TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Lösungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 11

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

(a) Der Hamiltonian lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + cx^4 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + cx^4. \tag{1}$$

Wir verwenden den Ansatz

$$\psi_\alpha^0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right). \tag{2}$$

Der zweite Ableitung ist

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\,\psi_\alpha^0(x) &= -\frac{d}{dx}\,\frac{x}{\alpha^2}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\\ &= -\frac{1}{\alpha^2}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) + \frac{x^2}{\alpha^4}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\langle\psi_\alpha^0|H|\psi_\alpha^0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + cx^4\right]\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\\ &= \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}_{=\alpha\Gamma(1/2)} - \frac{\hbar^2}{2m\alpha^4}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x^2\,\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}_{=\alpha^3\Gamma(3/2)}\\ &\quad + c\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x^4\,\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}_{=\alpha^5\Gamma(5/2)}\end{aligned} \tag{4}$$

und

$$\langle\psi_\alpha^0|\psi_\alpha^0\rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}_{=\alpha\Gamma(1/2)}. \tag{5}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\langle E_0\rangle_\alpha &= \frac{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}\,\Gamma(1/2) - \frac{\hbar^2}{2m\alpha}\,\Gamma(3/2) + c\alpha^5\,\Gamma(5/2)}{\alpha\Gamma(1/2)}\\ &= \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2}\,\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} + c\alpha^4\,\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}\\ &= \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{4m\alpha^2} + \frac{3}{4}\,c\alpha^4\\ &= \frac{\hbar^2}{4m\alpha^2} + \frac{3}{4}\,c\alpha^4.\end{aligned} \tag{6}$$

Minimierung ergibt

$$\frac{d}{d\alpha}\,\langle E_0\rangle_\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m\alpha^3} + 3c\alpha^3 \overset{!}{=} 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^6 = \frac{\hbar^2}{6mc} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \left(\frac{\hbar^2}{6mc}\right)^{1/6}. \tag{9}$$

Daraus ergibt sich die variationelle Lösung für $\psi^0_\alpha(x)$. Die Energie ist

$$\langle E_0\rangle_\alpha = \frac{\hbar^2}{4m\alpha^2} + \frac{3}{4}\,c\alpha^4 = \left(\frac{3\hbar^4 c}{4m^2}\right)^{1/3} + \frac{1}{4}\,\left(\frac{3\hbar^4 c}{4m^2}\right)^{1/3} = \frac{5}{4}\,\left(\frac{3\hbar^4 c}{4m^2}\right)^{1/3}. \tag{10}$$

(b) Der Grundzustand und der erste angeregte Zustand müssen orthogonal sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^1(x)\,\psi^0(x) = 0 \tag{11}$$

(das Skalarprodukt enthält keine Komplexkonjugation, weil wir reelle Ansätze verwenden). Die Grundzustandswellenfunktion ist gerade. Alle ungeraden Funktionen sind orthogonal zum Grundzustand. Wir verwenden

$$\psi^1_\gamma(x) = x\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\gamma^2}\right). \tag{12}$$

Analog zu Teil (a) ist

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\psi^1_\gamma(x) = -\frac{3x}{\gamma^2}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\gamma^2}\right) + \frac{x^3}{\gamma^4}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\gamma^2}\right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi^1_\gamma|H|\psi^1_\gamma\rangle &= \frac{3\hbar^2}{2m\gamma^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x^2\,\exp\left(-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)}_{=\gamma^3\Gamma(3/2)} - \frac{\hbar^2}{2m\gamma^4}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x^4\,\exp\left(-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)}_{=\gamma^5\Gamma(5/2)} \\ &\quad + c\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x^6\,\exp\left(-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)}_{=\gamma^7\Gamma(7/2)},\end{aligned} \tag{14}$$

$$\langle\psi^1_\gamma|\psi^1_\gamma\rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x^2\,\exp\left(-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)}_{=\gamma^3\Gamma(3/2)}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\langle E_1\rangle_\gamma &= \frac{3\hbar^2}{2m\gamma^2} - \frac{3\hbar^2}{4m\gamma^2} + \frac{15}{4}\,c\gamma^4 \\ &= \frac{3\hbar^2}{4m\gamma^2} + \frac{15}{4}\,c\gamma^4.\end{aligned} \tag{16}$$

