3x+5)}$$

dann

$$\frac{1}{(x+3)(3x+5)}$$

13.3.5 (e)

$$1 - \sqrt{f(x)} = \frac{1 - f(x)}{1 + \sqrt{f(x)}}$$

$\frac{1}{2}$

13.3.6 (f)

$$
\begin{aligned}
x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} &\overset{x\geq 0}{=} \sqrt{x^2+1} \to 1 \\
&\overset{\leq 0}{=} -\sqrt{x^2+1}... \to -1
\end{aligned}
$$

13.4 13.4

$f(xy) = f(x)f(y)$

Frage:
$f(0) =?$
$f(n \in \mathbb{N}) =?$
$f(z \in \mathbb{Z}) =?$
$f(x \in \mathbb{Q}) =?$
$f(x \in \mathbb{R}) =?$

1.
$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

2.
$f(n \in \mathbb{N}) = 1 \cdot n,\ f(x) = ax \Rightarrow a = f(1)$

dann
$f(0) = 0$
$f(n \in \mathbb{N}) = nf(1) \Leftarrow$ Induktion
$f(z \in \mathbb{Z}) = zf(1) \Leftarrow \oplus\ f(0) = f(n) + f(-n) \Rightarrow f(-n) = -f(n) = -nf(1)$
$f(x \in \mathbb{Q}) = xf(1) \Leftarrow \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ sodass $x = \frac{m}{n}$, dann

$$z.z.\ f(\frac{m}{n} = \frac{m}{n}f(1))$$
$$f(m) = nf(\frac{m}{n}) = nf(\frac{m}{n}) = mf(1) = f(m)$$

$f(x \in \mathbb{R}) = xf(1) \Leftarrow$ (tut) $\exists (x_n) \in \mathbb{Q}$ sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$

$Folgerung:$

1. $f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$
$n = 1,\ f(1x) = 1f(x) = f(x)$ gültig
... $\Rightarrow$ Induktion

3. $\forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$:
i) $z \in \mathbb{N}$ (nach 2. klar)
ii) $z < 0$: $-z \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= f((-1)(-z)) = (-z)f(-1) \\ (1.) &= (-z)(-f(1)) = zf(1) \end{aligned}$$

4. $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},\ x = \frac{m}{n}$

$$\begin{aligned} f(1) = f(m) &= f(n\frac{m}{n}) \\ &= nf(\frac{m}{n}) \\ f(\frac{m}{n}) &= \frac{m}{n}f(1) \end{aligned}$$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist,
$\exists x_n \subseteq \mathbb{Q}$ sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,

$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, $\lim_{n\to\infty} x_n f(1) = x f(1)$

$f(x) = cx$ mit $c \in \mathbb{R}$

13.5 tut

Definition 13.1 (Stetigkeit)**.** $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ heißt:

$\forall (a_n) \subseteq D$, $f(a_n)$ konvegiert gegen $f(a)$

14 14. Übungsblatt

$$\cos x := \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$
$$\sin x := \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

Aufgabe 14.1

(a)

$$\mathrm{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re} z} = \frac{2}{z + \overline{z}} \neq \mathrm{Re}\frac{1}{z}$$

Gegenbsp. $z = 1 + i$

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$

dann $z = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

$\mathrm{Im}\frac{1}{z} = \mathrm{Im}\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \cdots$

(c) $\mathrm{Re}(z + \frac{1}{z}) = \mathrm{Re} z + \mathrm{Re}\frac{1}{z} = (1 + \frac{1}{|z|^2})\mathrm{Re} z = 0$

dann $\mathrm{Re} z = 0$

Aufgabe 14.2

(a) $z = x + iy$ betrachten

(b) (i) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos x - i \sin x = -e^{-ix}$ betrachten

Aufgabe 14.3

(a) $\cdots = (e^{ix})^n = e^{inx} = \square$

(b)

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

Links:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$$
$$\sin 3x = -\sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x$$

(c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ betrachten

Aufgabe 14.4

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos x(e^{-y} + e^{y}) + i\sin x(e^{-y} - e^{y})) \\
&= \cos x\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i\sin x\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \\
&= \square
\end{aligned}$$

