TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Lösungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm — Blatt 13

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

(a) *Hermitizität:*

$$\hat{\rho}^\dagger = \frac{\mathbb{1}^\dagger + (\vec{P}\cdot\hat{\vec{J}})^\dagger/\hbar}{2j+1} = \frac{\mathbb{1} + \vec{P}\cdot\hat{\vec{J}}/\hbar}{2j+1} = \hat{\rho}. \tag{1}$$

Spur ist 1:

$$\mathrm{Sp}\,\hat{\rho} = \frac{1}{2j+1}\left(\mathrm{Sp}\,\mathbb{1} + \frac{1}{\hbar}\,\vec{P}\cdot\mathrm{Sp}\hat{\vec{J}}\right). \tag{2}$$

Nun ist $\mathrm{Sp}\,\hat{J}_x = \mathrm{Sp}\,\hat{J}_y = 0$, da die Matrixdarstellungen von $\hat{J}_x$ und $\hat{J}_y$ in der Standardbasis nur Nullen in der Diagonalen haben. Außerdem ist auch

$$\mathrm{Sp}\,\hat{J}_z = \hbar\sum_{m=-j}^{j} m = 0. \tag{3}$$

Es folgt

$$\mathrm{Sp}\,\hat{\rho} = \frac{1}{2j+1}\,(2j+1+0) = 1. \tag{4}$$

Positivität: Aufgrund des Hinweises betrachten wir

$$\hat{\rho} = \frac{\mathbb{1} + P\hat{J}_z/\hbar}{2j+1}. \tag{5}$$

Die Eigenzustände $|j,m\rangle$ von $\hat{J}_z$ sind auch Eigenzustände von $\hat{\rho}$ mit den Eigenwerten

$$w_m = \frac{1+Pm}{2j+1}, \quad m = -j,\ldots,j. \tag{6}$$

Es muss gelten $w_m \geq 0$ für alle m, insbesondere für den minimalen Wert $m=-j$, also

$$w_{-j} = \frac{1-Pj}{2j+1} \geq 0 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P \leq \frac{1}{j}. \tag{8}$$

Der Betrag des (Polarisations-) Vektors $\vec{P}$ muss also kleiner oder gleich $1/j$ sein, damit $\hat{\rho}$ ein zulässiger Dichteoperator ist.

(b) Ein reiner Zustand erfüllt $\operatorname{Sp}\hat{\rho}^2 = 1$. Wegen des Hinweises zu (a) betrachten wir

$$\hat{\rho}^2 = \frac{\mathbb{1} + 2P\hat{J}_z/\hbar + P^2\hat{J}_z^2/\hbar^2}{(2j+1)^2} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \operatorname{Sp}\hat{\rho}^2 &= \frac{1}{(2j+1)^2}\left(\operatorname{Sp}\mathbb{1} + \frac{2P}{\hbar}\operatorname{Sp}\hat{J}_z + \frac{P^2}{\hbar^2}\operatorname{Sp}\hat{J}_z^2\right) \\
&= \frac{1}{(2j+1)^2}\left(2j+1+0+P^2\sum_{m=-j}^{j} m^2\right) \\
&= \frac{2j+1+\frac{P^2}{3}\,j(j+1)(2j+1)}{(2j+1)^2} \\
&= \frac{1+\frac{P^2}{3}\,j(j+1)}{2j+1}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Für einen reinen Zustand muss dies gleich 1 sein. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\cancel{1} + \frac{P^2}{3}\,j(j+1) = 2j + \cancel{1} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P^2 = \frac{6}{j+1} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P = \sqrt{\frac{6}{j+1}}. \tag{13}$$

Also beschreibt $\hat{\rho}$ einen reinen Zustand genau dann, wenn $P = \sqrt{\frac{6}{j+1}}$. Aber $\hat{\rho}$ ist nach Teil (a) überhaupt nur ein erlaubter Dichteoperator, wenn $P \leq 1/j$. Ein reiner Zustand erfüllt dies, wenn

$$\sqrt{\frac{6}{j+1}} \leq \frac{1}{j} \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{6}{j+1} \leq \frac{1}{j^2} \qquad \Big|\ \text{da } j > 0 \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6j^2 \leq j+1 \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow \qquad j^2 - \frac{j}{6} - \frac{1}{6} \leq 0. \tag{17}$$

