TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Übungen zur Quantentheorie 1, Sommersemester 2024

Dr. J. M. Link, Prof. Dr. C. Timm Blatt 4

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Nach der Bornschen Regel ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung einer Observablen $\hat{A}$ für den Ausgangszustand $\psi(\vec{r})$ den Eigenwert A zu messen, gegeben durch

$$p_A = |\langle \varphi_A, \psi \rangle|^2,$$

wobei $\varphi_A(\vec{r})$ die Eigenfunktion zum Eigenwert A ist.

(a) Zeigen Sie, dass die p_A die für Wahrscheinlichkeiten notwendigen Eigenschaften haben.

(b) Was ergibt sich, wenn $\psi(\vec{r})$ selbst eine Eigenfunktion von $\hat{A}$ ist? Interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Zeigen Sie, dass die Grössen $q_A := |\langle \varphi_A, \psi \rangle|$ nicht als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden können.

(d) Wie würde die Welt aussehen, wenn die Wahrscheinlichkeiten von Messwerten propotional zu $|\langle \varphi_A, \psi \rangle|$ wären?

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Wellenfunktion, in einer Dimension,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\, e^{-|x|/2\lambda}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(x)$ normiert ist.

(b) Bestimmen Sie $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$.

(c) Bestimmen Sie die Wellenfunktion im Impulsraum,

$$\tilde{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \psi(x).$$

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (c) $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$. Was schließen Sie über das Produkt der Schwankungen $\Delta x\, \Delta p$? Ist das Ergebnis konsistent mit der Heisenbergschen Orts-Impuls-Unschärferelation?

Hinweise:

$$\int_0^{\infty} dx\, x^n\, e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N}_0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a} \quad \text{für } a > 0.$$

Bitte wenden

Hausaufgaben (zu besprechen ab 14.05.2024)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das anziehende δ-Potential

$$V(x) = -\eta\,\delta(x) \quad \text{mit } \eta > 0$$

in einer Dimension.

(a) Wir suchen stetige Eigenfunktionen $\psi(x)$ des Hamilton-Operators. Zeigen Sie, dass die Ableitung $\psi'(x)$ bei $x = 0$ die Bedingung

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} [\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)] = -\frac{2m}{\hbar^2}\,\eta\,\psi(0)$$

erfüllen muss. *Hinweis*: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung über ein kleines Intervall um $x = 0$.

(b) Bestimmen Sie die ungebundenen Lösungen für Energien $E > 0$. Beachten Sie dabei, dass das Potential für $x \neq 0$ verschwindet. Bestimmen Sie den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten als Funktionen von E.

(c) Bestimmen Sie die Eigenenergien E_n und die normierten Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ für gebundene Zustände ($E_n < 0$). Wieviele gebundene Zustände existieren? Hängt dies vom Parameter η ab?

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion eines Teilchens im Kasten mit unendlich hohen Wänden (siehe z. B. Abschnitt 5.7) nach einer *Wiederkehrzeit* $T = 4mL^2/\pi\hbar$ in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt, d. h. dass

$$\psi(x, T) = \psi(x, 0)$$

gilt, und zwar für *jeden* Zustand, nicht nur für einen Eigenzustand.

(b) Was ist die *klassische* Wiederkehrzeit für die Energie E? In der klassischen Beschreibung führt das Teilchen außer elastischen Reflexionen an den Wänden eine gleichförmige Bewegung aus.

(c) Für welche Energie sind die klassische und die quantenmechanische Wiederkehrzeit gleich? Diskutieren Sie das Ergebnis.