15 15. Übungsblatt

16 16. Übungsblatt

Aufgabe 16.3(H)

(a) $f(x) := x \cdot e^x$

$$\begin{aligned} f(x) = f^{(0)} &= x \cdot e^x \\ f^{(1)} &= e^x + x \cdot e^x \\ f^{(2)} &= e^x + e^x + x \cdot e^x \end{aligned}$$

erraten:

$$f^{(n)} = n \cdot e^x + x \cdot e^x \tag{1}$$

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt $f(x) = f^{(0)} = x \cdot e^x$

IV:

$$f^{(n)} = n \cdot e^x + x \cdot e^x \tag{2}$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$

$$\begin{aligned} f^{(\tilde{n})} &= f^{(n+1)} && (3) \\ &= (f^{(n)})' && (4) \\ &= n \cdot e^x + e^x + x \cdot e^x && (5) \\ &= (n+1) \cdot e^x + x \cdot e^x && (6) \end{aligned}$$

□

$g(x) := \sin^2 x$

$$\begin{aligned} f(x) = f^{(0)} &= \sin^2 x \\ f^{(1)} &= 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \\ f^{(2)} &= 2 \cos 2x \\ f^{(3)} &= -4 \sin 2x \\ f^{(4)} &= -8 \cos 2x \\ f^{(5)} &= 16 \sin 2x \\ f^{(6)} &= 32 \cos 2x \end{aligned}$$

erraten:

$n = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$f^{(n)} = -1^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot \sin 2x \tag{7}$$

$n = 2k,\ k \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$f^{(n)} = -1^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot \cos 2x \tag{8}$$

Induktion für $n = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}_{>0}$:

Beweis.

IA: Sei $n = 1$, es gilt $f^{(1)} = \sin 2x$

IV:

$$f^{(n)} = -1^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot \sin 2x \tag{9}$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 2$

$$\begin{aligned} f^{(\tilde{n})} &= f^{(n+2)} && (10) \\ &= (f^{(n)})'' && (11) \\ &= -1^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^2 \cdot -1 \cdot \sin 2x && (12) \\ &= -1^{\frac{(n+2)-1}{2}} \cdot 2^{(n+2)-1} \cdot \sin 2x && (13) \end{aligned}$$

□

Induktion für $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$:

Beweis.

IA: Sei $n = 2$, es gilt $f^{(2)} = 2\cos 2x$

IV:

$$f^{(n)} = -1^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot \cos 2x \tag{14}$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 2$

$$\begin{aligned} f^{(\tilde{n})} &= f^{(n+2)} && (15) \\ &= (f^{(n)})'' && (16) \\ &= -1^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^2 \cdot -1 \cdot \cos 2x && (17) \\ &= -1^{\frac{(n+2)-2}{2}} \cdot 2^{(n+2)-1} \cdot \cos 2x && (18) \end{aligned}$$

□

(b)

$$
\begin{aligned}
h = h^{(0)} &= x^2 \cdot e^x \\
h^{(1)} &= (0 + 2x + x^2)e^x \\
h^{(2)} &= (2 + 4x + x^2)e^x \\
h^{(3)} &= (6 + 6x + x^2)e^x \\
h^{(4)} &= (12 + 8x + x^2)e^x \\
h^{(5)} &= (20 + 10x + x^2)e^x \\
h^{(6)} &= (30 + 12x + x^2)e^x \\
&\vdots \\
h^{(1000)} &= (999000 + 2000x + x^2)e^x
\end{aligned}
$$

erraten:

$$h^{(n)} = ((n^2 - n) + 2nx + x^2)e^x$$

Beweis.

