

---

**Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023**

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm

Blatt 10

---

**Präsenzübungen****Aufgabe 1:**

Der Hamilton-Operator  $\hat{H}$  eines Systems sei invariant unter Zeitumkehr.  $\hat{A}$  sei eine Observable, die unter Zeitumkehr ungerade ist:

$$\hat{T}\hat{A}\hat{T}^\dagger = -\hat{A}$$

(welche Beispiele gibt es dafür?). Sei  $|\psi\rangle$  ein nicht entarteter Eigenzustand von  $\hat{H}$ . Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von  $\hat{A}$  im Zustand  $|\psi\rangle$  verschwindet.

**Aufgabe 2:**

Zwei Punktteilchen mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  mit der Gesamtenergie  $E$  werden durch die Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  beschrieben, die die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$H\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

erfüllt. Bei Abwesenheit eines äußeren Potentials hat der Hamilton-Operator die Form

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

- (a) Führen Sie Schwerpunktkoordinaten  $\vec{R}$  und Relativkoordinaten  $\vec{r}$  ein. Bestimmen Sie die zu  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  kanonisch konjugierten Impulsoperatoren (Kettenregel!). Schreiben Sie den Hamilton-Operator in Abhängigkeit von den Koordinaten  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  sowie ihren kanonischen Impulsoperatoren.
- (b) Zeigen Sie, dass sich die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung durch den Ansatz  $\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \phi(\vec{R})\psi(\vec{r})$  separieren lässt. Diskutieren Sie die resultierenden Gleichungen.

**Hausaufgaben** (zu besprechen ab 26.06.2023)**Aufgabe 3:**

Betrachten Sie das Elektron im Wasserstoff-Atom. Berechnen Sie für den Grundzustand

- (a) den wahrscheinlichsten Wert des Abstandes des Elektrons vom Kern,
- (b) die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Abstand  $r > a_B$  anzutreffen ( $a_B$  ist der Bohr-Radius),
- (c) den Erwartungswert und die mittlere quadratische Schwankung dieses Abstandes,
- (d) den wahrscheinlichsten Wert für den Impulsbetrag.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 4:**

Eigenfunktionen des Hamilton-Operators für Zentralpotentiale sind hinsichtlich der magnetischen Quantenzahl  $m$  entartet. Daher müssen Linearkombinationen solcher Eigenfunktionen wieder Eigenfunktionen zu derselben Energie sein. Betrachten Sie speziell für das Wasserstoff-Atom die Eigenfunktionen  $\psi_{2,1,-1}(\vec{r})$  und  $\psi_{2,1,1}(\vec{r})$ .

(a) Zeigen Sie explizit, dass

$$\begin{aligned}\phi_1(\vec{r}) &:= \frac{\psi_{2,1,-1}(\vec{r}) - \psi_{2,1,1}(\vec{r})}{\sqrt{2}}, \\ \phi_2(\vec{r}) &:= i \frac{\psi_{2,1,-1}(\vec{r}) + \psi_{2,1,1}(\vec{r})}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Eigenfunktionen des Hamilton-Operators sind. (Ein Computeralgebrasystem, z.B. Mathematica oder MatLab, ist hier nützlich, aber nicht erforderlich.)

(b) Überprüfen Sie, dass  $\phi_1(\vec{r})$  und  $\phi_2(\vec{r})$  reell sind. Skizzieren Sie  $\phi_{1,2}(\vec{r})$  im Raum. Wie sehen Isoflächen ( $|\phi_{1,2}(\vec{r})|^2 = \text{const}$ ) aus, im Vergleich zu Isoflächen von  $\psi_{2,1,0}(\vec{r})$ ?