TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 12

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Ein Drehimpuls $\hat{\vec{J}}$ der Länge 1 gehorche dem ungestörten Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = -K\,\hat{J}_x^2$$

mit $K > 0$. Dies entspricht einer „leichten Anisotropieachse“ entlang x. Alle in dieser Aufgabe vorkommenden Operatoren sollten als Matrizen in der Standardbasis, d. h. der Eigenbasis von $\hat{J}_z$, geschrieben werden.

(a) Zeigen Sie, dass der ungestörte Grundzustand zweifach entartet ist. Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie und die zugehörigen Eigenzustände.

(b) Es werde die Störung $\hat{H}_1 = -B\hat{J}_x$ angelegt. Bestimmen Sie die „richtige“ Basis im Sinne der entarteten Störungstheorie und die Energiekorrekturen erster Ordnung für die Grundzustände.

(c) Bestimmen Sie die Energiekorrekturen zweiter Ordnung für die Grundzustände.

(d) Bestimmen Sie die exakten Eigenenergien von $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ und vergleichen Sie sie mit der Näherungslösung.

(e) Wieso ist dasselbe Verfahren nicht anwendbar, wenn $\hat{H}_1 = -B\hat{J}_z$ ist?

Hausaufgaben (zu besprechen ab 10.07.2023)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie als ungestörtes System ein eindimensionales Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden, beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{d^2}{dx^2}$$

auf $x \in [-L/2, L/2]$ mit den Randbedingungen $\psi(-L/2) = \psi(L/2) = 0$. Die Eigenenergien und Eigenfunktionen sind bekannt, siehe Skript. Sei $\hat{H}_1$ ein unter der Inversion $x \mapsto -x$ ungerader Störoperator.

(a) Zeigen Sie, dass die Korrekturen erster Ordnung zu allen Eigenenergien, $E_n^{(1)}$, verschwinden.

(b) Sei speziell

$$\hat{H}_1 = a \sin\frac{2\pi x}{L}$$

mit einer Konstanten a. Bestimmen Sie die Korrekturen zweiter Ordnung zu allen Eigenenergien.
Hinweis:

$$\int dx\, \cos ax\, \sin bx\, \sin cx = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\sin(a-b-c)x}{a-b-c} + \frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c} + \frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}\right).$$

Wer Zugang zu Mathematica oder einem ähnlichen Programm hat, könnte die ersten paar Korrekturen berechnen und plotten.

Bitte wenden

Aufgabe 3:

Wir betrachten nochmals die Potentialbarriere aus Abschnitt 6.2.3 des Skripts:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq L/2, \\ V_1 > 0 & \text{für } |x| < L/2. \end{cases}$$

Von links laufen Teilchen mit der Energie E ein, wobei $0 < E < V_1$ sei. E sei hinreichend weit von Null und von V_1 entfernt, so dass die WKB-Näherung für alle x anwendbar ist. Zeigen Sie, dass die WKB-Näherung mit der exakten Lösung übereinstimmt.