TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 11

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential $V(x) = c\,x^4$.

(a) Verwenden Sie das Ritzsche Variationsverfahren, um die Grundzustandsenergie und -eigenfunktion $\psi^0(x)$ anzunähern. Verwenden Sie zunächst den Ansatz

$$\psi^0_\alpha(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right). \tag{1}$$

Hinweise: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-x^2/\sigma^2} = \sigma^{2n+1}\,\Gamma(n+1/2) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \text{ und } \sigma > 0$$

und $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

(b) Ermitteln Sie analog Näherungen für die Energie und die Wellenfunktion $\psi^1(x)$ für den ersten angeregten Zustand. Welche Bedingung muss Ihr Ansatz $\psi^1_\alpha(x)$ für die Wellenfunktion erfüllen und was ist eine sinnvolle Wahl?

(c) Inwiefern ist Gl. (1) kein besonders guter Ansatz für dieses Potential? Konstruieren Sie einen besseren Ansatz. Ermitteln Sie dazu das asymptotische Verhalten der Lösung für große $|x|$.

(d) Bestimmen Sie die Näherung für die Grundzustandsenergie mit dem in (c) ermittelten Ansatz. *Hinweis*:

$$\int_0^{\infty} dx\, x^n\, e^{-x^m/\sigma^m} = \frac{1}{m}\,\sigma^{n+1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right).$$

Hausaufgaben (zu besprechen ab 03.07.2023)

Aufgabe 2:

Ein Teilchen der Masse M bewege sich in drei Dimensionen im Potential

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\,M\omega^2\,|\vec{r}|^2.$$

Dies definiert den dreidimensionalen harmonischen Oszillator, vgl. Aufgabe 3 von Blatt 5.

(a) Stellen Sie die Radialgleichung für $u(r) = rR(r)$ auf.

(b) Der Grundzustand hat die Drehimpulsquantenzahl $l = 0$. Machen Sie sich dies plausibel (ein Beweis ist nicht gefordert; dieser könnte über den Knotensatz geführt werden). Lösen Sie die Radialgleichung für den Fall $l = 0$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

Bitte wenden

Aufgabe 3:

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator werde durch eine schwache räumlich konstante Kraft F gestört. Der resultierende Hamilton-Operator lautet

$$
\begin{aligned}
H &= H_0 + H_1, \\
H_0 &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2, \\
H_1 &= -Fx.
\end{aligned}
$$

(a) Berechnen sie mit H_1 als Störung in erster Ordnung Störungsrechnung den Eigenzustand $|n\rangle$ des Oszillators. *Hinweis*: Es könnte helfen, die Koordinate x durch Auf- und Absteigeoperatoren auszudrücken.

(b) Wie lauten die Energiekorrekturen erster und zweiter Ordnung?

(c) Lösen Sie das Eigenwertproblem *exakt* und vergleichen Sie das Ergebnis für die Energie mit (b).

(d) Verschwindet die Energiekorrektur dritter Ordnung?