TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 3

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich $\rho = |\psi|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren lässt. Dafür muss gelten

$$\rho(\vec{r},t) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \rho(\vec{r},t) \geq 0 \quad \forall \vec{r}, t, \tag{1}$$

$$\int d^3r\, \rho(\vec{r},t) = 1 \quad \forall t. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(\vec{r},t)$ selbst nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann: ψ soll zur Zeit $t = 0$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllen. Zeigen Sie, dass dann ψ i. A. für $t > 0$ nicht reell ist. Zeigen Sie weiter, dass die „Gesamtwahrscheinlichkeit" $\int d^3r\, \psi(\vec{r},t)$ i. A. nicht erhalten ist. Betrachten Sie, wenn nötig, konkret Hamilton-Operatoren der Form $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})$.

(b) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$\rho_E = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right)$$

automatisch reell ist und $\int d^3r\, \rho_E(\vec{r},t)$ erhält, wenn $\hat{H}$ hermitesch ist. Interpretieren Sie ρ_E physikalisch.

Aufgabe 2:

Der Translationsoperator $T(\vec{a})$ ist definiert durch

$$T(\vec{a})\, \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}),$$

wobei $\psi(\vec{r})$ eine beliebige Wellenfunktion sein kann.

(a) Drücken Sie $T(\vec{a})$ durch den Impulsoperator $\hat{\vec{p}}$ aus.

Hinweis: Die Taylor-Reihe einer Funktion $f(\vec{r})$ um den Punkt $\vec{r}$ lautet

$$f(\vec{r} + \vec{d}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{d} \cdot \vec{\nabla})^n f(\vec{r}).$$

(b) Beweisen Sie:

$$T(\vec{a})\, \vec{r}\, T(\vec{a})^{-1} = \vec{r} + \vec{a}.$$

Hier ist $T(\vec{a})^{-1}$ der inverse Operator zu $T(\vec{a})$, analog definiert zur inversen Funktion. Die zu beweisende Gleichung ist demnach äquivalent zu

$$T(\vec{a})\, \vec{r} = (\vec{r} + \vec{a})\, T(\vec{a}).$$

Bitte wenden

Hausaufgaben (zu besprechen ab 07.05.2024)

Aufgabe 3:

Ein Teilchen bewege sich in einer Dimension in einem unbekannten Potential $V(x)$. Seine Wellenfunktion sei

$$\psi(x,t) = \phi(x)\, e^{-iEt/\hbar}.$$

(a) Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für $V(x)$ für gegebene Funktion $\phi(x)$ her.

(b) Bestimmen Sie das Potential für $\phi(x) = N\, e^{-x^2/2\sigma^2}$ mit $N, \sigma > 0$.

(c) Bestimmen Sie das Potential für $\phi(x) = N\, e^{-x/2l}$ mit $N, l > 0$ für $x > 0$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die kastenförmige Wellenfunktion, in einer Dimension,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\, \theta\left(\frac{L}{2} - |x|\right).$$

Hier ist $\theta(x)$ die Heavisidesche Stufenfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(x)$ normiert ist.

(b) Bestimmen Sie $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ und daraus die Schwankung $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

(c) Bestimmen Sie die Wellenfunktion im Impulsraum,

$$\tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x).$$

Drücken Sie $\tilde{\psi}(p)$ durch eine trigonometrische Funktion aus.

(d) Bestimmen Sie $\langle p \rangle$. *Hinweis*: Symmetrie ausnutzen!

(e) Welches mathematische Problem tritt auf, wenn Sie versuchen, $\langle p^2 \rangle$ und damit die Schwankung Δp zu bestimmen? Ist das Ergebnis konsistent mit der Heisenbergschen Orts-Impuls-Unschärferelation?