TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 2

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Ein starrer Körper besitze das auf eine fest vorgegebene Rotationsachse bezogene Trägheitsmoment J. Berechnen Sie die möglichen Energieniveaus im Rahmen der Bohrschen Quantentheorie. *Hinweis*: Wie hängt die Rotationsfrequenz von der Energie ab?

Aufgabe 2:

L. de Broglie vermutete, dass freie Materiewellen die Form

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

mit

$$\hbar\omega = E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{1}$$

haben. Die Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

ist die einfachste nicht triviale Gleichung, die von $\psi(\vec{r},t)$ erfüllt wird (prüfen Sie dies nach). Es ist aber nicht die einzige solche Gleichung und das Korrespondenzprinzip hilft nicht bei der Entscheidung, welche davon die richtige ist.

(a) Finden Sie einige andere Gleichungen, die ebenfalls erfüllt sind. Die Gleichung soll für alle $\vec{k}$ und ω gelten, d. h. sie darf $\vec{k}$ und ω nicht explizit enthalten.

(b) Wenn wir statt von Gl. (1) von der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $\hbar^2\omega^2 = E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \hbar^2k^2c^2 + m^2c^4$ ausgehen, wie würde die Gleichung für $\psi(\vec{r},t)$ dann aussehen?

Hausaufgaben (zu besprechen ab 30.04.2024)

Aufgabe 3:

Der Ortsvektor eines Teilchens sei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und sein Impulsvektor sei $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

(a) Verwenden Sie die Definition des Drehimpulsoperators, $\hat{\vec{L}} := \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$, um den Kommutator $[\hat{L}_1, \hat{L}_2]$ zu bestimmen. Was ist dann $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ für beliebige $i, j = 1, 2, 3$ (ohne Rechnung)?

(b) Bestimmen Sie $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_1]$.

(c) Berechnen Sie $\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}}$. Was ist am Ergebnis bemerkenswert?

(d) Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren:

$$\left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}, \hat{x}_i\right], \quad [V(\hat{\vec{x}}), \hat{p}_i], \quad [\hat{L}_1, \hat{x}_1], \quad [\hat{L}_1, \hat{x}_2].$$

Bitte wenden

Aufgabe 4:

Das eindimensionale Wellenpacket

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\, \tilde{\psi}(k) \quad \text{mit} \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

sei zur Zeit $t = 0$ eine Gauß-Funktion:

$$\psi(x,0) = A\, e^{ik_0 x}\, e^{-x^2/2b^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die reell und positiv gewählte Normierungskonstante A.

(b) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k)$ der Wellenfunktion $\psi(x,0)$ ebenfalls eine Gauß-Funktion ist.

(c) Als *Breite* einer Gauß-Funktion definieren wir den Abstand der symmetrisch zum Maximum liegenden Punkte, bei denen der Funktionswert auf $1/e$ des Maximums abgefallen ist. Berechnen Sie die Breite Δk von $|\tilde{\psi}(k)|^2$.

(d) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ für alle Zeiten t.

(e) Verifizieren Sie für die Wahrscheinlichkeitsdichte den folgenden Ausdruck:

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta b(t)} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)^2}{\Delta b^2(t)}\right)$$

mit

$$\Delta b(t) = \frac{1}{b}\sqrt{b^4 + \left(\frac{\hbar}{m}\, t\right)^2}.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis – wie verändert sich das Wellenpaket als Funktion der Zeit?

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp(-\alpha x^2 + \beta x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad \text{für } \mathrm{Re}\,\alpha > 0.$$