Es folgt

$$\frac{d}{d\gamma}\,\langle E_1\rangle_\gamma = -\frac{3\hbar^2}{2m\gamma^3} + 15c\gamma^3 \overset{!}{=} 0 \tag{17}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^6 = \frac{\hbar^2}{10mc} \tag{18}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \left(\frac{\hbar^2}{10mc}\right)^{1/6}. \tag{19}$$

Daraus ergibt sich die variationelle Lösung für $\psi^1_\gamma(x)$. Die Energie ist

$$\langle E_1\rangle_\gamma = \frac{9}{4}\,\left(\frac{5\hbar^4 c}{4m^2}\right)^{1/3} = \frac{9}{4}\,\left(\frac{5}{3}\right)^{1/3}\langle E_0\rangle_\alpha = \frac{3^{5/3}}{5^{2/3}}\,\langle E_0\rangle_\alpha \approx 2{,}134\,\langle E_0\rangle_\alpha. \tag{20}$$

(c) $\psi_\alpha^0(x)$ wäre ein sehr guter Ansatz für den harmonischen Oszillator mit $V \sim x^2$; in diesem Fall erhält man mittels des Ritzschen Verfahrens die *exakte* Lösung. Aber das hier betrachtete Potential $V \sim x^4$ wächst für große $|x|$ viel schneller an. Daher erwarten wir, dass die exakte Lösung schneller abfällt als für den harmonischen Oszillator. Um die funktionale Form für große $|x|$ zu bestimmen, lösen wir die Schrödinger-Gleichung in diesem Limes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\,\psi(x) + cx^4\psi(x) = E\psi(x) \tag{21}$$

wird für große x zu

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\,\psi(x) \approx cx^4\psi(x). \tag{22}$$

Es ist

$$\frac{d^2}{dx^2}\,e^{-ax^n} = \frac{d}{dx}\,(-nax^{n-1})\,e^{-ax^n} = -n(n-1)ax^{n-2}\,e^{-ax^n} + n^2a^2x^{2n-2}\,e^{-ax^n} \cong n^2a^2x^{2n-2}\,e^{-ax^n}. \tag{23}$$

Für die asymptotische Lösung muss also $2n-2=4$ gelten, d. h. $n=3$.

Wir schließen, dass sich ein guter Variationsansatz für große $|x|$ verhalten sollte wie $e^{-a|x|^3}$. Ein vernünftiger Ansatz ist daher

$$\psi_\alpha^0(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp\left(-\frac{|x|^3}{2\alpha^3}\right), \tag{24}$$

wobei $1/\sqrt{N}$ eine Normierungskonstante ist.

(d) Bestimmung der Normierungskonstanten $1/\sqrt{N}$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi_\alpha^0|^2 = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} dx\exp\left(-\frac{|x|^3}{\alpha^3}\right) = \frac{1}{N}\,\frac{2}{3}\,\alpha\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \tag{25}$$

es folgt

$$N = \frac{2}{3}\,\alpha\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right). \tag{26}$$

Die Ableitung von $\psi_\alpha^0(x)$ für $x>0$ ist

$$\frac{d\psi_\alpha^0(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{N}}\,\exp\left(-\frac{x^3}{2\alpha^3}\right)\frac{3x^2}{2\alpha^3}\,. \tag{27}$$

Die Ableitung für $x<0$ ist dagegen

$$\frac{d\psi_\alpha^0(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\exp\left(\frac{x^3}{2\alpha^3}\right)\frac{3x^2}{2\alpha^3}\,. \tag{28}$$

Beachte, dass die Ableitung bei $x=0$ stetig fortgesetzt werden kann. Die zweite Ableitung von $\psi_\alpha^0(x)$ für $x>0$ ist

$$\frac{d\psi_\alpha^0(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\exp\left(-\frac{x^3}{2\alpha^3}\right)\frac{9x^4}{4\alpha^6} - \exp\left(-\frac{x^3}{2\alpha^3}\right)\frac{3x}{\alpha^3}\right]\,. \tag{29}$$

