TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Lösungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm — Blatt 7

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Die Norm ist

$$
\begin{aligned}
||\psi_1||^2 = \langle\psi_1|\psi_1\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dp \int_0^\pi dp'\,\langle p|p'\rangle \cos p\cos p' \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dp \int_0^\pi dp'\,\delta(p-p')\,\cos p\cos p' \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dp\,\cos^2 p = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = 1
\end{aligned} \tag{1}
$$

(der Mittelwert von $\cos^2 p$ ist $1/2$!). Analog findet man

$$
||\psi_2||^2 = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1. \tag{2}
$$

Dies ist also ein Beispiel dafür, dass die Superposition uneigentlicher Zustände auch normierbare Zustände ergeben kann.

Das Skalarprodukt ist

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dp \int_0^\pi dp'\,\langle p|p'\rangle\,\cos p\sin p' \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dp\,\cos p\sin p = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dp\,\cos p\sin p = 0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

da der Integrand ungerade ist.

Aufgabe 2:

a) Da $|\psi\rangle$ ein normierter Eigenzustand von $\hat{H}$ zur Eigenenergie E ist, gilt

$$
\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{4}
$$

mit

$$
\langle\psi|\psi\rangle = 1\,. \tag{5}
$$

Als nächstes betrachten wir die Schrödinger Gleichung mit dem untiären Operator $\hat{U}$

$$
\hat{U}\hat{H}|\psi\rangle = E\hat{U}|\psi\rangle, \tag{6}
$$

da der unitäre Operator $\hat{U}$ mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$ antikommutiert gilt auch

$$
\hat{U}\hat{H}|\psi\rangle = -\hat{H}\hat{U}|\psi\rangle\,. \tag{7}
$$

Wenn wir die letzten zwei Gleichungen gleich setzen, erhalten wir

$$
\hat{H}\hat{U}|\psi\rangle = -E\hat{U}|\psi\rangle \tag{8}
$$

$$
\hat{H}|\tilde{\psi}\rangle = -E|\tilde{\psi}\rangle\,, \tag{9}
$$

wobei $|\tilde{\psi}\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ der Eigenzustand von $\hat{H}$ zur Energie $-E$ ist. Es gilt nun noch zu zeigen, dass $|\tilde{\psi}\rangle$ nommiert ist. Es ist

$$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\psi|\underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{U}}_{=1}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1\,, \tag{10}$$

wobei wir die ausgenutzt haben, dass der Operator $\hat{U}$ unitär ist.

b) Es ist

$$\begin{aligned}\langle u_i|\hat{H}|u_j\rangle &= -\langle u_i|\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}|u_j\rangle \\ &= -\langle u_i|u_i^*\hat{H}u_j|u_j\rangle \\ &= -u_i^*u_j\langle u_i|\hat{H}|u_j\rangle\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss

$$u_i^*u_j = -1 \tag{12}$$

gelten. Dies hat zur Folge, dass die Diagonalelemente $\langle u_i|\hat{H}|u_i\rangle = 0$ sein müssen damit Gleichung(11) erfüllt ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 3:

(a) Wenn der Hamilton-Operator der Form $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 f(t)$ hat, ist die Zeitentwicklungsoperator

$$\begin{aligned}\hat{U}(t,t_0) &= \mathcal{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t dt'\,\hat{H}(t')\right) \\ &= \mathcal{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\int_{t_0}^t dt' f(t')\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\int_{t_0}^t dt' f(t')\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Das Ergebnis ist deutlich einfacher als im allgemeinen Fall, weil der Zeitordnungoperator $\mathcal{T}$ wegfällt. Dies geschieht, weil nur ein Operator, nämlich $\hat{H}_0$, auftaucht und alle Potenzen von $\hat{H}_0$ in der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion miteinander vertauschen.

