TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 1

Präsenzübungen

Die ersten beiden Aufgaben dienen zur Wiederholung mathematischer Methoden.

Aufgabe 1:

Eine vom Ort $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = (x, y, z)$ abhängige skalare Funktion $f(\vec{r})$ nennt man ein *skalares Feld*. Berechnen Sie den Gradienten $\vec{\nabla} f$ folgender Felder:

(a) $f(\vec{r}) = z$,

(b) $f(\vec{r}) = r$, wobei $r = |\vec{r}|$ ist,

(c) $f(\vec{r}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$ mit einem konstanten Vektor $\vec{a}$,

(d) $f(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ mit einem konstanten Vektor $\vec{k}$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die *allgemeinen* Lösungen der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Funktion $y(x)$:

(a) $y' = a\,y + b\,x$, wobei a und b Konstanten seien,

(b) $y'' = -\omega^2\,y$, wobei ω eine reelle Konstante sei,

(c) $y'' = \omega^2\,y$, wobei ω eine reelle Konstante sei,

(d) $y' = a\,y^2$, wobei a eine Konstante sei.

Aufgabe 3:

Bestrahlt man Festkörper mit Licht hoher Intensität I, dessen Frequenz ν aber unterhalb der Grenzfrequenz für Photoemission liegt, $\nu < \nu_g$, so kann man unter bestimmten Voraussetzungen *Zwei-Photonen-Photoemission* (2PPE) beobachten. Hierbei absorbiert ein Elektron zwei Photonen und wird anschließend emittiert. Die 2PPE wurde 1931 von Maria Goeppert-Mayer in ihrer Doktorarbeit theoretisch beschrieben. Sie erhielt 1963 als zweite Frau den Nobelpreis für Physik für das Schalenmodel des Atomkerns.

Diskutieren Sie in Analogie zum normalen Photoeffekt die Abhängigkeit.

(a) der Energie der Photoelektronen,

(b) der Grenzfrequenz für 2PPE und

(c) des Photostroms (Anzahl der Photoelektronen pro Zeit)

von den Eigenschaften des Lichts und des Festkörpers.

Bitte wenden

Hausaufgaben (zu besprechen ab 23.04.2024)

Aufgabe 4:

In dieser Aufgabe soll die Instabilität von Atomen in der klassischen Physik untersucht werden. Wir vernachlässigen relativistische Effekte.

Im Rutherfordschen Atommodell bewegen sich die Elektronen auf Ellipsenbahnen um den Kern, analog zur Planetenbewegung im Sonnensystem. Wir betrachten ein Elektron in einem Wasserstoffatom auf einer Kreisbahn mit dem Radius r und nehmen an, dass sich der Kern (das Proton) nicht bewegt. Das Elektron erfährt eine Radialbeschleunigung a_r gemäß

$$ma_r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, r^2}. \tag{1}$$

Für eine Kreisbahn können wir diese Kraft auch als Zentripetalkraft schreiben,

$$ma_r = \frac{mv^2}{r}. \tag{2}$$

Die Gesamtenergie des Systems ist

$$E = T + V = \frac{1}{2}\, mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{e^2}{r}. \tag{3}$$

Eine beschleunigte Ladung strahlt jedoch Energie ab. Die Verlustleistung ist gegeben durch die Larmor-Formel (hier ohne Herleitung)

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0\, c^3}, \tag{4}$$

wobei a die Beschleunigung des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Die Abstrahlung führt dazu, dass das Elektron klassisch auf einer Spiralbahn in den Kern hinein fällt. Wir nehmen näherungsweise an, dass die Änderung des Radius während eines Umlaufs klein ist. Dann können wir weiterhin die obigen Formeln für die Kreisbewegung verwenden.

(a) Zeigen Sie, dass die klassische Bewegungsgleichung für den Bahnradius $r(t)$ gegeben ist durch

$$\dot{r} = -\frac{4}{3}\, c\, \frac{r_0^2}{r^2} \tag{5}$$

mit dem sogenannten „klassischen Elektronenradius“

$$r_0 := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{mc^2} = 2{,}8\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}. \tag{6}$$

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (5) für den Anfangsradius $r(0) = a_B := 5{,}3\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$ (Bohr-Radius). Wie lange würde es dauern, bis das Elektron in den Kern fällt, d.h. bis $r = 0$ wird?

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel die Energieniveaus eines Teilchens der Masse m in den folgenden eindimensionalen Potentialen. Skizzieren Sie auch die klassischen Phasenraumbahnen.

(a) Kasten der Länge L mit elastischer Reflexion an den Wänden.

(b) $V = a\,x^4$, $a > 0$ konstant. *Hinweis*:

$$\int_0^{x_0} dx\,\sqrt{x_0^4 - x^4} = \frac{2}{3}\,K(-1)\,x_0^3\,,$$

wobei $K(-1) \approx 1{,}311$ ist [$K(x)$ ist das „vollständige elliptische Integral erster Art“].

(c) $V = f\,|x|$, $f > 0$ konstant. Hier könnte nützlich sein, dass gilt (wieso?)

$$\oint p\,dx = -\oint x\,dp\,.$$