Die zweite Ableitung für $x<0$ ist

$$\frac{d^2\psi_\alpha^0(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\exp\left(\frac{x^3}{2\alpha^3}\right)\frac{9x^4}{4\alpha^6} + \exp\left(\frac{x^3}{2\alpha^3}\right)\frac{3x}{\alpha^3}\right]\,. \tag{30}$$

Die zweite Ableitung für alle x lautet

$$\frac{d^2\psi_\alpha^0(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\exp\left(\frac{|x|^3}{2\alpha^3}\right)\frac{9x^4}{4\alpha^6} - \exp\left(\frac{|x|^3}{2\alpha^3}\right)\frac{3|x|}{\alpha^3}\right]\,. \tag{31}$$

Die Erwartungswert der Energie ist

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_\alpha^0(x)\,\frac{d^2\psi_\alpha^0(x)}{dx^2} + c\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4\, \psi_\alpha^0(x) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{|x|^3}{\alpha^3}\right)\frac{9x^4}{4\alpha^6} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{3|x|}{\alpha^3}\,\exp\left(-\frac{|x|^3}{\alpha^3}\right) + \frac{c}{N}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 \exp\left(-\frac{|x|^3}{\alpha^3}\right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{1}{N}\int_0^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{x^3}{\alpha^3}\right)\frac{9x^4}{4\alpha^6} + \frac{\hbar^2}{m}\,\frac{1}{N}\int_0^{\infty} dx\, \frac{3x}{\alpha^3}\,\exp\left(-\frac{x^3}{\alpha^3}\right) + \frac{2c}{N}\int_0^{\infty} dx\, x^4 \exp\left(-\frac{x^3}{\alpha^3}\right).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Mit dem Hinweis aus dem Aufgabenblatt erhält man

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{1}{N}\,\frac{9}{4\alpha^6}\,\frac{1}{3}\,\alpha^5\,\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{\hbar^2}{m}\,\frac{1}{N}\,\frac{3}{\alpha^3}\,\frac{1}{3}\,\alpha^2\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2c}{N}\,\frac{1}{3}\,\alpha^5\,\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{9}{8\alpha^2}\,\frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(1/3)} + \frac{\hbar^2}{m}\,\frac{3}{2\alpha^2}\,\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} + c\,\alpha^4\,\frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(1/3)} \\
&= -\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{3}{4\alpha^2}\,\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} + \frac{\hbar^2}{m}\,\frac{3}{2\alpha^2}\,\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} + c\,\frac{2\alpha^4}{3}\,\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \\
&= \left(\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{3}{4\alpha^2} + c\,\frac{2\alpha^4}{3}\right)\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Das Minimum erhalten wir aus

$$
0 = \frac{dE}{d\alpha} = \left(-\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{3}{2\alpha^3} + c\,\frac{8\alpha^3}{3}\right)\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)},
\tag{34}
$$

woraus folgt

$$
\alpha^6 = \frac{9\hbar^2}{16mc}.
\tag{35}
$$

Der Variationsparameter α muss positiv sein, damit ψ_α^0 quadratintegrabel ist. Die positive Lösung ist

$$
\alpha = \sqrt[6]{\frac{9\hbar^2}{16mc}} = \frac{(3\hbar)^{1/3}}{2^{2/3}(mc)^{1/6}}.
\tag{36}
$$

Einsetzen in Gl. (33) ergibt für die variationelle Näherung der Grundzustandsenergie

$$
\langle E_0\rangle_\alpha = \frac{(3\hbar)^{4/3}c^{1/3}}{2^{5/3}m^{2/3}}.
\tag{37}
$$

Vergleich mit der Näherung aus Teil (a), Gl. (10), zeigt

$$
\frac{\langle E_0\rangle_\alpha\big|_{(\mathrm{d})}}{\langle E_0\rangle_\alpha\big|_{(\mathrm{a})}} = \frac{6}{5}.
\tag{38}
$$