IA: Sei $n = 0$, es gilt $h^{(0)} = x^2 \cdot e^x$

IV: *erraten*:

$$h^{(n)} = ((n^2 - n) + 2nx + x^2)e^x$$

IS: Sei $\tilde{n} = n + 1$

$$
\begin{aligned}
h^{(\tilde{n})} = h^{(n+1)} &= (h^{(n)})' && (19)\\
&= (2n + 2x + (n^2 - n) + 2nx + x^2)e^x && (20)\\
&= (((n+1)^2 - (n+1)) + 2(n+1)x + x^2)e^x && (21)
\end{aligned}
$$

□

17 17. Übungsblatt

Aufgabe 17.1

Es gilt $\alpha + \beta = \gamma$, dann

$\tan\alpha = \dfrac{x}{h_2}$, $\tan\gamma = \dfrac{x}{h_2 - h_1}$

$\Rightarrow \gamma - \beta = \alpha(x) = \arctan\dfrac{x}{h_2 - h_1} - \arctan\dfrac{x}{h_2}$

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= \frac{1}{1 + (\frac{x}{h_2 - h_1})^2} \cdot \frac{1}{h_2 - h_1} - \frac{1}{1 + (\frac{x}{h_2})^2} \cdot \frac{1}{h_2} \\ &= \frac{(h_2 - h_1)^2}{h_2 - h_1} \frac{1}{(h_2 - h_1)^2 + x^2} - \frac{h_2^2}{h_2} \frac{1}{h_2^2 + x^2} \\ &= (h_2 - h_1) \cdot \frac{1}{(h_2 - h_1)^2 + x^2} - h_2 \frac{1}{h_2^2 + x^2} \underset{lok.min}{=} 0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{h_2^2 - h_1 h_2}$ nehmen wir $+$, $\approx 134,7cm$

$$\alpha''(x) \begin{cases} > 0 & lok.Min \\ = 0 & ?? \\ < 0 & lok.Max \end{cases}$$

Aufgabe 17.2

$f(x) \geq f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ ist mon. ansteigend

$f(x_0) = 0$

$\forall x < x_0 : \; 0 \leq f(x) \leq f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$g(x) = e^{-x} f(x)$, weil $e^{-x} > 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0$

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) - g(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = \underset{>0}{e^{-x}}(\underset{\leq 0}{f'(x) - f(x)})$$

$\Rightarrow g'(x) < 0$, $g(x)$ mon. fall.

Aufgabe 17.4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, ist $\overline{x}$ ein lok. Extremastelle, so gilt $f'(\overline{x}) = 0$

wegen $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ folgt

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{3} + \frac{b}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}} = -\frac{a}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b} \end{aligned}$$

$f''(x) = 6x + 2a = 2\sqrt{a^2 - 3b}$

Aufgabe 17.5(H)

(a) $f_1(x) = \sin(\cos(x))$
Es ist für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$f_1'(x) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$$

(b) $f_2(x) = x \cdot |x|$
Es ist auch für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x & when \quad x \geq 0 \\ -2x & when \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(c) $f_3(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$
Es ist für $x \in (\mathbb{R} \setminus 0)$ differenzierbar.

$$f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = 0, \text{ when } x \neq 0$$

(d) $f_4(x) = x^{(x^x)}$
Es ist für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar.

$$f_4'(x) = \text{nein, wir müssen zuerst umformen}$$

$$\begin{aligned} x^{(x^x)} &= (e^{\ln(x)})^{(x^x)} \\ &= (e^{\ln(x)})^{(e^{x\ln(x)})} \\ &= e^{(e^{x\ln(x)})\ln(x)} \end{aligned}$$

Dann:

$$f_4'(x) = (x^x(\ln(x)+1) \cdot \ln(x) + x^{x-1}) \cdot e^{(e^{x\ln(x)})\ln(x)}$$

Aufgabe 17.6(H)

(a) *Beweis.*

Sei $f(x)$ gerade, sei $g(x) = -x$, sei $h(x) = f(g(x))$
Es gilt
$$h(x) = f(g(x)) = f(-x) = f(x)$$
Dann
$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)f'(g(x)) \\ &= -f'(-x) = f'(x) \\ &\Rightarrow \ f' \text{ ungerade} \end{aligned}$$

□

Beweis.

Sei $f(x)$ ungerade, $g(x) = -x$, $h(x) = f(g(x))$
Es gilt
$$h(x) = f(g(x)) = f(-x) = -f(x)$$
Dann
$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)f'(g(x)) \\ &= -f'(-x) = -f'(x) \\ &\Rightarrow \ f' \text{ gerade} \end{aligned}$$

□

(b) (i) Wir beweisen nun, dass

$$f: \ x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = ungerade$ gerade ist.