Diese Ungleichung ist für große j verletzt. Gleichheit gilt für

$$\begin{aligned}
j &= \frac{1}{12} + \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{6}} \qquad \Big|\ \text{negative Lösung irrelevant} \\
&= \frac{1}{12} + \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Also kann nur für $j = 1/2$ ein *reiner* Zustand die gegebene Form des Dichteoperators haben. Dann ist

$$P = \sqrt{\frac{6}{\frac{1}{2}+1}} = \sqrt{\frac{6}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2. \tag{19}$$

Aufgabe 2:

(a) Wir benutzen des Eigenbasis von $\hat{S}_z$. Es sei also

$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle \tag{20}$$

und wir schreiben

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Wir zerlegen den beliebigen Zustand $|\varphi\rangle$ in Eigenzustände von $\hat{S}_z$:

$$|\varphi\rangle = c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} c_\uparrow \\ c_\downarrow \end{pmatrix} \tag{23}$$

mit $|c_\uparrow|^2 + |c_\downarrow|^2 = 1$.

Die Wahrscheinlichkeit des Messwertes $+\hbar/2$ ist $p(+\hbar/2) = |\langle\uparrow|\varphi\rangle|^2 = |c_\uparrow|^2$.

Die Wahrscheinlichkeit des Messwertes $-\hbar/2$ ist $p(-\hbar/2) = |\langle\downarrow|\varphi\rangle|^2 = |c_\downarrow|^2$.

(b) Der Matrixdarstellung des Operators $\hat{n}\cdot\hat{\vec{S}}$ ist

$$\hat{n}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\left(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z\right) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Die charakteristische Gleichung der Matrix ohne den Faktor $\hbar/2$ lautet

$$(n_z - \lambda)(-n_z - \lambda) - (n_x - in_y)(n_x + in_y) = \lambda^2 - n_z^2 - n_x^2 - n_y^2 = \lambda^2 - 1 = 0 \tag{25}$$

mit den Lösungen ± 1. Die Eigenwerte sind daher $\pm\hbar/2$. Die Eigenvektoren $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ lassen sich in verschiedener Weise schreiben. Um zu sehen, welche günstig ist, beachten wir, dass die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für den einlaufenden Zustand $|\uparrow\rangle$ lauten $p'(+\hbar/2) = |\langle v_1|\uparrow\rangle|^2$ und $p'(-\hbar/2) = |\langle v_2|\uparrow\rangle|^2$. In unserer Basis ist das jeweils das Betragsquadrat der ersten Komponenten der Eigenvektoren. Die erste Komponente sollte also für alle $\hat{n}$ wohldefiniert sein. Wir schreiben die Gleichung für die Eigenvektoren als

$$\begin{pmatrix} n_z \mp 1 & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \mp 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = 0. \tag{26}$$

Wir nehmen die *zweite* der beiden redundanten Gleichungen:

$$(n_x + in_y)a_\pm - (n_z \pm 1)b_\pm = 0. \tag{27}$$

Eine (noch nicht normierte) Lösung ist

$$\begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_z \pm 1 \\ n_x + in_y \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Die Norm ist

$$\sqrt{n_z^2 \pm 2n_z + 1 + n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{2 \pm 2n_z} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 \pm n_z}. \tag{29}$$

Die normierten Eigenvektoren sind also

$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1 + n_z} \\ \frac{n_x + in_y}{\sqrt{1 + n_z}} \end{pmatrix} \quad \text{für } +\hbar/2, \tag{30}$$

$$|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1 - n_z} \\ \frac{n_x + in_y}{\sqrt{1 - n_z}} \end{pmatrix} \quad \text{für } -\hbar/2. \tag{31}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind

$$p'(+\hbar/2) = |\langle v_1|\uparrow\rangle|^2 = \frac{1+n_z}{2}, \tag{32}$$

$$p'(-\hbar/2) = |\langle v_2|\uparrow\rangle|^2 = \frac{1-n_z}{2}. \tag{33}$$

Probe: Für $n_z = 1$ ergibt sich mit 100% Wahrscheinlichkeit $+\hbar/2$. Richtig! Hier wird nur die Messung von $\hat{S}_z$ wiederholt.

Das Ergebnis kann man auch durch den Winkel θ zwischen $\hat{n}$ und $\hat{z}$ (der Polarisationsrichtung der einlaufenden Teilchen) ausdrücken. Es ist $n_z = \cos\theta$. Nun gilt

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{34}$$

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{35}$$

also

$$p'(+\hbar/2) = \cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{36}$$

$$p'(-\hbar/2) = \sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{37}$$

(c) Ohne Messung und Phasendifferenz bekommt man der ursprünglichen Zustand

$$|\psi_{\text{neu}}\rangle = (|v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|)\,|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle. \tag{38}$$