Das ist etwas überraschend: Obwohl der Ansatz in (d) das korrekte asymptotische Verhalten für große $|x|$ zeigt, der Ansatz in (a) aber nicht, ist die Näherung für die Grundzustandsenergie aus (d) schlechter. Dies ist evtl. darauf zurückzuführen, dass der Ansatz in (d) bei $x = 0$ nicht analytisch ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 2:

(a) Der Hamilton-Operator mit Zentral-Potential $V(r)$ ist

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2Mr^2}\hat{\vec{L}}^2 + V(r). \tag{39}$$

Die Schrödinger-Gleichung lautet

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2Mr^2}\hat{\vec{L}}^2 + V(r)\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \tag{40}$$

Der Separationsansatz

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\,Y(\theta,\varphi) \tag{41}$$

führt auf die Radialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}R(r) + V(r)R(r) = ER(r). \tag{42}$$

Der Funktion $u(r)$ ist definiert als $u(r) = rR(r)$. Die Radialgleichung für $u(r)$ lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}u(r) + V(r)u(r) = Eu(r). \tag{43}$$

Die Randbedigung für kleine r ist $u(0) = 0$.

(b) Es ist zu vermuten, dass der Grundzustand die Drehimpulsquantenzahl $l = 0$ hat, weil der Zentrifugalterm im effektiven Potential nicht negativ ist und echt positiv für $l > 0$. Daher werden Zustände mit $l > 0$ generisch höhere Energien haben als für $l = 0$.

Die Radialgleichung mit $l = 0$ und $V(r) = \frac{1}{2}M\omega^2r^2$ lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{2}M\omega^2r^2 = Eu(r) \tag{44}$$

mit der Randbedingung $u(0) = 0$. Die Gleichung ist äquivalent zur Schrödinger-Gleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator, aber die Randbedingung ist anders! Man könnte nun sofort sehen, dass die ungeraden Lösungen ($n = 1, 3, 5, \ldots$) für den eindimensionalen harmonischen Oszillator diese Randbedingung erfüllen, und dass daher die Lösung mit $n = 1$ die energetisch niedrigste ist. Ausführlicher: Wir definieren eine dimensionslose Koordinate $\xi := \sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}\,r$. Die Radialgleichung wird damit zu

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{M\omega}{\hbar}\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{2}M\omega^2\frac{\hbar}{M\omega}\xi^2u = Eu \tag{45}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)u \quad \text{mit} \quad K := \frac{2E}{\hbar\omega} \tag{46}$$

mit $u(\xi = 0) = 0$.

Die asymptotische Form für große ξ lautet

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} \approx \xi^2 u, \tag{47}$$

mit der asymptotischen Lösung

$$u = e^{-\xi^2/2} \qquad \left(\Rightarrow \frac{d^2u}{d\xi^2} = \xi^2u - u \cong \xi^2u\right). \tag{48}$$

Ansatz:

$$u(\xi) = f(\xi)\, e^{-\xi^2/2} \tag{49}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\xi^2} = \left[f''(\xi) - 2\xi f'(\xi) + \xi^2 f(\xi) - f(\xi)\right] e^{-\xi^2/2} \stackrel{!}{=} (\xi^2 - K)\, f(\xi)\, e^{-\xi^2/2} \tag{50}$$

$$\Rightarrow \quad f''(\xi) - 2\xi f'(\xi) + (K-1) f(\xi) = 0. \tag{51}$$

Die Randbedingung für $f(\xi)$ folgt aus derjenigen für $u(\xi)$ zu $f(0) = 0$. Daher ist eine konstante Funktion f keine mögliche Lösung.