Beweis.

IA: sei $n = 0$, es gilt

$$f_0: \ x \mapsto a_0 \ (gerade)$$

IV:

$$f: \ x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = ungerade$ gerade ist.
IS: sei $\tilde{n} = n + 2$, dann

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \ x &\mapsto \sum_{i=0}^{\tilde{n}} a_i x^i \\ \tilde{f}: \ x &\mapsto \sum_{i=0}^{n+2} a_i x^i \\ \tilde{f}: \ x &\mapsto (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) + a_{n+2} x^{n+2} \\ \Rightarrow \tilde{f} &= f + a_{n+2} x^{n+2} \end{aligned}$$

Die Voraussetzung ist, dass mit $n = ungerade$ alle Terme $a_{n_{ungerade}} = 0$ sind, dann entfernen wir alle $a_n x^n$ von ungerade n.
Dann ist $\tilde{f} = f + a_{n+2} x^{n+2}$ gerade, denn alle $n + 2$ sind auch gerade. □

(ii) Wir beweisen nun, dass

$$f: \ x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = gerade$ ungerade ist.

Beweis.

IA: sei $n = 1$, es gilt

$$f_0: \ x \mapsto a_1 x^1 \ (ungerade)$$

IV:

$$f: \ x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

für alle $a_k = 0$ mit $k = gerade$ ungerade ist.
IS: sei $\tilde{n} = n + 2$, dann

$$\tilde{f}: \ x \mapsto \sum_{i=0}^{\tilde{n}} a_i x^i$$

$$\tilde{f}: \ x \mapsto \sum_{i=0}^{n+2} a_i x^i$$

$$\tilde{f}: \ x \mapsto (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) + a_{n+2} x^{n+2}$$

$$\Rightarrow \tilde{f} = f + a_{n+2} x^{n+2}$$

Die Voraussetzung ist, dass mit $n = gerade$ alle Terme $a_{n_{gerade}} = 0$ sind, dann entfernen wir alle $a_n x^n$ von gerade n.
Dann ist $\tilde{f} = f + a_{n+2} x^{n+2}$ ungerade, denn alle $n + 2$ sind auch ungerade. $\square$

Tutorium

Lokale Extrema:

$D_f \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D_f \to \mathbb{R}$

offene Menge:

$B(x, \epsilon)$: $(x - \epsilon, x + \epsilon)$

$B(x, \epsilon) \subseteq (a, b)$

$x_0 \in d_f$ heißt lokale Min/Max von f, falls gilt:

$\exists \epsilon > 0$, $\forall y \in B(x_0, \epsilon)$:

$f(x_0) :\leq f(y) / \geq f(y)$

$D_f \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D_f \to \mathbb{R}$ diffbar.

$x_0 \in D_f$ sei lok. Extremasstelle von f

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

18 18. Übungsblatt

Aufgabe 18.1

(a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \\
&= \lim \frac{\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))}{2x} \\
&= \lim \frac{-\tan(x)}{2x} \\
&= \lim \frac{-\frac{1}{\cos^2(x)}}{2} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{1-x}} \\
&= (e^{\lim \ln(x)})^{\frac{1}{1-x}} \\
&= e^{\lim \ln(x) \cdot \frac{1}{1-x}} \\
&\lim \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^\alpha - (1-\alpha x)}{x^2} = „\frac{0}{0}" \\
&= \lim \frac{-\alpha(1-x)^{\alpha-1} + \alpha}{2x} = „\frac{0}{0}" \\
&= \lim \frac{\alpha(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2}}{2} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \text{"}\infty\cdot 0\text{"}\\
&= \lim \frac{\ln(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"}\\
&= \lim \frac{-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}x^{-2}}{-x^{-2}} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\downarrow 0}(\cot(x))^{\sin(x)}\\
&= \lim \exp(\frac{\ln(\cot(x))}{\frac{1}{\sin(x)}}) = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\\
&= \exp\left(\lim \frac{-\frac{1}{\cot(x)}\cdot\frac{1}{\sin^2(x)}}{-\sin^{-2}(x)\cdot\cos(x)}\right)\\
&= \exp(\lim \frac{\frac{\sin(x)}{\cot(x)}}{\cot(x)})\\
&= \exp(\lim \frac{\sin(x)}{\cot^2(x)}) = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 18.5(H)

