TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Lösungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm — Blatt 4

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

(a) Es ist zu zeigen, dass p_A positiv semidefinit und vollständig ist. Die Eigenschaft der positiv semidefinit ist per Konstruktion gegeben. Die Vollständigkeit von p_A kann wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned}\sum_A p_A &= \sum_A |\langle \varphi_A, \psi\rangle|^2 \\ &= \sum_A \langle \psi, \varphi_A\rangle \langle \varphi_A, \psi\rangle \\ &= \sum_A \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\varphi_A(\vec{r}) \int d^3r'\, \varphi_A^*(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,'). \end{aligned} \tag{1}$$

Nun nutzen wir die Vollständigkeit der Eigenfunktionen

$$\sum_A \varphi_A(\vec{r})\varphi_A^*(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_A p_A &= \int d^3r \int d^3r'\, \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \\ &= \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

(b) Sei $\psi(\vec{r})$ eine normierte Eigenfunktion von $\hat{A}$ zum Eigenwert A_0, der als nichtentartet angenommen wird. Dann gilt

$$p_A = |\langle \varphi_A, \psi\rangle|^2 = |\langle \varphi_A, \varphi_{A_0}\rangle|^2 = \delta_{AA_0}. \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist $p_{A_0} = 1$ für den Eigenwert A_0 und Null sonst. Das drückt aus, dass wir in diesem Fall bereits wissen, dass der Messwert A_0 ist.

(c) q_A ist ebenfalls positiv semidefinit. Aber

$$q_A = |\langle \varphi_A, \psi\rangle| \geq |\langle \varphi_A, \psi\rangle|^2 = p_A, \tag{5}$$

d.h. q_A ist größer oder gleich p_A, da $|\langle \varphi_A, \psi\rangle| \in [0,1]$ und $q_A = p_A$ genau dann, wenn $|\langle \varphi_A, \psi\rangle| = 0$ oder 1. Sofern also $0 < |\langle \varphi_A, \psi\rangle| < 1$ für mindestens einen Eigenwert A gilt (d.h. der Eigenwert ist weder ausgeschlossen noch sicher eintretend), folgt

$$\sum_A q_A > 1. \tag{6}$$

(d) Der Fall für p_A wird im Skript am Ende von Abschnitt 5.6 diskutiert. Wenn die Wahrscheinlichkeiten von Messwerten propotional zu $|\langle \varphi_A, \psi\rangle|$ wären, würden ferne Lichtquellen heller erscheinen als sie es in der realen Welt tun. Bei gleichmäßig verteilten Lichtquellen (z.B. Sternen) nimmt deren Zahl mit r^2 zu, dann tragen fernere Lichtquellen immer mehr zur Helligkeit bei, vermutlich heller Nachthimmel.

Aufgabe 2:

Es ist $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\, e^{-|x|/2\lambda}$.

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-|x|/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} dx\, e^{-x/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[-\lambda e^{-x/\lambda}\right]_0^{\infty} = 1 \tag{7}$$

(b)

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) x \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda} = 0 \tag{8}$$

weil der Integrand eine ungerade Funktion von x ist.

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) x^2 \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x^2}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} dx\, x^2 e^{-x/\lambda} = 2\lambda^2 \end{aligned} \tag{9}$$

(c)

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx-|x|/2\lambda} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{-ikx+x/2\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_0^{\infty} dx\, e^{-ikx-x/2\lambda} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left[\frac{e^{-ikx+x/2\lambda}}{-ik+1/2\lambda}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left[\frac{e^{-ikx-x/2\lambda}}{-ik-1/2\lambda}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\,\frac{1}{-ik+1/(2\lambda)} - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\,\frac{1}{-ik-1/(2\lambda)} = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{1+4k^2\lambda^2} \end{aligned} \tag{10}$$

(d)

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hbar k\, |\tilde{\psi}(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hbar k \left(\frac{2\sqrt{2\lambda}}{1+4k^2\lambda^2}\right)^2 = 0 \tag{11}$$

weil der Integrand eine ungerade Funktion von k ist.

