TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 9

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Der allgemeinste Hamilton-Operator für ein Spin-1/2-System lautet, in der Standardbasis,

$$\hat{H} = h_0\,\mathbb{1} + h_x\sigma_x + h_y\sigma_y + h_z\sigma_z \equiv h_0\,\mathbb{1} + \vec{h}\cdot\vec{\sigma},$$

wobei h_0, h_x, h_y, h_z reelle Zahlen sind (wieso müssen sie reell sein?). Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2:

Sei $\hat{n}$ ein dreikomponentiger Einheitsvektor. In Kugelkoordinaten können wir schreiben

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Zustände

$$|\vartheta,\varphi\rangle := \cos\frac{\vartheta}{2}\,|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\,|\downarrow\rangle$$

im zweidimensionalen Hilbert-Raum eines Spins der Länge 1/2. Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{S}_i\rangle$, $i = x, y, z$ der Spin-Komponenten in den Zuständen $|\vartheta,\varphi\rangle$.

Hausaufgaben (zu besprechen ab 19.06.2023)

Aufgabe 3:

Für einen Drehimpuls der Länge j lautet der Drehoperator um die i-Achse, $i = x, y, z$,

$$\hat{D}_\alpha(\hat{r}_i) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\hat{J}_i\,\alpha\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\hat{D}_{2\pi}(\hat{r}_i) = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{für ganzzahliges } j, \\ -\mathbb{1} & \text{für halbzahliges } j. \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen ist es dafür hinreichend, die Behauptung für die Drehung um die z-Achse zu zeigen. *Hinweis*: $\hat{J}_z$ ist in der Standardbasis diagonal.

(b) Der antiunitäre Zeitumkehroperator auf dem Hilbert-Raum des Drehimpulses lautet

$$\hat{T} = \hat{D}_\pi(\hat{y})\,\hat{K},$$

wobei $\hat{K}$ die Komplexkonjugation bezüglich der Standardbasis ist ($\hat{K}$ konjugiert alle Matrixelemente und Vektorkomponenten, wenn die Standardbasis verwendet wird, lässt die Basisvektoren selbst aber invariant). Zeigen Sie mit Hilfe der in (a) bewiesenen Aussage, dass gilt

$$\hat{T}^2 = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{für ganzzahliges } j, \\ -\mathbb{1} & \text{für halbzahliges } j. \end{cases}$$

Bitte wenden

Aufgabe 4:

Die Symmetriegruppe $\mathcal{G}$ eines Spins 1/2 werde durch die Drehungen $\hat{D}_\pi(\hat{x})$ und $\hat{D}_\pi(\hat{y})$ generiert. Das bedeutet, dass $\mathcal{G}$ nur Elemente enthält, die durch beliebige Produkte dieser *Generatoren* erzeugt werden. Konstruieren Sie die gesamte Gruppe $\mathcal{G}$.

Hinweis: Für Drehungen im Hilbert-Raum für einen Spin 1/2 gilt

$$\hat{D}_\alpha(\hat{n}) = \cos\frac{\alpha}{2}\,\mathbb{1} - i\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\hat{n}.$$

Aufgabe 5:

Für ein System bestehend aus zwei Drehimpulsen der Längen j_1 und j_2 seien $|j_1 j_2, JM\rangle$ die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{\vec{j}}_1^{\,2}$, $\hat{\vec{j}}_2^{\,2}$, $\hat{\vec{J}}^{\,2}$ und $\hat{J}_z$, wobei $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{j}}_1 + \hat{\vec{j}}_2$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $|j_1 j_2, JM\rangle$ auch Eigenzustände von $\hat{\vec{j}}_1 \cdot \hat{\vec{j}}_2$ sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Der Hamilton-Operator des Systems laute

$$\hat{H} = -\eta\,\hat{\vec{j}}_1\cdot\hat{\vec{j}}_2 - B\,(\hat{j}_{1z} + \hat{j}_{2z}).$$

Zeigen Sie, dass $|j_1 j_2, JM\rangle$ Eigenzustände von $\hat{H}$ sind und geben Sie die Eigenenergien E_{JM} an.

(c) Es sei nun speziell $j_1 = j_2 = 1/2$, $\eta < 0$ (antiferromagnetische Kopplung) und o. B. d. A. $B \geq 0$. Skizzieren Sie die Energien E_{JM} als Funktionen von B. Welcher der Zustände $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, JM\rangle$ ist der Grundzustand, in Abhängigkeit von B? Interpretieren Sie das Ergebnis.