Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 5

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Betrachten Sie eine Potentialstufe der Höhe $V_1 > 0$ in einer Dimension, d. h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ V_1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Von links möge ein Teilchenstrom bei der Energie E mit $0 < E < V_1$ einlaufen. Bestimmen Sie die Wellenfunktion für diesen Fall. Bestimmen Sie daraus die Reflexionswahrscheinlichkeit. Diskutieren Sie das Ergebnis.

(b) Nun sollen die von links einlaufenden Teilchen die Energie $E > V_1$ haben. Bestimmen Sie die Wellenfunktion und die Reflexionswahrscheinlichkeit für diesen Fall.

Hinweis: In den klassischen erlaubten Bereichen sind komplexe Exponentialfunktionen als Ansatz nützlich. Trigonometrische Funktionen sind natürlich auch korrekt.

Aufgabe 2:

Die Wellenfunktion des Grundzustandes des Kastenpotentials mit unendlich hohen Wänden bei $\pm L/2$ lautet bekanntlich

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{\pi x}{L}.$$

Bestimmen Sie die mittleren quadratischen Schwankungen Δx und Δp und daraus $\Delta x \Delta p$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

Hinweise: Benutzen Sie wo möglich die Symmetrie der Funktionen.

$$\int_{-a}^{a} dx x^2 \cos(\pi x/b)^2 = \frac{4\pi^3 a^3 - 3b\left(b^2 - 2\pi^2 a^2\right)\sin\left(\frac{2\pi a}{b}\right) + 6\pi a b^2 \cos\left(\frac{2\pi a}{b}\right)}{12\pi^3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos^2\left(\frac{kL}{2}\right)}{\left(\pi^2 - k^2 L^2\right)^2} = \frac{\pi}{4L^3}$$

Hausaufgaben (zu besprechen ab 15.05.2023)

Aufgabe 3: Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Potential

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2,$$

d. h. den dreidimensionalen harmonischen Oszillator.

(a) Verwenden Sie den Separationsansatz $\psi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ und leiten Sie Gleichungen für die Faktoren $X(x)$, $Y(y)$ und $Z(z)$ her.

(b) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und Eigenenergien des dreidimensionalen harmonischen Oszillators. Diskutieren Sie die Entartung der Eigenenergien. Die Lösung für den eindimensionalen Fall kann als bekannt angenommen werden.

Bitte wenden

Aufgabe 4:

Diese Aufgabe dient der Erinnerung an die lineare Algebra. Wir definieren die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\sigma_x \sigma_x$, $\sigma_y \sigma_y$ und $\sigma_z \sigma_z$.

(b) Berechnen Sie $\sigma_x \sigma_y$ und $[\sigma_x, \sigma_y]$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_x.