Lösungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 8

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

(a) Mit der kanonischen Orts-Impuls-Unschärferelation ist

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i p_i + p_i x_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(2x_i p_i - i\hbar\,\mathbb{1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(2x_i p_i + \frac{\hbar}{i}\,\mathbb{1}\right) = \vec{r}\cdot\vec{p} + \frac{3\hbar}{2i}\,\mathbb{1}. \tag{1}$$

Die zweite Behauptung lässt sich auf mindestens zwei Wegen beweisen. 1. Weg: V ist homogen vom Grad n: $V(\alpha\vec{r}) = \alpha^n\,V(\vec{r})$, daher gilt

$$\frac{d}{d\alpha}\,V(\alpha\vec{r}) = \frac{\partial\alpha\vec{r}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial V(\alpha\vec{r})}{\partial\alpha\vec{r}} = \sum_i x_i\,\frac{\partial V(\alpha\vec{r})}{\partial\alpha x_i}. \tag{2}$$

Andererseits ist

$$\frac{d}{d\alpha}\,V(\alpha\vec{r}) = \frac{d}{d\alpha}\,\alpha^n\,V(\vec{r}) = n\,\alpha^{n-1}\,V(\vec{r}). \tag{3}$$

Der Vergleich liefert

$$\sum_i x_i\,\frac{\partial V(\alpha\vec{r})}{\partial(\alpha x_i)} = n\,\alpha^{n-1}\,V(\vec{r}). \tag{4}$$

Dies gilt für alle $\alpha\in\mathbb{R}^+$, also auch für $\alpha = 1$:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i\,\frac{\partial V}{\partial x_i} = n\,V. \tag{5}$$

2. Weg: Die Funktion $V(\vec{r})$ ist homogen vom Grad n ist und lässt sich daher schreiben als

$$V(\vec{r}) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3} v_{i_1,\dots,i_n}\,x_{i_1}\cdots x_{i_n}. \tag{6}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} x_i\,\frac{\partial V}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3} v_{i_1,\dots,i_n}\sum_{k=1}^{n} x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}\delta_{i_k,i}\,x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n}\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3} v_{i_1,\dots,i_n}\sum_{k=1}^{n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}\\ &= n\sum_{i=1}^{3}\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3} v_{i_1,\dots,i_n}\,x_{i_1}\cdots x_{i_n} = n\,V(\vec{r}).\end{aligned} \tag{7}$$

(b) Die Heisenberg-Gleichung lautet

$$i\hbar\,\dot{A}_H = [A_H, H_H] = [\vec{r}_H\cdot\vec{p}_H, H_H] + \frac{3\hbar}{2i}\,\underbrace{[\mathbb{1}, H_H]}_{=0} \tag{8}$$

$$\Rightarrow\quad i\hbar\,\dot{A}_H = [\vec{r}_H\cdot\vec{p}_H, T_H] + [\vec{r}_H\cdot\vec{p}_H, V_H]. \tag{9}$$

Hier ist

$$
\begin{aligned}
[\vec{r}_H \cdot \vec{p}_H, T_H] &= \sum_i [x_{Hi} p_{Hi}, T_H(\vec{p}_H)] = \sum_i [x_{Hi}, T_H(\vec{p}_H)]\, p_{Hi} = \sum_{i,j} [x_{Hi}, p_{Hj}^2]\, \frac{p_{Hi}}{2m} \\
&= \sum_{i,j} (p_{Hj}\, [x_{Hi}, p_{Hj}] + [x_{Hi}, p_{Hj}] p_{Hj})\, \frac{p_{Hi}}{2m} \\
&= i\hbar \sum_{i,j} 2 p_{Hj}\, \delta_{ij} \frac{p_{Hi}}{2m} = 2i\hbar \sum_i \frac{p_{Hi}^2}{2m} = 2i\hbar\, T_H, \qquad (10) \\
[\vec{r}_H \cdot \vec{p}_H, V_H] &= \sum_i [x_{Hi} p_{Hi}, V_H(\vec{r}_H)] = \sum_i x_{Hi}\, [p_{Hi}, V_H(\vec{r}_H)] \\
&= \sum_i x_{Hi}\, \frac{\hbar}{i}\, \frac{\partial V_H(\vec{r}_H)}{\partial x_{Hi}} \\
&= -i\hbar \sum_i x_{Hi}\, \frac{\partial V_H(\vec{r}_H)}{\partial x_{Hi}} = -i\hbar\, n\, V_H. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Dies ergibt schließlich den Virialsatz