Gegeben sei die Funktion f:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n e^{-x}$$

deren Ableitung und 2.Ableitung sind

$$\begin{aligned} f' &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} \\ f'' &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto n(n-1)x^{n-2}e^{-x} - 2nx^{n-1}e^{-x} - f \end{aligned}$$

wir suchen die Nullpunkt(e) von f'

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_0 = n) &= -2ne^{-n} - x^n e^{-n} \\ &= -(2n + x^n)e^{-n} \\ (n \in \mathbb{N}, n > 0) &\Rightarrow f''(n) < 0 \end{aligned}$$

d.h. es existiert eine lokale Maxima bei $x = n$ von f.

Aufgabe 18.6(H)

Zu beweisen ist:

$$(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$$
$$(f(b)-f(a))g'(\xi) - (g(b)-g(a))f'(\xi) = 0$$

Beweis.

Sei $h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$
dann gilt

$$h'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$$

und

$$\begin{aligned}
h(a) &= (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a) \\
&= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\
&= f(b)g(a) - g(b)f(a) \\
h(b) &= (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b) \\
&= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) \\
&= -f(a)g(b) + g(a)f(b)
\end{aligned}$$

deswegen

$$h(a) = h(b)$$

Gegeben seien f, g in $[a,b]$ stetig, in (a,b) differenzierbar, dann ist h auch in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar.

Nach *Satz von Rolle*, es existiert $\xi \in (a,b)$, sodass

$$h'(\xi) = (f(b)-f(a))g'(\xi) - (g(b)-g(a))f'(\xi) = 0$$

□

Tutorium $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} \overset{Formel}{=} \frac{\lim f}{\lim g} = \frac{\infty}{\infty} oder \frac{0}{0}$,dann

Falls $\lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$ ex., dann ex. auch $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$, und die sind gleich.

Beispiel 18.1. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$, aber $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$ auch.

Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{\lim 1+e^{-2x}}{\lim 1-e^{-2x}} = 1$

Definition 18.1 (HP)**.**

$$I \subseteq \mathbb{R},\ a \in I \text{ sei HP von } I = \begin{cases} \forall \varepsilon > 0:\ B(a,\varepsilon) \setminus \{a\} \cap I \neq \emptyset \\ \text{Ex ex. Folge } (x_n) \text{ in } I \setminus \{a\} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \end{cases}$$

$h(x) = f(x)g(x)$:
Sei (p_n) ein Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $p_n \to 0$, und $x_n = a + p_n \in I$ für alle $n \in \mathbb{N}$

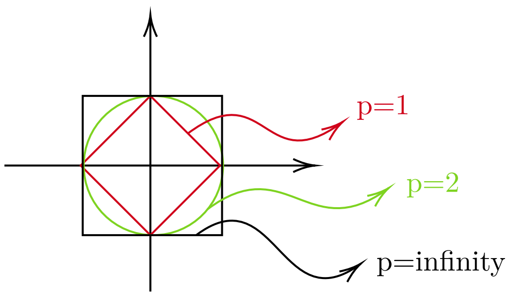
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{h(a+p_n) - h(a)}{p_n} &= \frac{f(a+p_n)g(a+p_n) - f(a)g(a)}{p_n} \\ &= \frac{f(a+p_n)g(a+p_n) - f(a)g(a+p_n)}{p_n} \\ &= g(a+p_n)\frac{f(a+p_n) - f(a)}{p_n} \\ (n\to\infty) &= g(a)f'(a) \end{aligned}$$

Da dies für jede Folge (p_n), dieser Art gilt.

Definition 18.2 (Norm)**.** $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *od.* $\mathbb{C}^n$,

$$||x||_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \in [1,\infty)$$

$$||x||_\infty := \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$$



19 19. Übungsblatt

Aufgabe 19.1

(a) aus Grafik ermitteln

$$\int_0^2 \varphi_1 dx = 6$$

(b)

$$\int_0^2 \varphi_2 dx = 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \cdots = 3$$

(c)

$$\int_0^2 \varphi_3 dx = 7\int_0^2 \varphi_1 dx - 5\int_0^2 \varphi_2 dx = -8$$

(d) Es ist kein TF.