(b) Für

$$\hat{H}(t) = -b\sigma_x\sin\omega t \tag{14}$$

ergibt sich

$$\hat{U}(t,t_0) = \exp\left(\frac{ib}{\hbar}\,\sigma_x\int_{t_0}^t dt'\sin\omega t'\right) = \exp\left(-\frac{ib}{\hbar\omega}\left[\cos\omega t - \cos\omega t_0\right]\sigma_x\right). \tag{15}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}e^{ia\sigma_x} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\,(ia)^n\,(\sigma_x)^n \\ &= \sum_{n\text{ gerade}}\frac{1}{n!}\,(ia)^n\,\mathbb{1} + \sum_{n\text{ ungerade}}\frac{1}{n!}\,(ia)^n\,\sigma_x \\ &= \sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m)!}\,(-1)^m\,a^{2m}\,\mathbb{1} + i\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)!}\,(-1)^m\,a^{2m+1}\,\sigma_x \\ &= \mathbb{1}\cos a + i\sigma_x\,\sin a.\end{aligned} \tag{16}$$

Damit erhalten wir

$$\hat{U}(t,t_0) = \mathbb{1}\cos\left(\frac{b}{\hbar\omega}\left[\cos\omega t - \cos\omega t_0\right]\right) - i\sigma_x\sin\left(\frac{b}{\hbar\omega}\left[\cos(\omega t) - \cos\omega t_0\right]\right). \tag{17}$$

Aufgabe 4:

(a) Es gilt

$$\hat{B}_j^\dagger = (i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j})^\dagger = -i\hat{A}_{2j}^\dagger\hat{A}_{2j-1}^\dagger = -i\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2j-1} = +i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j} = \hat{B}_j. \tag{18}$$

Beachte, dass der Faktor i in der Definition hierfür notwendig ist.

(b) Es ist

$$\hat{B}_j^2 = i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j} = -\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j} = +\underbrace{\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j-1}}_{=\mathbb{1}}\underbrace{\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2j}}_{=\mathbb{1}} = \mathbb{1}. \tag{19}$$

Also hat $\hat{B}_j^2$ nur den einen Eigenwert $+1$. Die Eigenwerte von $\hat{B}_j$ müssen daher zu $+1$ quadrieren. Daher können nur die Eigenwerte ± 1 auftreten.

(c) Es gilt

$$[\hat{B}_j, \hat{H}] = [i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}, \hat{H}] = i\hat{A}_{2j-1}\underbrace{[\hat{A}_{2j}, \hat{H}]}_{=0} + i\underbrace{[\hat{A}_{2j-1}, \hat{H}]}_{=0}\hat{A}_{2j} = 0. \tag{20}$$

Wir betrachten nun $[\hat{B}_j, \hat{B}_k]$ für $j \neq k$ (der Kommutator $[\hat{B}_j, \hat{B}_j]$ ist trivialerweise Null, da jeder Operator mit sich selbst kommutiert). Dann haben $\hat{B}_j$ und $\hat{B}_k$ keine Faktoren $\hat{A}_n$ gemeinsam. Es gilt

$$\begin{aligned}
[\hat{B}_j, \hat{B}_k] &= [i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}, i\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k}] \\
&= -\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k} + \hat{A}_{2k-1}\underbrace{\hat{A}_{2k}\hat{A}_{2j-1}}_{\text{antikommutieren}}\hat{A}_{2j} \\
&= -\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k} - \underbrace{\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2j-1}}_{\text{antikommutieren}}\hat{A}_{2k}\hat{A}_{2j} \\
&= -\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k} + \hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2k-1}\underbrace{\hat{A}_{2k}\hat{A}_{2j}}_{\text{antikommutieren}} \\
&= -\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k} - \hat{A}_{2j-1}\underbrace{\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2j}}_{\text{antikommutieren}}\hat{A}_{2k} \\
&= -\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k} + \hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Daraus folgt, dass $\hat{H}$ und alle $\hat{B}_j$ einen gemeinsamen Satz von Eigenzuständen haben.

(d) Die einzige Möglichkeit, wie $\hat{A}_j |\psi\rangle$ kein Zustand sein kann, ist, dass es der Nullvektor ist. Es ist jedoch

$$\left\| \hat{A}_j |\psi\rangle \right\|^2 = \langle\psi|\hat{A}_j^\dagger\hat{A}_j|\psi\rangle = \langle\psi|\underbrace{\hat{A}_j\hat{A}_j}_{=\mathbb{1}}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle. \tag{22}$$

Damit hat $\hat{A}_j |\psi\rangle$ die Norm eins, wenn $|\psi\rangle$ normiert ist und ist somit sicher nicht der Nullvektor. Weiter ist

$$\hat{A}_n\hat{H}|\psi\rangle = \hat{A}_n E|\psi\rangle \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}\hat{A}_n|\psi\rangle = E\hat{A}_n|\psi\rangle. \tag{24}$$

Also ist $\hat{A}_j |\psi\rangle$ Eigenvektor von $\hat{H}$ zum Eigenwert E.

