Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. S. Siegmund
PD Dr. A. Kalauch

Übung 28.11. bis 2.12.

Analysis I

8. Übungsblatt: *Cauchy-Folgen, Reihen*

Aufgabe 8.1

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit

$$a_1 \geq 0,\ a_{n+1} := \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

eine Cauchy-Folge ist. Welchen Grenzwert hat sie?

Aufgabe 8.2

Determine the sequence of partial sums and the sum of the following series.

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}, \qquad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{9^k}.$$

Hint: Split the fractions.

Aufgabe 8.3

Beweisen Sie das Wurzelkriterium: Wenn für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\theta \in (0,1)$ und ein $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ so existieren, dass für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
Geben Sie ein Beispiel an, für das für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, aber die Reihe nicht konvergiert.

Aufgabe 8.4

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n},$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3 - 3n + 1}, \qquad \text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right), \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Hinweis: Sie können den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ benutzen.

Aufgabe 8.5 (H)

Determine which of the following series are convergent.

(a) [2] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$,

(b) [2] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^n$,

(c) [2] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n}$,

(d) [2] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 8.6 (H)

[2] Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$a_n \to 0,\ (b_n) \text{ beschränkt } \implies a_n \cdot b_n \to 0.$$