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hbar^2 k^2\, |\tilde{\psi}(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hbar^2 k^2 \left(\frac{2\sqrt{2\lambda}}{1+4k^2\lambda^2}\right)^2 \\ &\overset{q=2\lambda k}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar^2}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, \frac{q^2}{(1+q^2)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{\hbar^2}{\lambda^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Es folgt

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{2}\lambda, \tag{13}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{\hbar}{2\lambda} \tag{14}$$

und damit

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} > \frac{\hbar}{2}. \tag{15}$$

Die Heisenbergsche Unschärferelation ist also erfüllt, aber nicht ausgeschöpft: $\Delta x\Delta p$ ist größer als durch die Unschärferelation erzwungen.

Hausaufgaben

Aufgabe 3:

(a) Integriere die Schrödinger-Gleichung über das infinitesimale Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, [-\eta\delta(x) - E]\, \psi(x) \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-\epsilon}^{+\epsilon} = \psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon) = -\frac{2m}{\hbar^2}\, \eta\, \psi(0) \tag{17}$$

(b) Für $x < 0$ und $x > 0$ ist $V(x) = 0$, es folgt $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Wir betrachten o. B. d. A. eine von links einlaufende Welle. Die von rechts einlaufende Lösung zu derselben Energie lässt sich analog finden und führt auf dieselben Koeffizienten. Ansatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0, \\ Fe^{ikx} & \text{für } x > 0. \end{cases} \tag{18}$$

$\psi(x)$ ist stetig bei $x = 0$, also können beide Ausdrücke bei $x = 0$ stetig fortgesetzt werden und müssen den gleichen Funktionswert ergeben. Es folgt

$$F = A + B. \tag{19}$$

Für die Ableitung folgt aus Teil (a)

$$ikF - ik\,(A - B) = -\frac{2m\eta}{\hbar^2}\,(A + B). \tag{20}$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$F = \frac{1}{1 - i\frac{m\eta}{\hbar^2 k}}\, A \quad \text{und} \quad B = \frac{i\frac{m\eta}{\hbar^2 k}}{1 - i\frac{m\eta}{\hbar^2 k}}\, A. \tag{21}$$

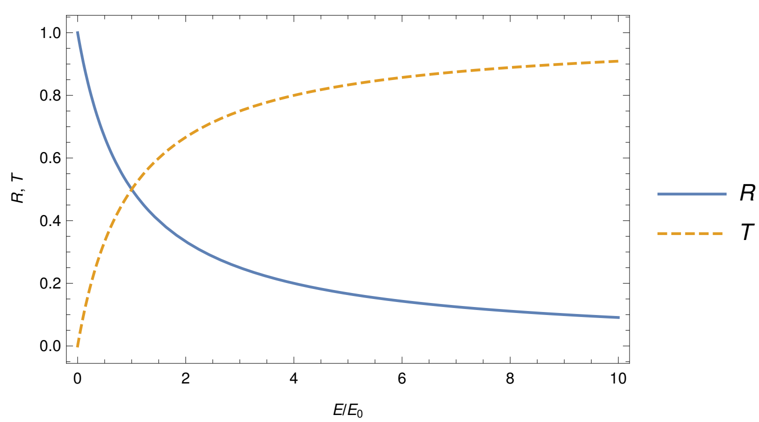
Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind, unter Verwendung von $k^2 = 2mE/\hbar^2$,

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{2E\hbar^2}{m\eta^2}} \tag{22}$$

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{m\eta^2}{2E\hbar^2}}. \tag{23}$$

Wir finden also keine Oszillationen. Probe:

$$R + T = \frac{1 + \frac{m\eta^2}{2E\hbar^2} + 1 + \frac{2E\hbar^2}{m\eta^2}}{\left(1 + \frac{2E\hbar^2}{m\eta^2}\right)\left(1 + \frac{m\eta^2}{2E\hbar^2}\right)} = \frac{2 + \frac{m\eta^2}{2E\hbar^2} + \frac{2E\hbar^2}{m\eta^2}}{2 + \frac{m\eta^2}{2E\hbar^2} + \frac{2E\hbar^2}{m\eta^2}} = 1. \tag{24}$$