Aufgabe 19.2

zu beweisen:

$$0 \leq \int^{*} f + \int^{*} g - \int^{*} (f+g)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 \leq & \inf\{\int_a^b \varphi_1 dx : \varphi_1 \in T[a,b], \varphi \geq f\} + \inf \cdots \\ &= \inf\{\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) dx : \varphi_{1,2} \in T[a,b], \varphi_1 \geq f, \varphi_2 \geq g\} - \cdots \end{aligned}$$

Aufgabe 19.3

Aufgabe 19.5(H)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{falls } x \geq \frac{\pi}{2} \\ a(x+b)^2 + c & \text{falls } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

nun offenbar ist $\sin(x)$ in $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ differenzierbar. Die Voraussetzungen für f differenzierbar sind:

(i) f am Punkt $\frac{\pi}{2}$ stetig und differenzierbar.

(ii) $a(x+b)^2 + c$ in $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ stetig und differenzierbar.

dazu

(i)

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{2}) &= a(\frac{\pi}{2} + b)^2 + c \\ 1 &= a(\frac{\pi}{2} + b)^2 + c \end{aligned}$$

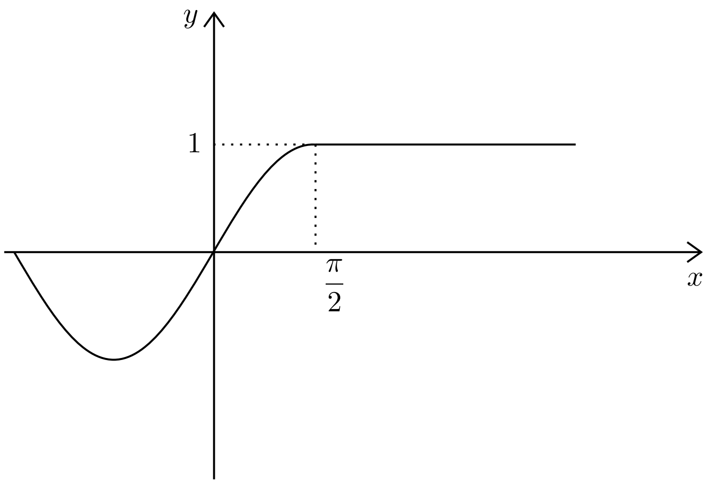
und die Ableitungen am Punkt $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{2}) &= 2a(\frac{\pi}{2} + b) \\ 0 &= 2a(\frac{\pi}{2} + b) \end{aligned}$$

führt zur Lösung

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

(ii) Nach (i) ist f in $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ Konstant ($f = 1$), offenbar stetig und differenzierbar.



Aufgabe 19.6(H)

(a) Legendreschen Polynome

$$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

L_0, L_1, L_2 sind

$$\begin{aligned} L_0 : \quad x \mapsto & \frac{1}{2^0 0!} \cdot \frac{d^0}{dx^0}[(x^2-1)^0] \\ =& 1 \\ L_1 : \quad x \mapsto & \frac{1}{2^1 1!} \cdot \frac{d^1}{dx^1}[(x^2-1)^1] \\ =& x \\ L_2 : \quad x \mapsto & \frac{1}{2^2 2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] \\ =& \frac{1}{2}(3x^2-1) \end{aligned}$$

