Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 7

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein Dirac-Raum aufgespannt durch die uneigentlichen Vektoren $|p\rangle$ mit $p \in \mathbb{R}$. Die $|p\rangle$ seien orthonormiert:

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p').$$

Betrachten Sie die beiden Vektoren

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi dp\, \cos p\, |p\rangle,$$
$$|\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi dp\, \sin p\, |p\rangle.$$

Berechnen Sie die Norm von $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ sowie deren Skalarprodukt.

Aufgabe 2:

Der Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Systems sei $\hat{H}$. Weiter möge ein unitärer Operator $\hat{U}$ existieren, der mit $\hat{H}$ *antikommutiert*:

$$\hat{H}\hat{U} = -\hat{U}\hat{H}.$$

(a) Sei $|\psi\rangle$ ein normierter Eigenzustand von $\hat{H}$ zur Eigenenergie E. Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ auch einen Eigenzustand zur Energie $-E$ hat und bestimmen Sie diesen.

(b) Ein unitärer Operator, der auf dem gesamten Hilbert-Raum definiert ist, hat ein vollständiges Orthonormalsystem $\{|u_i\rangle\}$ von Eigenzuständen, die

$$\hat{U}\, |u_i\rangle = u_i\, |u_i\rangle$$

erfüllen. Betrachten Sie die Matrixelemente $\langle u_i|\hat{H}|u_j\rangle$ von $\hat{H}$. Zeigen Sie, dass $\langle u_i|\hat{H}|u_j\rangle \neq 0$ nur möglich ist, wenn $u_i^* u_j = -1$ gilt. Was folgt für die Diagonalelemente $\langle u_i|\hat{H}|u_i\rangle$? *Hinweis*: Es gilt $\hat{H} = -\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}$ (wieso?).

Bitte wenden

Hausaufgaben (zu besprechen ab 05.06.2023)

Aufgabe 3:

Ein quantenmechanisches System sei durch einen zeitabhängigen Hamilton-Operator der speziellen Form

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 \, f(t)$$

charakterisiert. Hier ist $\hat{H}_0$ ein zeitunabhängiger hermitescher Operator und $f(t)$ eine reelle Funktion der Zeit.

(a) Bestimmen Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$. Wieso ist er von einfacherer Form als für einen ganz allgemeinen zeitabhängigen Hamilton-Operator?

(b) Bestimmen Sie konkret den Zeitentwicklungsoperator für ein Zwei-Niveau-System mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H}(t) = -b \, \sigma_x \, \sin \omega t,$$

siehe auch Aufgabe 4 von Blatt 6. *Hinweis*: Taylor-Entwicklung und Potenzen von σ_x betrachten!

Aufgabe 4:

Ein quantenmechanisches System werde durch den Hamilton-Operator $\hat{H}$ beschreiben. Außerdem soll es eine gerade Anzahl $2N$ selbstadjungierter Operatoren $\hat{A}_n$, $n = 1, \ldots, 2N$ geben mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \hat{A}_n^2 &= \mathbb{1}, \\ [\hat{A}_n, \hat{H}] &= 0, \\ \hat{A}_m \hat{A}_n &= -\hat{A}_n \hat{A}_m \quad \text{für } m \neq n. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung sagt aus, dass die $\hat{A}_n$ Erhaltungsgrößen sind. Aufgrund der dritten Gleichung sind sie aber nicht verträglich – die $\hat{A}_n$ kommutieren nicht miteinander, sondern sie *antikommutieren*.

(a) Wir definieren $\hat{B}_j := i\hat{A}_{2j-1}\hat{A}_{2j}$ für $j = 1, \ldots, N$. Zeigen Sie, dass die $\hat{B}_j$ hermitesch (sogar selbstadjungiert) sind.

(b) Welche Eigenwerte können die $\hat{B}_j$ haben? *Hinweis*: Betrachten Sie $\hat{B}_j^2$.

(c) Zeigen Sie, dass die $\hat{B}_j$ mit $\hat{H}$ und untereinander kommutieren. Was folgt daraus für ihre Eigenzustände?

(d) Sei $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$ zum Eigenwert E. Zeigen Sie, dass $\hat{A}_n |\psi\rangle$ überhaupt ein Zustand und insbesondere auch ein Eigenzustand von $\hat{H}$ zum Eigenwert E ist.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe der bisher erzielten Ergebnisse, dass es mindestens 2^N linear unabhängige Eigenzustände von $\hat{H}$ zu demselben Eigenwert E gibt. (In anderen Worten: Der von den entarteten Eigenvektoren aufgespannte Unterraum des Hilbert-Raums hat mindestens die Dimension 2^N.) *Hinweis*: Wie verhalten sich $\hat{A}_n$ und $\hat{B}_j$ zueinander?