# Lösungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 2

## Präsenzübungen

**Aufgabe 1:**

Klassisch ist

$$E = \frac{1}{2}\, J\omega^2 = 2\pi^2 J\nu^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2J}}\, \sqrt{E} \tag{2}$$

Korrespondenzprinzip:

$$\int_0^{E_n} \frac{dE'_n}{\nu(E'_n)} = \pi\sqrt{2J} \int_0^{E_n} \frac{dE'_n}{\sqrt{E'_n}} = 2\pi\sqrt{2J}\,\sqrt{E_n} \overset{!}{=} h(n+n_c) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{1}{2J}\, \hbar^2 (n+n_c)^2. \tag{4}$$

**Aufgabe 2:**

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \psi = -i\omega\psi, \tag{5}$$

$$\vec{\nabla}\psi = i\vec{k}\psi, \tag{6}$$

$$\nabla^2\psi = -k^2\psi. \tag{7}$$

Damit ist

$$i\hbar\, \frac{\partial}{\partial t}\, \psi = \hbar\omega\, \psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\, \psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\, \nabla^2\psi. \tag{8}$$

Die Schrödinger-Gleichung ist also erfüllt.

(a) Andere Gleichungen sind zum Beispiel

1.

$$-\hbar^2\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, \psi = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \nabla^4\psi, \tag{9}$$

denn dies ist äquivalent zu

$$-\hbar^2(-\omega^2)\psi = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 (-k^2)^2\, \psi \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \hbar^2\omega^2\psi = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 \psi, \tag{11}$$

was für die Dispersion $\hbar\omega = \hbar^2 k^2/2m$ erfüllt ist, oder

2.

$$-\hbar^2\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, \psi = -i\, \frac{\hbar^3}{2m}\, \frac{\partial}{\partial t}\, \nabla^2\psi, \tag{12}$$

oder

3.
$$i\hbar\,\psi^*\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right). \tag{13}$$

Diese nicht lineare Gleichung spielt eine Rolle, wenn man die Schrödinger-Gleichung aus einem Variationsprinzip herleiten will (vgl. Vorlesung Quantentheorie 2 und Master-Theorie-Vorlesung). Sie ist i. W. äquivalent zur Standard-Schrödinger-Gleichung.

Bem.: Man findet weitere, einfachere, Gleichungen, die $\vec{k}$ oder $\omega$ explizit enthalten. Wir haben hier aber Gleichungen gesucht, die für alle ebenen Wellen gelten und daher $\vec{k}$ und $\omega$ nicht enthalten dürfen.

(b) Es ist
$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2k^2c^2 + m^2c^4 \tag{14}$$
und
$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \tag{15}$$
also $\vec{\nabla}\psi = i\vec{k}\psi$, $\nabla^2\psi = -k^2\psi$, $\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\omega\psi$ und $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -\omega^2\psi$.

Also ist eine mögliche Gleichung
$$-\hbar^2\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi = -\hbar^2c^2\nabla^2\psi + m^2c^4\psi \tag{16}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi - c^2\nabla^2\psi + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\,\psi = 0 \tag{17}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\right)\psi = 0. \tag{18}$$

Das ist die Klein-Gordon-Gleichung der relativistischen Quantenmechanik.

## Hausaufgaben

### Aufgabe 3:

In dieser Musterlösung werden Operatoren nicht mit Zirkumflex notiert. Es ist
$$\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p} = \begin{pmatrix} x_2p_3 - x_3p_2 \\ x_3p_1 - p_3x_1 \\ x_1p_2 - x_2p_1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Wir benutzen
$$[AB,C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B,C] + [A,C]B, \tag{20}$$
$$[A,BC] = ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA = [A,B]C + B[A,C] \tag{21}$$
für beliebige lineare Operatoren $A$, $B$, $C$ (siehe Vorlesung).

Wenn $D$, $E$, $F$ Operatoren sind und $[D,E] = [D,F] = 0$, dann folgt $[D,EF] = 0$.

(a)