(b) Legendreschen Polynome

$$\begin{aligned} L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto & \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \\ =& \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n(x-1)^n] \end{aligned}$$

sei $f(x) = (x+1)^n(x-1)^n$, wir wenden Leibniz-Regel an:

$$\begin{aligned} f(x) =& (x+1)^n(x-1)^n \\ f^1(x) =& \frac{d}{dx}[(x+1)^n](x-1)^n + (x+1)^n \frac{d}{dx}[(x-1)^n] \\ f^2(x) =& \frac{d^2}{dx^2}[(x+1)^n](x-1)^n + \frac{d}{dx}[(x+1)^n]\frac{d}{dx}[(x-1)^n] + \\ & (x+1)^n \frac{d^2}{dx^2}[(x-1)^n] + \frac{d}{dx}[(x+1)^n]\frac{d}{dx}[(x-1)^n] \\ & \vdots \\ \text{(mit Binomial-Koeff.)} \quad f^n(x) =& \binom{n}{0}[(x+1)^n]\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n] + \binom{n}{1}\frac{d}{dx}[(x+1)^n]\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x-1)^n] + \\ & \binom{n}{2}\frac{d^2}{dx^2}[(x+1)^n]\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}[(x-1)^n] + \cdots + \\ & \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x+1)^n]\frac{d}{dx}[(x-1)^n] + \binom{n}{n}\frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n](x-1)^n \end{aligned}$$

dann gilt

$$L_n = \frac{1}{2^n n!}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dx^i}[(x+1)^n]\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}[(x-1)^n]\right]$$

(i) $x = 1$
wenn $i \neq 0$ ist, es gilt

$$\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}[(x-1)^n] = 0$$

dann

$$\begin{aligned} L_n(1) &= \frac{1}{2^n n!}(x+1)^n \frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n] \\ &= \frac{1}{n!}[n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1] \\ &= \frac{1}{n!} n! = 1 \end{aligned}$$

(ii) $x = -1$
wenn $i \neq 0$ ist, es gilt

$$\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}[(x+1)^n] = 0$$

dann

$$\begin{aligned} L_n(-1) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n](x-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}[n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} n! = (-1)^n \end{aligned}$$

(c) Sei $f(x) := (x+1)^n(x-1)^n = [(x+1)(x-1)]^n = (x^2-1)^n$

Es gilt $f(1) = f(-1) = 0$, nach S.v.Rolle hat f' in $(-1, 1)$ mindestens einen Nullpunkt $x_{1,1}$. Wir zerbrechen das Intervall $(-1, 1)$ mit dem Punkt $x_{1,1}$, erhalten $(-1, x_{1,1})$ und $(x_{1,1}, 1)$, es gilt $f'(1) = f'(-1) = f'(x_{1,1}) = 0$ dann nach S.v.Rolle hat f'' in zwei Teilintervalle je einen Nullpunkt $x_{2,1}$ und $x_{2,2}$ (mindestens zwei). Dann können wir noch mal zerbrechen und drei Teilintervalle $(-1, x_{2,1})$ $(x_{2,1}, x_{2,2})$ und $(x_{2,2}, 1)$ erhalten, nach S.v.Rolle hat f''' mindestens drei Nullpunkte. Bei der $n-$te Ableitung hat f^n mindestens n Nullpunkten. Für ein n-te Polynom ist maximal n Nullpunkte möglich. Induktiv können wir zusammenfassen, dass f^n im $(-1, 1)$ insgesamt n Nullpunkte hat.

Dann hat Legendre Polynomial $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} f^n(x)$ im $(-1, 1)$ insgesamt n Nullpunkte.

Tutorium

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in R[a, b]$

Oberintegral:

$$\int_a^{b}{}^{*} f(x)dx := \inf\{\int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in J[a, b], \varphi \geq f\}$$

Unterintegral:

$$\int_a^{b}{}_{*} f(x)dx := \sup\{\int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in J[a, b], \varphi \geq f\}$$

dann

$$Unterint. < Oberint.$$

$$f \in R[a, b] \Rightarrow Oberint. = Unterint. = \int_a^b f(x)dx$$

$$J[a, b] \subseteq R[a, b]$$

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \ stetig \ monoton$$

sei $c \in [a, b]$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

Blatt 20

Aufgabe 20.1

(*):

