TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

## Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2023

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 6

### Präsenzübungen

**Aufgabe 1:**

$\mathcal{H}$ sei ein separabler Hilbert-Raum und $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ seien beliebige Zustände aus $\mathcal{H}$.

(a) Beweisen sie die Parallelogrammgleichung

$$||\alpha+\beta||^2 + ||\alpha-\beta||^2 = 2||\alpha||^2 + 2||\beta||^2.$$

(b) Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle\alpha|\beta\rangle| \leq ||\alpha||\,||\beta||.$$

*Hinweis*: Es ist zweckmäßig, zunächst den Vektor $|\beta\rangle$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $|\alpha\rangle$ zu zerlegen und dann $||\beta||^2$ zu berechnen.

(c) Verifizieren sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung

$$\Big|\, ||\alpha|| - ||\beta|| \,\Big| \leq ||\alpha+\beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta|| \,.$$

**Aufgabe 2:**

Es sei $\hat{p}$ der Impulsoperator im eindimensionalen Raum mit dem Definitionsbereich

$$D_{\hat{p}} = \big\{\psi \in L_2(\mathbb{R}) \,\big|\, \psi \text{ stetig differenzierbar}\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{p}$ hermitesch ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{p}$ nicht selbstadjungiert ist. *Hinweis*: Untersuchen Sie die Definitionsbereiche von $\hat{p}$ und $\hat{p}^\dagger$. Betrachten Sie Funktionen der Form $\sim e^{-|x|/l}$.

*Bitte wenden*

## Hausaufgaben (zu besprechen ab 22.05.2023)

### Aufgabe 3:

Betrachten Sie den *inversen harmonischen Oszillator* mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2.$$

Das Potential ist nach unten unbeschränkt.

Das System liegt also außerhalb der bisher betrachteten Klasse.

(a) Was erwarten Sie für das Spektrum und die Entartung?

(b) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen zu Eigenenergien $E$. Gehen Sie analog zum Fall des gewöhnlichen harmonischen Oszillators vor. Treiben Sie die Rechnung so weit wie möglich; eine geschlossene Lösung ausgedrückt durch elementare Funktionen existiert nicht. Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen typischerweiße nicht beschränkt sein können. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

### Aufgabe 4:

Der Hamilton-Operator für ein Zwei-Niveau-System sei

$$\hat{H} = -b\,\sigma_x,$$

wobei $b$ eine reelle Konstante und $\sigma_x$ eine Pauli-Matrix ist, siehe Aufgabe 1.

(a) Wie lautet der zugehörige Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$? Bestimmen Sie die $2\times 2$ Matrix $\hat{U}(t, t_0)$ explizit.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) den zeitabhängigen Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ für die Anfangsbedingung

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie damit die Erwartungswerte

$$\langle\psi(t)|\,\sigma_\alpha\,|\psi(t)\rangle$$

für $\alpha = x, y, z$.

(c) Bestimmen Sie analog den zeitabhängigen Zustandsvektor für die Anfangsbedingung

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deuten Sie das Ergebnis.

*Hinweis:* Benutzen Sie die Relationen für die Pauli-Matrizen, die Sie auf Blatt 5/Aufgabe 4 hergeleitet haben.