$$
\begin{aligned}
[L_1, L_2] &= [x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - p_3x_1] \\
&= [x_2p_3, x_3p_1] - [x_2p_3, x_1p_3] - [x_3p_2, x_3p_1] + [x_3p_2, x_1p_3] \\
&= x_2[p_3, x_3p_1] + \underbrace{[x_2, x_3p_1]}_{0} p_3 \\
&\quad - (x_2 \underbrace{[p_3, x_1p_3]}_{0} + \underbrace{[x_2, x_1p_3]}_{0} p_3) \\
&\quad - (x_3 \underbrace{[p_2, x_3p_1]}_{0} + \underbrace{[x_3, x_3p_1]}_{0} p_2) \\
&\quad + x_3 \underbrace{[p_2, x_1p_3]}_{0} + [x_3, x_1p_3]p_2 \\
&= x_2(x_3 \underbrace{[p_3, p_1]}_{0} + \underbrace{[p_3, x_3]}_{-i\hbar} p_1) + (p_3 \underbrace{[x_3, x_1]}_{0} + \underbrace{[x_3, p_3]}_{i\hbar} x_1)p_2 \\
&= i\hbar(x_1p_2 - x_2p_1) = i\hbar L_3.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Raumes erhalten wir durch Drehungen um die (111) Achse $[L_2, L_3] = i\hbar L_1$ und $[L_3, L_1] = i\hbar L_2$. Da der Kommutator außerdem antisymmetrisch ist und für zwei gleiche Operatoren verschwindet, gilt allgemein $[L_i, L_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} L_k$ mit Summenkonvention (Summation über $k$ ist impliziert).

(b) Mit dem Ergebnis aus (a) gilt

$$
\begin{aligned}
[\vec{L}^2, L_1] &= [L_1L_1 + L_2L_2 + L_3L_3, L_1] = \underbrace{[L_1^2, L_1]}_{0} + [L_2^2, L_1] + [L_3^2, L_1] \\
&= L_2 \underbrace{[L_2, L_1]}_{-i\hbar L_3} + \underbrace{[L_2, L_1]}_{-i\hbar L_3} L_2 + L_3 \underbrace{[L_3, L_1]}_{i\hbar L_2} + \underbrace{[L_3, L_1]}_{i\hbar L_2} L_3 = 0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

(c) Die Komponenten von $\vec{L} \times \vec{L}$ lauten (mit Summenkonvention)

$$\left(\vec{L} \times \vec{L}\right)_i = \epsilon_{ijk} L_j L_k, \tag{24}$$

z. B.

$$\left(\vec{L} \times \vec{L}\right)_1 = L_2L_3 - L_3L_2 \overset{\text{(a)}}{=} i\hbar\, L_1 \tag{25}$$

und analog für die übrigen Komponenten. Es gilt also allgemein

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar\,\vec{L} \tag{26}$$

Das Kreuzprodukt von $\vec{L}$ mit sich selbst verschwindet in diesem Fall nicht, weil die Komponenten von $\vec{L}$ Operatoren sind, die nicht miteinander vertauschen.

(d)

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\vec{p}^2}{2m}, x_i\right] &= \frac{1}{2m}\,[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, x_i] = \frac{1}{2m}\,[p_i^2, x_i] \\
&= \frac{1}{2m}\left(p_i \underbrace{[p_i, x_i]}_{-i\hbar} + \underbrace{[p_i, x_i]}_{-i\hbar} p_i\right) = -\frac{i\hbar}{m}\,p_i.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Was ist $[V(\vec{x}), p_i]$? Für alle Funktion $\psi(\vec{x})$ gilt

$$\begin{aligned} [V(\vec{x}), p_i]\psi(\vec{x}) &= \left\{ V(\vec{x}) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \right) V(\vec{x}) \right\} \psi(\vec{x}) \\ &= \left( -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \psi(\vec{x}). \end{aligned} \tag{28}$$

Es folgt für die Operatoren:

$$[V(\vec{x}), p_i] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{29}$$

Weiter findet man

$$[L_1, x_1] = [x_2 p_3 - p_2 x_3, x_1] = 0, \tag{30}$$

$$[L_1, x_2] = [x_2 p_3 - p_2 x_3, x_2] = -[p_2 x_3, x_2] = -p_2 \underbrace{[x_3, x_2]}_{0} - \underbrace{[p_2, x_2]}_{-i\hbar} x_3 = i\hbar\, x_3. \tag{31}$$

**Aufgabe 4:**

(a)

$$\begin{aligned} & \psi(x,0) = A\, e^{-\frac{x^2}{2b^2}} e^{ik_0 x} \\ \Rightarrow \qquad & |\psi(x,0)|^2 = A^2\, e^{-\frac{x^2}{b^2}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Aus

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{x^2}{b^2}}\, dx = A^2 b \sqrt{\pi} \tag{33}$$

folgt

$$A = \frac{1}{\pi^{1/4} b^{1/2}}. \tag{34}$$

(b)

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \frac{1}{\pi^{1/4} b^{1/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2b^2}}\, e^{ik_0 x} \\ &= \frac{1}{\pi^{1/4} b^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[ -\frac{x^2}{2b^2} - i(k-k_0)x \right] \\ &= \sqrt{2}\, \pi^{1/4} b^{1/2}\, e^{-\frac{1}{2}(k-k_0)^2 b^2}. \end{aligned} \tag{35}$$

