TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 8

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Potential $V(\vec{r})$, das eine homogene Funktion vom Grad n sein möge:

$$V(\alpha\vec{r}) = \alpha^n V(\vec{r}) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Betrachten Sie die Observable

$$A = \frac{1}{2}\,(\vec{r}\cdot\vec{p} + \vec{p}\cdot\vec{r}),$$

die uns zum quantenmechanischen Analogon des klassischen Virialsatzes führen wird.

(a) Verifizieren Sie die Beziehungen

$$A = \vec{r}\cdot\vec{p} + \frac{3}{2}\,\frac{\hbar}{i},$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i\,\frac{\partial V}{\partial x_i} = nV.$$

(b) Beweisen Sie den Virialsatz im Heisenberg-Bild:

$$\frac{d}{dt}A_H = 2T_H - nV_H.$$

(c) Das System befinde sich nun in einem Eigenzustand $|\psi\rangle$ von H. Zeigen Sie, dass dann

$$2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$$

gilt. Das ist dieselbe Beziehung wie für die Mittelwerte der klassischen Bewegung.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie zwei harmonische Oszillatoren mit gleichen Massen der Teilchen, aber unterschiedlichen Schwingungsfrequenzen ω und ω'. Alle Größen, die den ersten bzw. zweiten Oszillator beschreiben, werden ohne bzw. mit Strich geschrieben.

(a) Skizzieren Sie die Potentiale, die Lage der Grundzustandsenergien in den Potentialen und die Grundzustands-Eigenfunktionen der beiden Oszillatoren. Sie können o. B. d. A. $\omega' > \omega$ annehmen.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Absteigeoperator $\hat{a}'$ für den zweiten Oszillator als

$$\hat{a}' = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left(\hat{a} - \gamma\,\hat{a}^\dagger\right)$$

schreiben lässt. Was ergibt sich für γ?

Bitte wenden

Hausaufgaben (zu besprechen ab 12.06.2023)

Aufgabe 3:

Von den Eigenzuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators besitzt nur der Grundzustand ($n = 0$) minimale Unschärfe, $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, für die übrigen ist $\Delta x \Delta p = (2n{+}1)\,\hbar/2$. Es gibt aber weitere Zustände, die die Unschärfe minimieren, die sogenannten kohärenten Zustände. Diese sind, wie alle Zustände im Hilbert-Raum, Linearkombinationen der Eigenzustände. Es stellt sich heraus, dass die kohärenten Zustände Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$ sind:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{1}$$

hier ist α eine beliebige komplexe Zahl. *Bemerkung*: Der Aufsteigeoperator $\hat{a}^\dagger$ hat keine Eigenzustände.

(a) Bestimmen Sie $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ im Zustand $|\alpha\rangle$. *Hinweis*: Stellen Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ dar und benutzen Sie Gl. (1).

(b) Bestimmen Sie Δx und Δp und zeigen Sie, dass $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass man die kohärenten Zustände gemäß

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle \qquad \text{mit } c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,c_0$$

durch die Eigenzustände $|n\rangle = (1/\sqrt{n!})\,(\hat{a}^\dagger)^n\,|0\rangle$ darstellen kann.

(d) Zeigen Sie durch Normierung von $|\alpha\rangle$, dass gilt

$$c_0 = e^{-|\alpha|^2/2}.$$

(e) Untersuchen Sie die Zeitentwicklung der kohärenten Zustände. Die Zeitentwicklung der Eigenzustände ist natürlich

$$|n(t)\rangle = e^{-iE_n t/\hbar}\,|n\rangle.$$

Zeigen Sie, dass $|\alpha(t)\rangle$ Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$ bleiben, sich aber die Eigenwerte entwickeln wie

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha.$$

(Also bleibt ein kohärenter Zustand ein solcher.) Was folgt daraus für $\langle x\rangle$ als Funktion der Zeit?

(f) Ist der Grundzustand $|0\rangle$ ein kohärenter Zustand? Wenn ja, was ist der zugehörige Eigenwert von $\hat{a}$?

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellung der Komponenten $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ für einen Drehimpuls der Länge $j = 2$ in der Eigenbasis $\{|j,m\rangle\}$ zu $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_z$. Überprüfen Sie mit Hilfe diese Matrixdarstellung, dass $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\,\hat{J}_z$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a) die Matrixdarstellung von $\hat{\vec{J}}^2$ und überzeugen Sie sich, dass $\hat{\vec{J}}^2$ mit den Komponenten vertauscht (keine Rechnung erforderlich).

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\hat{J}_\pm$.