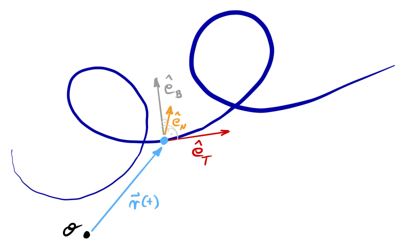
Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

1. Übung (Besprechung 10.4. - 14.4.)

1. Das begleitende Dreibein

Ein Massenpunkt bewege sich entlang einer Raumkurve (Trajektorie) $\vec{r}(t)$. Das Bogenlängenelement $\mathrm{d}\ell$ entlang der Trajektorie ist gegeben durch $\mathrm{d}\ell = |\mathrm{d}\vec{r}(t)| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t = v(t)\,\mathrm{d}t$. Die Bogenlänge ℓ ist ebenso wie die Zeit t ein geeigneter Parameter für die Beschreibung der Kinematik des Massenpunktes, wenn $\ell = \ell(t)$ bzw. $t = t(\ell)$ eindeutig umkehrbare Funktionen sind.



a) Zeigen Sie, dass gemäß der folgenden Definitionen der *Tangentenvektor* $\vec{e}_T := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\ell}$, der *Normalenvektor* $\vec{e}_N := \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}/|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}|$ und der *Binormalenvektor* $\vec{e}_B := \vec{e}_T \times \vec{e}_N$ ein (lokales) orthogonales und normiertes Dreibein bilden.

b) Zeigen Sie, dass die momentane Beschleunigung $\vec{a}$ die Komponentenzerlegung besitzt:

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_N\,, \qquad \vec{e}_N = R\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}\,,$$

wobei v der Betrag der momentanen Geschwindigkeit und R der momentane Krümmungsradius der Bahnkurve ist (Radius des Kreisbogens, durch den die Bahnkurve im Zeitintervall $[t, t+\mathrm{d}t]$ approximiert werden kann).

2. Teilchen auf einer Schraubenlinie

Ein Teilchen bewegt sich auf einer Trajektorie, die bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems gegeben ist durch

$$\vec{r}(t) = \rho\cos(\omega t)\,\vec{E}_x + \rho\sin(\omega t)\,\vec{E}_y + h\,\omega t\,\vec{E}_z\,. \tag{1}$$

Dabei sind ρ, ω und h vorgegebene Konstanten. Berechnen Sie für diese Bewegung

a) die Bogenlänge $\ell(t)$,

b) die Dreibeinvektoren $\{\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B\}$ und den momentanen Krümmungsradius der Bahnkurve,

c) die Komponenten der Kraft, die notwendig ist, um das Teilchen auf die Schraubenlinie zu zwingen.

d) Überlegen Sie sich eine geeignete Konfiguration elektrischer und magnetischer Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sowie geeignete Anfangsbedingungen $\vec{r}(t_0 = 0), \vec{v}(t_0 = 0)$, sodass die Schraubenlinie Gl. (1) als eine Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen (Masse m, Ladung q) unter Einwirkung der Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q\vec{E} + \frac{q}{c}\,\vec{v} \times \vec{B}$ resultiert.

3. Infinitesimale Drehungen und Drehvektor

Die spezielle Rotationsmatrix $R(\varphi)$ mit $\varphi = \varphi(t)$ vermittelt Drehungen um die z-Achse (siehe auch Präsenzübung, Aufgabe 3)

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Es gelte o.B.d.A. $\varphi(t_0) = 0$. Wir betrachten nun infinitesimale Drehungen zur Zeit t_0 um den Winkel $\mathrm{d}\varphi(t_0) = \dot{\varphi}(t_0)\mathrm{d}t \equiv \omega \mathrm{d}t$.

a) Zeigen Sie zunächst, dass gilt:

$$R(\mathrm{d}\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \omega\,\mathrm{d}t & 0 \\ -\omega\,\mathrm{d}t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \mathbb{1} + \Omega \mathrm{d}t \,.$$

b) Betrachten Sie nun eine infinitesimale Rotation um eine beliebige Drehachse. Benutzen Sie die allgemeine Eigenschaft einer Rotationsmatrix $RR^T = \mathbb{1}$ um zu zeigen, dass $R_{ij}(\mathrm{d}\varphi(t_0)) = \delta_{ij} + \Omega_{ij}\mathrm{d}t$ mit $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ gilt.

c) Begründen Sie warum die antisymmetrische Matrix Ω_{ij} mit Hilfe der drei Komponenten ω_k des sogenannten Drehvektors durch $\Omega_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\,\omega_k$ vollständig bestimmt ist. Überzeugen Sie sich, dass die Umkehrung $\omega_k = \frac{1}{2}\sum_{ij} \varepsilon_{ijk}\,\Omega_{ij}$ gilt. (ϵ_{ijk} bezeichnet das Levi-Civita-Symbol.) Wie sieht der Drehvektor $\vec{\omega}$ für das Beispiel aus Aufgabenteil a) aus?

d) Verifizieren mit Hilfe des Transformationsgesetzes für die Vektorkomponenten $x_i = \sum_j R^{-1}_{ij}\, x'_j$, dass für infinitesimale Drehungen (bei t_0) resultiert:

$$\mathrm{d}x_i = \sum_j \left(\delta_{ji}\mathrm{d}x'_j - \sum_k \varepsilon_{ijk}\,\omega_k \mathrm{d}t\, x'_j \right) \quad \text{bzw.} \quad v_i = v'_i + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\, x'_k \,. \tag{3}$$

e) Was folgt entsprechend Gl. (3) für $\mathrm{d}v_i$ bzw. für die Komponenten a_i der Beschleunigung?

4. Potential und Arbeit

Verwenden Sie die Darstellung des Vektorprodukts mittels des Levi-Civita-Symbols

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j \tag{4}$$

und verifizieren Sie die folgenden Identitäten:

a) $\nabla \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = 0\,, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) = \frac{2}{|\vec{r}|}$.

b) Ist das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \lambda\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls das dazugehörige skalare Potential $\Phi(\vec{r})$, sodass $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ gilt.

c) Ein geladenes Teilchen (Ladung q, Masse m) bewege sich in einem konstanten elektrischen und magnetischen Feld $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$. Durch die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q\,(\vec{E}_0 + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0)$ wird das Teilchen sowohl abgelenkt als auch beschleunigt. Berechnen Sie das Arbeitsintegral A entlang der Trajektorie $\vec{r}(t)$ von $P_0 = \vec{r}(t_0)$ bis $P_1 = \vec{r}(t_1)$

$$A = \int_\Gamma \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}_L \,, \qquad \Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [t_0, t_1]\} \,. \tag{5}$$