(c) Ansatz:
$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} & \text{für } x < 0 \\ Fe^{-\kappa x} + Ge^{\kappa x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{25}$$
mit $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$. Beschränkte Lösungen für $x \to \pm\infty$ erfordern $A = 0$ und $G = 0$. $\psi(x)$ ist stetig bei $x = 0$, also $F = B$. Es folgt
$$\psi(x) = Be^{-\kappa|x|} \tag{26}$$
Für die Ableitung folgt aus Teil (a)
$$-2B\kappa = -\frac{2m\eta}{\hbar^2}\,B. \tag{27}$$
Es folgt für die Energie
$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{m\eta^2}{2\hbar^2}. \tag{28}$$
Es gibt also genau einen gebundenen Zustand.

Als nächstes gilt es den Normierungsfaktor der Wellenfunktion aus Gleichung (26) zu bestimmen. Es ist
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = B^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\kappa|x|} dx = 2B^2 \int_0^{\infty} e^{-2\kappa x} dx = \frac{B^2}{\kappa} = 1\,. \tag{29}$$
Die Konstante B muss daher folgende Gleichung erfüllen:
$$B = \sqrt{\kappa} = \frac{\sqrt{m\eta}}{\hbar}\,. \tag{30}$$

Aufgabe 4:

(a) Die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist
$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\psi_n(x)\,e^{-iE_nt/\hbar} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\psi_n(x)\,\exp\left(-i\,\frac{n^2\pi^2\hbar}{2mL^2}\,t\right). \tag{31}$$
Mit der gegebenen Wiederkehrzeit T ist
$$\frac{n^2\pi^2\hbar}{2mL^2}\,T = \frac{n^2\pi^2\hbar}{2mL^2}\,\frac{4mL^2}{\pi\hbar} = 2\pi n^2. \tag{32}$$
Es folgt
$$\exp\left(-i\,\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,(t+T)\right) = \exp\left(-i\,\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,t\right)e^{-i\,2\pi n^2} \tag{33}$$
und $e^{-i\,2\pi n^2} = 1$, weil n^2 eine ganze Zahl ist. Es folgt $\psi(t+T) = \psi(t)$. Für das Ergebnis ist notwendig, dass alle Eigenenergien (Eigenfrequenzen) ganzzahlige Vielfache der Grundzustandsenergie (Grundfrequenz) sind.

(b) Die klassische Wiederkehrzeit ist $T_c = 2L/v$. Die Geschwindigkeit erhalten wir aus
$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \tag{34}$$
Es folgt
$$T_c = L\sqrt{\frac{2m}{E}}. \tag{35}$$

(c) Die beiden Wiederkehrzeiten sind gleich, wenn

$$\frac{4mL^2}{\pi\hbar} = L\sqrt{\frac{2m}{E}}, \tag{36}$$

also für

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}. \tag{37}$$

Beachte, dass die Grundzustandsenergie für den Kasten

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{38}$$

beträgt. Die Energie E, bei der klassische und quantenmechanische Wiederkehrzeit übereinstimmen, liegt also unterhalb der Grundzustandsenergie und damit außerhalb des Spektrums. Da T_c mit wachsender Energie abnimmt, folgt, dass die reale (d.h. quantenmechanische) Wiederkehrzeit immer länger ist als das klassische Ergebnis.

Die klassische Wiederkehrzeit bei den quantenmechanischen Eigenenergien ist

$$T_c(E_n) = L\sqrt{\frac{2m}{E_n}} = \frac{2mL^2}{\pi\hbar}\,\frac{1}{n} = \frac{4mL^2}{h}\,\frac{1}{n} \tag{39}$$

im Vergleich zu den "Eigenperioden" der quantenmechanischen Bewegungen,

$$T_n = \frac{h}{E_n} = h\,\frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^2}\,\frac{1}{n^2} = \frac{8mL^2}{h}\,\frac{1}{n^2}. \tag{40}$$

Die quantenmechanische Wiederkehrzeit ist laut Aufgabe

$$T = \frac{4mL^2}{\pi\hbar} = \frac{8mL^2}{h} = T_1. \tag{41}$$