Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 5

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

(a) Ein Teilchen bewege sich kräftefrei entlang eines Ringes mit dem Umfang L. Wie muss man die mathematische Formulierung gegenüber dem Kasten mit unendlich hohen Wänden (vgl. Skript, Abschnitt 5.7) abändern, um diese Situation zu beschreiben? Die Krümmung der Bahn soll hier nicht beachtet werden.

(b) Bestimmen Sie die Eigenenergien und Eigenfunktionen.

Aufgabe 2:

Die Wellenfunktion des Grundzustandes des Kastenpotentials mit unendlich hohen Wänden bei $\pm L/2$ lautet

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi x}{L}.$$

Bestimmen Sie die mittleren quadratischen Schwankungen Δx und Δp und daraus $\Delta x \Delta p$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

Hinweise: Benutzen Sie wo möglich die Symmetrie der Funktionen. Folgende Integrale könnten hilfreich sein:

$$\int_{-a}^{a} dx x^2 \cos(\pi x/b)^2 = \frac{4\pi^3 a^3 - 3b\left(b^2 - 2\pi^2 a^2\right) \sin\left(\frac{2\pi a}{b}\right) + 6\pi a b^2 \cos\left(\frac{2\pi a}{b}\right)}{12\pi^3},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos^2\left(\frac{kL}{2}\right)}{\left(\pi^2 - k^2 L^2\right)^2} = \frac{\pi}{4L^3}.$$

Hausaufgaben (zu besprechen ab 28.05.2024)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie eine Potentialstufe der Höhe $V_1 > 0$ in einer Dimension, d. h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ V_1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Von links möge ein Teilchenstrom bei der Energie E mit $0 < E < V_1$ einlaufen. Bestimmen Sie die Wellenfunktion für diesen Fall. Bestimmen Sie daraus die Reflexionswahrscheinlichkeit. Diskutieren Sie das Ergebnis.

(b) Nun sollen die von links einlaufenden Teilchen die Energie $E > V_1$ haben. Bestimmen Sie die Wellenfunktion und die Reflexionswahrscheinlichkeit für diesen Fall.

Hinweis: In den klassischen erlaubten Bereichen sind komplexe Exponentialfunktionen als Ansatz nützlich. Trigonometrische Funktionen sind natürlich auch korrekt.

Bitte wenden

Aufgabe 4:

Diese Aufgabe dient der Erinnerung an die lineare Algebra. Wir definieren die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\sigma_x\sigma_x$, $\sigma_y\sigma_y$ und $\sigma_z\sigma_z$.

(b) Berechnen Sie $\sigma_x\sigma_y$ und $[\sigma_x, \sigma_y]$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_x.