Ansatz (durch Raten aufgrund der Kenntnis des eindimensionalen harmonischen Oszillators):

$$f(\xi) = c\xi \tag{52}$$

$$\Rightarrow \quad f''(\xi) - 2\xi f'(\xi) + (K-1) f(\xi) = 0 - 2c\xi + (K-1)c\xi \stackrel{!}{=} 0 \tag{53}$$

$$\Rightarrow \quad K = 3. \tag{54}$$

Die resultierende Radialfunktion $u \sim \xi e^{-\xi^2/2}$ hat keine Nullstellen im Inneren des (halboffenen) Intervalls und beschreibt daher sicher den Zustand niedrigster Energie im $l = 0$ Sektor. Die gesamte Wellenfunktion ist

$$\psi(\vec{r}) \sim \frac{r}{r}\, \exp\left(-\frac{\hbar}{2M\omega}\, r^2\right) = \exp\left(-\frac{\hbar}{2M\omega}\, r^2\right) \tag{55}$$

und die Eigenenergie ist

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}\, K = \frac{3}{2}\, \hbar\omega. \tag{56}$$

Dies stimmt mit Aufgabe 3 von Blatt 5 überein.

Aufgabe 3:

(a) Es ist

$$|n\rangle \cong |n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} |m^{(0)}\rangle\, \frac{\langle m^{(0)}|H_1|n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \tag{57}$$

$$E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = \hbar\omega(n - m). \tag{58}$$

Wir schreiben

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, (a + a^\dagger). \tag{59}$$

Dann ist

$$\langle m^{(0)}|x|n^{(0)}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \left(\sqrt{n}\, \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1}\, \delta_{m,n+1}\right) \tag{60}$$

$$\Rightarrow \quad |n\rangle \cong |n^{(0)}\rangle - \frac{F}{\sqrt{2\hbar m\omega^3}}\, \left(\sqrt{n}\, |(n-1)^{(0)}\rangle - \sqrt{n+1}\, |(n+1)^{(0)}\rangle\right). \tag{61}$$

Der Term proportional zu $\sqrt{n}\, |(n-1)^{(0)}\rangle$ verschwindet für den Grundzustand, $n = 0$.

(b) Es ist

$$E_n^{(1)} = -F\, \langle n^{(0)}|x|n^{(0)}\rangle = 0, \tag{62}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m^{(0)}|H_1|n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \tag{63}$$

wobei

$$|\langle m^{(0)}|H_1|n^{(0)}\rangle|^2 = F^2\,\frac{\hbar}{2m\omega}\,[n\delta_{m,n-1} + (n+1)\delta_{m,n+1}] \tag{64}$$

$$\Rightarrow \quad E_n^{(2)} = \frac{F^2}{2m\omega^2}\,[n-(n+1)] = -\frac{F^2}{2m\omega^2}. \tag{65}$$

(c) Exakte Lösung: Es ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2\left(x^2 - \frac{2F}{m\omega^2}x\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2\left(x - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}. \tag{66}$$

Substitution:

$$\bar{x} = x - \frac{F}{m\omega^2}, \tag{67}$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} = \frac{d}{dx} \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = p \tag{68}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2\bar{x}^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}. \tag{69}$$

Die exakten Eigenenergien sind

$$E_n^{\mathrm{ex}} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2m\omega^2} = E_n^{(0)} + E_n^{(2)}. \tag{70}$$

Die zweite Ordnung der Störungstheorie ist bereits exakt!

(d) Es ist

$$E_n^{(3)} = \langle n^{(0)}|H_1|n^{(2)}\rangle \tag{71}$$

$$\Rightarrow \quad E_n^{(3)} = \sum_{m\neq n}\sum_{q\neq n}\frac{\langle n^{(0)}|H_1|m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|H_1|q^{(0)}\rangle\langle q^{(0)}|H_1|n^{(0)}\rangle}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})(E_n^{(0)} - E_q^{(0)})}. \tag{72}$$

Der Zähler besteht jeweils aus drei Faktoren. Hier ist $\langle n^{(0)}|H_1|m^{(0)}\rangle$ höchstens dann von Null verschieden, wenn $|n-m| = 1$ gilt. Analog sind die anderen Faktoren höchstens dann von Null verschieden, wenn $|m-q| = 1$ bzw. $|q-n| = 1$ gilt. Das Produkt ist höchstens dann von Null verschieden, wenn alle drei Faktoren nicht Null sind. Das ist aber nicht möglich, da m, n, q paarweise den Abstand 1 haben müssten. Also verschwindet jeder Term in der Doppelsumme und damit ist $E_n^{(3)} = 0$.