Sei $\epsilon > 0$ gegeb. und $N \in \mathbb{N}$ sei gemaess (*) gewahlt.
f.a. $n \geq N$ gilt

$$\varphi_n(x) - \epsilon' \leq f(x) \leq \varphi_n(x) + \epsilon'$$

f.a. $x \in [a, b]$
Die folgt

$$\psi_n^{\pm} : [a, b] \to \mathbb{R} \; mit \; \psi_n^{\pm}(x) = \varphi_n(x) \pm \epsilon'$$

gehoren zu $J[a, b]$
mit $\psi_n^- \leq g \leq \psi_n^+$ auf $[a, b]$

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi_n^+ - \psi_n^-)(x)dx &= \int_a^b (\psi_n(x) + \epsilon') - (\psi_n(x) - \epsilon')dx \\ &= \int_a^b 2\epsilon' dx = 2\epsilon'(b-a) = \frac{\epsilon}{2(b-a)} 2(b-a) = \epsilon\end{aligned}$$

fuer $n \geq N$

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi_n^-(xd)dx \leq \sup\{\int_a^b \psi^-(x)dx | \psi^- \in J[a, b], \psi^+ \leq f\} = \int_a^b {}_x f(x)dx \leq \int_a^b {}^y f(x)dx = \inf\{\int_a^b \psi^+(x)|\psi^+ \in \\ \leq \int_a^b \psi_n^+(x) = \int_a^b \psi_n(x) + \epsilon' dx = \int_a\end{aligned}$$

Aufgabe 20.5(H)

Wir ermitteln das folgende Integral mittels Riemannsche Summe

$$\int_a^b e^x dx$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \quad k \in \mathbb{N}_{[0,n]}$$

eine äquidistante Unterteilung von $[a, b]$, das heißt $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
dann gilt

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k(b-a)}{n} + a\right) \\
&= \frac{(b-a)\exp(a)}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\exp\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)^k \\
&= \frac{(b-a)\exp(a)}{n} \frac{\exp\left(\frac{b-a}{n}\right)(\exp(b-a)-1)}{\exp\left(\frac{b-a}{n}\right)-1} \\
&= \frac{(a-b)(e^a-e^b)}{n} + \frac{(a-b)(e^a-e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n}-e^{a/n})}
\end{aligned}$$

es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b)(e^a-e^b)}{n} + \frac{(a-b)(e^a-e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n}-e^{a/n})}\right) \\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b)(e^a-e^b)}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b)(e^a-e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n}-e^{a/n})}\right) \\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b)(e^a-e^b)e^{a/n}}{n(e^{b/n}-e^{a/n})}\right) \\
=&(e^a-e^b)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b)e^{a/n}}{n(e^{b/n}-e^{a/n})}\right) \\
=&(e^a-e^b)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b)}{n}\frac{1}{e^{(b-a)/n}-1}\right)
\end{aligned}$$

für den Term $e^{(b-a)/n}$, wir benutzen Taylor-Entwicklung bei Punkt $\frac{b-a}{n}$ mit $n \to \infty$ (d.h. $\frac{b-a}{n} \to 0$)

$$e^{(b-a)/n} \simeq 1 + \frac{b-a}{n} + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\right)}_{ignore}$$

dann gilt

$$
\begin{aligned}
&(e^a - e^b) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(a-b)}{n} \frac{1}{e^{(b-a)/n} - 1} \right) \\
=&(e^a - e^b) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(a-b)}{n} \frac{1}{1 + \dfrac{b-a}{n} - 1} \right) \\
=&e^b - e^a
\end{aligned}
$$

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

Aufgabe 20.6(H)

The function of the ellipse is given by

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

or

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

therefore, we have

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

to determine the area of the ellipse, we do integration over y

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y dx$$

with $x_0 = 0$, $x_1 = a$. Note that the area A is now only one-fourth of a ellipse, actual area is $A_e = 4A$.

Then:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

now comes the hint given in the question: to find the anti-derivative of function $F'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, or to prove that for function $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

its derivative is $F'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Beweis. For function

$$\begin{aligned} F(x) =& \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) \\ =& \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

its derivative is

$$\begin{aligned} F'(x) =& \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{2}a\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) \\ =& \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

□

Therefore, we have

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

now calculate the definite integral

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2}dx \\
=&\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Bigg|_0^a \\
=&\frac{1}{2}\pi a^2
\end{aligned}$$

therefore

$$A = \frac{b}{a}\frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{4}\pi ab$$

the area of the ellipse is $A_e = 4A = \pi ab$