Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

---

8. Übung (Besprechung 5.6. - 9.6.)

1. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

a) Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei entlang einer Kurve $z = f(x)$ unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_g = m\,\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf und bestimmen Sie die Zwangskraft.

b) Ein Massenpunkt liegt im Schwerefeld auf dem obersten Punkt einer Kugel und beginnt von dort reibungsfrei herunter zu gleiten. Berechnen Sie die Zwangskraft. An welcher Stelle hebt der Massenpunkt von der Kugel ab?

Hinweis: Betrachten Sie die Bewegung in der x-z-Ebene. Nutzen Sie den Energiesatz. Beziehen Sie dabei die potentielle Energie auf den obersten Punkt.

2. Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle der Masse m kann sich reibungsfrei entlang eines geraden, zeitabhängig rotierenden Drahtes bewegen. Die Gerade des Drahtes ist durch die Gleichungen $y = 0$ und $z - \tan\omega t\, x = 0$ festgelegt. Sie rotiert also uniform mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)^T$ um die y-Achse. Ferner wirke auf die Perle die Schwerkraft $\vec{F}_g = (0, 0, -mg)^T$ ein.

Klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen und stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 1. Art auf. Berechnen Sie die Bewegung der Perle für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (r_0, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (0, 0, r_0\omega)^T$.

Überzeugen Sie sich, dass die Newton'schen Bewegungsgleichungen bezüglich des rotierenden Systems zum selben Ergebnis führt.

3. Kugelpendel

Ein Massenpunkt bewegt sich im homogenen Schwerefeld $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$ in einer kugelförmigen Schale. Wählen Sie günstige generalisierte Koordinaten für das Problem, geben Sie die Lagrange-Funktion an, und stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf. Welche Erhaltungsgrößen gibt es?

4. Massenpunkt auf einer Zylinderoberfläche

Ein Massenpunkt dem Masse m bewegt sich auf der Mantelfläche eines Zylinders (Radius R, z-Achse = Symmetrieachse) unter der gemeinsamen Einwirkung einer harmonischen Rückstellkraft und der Schwerkraft, so dass $\vec{F} = -k\vec{r} - mg\,\vec{e}_z$.

a) Überlegen Sie sich geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

b) Gibt es zyklische Koordinaten und - falls ja - welchen Erhaltungsgrößen entsprechen die dazugehörigen kanonischen Impulse?

c) Geben Sie für diesen Fall die Euler-Lagrange-Gleichungen an.

d) Bestimmen Sie die Bewegung des Massenpunkts für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$ und $\dot{\vec{r}}(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\,(0, 1, 1)$.