Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 6

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

$\mathcal{H}$ sei ein separabler Hilbert-Raum und $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ seien beliebige Zustände aus $\mathcal{H}$.

(a) Beweisen sie die Parallelogrammgleichung

$$||\alpha+\beta||^2 + ||\alpha-\beta||^2 = 2||\alpha||^2 + 2||\beta||^2.$$

(b) Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle\alpha|\beta\rangle| \leq ||\alpha||\,||\beta||.$$

Hinweis: Es ist zweckmäßig, zunächst den Vektor $|\beta\rangle$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $|\alpha\rangle$ zu zerlegen und dann $||\beta||^2$ zu berechnen.

(c) Verifizieren sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung

$$\big|\, ||\alpha|| - ||\beta|| \,\big| \leq ||\alpha+\beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||\ .$$

Aufgabe 2:

Es sei $\hat{p}$ der Impulsoperator im eindimensionalen Raum mit dem Definitionsbereich

$$D_{\hat{p}} = \big\{\psi \in L_2(\mathbb{R}) \,\big|\, \psi \text{ stetig differenzierbar}\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{p}$ hermitesch ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{p}$ nicht selbstadjungiert ist. *Hinweis*: Untersuchen Sie die Definitionsbereiche von $\hat{p}$ und $\hat{p}^\dagger$. Betrachten Sie Funktionen der Form $\sim e^{-|x|/l}$.

Bitte wenden

Hausaufgaben (zu besprechen ab 04.06.2023)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit *linearer* kinetischer Energie, beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = v\,\frac{\hbar}{i}\,\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\,m\omega^2 x^2.$$

Hier sind v, m und ω Konstanten.

(a) Schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung auf und bringen Sie sie in möglichst einfache Form. Die Abkürzungen

$$\frac{1}{x_0^3} := \frac{m\omega^2}{2\hbar v}, \qquad \frac{1}{\lambda} := \frac{E}{\hbar v}$$

könnten nützlich sein.

(b) Bestimmen Sie die asymptotische Lösung $\psi_\infty(x)$ für $x \to \pm\infty$. Wieso existiert nur eine linear unabhängige Lösung?

(c) Setzen Sie den Ansatz

$$\psi(x) = f(x)\,\psi_\infty(x)$$

in die volle Gleichung ein und lösen Sie sie für $f(x)$. Dies ergibt die exakten Eigenfunktionen $\psi(x)$. Für welche Energien E erhalten Sie beschränkte Eigenfunktionen?

(d) Sie sollten ein kontinuierliches Spektrum des Hamilton-Operators gefunden haben. Charakterisieren Sie die Eigenfunktionen für $E < 0$ und $E > 0$. (*Hinweis*: Wie verhalten sich die Eigenfunktionen für kleine x?) Diskutieren Sie, wieso trotz des für $x \to \pm\infty$ divergierenden Potentials ein kontinuierliches Spektrum auftritt.

Aufgabe 4:

Der Hamilton-Operator für ein Zwei-Niveau-System sei

$$\hat{H} = -b\,\sigma_x,$$

wobei b eine reelle Konstante und σ_x eine Pauli-Matrix ist.

(a) Wie lautet der zugehörige Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$? Bestimmen Sie die 2×2 Matrix $\hat{U}(t, t_0)$ explizit.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) den zeitabhängigen Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ für die Anfangsbedingung

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie damit die Erwartungswerte

$$\langle\psi(t)|\,\sigma_\alpha\,|\psi(t)\rangle$$

für $\alpha = x, y, z$.

(c) Bestimmen Sie analog den zeitabhängigen Zustandsvektor für die Anfangsbedingung

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deuten Sie das Ergebnis.

Hinweis: Benutzen Sie die Relationen für die Pauli-Matrizen, die Sie auf Blatt 5/Aufgabe 4 hergeleitet haben.