
Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm

Blatt 7

Präsenzübungen**Aufgabe 1:**

Gegeben sei ein Dirac-Raum aufgespannt durch die uneigentlichen Vektoren $|p\rangle$ mit $p \in \mathbb{R}$. Die $|p\rangle$ seien orthonormiert:

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p').$$

Betrachten Sie die beiden Vektoren

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi dp \cos p |p\rangle,$$
$$|\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi dp \sin p |p\rangle.$$

Berechnen Sie die Norm von $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ sowie deren Skalarprodukt.

Aufgabe 2:

Der Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Systems sei \hat{H} . Weiter möge ein unitärer Operator \hat{U} existieren, der mit \hat{H} *antikommutiert*:

$$\hat{H}\hat{U} = -\hat{U}\hat{H}.$$

- (a) Sei $|\psi\rangle$ ein normierter Eigenzustand von \hat{H} zur Eigenenergie E . Zeigen Sie, dass \hat{H} auch einen Eigenzustand zur Energie $-E$ hat und bestimmen Sie diesen.
- (b) \hat{U} sei auf dem gesamten Hilbert-Raum definiert. Daher hat \hat{U} ein vollständiges Orthonormalsystem $\{|u_i\rangle\}$ von Eigenzuständen, die

$$\hat{U}|u_i\rangle = u_i|u_i\rangle$$

erfüllen. Betrachten Sie die Matrixelemente $\langle u_i|\hat{H}|u_j\rangle$ von \hat{H} . Zeigen Sie, dass $\langle u_i|\hat{H}|u_j\rangle \neq 0$ nur möglich ist, wenn $u_i^* u_j = -1$ gilt. Was folgt für die Diagonalelemente $\langle u_i|\hat{H}|u_i\rangle$? *Hinweis:* Es gilt $\hat{H} = -\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}$ (wieso?).

Bitte wenden

Hausaufgaben (zu besprechen ab 11.06.2024)

Aufgabe 3:

Ein quantenmechanisches System sei durch einen zeitabhängigen Hamilton-Operator der speziellen Form

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 f(t)$$

charakterisiert. Hier ist \hat{H}_0 ein zeitunabhängiger hermitescher Operator und $f(t)$ eine reelle Funktion der Zeit.

- (a) Bestimmen Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$. Wieso ist er von einfacherer Form als für einen ganz allgemeinen zeitabhängigen Hamilton-Operator?
- (b) Bestimmen Sie konkret den Zeitentwicklungsoperator für ein Zwei-Niveau-System mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H}(t) = -b \sigma_x \sin \omega t,$$

siehe auch Aufgabe 4 von Blatt 6. *Hinweis:* Wie sieht die Taylor-Entwicklung von $\exp(ia(t)\sigma_x)$ aus? Wie kann man Potenzen von σ_x vereinfachen?

Aufgabe 4:

Ein quantenmechanisches System werde durch den Hamilton-Operator \hat{H} beschrieben. Außerdem soll es eine gerade Anzahl $2N$ selbstadjungierter Operatoren \hat{A}_n , $n = 1, \dots, 2N$ geben mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\hat{A}_n^2 &= \mathbb{1}, \\ [\hat{A}_n, \hat{H}] &= 0, \\ \hat{A}_m \hat{A}_n &= -\hat{A}_n \hat{A}_m \quad \text{für } m \neq n.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung sagt aus, dass die \hat{A}_n Erhaltungsgrößen sind. Aufgrund der dritten Gleichung sind sie aber nicht verträglich – die \hat{A}_n kommutieren nicht miteinander, sondern sie *antikommutieren*.

- (a) Wir definieren $\hat{B}_j := i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}$ für $j = 1, \dots, N$. Zeigen Sie, dass die \hat{B}_j hermitesch (sogar selbstadjungiert) sind.
- (b) Welche Eigenwerte können die \hat{B}_j haben? *Hinweis:* Betrachten Sie \hat{B}_j^2 .
- (c) Zeigen Sie, dass die \hat{B}_j mit \hat{H} und untereinander kommutieren. Was folgt daraus für ihre Eigenzustände?
- (d) Sei $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von \hat{H} zum Eigenwert E . Zeigen Sie, dass $\hat{A}_n |\psi\rangle$ überhaupt ein Zustand und insbesondere auch ein Eigenzustand von \hat{H} zum Eigenwert E ist.
- (e) Zeigen Sie mit Hilfe der bisher erzielten Ergebnisse, dass es mindestens 2^N linear unabhängige Eigenzustände von \hat{H} zu demselben Eigenwert E gibt. (In anderen Worten, der von den entarteten Eigenvektoren aufgespannte Unterraum des Hilbert-Raums hat mindestens die Dimension 2^N .) *Hinweis:* Wie verhalten sich \hat{A}_n und \hat{B}_j zueinander?