(e) Wir betrachten einen Eigenzustand von $\hat{H}$ zum Eigenwert E, der zugleich Eigenzustand zu allen $\hat{B}_j$ ist. Dies ist wegen Teil (c) möglich. Die Eigenwerte der $\hat{B}_j$ in diesem Zustand seien $b_j = \pm 1$ [siehe Teil (b)]. Wir schreiben diesen Zustand als $|E; b_1, \ldots, b_N\rangle$.

Nun untersuchen wir die Wirkung von $\hat{A}_{2j}$. Anwendung auf die Schrödinger-Gleichung wie in Teil (d) ergibt

$$\hat{A}_{2j}\hat{H}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = \hat{A}_{2j}E\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle \tag{25}$$
$$\Rightarrow \quad \hat{H}\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = E\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle. \tag{26}$$

Also ist $\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$ zu demselben Eigenwert E.

Nun *antikommutiert* $\hat{A}_{2j}$ mit $\hat{B}_j$,

$$\hat{A}_{2j}\hat{B}_j = \hat{A}_{2j}i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j} = -i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2j} = -\hat{B}_j\hat{A}_{2j}, \tag{27}$$

während $\hat{A}_{2j}$ mit $\hat{B}_k$, $k \neq j$, *kommutiert*:

$$\hat{A}_{2j}\hat{B}_k = \hat{A}_{2j}i\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k} = -i\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2j}\hat{A}_{2k} = +i\hat{A}_{2k-1}\hat{A}_{2k}\hat{A}_{2j} = \hat{B}_k\hat{A}_{2j}. \tag{28}$$

Anwendung von $\hat{A}_{2j}$ auf die Eigenwertgleichung für $\hat{B}_j$ ergibt daher

$$\hat{A}_{2j}\hat{B}_j\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = \hat{A}_{2j}b_j\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle \tag{29}$$
$$\Rightarrow \quad -\hat{B}_j\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = b_j\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle \tag{30}$$
$$\Rightarrow \quad \hat{B}_j\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = -b_j\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle. \tag{31}$$

Also ist $\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle$ Eigenzustand von $\hat{B}_j$ zum Eigenwert $-b_j$. Dieser Eigenwert ist ungleich b_j wegen $|b_j| = 1$.

Anwendung von $\hat{A}_{2j}$ auf die Eigenwertgleichung für $\hat{B}_k$, $k \neq j$ ergibt

$$\hat{A}_{2j}\hat{B}_k\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = \hat{A}_{2j}b_k\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle \tag{32}$$
$$\Rightarrow \quad \hat{B}_k\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = b_k\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle. \tag{33}$$

Also ist $\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle$ Eigenzustand von $\hat{B}_k$ zum unveränderten Eigenwert b_k.

Die Anwendung von A_{2j} führt also zu einem Eigenzustand von $\hat{H}$ mit demselben Eigenwert E aber entgegengesetztem Eigenwert von $\hat{B}_j$. Daher können wir (evtl. bis auf einen skalaren Faktor) schreiben

$$\hat{A}_{2j}\,|E;b_1,\dots,b_N\rangle = |E;b_1,\dots,-b_j,\dots,b_N\rangle. \tag{34}$$

Da die gemeinsamen Eigenzustände eine Orthonormalbasis bilden, sind Zustände $|E;b_1,\dots,b_N\rangle$ mit unterschiedlichen Eigenwerten b_j orthogonal und daher linear unabhängig. Nun können wir durch konsekutive Anwendung von verschiedenen $\hat{A}_{2j}$ die Vorzeichen der Eigenwerte $b_j = \pm 1$ beliebig ändern. Offenbar existieren 2^N mögliche Kombinationen, die wir so erzeugen können. Alle so erzeugten Zustände sind orthogonal zueinander und sind Eigenzustände zu $\hat{H}$ zum Eigenwert E. Damit folgt die Behauptung.

Bemerkung 1: Zwei der drei Pauli-Matrizen bilden ein mögliches Beispiel, d. h. sie sind hermitesch, quadrieren zu $\mathbb{1}$ und antikommutieren miteinander. *Bemerkung 2*: Allgemeiner werden Sätze antikommutierender Operatoren in der Theorie der Clifford-Algebren beschrieben.