$$\dot{A}_H = 2T_H - nV_H. \qquad (12)$$

(c) Für einen Eigenzustand gilt

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|[A, H]|\psi\rangle &= \langle\psi|AH|\psi\rangle - \langle\psi|HA|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|AE|\psi\rangle - \langle\psi|EA|\psi\rangle = E\,(\langle\psi|A|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle) = 0 \qquad (13) \\
\Rightarrow \quad \langle\psi|\dot{A}|\psi\rangle &= 0. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Damit lautet der Virialsatz

$$2\langle T_H\rangle = n\langle V_H\rangle. \qquad (15)$$

Erwartungswerte sind bildunabhängig, also gilt auch

$$2\langle T\rangle = n\langle V\rangle. \qquad (16)$$

Beispiele: Coulomb-Potential $V \sim 1/r$:

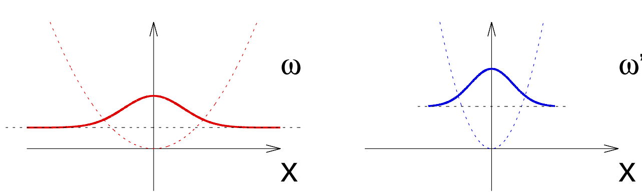
$$V(\alpha\vec{r}) = \alpha^{-1}\, V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad n = -1 \quad \Rightarrow \quad 2\langle T\rangle = -\langle V\rangle. \qquad (17)$$

Harmonischer Oszillator $V \sim r^2$:

$$V(\alpha\vec{r}) = \alpha^2\, V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad n = 2 \quad \Rightarrow \quad \langle T\rangle = \langle V\rangle. \qquad (18)$$

Aufgabe 2:

(a) Grundzustands-Eigenfunktionen für $\omega' > \omega$:



(b) Der Absteigeoperator $\hat{a}$ zu ω ist definiert als

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,i\hat{p}. \tag{19}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{\hat{a}-\gamma\hat{a}^\dagger}{\sqrt{1-\gamma^2}} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\frac{1-\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\frac{1+\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,i\hat{p} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}\,\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}\,i\hat{p}. \end{aligned} \tag{20}$$

Damit dies gleich dem Operator $\hat{a}'$ zu ω' ist, muss gelten

$$\omega' = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\,\omega,$$

also

$$\gamma = \frac{\omega-\omega'}{\omega+\omega'}.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3:

Die Eigenwertgleichung für die kohärenten Zustände lautet $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

(a) Es ist (wir schreiben jetzt Operatoren ohne Dach)

$$\langle x\rangle = \langle\alpha|x|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\alpha|a^\dagger + a|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\langle a\alpha|\alpha\rangle + \langle\alpha|a\alpha\rangle) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\alpha+\alpha^*). \tag{21}$$

Aus

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\,(a^{\dagger 2} + a^\dagger a + aa^\dagger + a^2) \qquad \Big|\text{verwende } aa^\dagger = [a,a^\dagger] + a^\dagger a = 1 + a^\dagger a \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\,(a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a + 1 + a^2) \end{aligned} \tag{22}$$

folgt

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle\alpha|a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a + 1 + a^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\,(\langle\alpha a^2|\alpha\rangle + 2\langle a\alpha|a\alpha\rangle + \langle\alpha|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^2\alpha\rangle) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\,(\alpha^{*2} + 2\alpha^*\alpha + 1 + \alpha^2) = \frac{\hbar}{2m\omega}\,[1 + (\alpha+\alpha^*)^2]. \end{aligned} \tag{23}$$

Weiter ist

$$\langle p\rangle = \langle\alpha|p|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\langle\alpha|a^\dagger - a|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\langle a\alpha|\alpha\rangle - \langle\alpha|a\alpha\rangle) = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\alpha-\alpha^*) \tag{24}$$

und aus

$$p^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\,(a^{\dagger 2} - a^\dagger a - aa^\dagger + a^2) = -\frac{\hbar m\omega}{2}\,(a^{\dagger 2} - 2a^\dagger a - 1 + a^2) \tag{25}$$

folgt

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\,\langle\alpha|a^{\dagger 2} - 2a^\dagger a - 1 + a^2|\alpha\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\,(\langle a^2\alpha|\alpha\rangle - 2\langle a\alpha|a\alpha\rangle - \langle\alpha|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^2\alpha\rangle) \\ &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\,(\alpha^{2*} - 2\alpha^*\alpha - 1 + \alpha^2) = \frac{\hbar m\omega}{2}\,[1 - (\alpha-\alpha^*)^2]. \end{aligned} \tag{26}$$

