TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

## Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm | Blatt 8

### Präsenzübungen

**Aufgabe 1:**

Ein Teilchen der Masse $m$ bewege sich in einem Potential $V(\vec{r})$, das eine homogene Funktion vom Grad $n$ sein möge:

$$V(\alpha\vec{r}) = \alpha^n \, V(\vec{r}) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Betrachten Sie die Observable

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{r}}\cdot\hat{\vec{p}} + \hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{r}}\right),$$

die uns zum quantenmechanischen Analogon des klassischen Virialsatzes führen wird.

(a) Verifizieren Sie die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \, \frac{\partial V}{\partial x_i} = nV.$$

*Hinweis*: Gl. (1) nach $\alpha$ ableiten!

(b) Verifizieren Sie die Beziehung

$$\hat{A} = \hat{\vec{r}}\cdot\hat{\vec{p}} + \frac{3}{2}\,\frac{\hbar}{i}.$$

(c) Der Hamilton-Operator bestehe aus kinetischer und potentieller Energie, $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$. Beweisen Sie die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\,\hat{A}_H = 2\hat{T}_H - n\hat{V}_H.$$

(d) Das System befinde sich nun in einem Eigenzustand $|\psi\rangle$ von $\hat{H}$. Zeigen Sie, dass dann der quantenmechanische Virialsatz

$$2\langle\hat{T}\rangle = n\langle\hat{V}\rangle$$

gilt. Das ist dieselbe Beziehung wie für die Mittelwerte der klassischen Bewegung.

**Aufgabe 2:**

Betrachten Sie zwei harmonische Oszillatoren mit gleichen Massen der Teilchen, aber unterschiedlichen Schwingungsfrequenzen $\omega$ und $\omega'$. Alle Größen, die den ersten (zweiten) Oszillator beschreiben, werden ohne (mit) Strich geschrieben.

(a) Skizzieren Sie die Potentiale, die Lage der Grundzustandsenergien in den Potentialen und die Grundzustands-Eigenfunktionen der beiden Oszillatoren. Sie können o. B. d. A. $\omega' > \omega$ annehmen.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Absteigeoperator $\hat{a}'$ für den zweiten Oszillator als

$$\hat{a}' = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left(\hat{a} - \gamma\,\hat{a}^\dagger\right)$$

schreiben lässt. Was ergibt sich für $\gamma$?

*Bitte wenden*

**Hausaufgaben** (zu besprechen ab 18.06.2024)

**Aufgabe 3:**

Von den Eigenzuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators besitzt nur der Grundzustand ($n = 0$) minimale Unschärfe, $\Delta x\, \Delta p = \hbar/2$, für die übrigen ist $\Delta x\, \Delta p = (2n + 1)\, \hbar/2$. Es gibt aber noch weitere Zustände, die die Unschärfe minimieren, die sogenannten kohärenten Zustände. Diese sind definiert als die Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{2}$$

hier ist $\alpha$ eine beliebige komplexe Zahl. *Bemerkung*: Der Aufsteigeoperator $\hat{a}^\dagger$ hat keine Eigenzustände.

(a) Bestimmen Sie $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ im Zustand $|\alpha\rangle$. *Hinweis*: Stellen Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ dar und benutzen Sie Gl. (2).

(b) Bestimmen Sie $\Delta x$ und $\Delta p$ und zeigen Sie, dass $\Delta x\, \Delta p = \hbar/2$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass man die kohärenten Zustände gemäß

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, |n\rangle \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, c_0$$

durch die Eigenzustände $|n\rangle = (1/\sqrt{n!})\, (\hat{a}^\dagger)^n\, |0\rangle$ des harmonischen Oszillators darstellen kann.

(d) Zeigen Sie durch Normierung von $|\alpha\rangle$, dass gilt

$$c_0 = e^{-|\alpha|^2/2}.$$

(e) Untersuchen Sie die Zeitentwicklung der kohärenten Zustände. Die Zeitentwicklung der Eigenzustände ist natürlich

$$|n(t)\rangle = e^{-iE_n t/\hbar}\, |n\rangle.$$

Zeigen Sie, dass $|\alpha(t)\rangle$ Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$ bleiben, sich aber die Eigenwerte entwickeln wie

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha.$$

(Also bleibt ein kohärenter Zustand ein solcher.) Was folgt daraus für $\langle x\rangle$ als Funktion der Zeit?

(f) Ist der Grundzustand $|0\rangle$ ein kohärenter Zustand? Wenn ja, was ist der zugehörige Eigenwert von $\hat{a}$?

**Aufgabe 4:**

(a) Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellung der Komponenten $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ für einen Drehimpuls der Länge $j = 2$ in der Eigenbasis $\{|j, m\rangle\}$ zu $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_z$. Überprüfen Sie mit Hilfe diese Matrixdarstellung, dass $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\, \hat{J}_z$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a) die Matrixdarstellung von $\hat{\vec{J}}^2$ und überzeugen Sie sich, dass $\hat{\vec{J}}^2$ mit den Komponenten vertauscht (keine Rechnung erforderlich).

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\hat{J}_\pm$.