(c)

$$e^{-1} = e^{-(k-k_0)^2 b^2} \tag{36}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = (k-k_0)^2 b^2 \tag{37}$$

$$\Rightarrow \qquad |k-k_0| = \frac{1}{b} \tag{38}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta k = \frac{2}{b} \tag{39}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{\psi}(k)\,e^{i(kx-\omega(k)t)} \\
&= \frac{b^{1/2}}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{b^2}{2}(k-k_0)^2} e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)} \\
&= \frac{b^{1/2}}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}}\, e^{-\frac{b^2}{2}k_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp\left(k^2\left[-\frac{b^2}{2} - i\frac{\hbar}{2m}t\right] + k\,(b^2k_0 + ix)\right) \\
&= \frac{b^{1/2}}{\sqrt{2}\,\pi^{1/4}}\, \frac{e^{-\frac{b^2}{2}k_0^2}}{\sqrt{\frac{b^2}{2} + i\frac{\hbar}{2m}t}}\, \exp\left(\frac{(b^2k_0+ix)^2}{4\left(\frac{b^2}{2} + i\frac{\hbar}{2m}t\right)}\right) \\
&= \frac{b^{1/2}}{\pi^{1/4}}\, \frac{e^{-\frac{b^2}{2}k_0^2}}{\sqrt{b^2 + i\frac{\hbar}{m}t}}\, \exp\left(\frac{(b^2k_0+ix)^2}{2\left(b^2 + i\frac{\hbar}{m}t\right)}\right). \qquad (40)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
|\psi(x,t)|^2 &= \frac{b}{\pi^{1/2}}\, e^{-b^2k_0^2}\, \frac{1}{\left|b^2 + \frac{i\hbar}{m}t\right|}\, \exp\left(\frac{(b^2k_0+ix)^2}{2\left(b^2 + i\frac{\hbar}{m}t\right)} + \frac{(b^2k_0-ix)^2}{2\left(b^2 - i\frac{\hbar}{m}t\right)}\right) \\
&= \frac{b}{\pi^{1/2}}\, e^{-b^2k_0^2}\, \frac{1}{\left|b^2 + \frac{i\hbar}{m}t\right|}\, \exp\left(\mathrm{Re}\,\frac{(b^2k_0+ix)^2}{b^2 + i\frac{\hbar}{m}t}\right), \qquad (41)
\end{aligned}$$

hierin ist

$$\left|b^2 + \frac{i\hbar}{m}t\right| = \sqrt{b^4 + \frac{\hbar^2}{m^2}\,t^2} \qquad (42)$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{(b^2k_0+ix)^2}{b^2 + i\,\frac{\hbar}{m}\,t} &= \frac{(b^4k_0^2 - x^2 + 2ib^2k_0x)(b^2 - i\,\frac{\hbar}{m}\,t)}{b^4 + \frac{\hbar^2}{m^2}\,t^2} \\
&= \frac{b^6k_0^2 - b^2x^2 + 2b^2k_0x\,\frac{\hbar}{m}\,t}{b^4 + \frac{\hbar^2}{m^2}\,t^2} + i\,\frac{2b^4k_0x - b^4k_0^2\,\frac{\hbar}{m}\,t + x^2\,\frac{\hbar}{m}\,t}{b^4 + \frac{\hbar^2}{m^2}\,t^2}. \qquad (43)
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{b}{\pi^{1/2}}\, \frac{1}{\sqrt{b^4 + \frac{\hbar^2}{m^2}\,t^2}}\, \exp\left(-\frac{b^2\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}\,t\right)^2}{b^4 + \frac{\hbar^2}{m^2}\,t^2}\right). \qquad (44)$$

Mit

$$\Delta b(t) = \frac{1}{b}\sqrt{b^4 + \left(\frac{\hbar}{m}\,t\right)^2} \qquad (45)$$

folgt

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Delta b(t)}\, \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}\,t\right)^2}{\Delta b(t)^2}\right). \qquad (46)$$

Der Schwerpunkt des Wellenpakets liegt bei $x_0 = \frac{\hbar k_0}{m}\,t$, bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit $p/m = v$. Er verhält sich damit wie der Ort eines klassischen freien Teilchens (Newton-Axiome!). Die Breite des Wellenpakets ändert sich ebenfalls mit der Zeit und erreicht im Beispiel bei $t = 0$ gerade ihr Minimum. Für $t \to \pm\infty$ verbreitert sich das Wellenpaket linear in der Zeit. Das Wellenpaket fließt auseinander, weil es Komponenten mit unterschiedlichen Impulsen enthält. Das Auseinanderfließen für $t \to -\infty$ erscheint unphysikalisch; in einem realen Experiment würde das Wellenpaket zu einer endlichen Zeit mit einer gewissen Breite präpariert.