(b) Mit den Ergebnissen aus Teil (a) folgt

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}[1 + (\alpha+\alpha^*)^2 - (\alpha+\alpha^*)^2] = \frac{\hbar}{2m\omega}, \tag{27}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}[1 - (\alpha-\alpha^*)^2 + (\alpha-\alpha^*)] = \frac{\hbar m\omega}{2}. \tag{28}$$

Damit ist

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}\frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}. \tag{29}$$

(c) Die Koeffizienten sind

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\langle\alpha|(a^\dagger)^n|0\rangle\right)^* = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|a^n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\alpha^n\langle 0|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0. \tag{30}$$

(d) Normierung erfordert, dass

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \overset{\text{(c)}}{=} |c_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2\, e^{|\alpha|^2}. \tag{31}$$

Die positiv-reelle Wahl von c_0 ergibt

$$c_0 = e^{-|\alpha|^2/2}. \tag{32}$$

(e) Die Zeitentwicklung ist

$$\begin{aligned}|\alpha(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-|\alpha|^2/2}e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t}|n\rangle = e^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}e^{-|\alpha|^2/2}|n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2}\,|\alpha e^{-i\omega t}\rangle.\end{aligned} \tag{33}$$

Der Vorfaktor $e^{-i\omega t/2}$ ist unerheblich für die Analyse von Eigenzuständen. Wir finden, dass $|\alpha(t)\rangle$ proportional ist zu $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$, also ist $|\alpha(t)\rangle$ ein Eigenzustand von a zum Eigenwert $\alpha\, e^{-i\omega t}$. Konsequenz: Der kohärente Zustand bleibt kohärent, $\Delta x\Delta p$ bleibt minimal.

Es folgt mit Teil (a):

$$\langle x\rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2mc}}\,(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{+i\omega t}). \tag{34}$$

Wenn wir $\alpha = |\alpha|\, e^{i\phi}$ schreiben, erhalten wir

$$\langle x\rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2mc}}\,|\alpha|\,(e^{i\phi - i\omega t} + e^{-i\phi + i\omega t}) = \sqrt{\frac{2\hbar}{mc}}\,|\alpha|\cos(\omega t - \phi). \tag{35}$$

Der mittlere Ort führt also harmonische Oszillationen mit der Eigenfrequenz ω des harmonischen Oszillators aus. In diesem Sinn und wegen der minimalen Unschärfe $\Delta x\Delta p$ verhalten sich kohärente Zustände „maximal klassisch“.

(f) Es gilt $a|0\rangle = 0$, woraus folgt, dass $|0\rangle$ ein Eigenzustand von a, also ein kohärenter Zustand, zum Eigenwert $\alpha = 0$ ist.

Aufgabe 4:

(a) Wir benutzen

$$J_z|j,m\rangle = \hbar m\,|j,m\rangle, \tag{36}$$

$$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j,m\rangle, \tag{37}$$

$$J_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j,m+1\rangle, \tag{38}$$

$$J_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j,m-1\rangle, \tag{39}$$

$$J_x = (J_+ + J_-)/2, \tag{40}$$

$$J_y = (J_+ - J_-)/(2i). \tag{41}$$

Der Hilbert-Raum ist fünfdimensional. Die Basisvektoren seien

$$|2,2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2,-2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Der Matrixdarstellung des Operators J_z ist

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Der Matrixdarstellung des Operators J_x ist

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Der Matrixdarstellung des Operators J_y ist

$$J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & -i\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{6} & 0 & -i\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{6} & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

$[J_x, J_y] \equiv J_x J_y - J_y J_x = i\hbar\, J_z$ folgt durch gewöhnliche Matrixmultiplikation.

(b) Das Quadrat von J_x ist

$$J_x^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 6 & 0 \\ 2\sqrt{6} & 0 & 12 & 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Das Quadrat von J_y ist

$$J_y^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -6 & 0 \\ -2\sqrt{6} & 0 & 12 & 0 & -2\sqrt{6} \\ 0 & -6 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{6} & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Das Quadrat von J_z ist

$$J_z^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Es folgt

$$\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Das Matrix von $\vec{J}^2$ ist proportional zur Einheitsmatrix und kommutiert deshalb mit allen Matrizen, einschließlich J_x, J_y und J_z.

(c) Die Definition ist $J_\pm = J_x \pm i J_y$. Wir erhalten

$$J_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Beachte, dass $J_\pm$ jeweils nur auf einer Nebendiagonalen nicht verschwindende Einträge haben.