Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

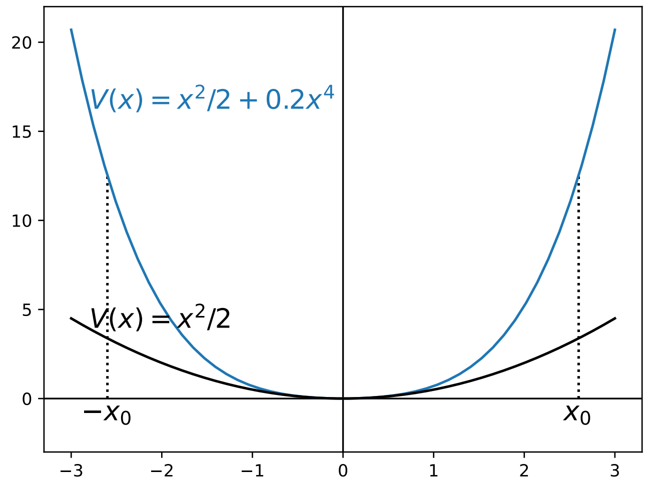
Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

Lösung – 3. Übung (Besprechung 24.4. - 28.4.)

1. Anharmonischer Oszillator

a) Gegeben sei das anharmonische Oszillatorpotential

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \alpha x^4 \,.$$



Das Teilchen bewegt sich unter dem Einfluss der daraus resultierenden Kraft $F(x) = -\partial_x V(x)$. Die Kraft ist also per Konstruktion konservativ. Entsprechend gilt die Erhaltung der Gesamtenergie.

Daraus können wir ableiten, dass das Teilchen nach einer Schwingung wieder zum Anfangsort x_0 zurück kehren wird (und dort zum Stehen kommt). Da das Potential symmetrisch zur x-Achse ist, $V(x) = V(-x)$, liegt der andere Umkehrpunkt bei $-x_0$. Das Teilchen oszilliert also zwischen x_0 und $-x_0$ hin und her.

Aufstellen der Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -V'(x) = -kx - 4\alpha x^3 \,.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -V'(x) = -kx - 4\alpha x^3 \quad \Big| \cdot \dot{x} \\
m\ddot{x}\dot{x} &= -V'(x)\dot{x} = -kx\dot{x} - 4\alpha x^3\dot{x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t)) \\
\Rightarrow \qquad 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + V(x(t))\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{ges}}) \,.
\end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ist, wie zu erwarten, eine Erhaltungsgröße (gilt für alle zeitunabhängigen Potentiale).

b) Umkehrpunkte folgen aus $E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}} - V(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned}
& 0 = \frac{k}{2}x^2 + \alpha x^4 - E_{\text{ges}} \qquad y := x^2 \\
\Rightarrow \quad & 0 = y^2 + \frac{k}{2\alpha}y - \frac{E_{\text{ges}}}{\alpha} \\
\Rightarrow \quad & y_0^{\pm} = -\frac{k}{4\alpha} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16\alpha^2} + \frac{E_{\text{ges}}}{\alpha}} \\
\Rightarrow \quad & x_0^{\pm} = \pm\sqrt{y_0^{+}} = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{k^2}{16\alpha^2} + \frac{E_{\text{ges}}}{\alpha}} - \frac{k}{4\alpha}} \equiv \pm x_0\,.
\end{aligned}$$

Die y_0^- Lösung scheidet aus, da lediglich die reellen Nullstellen physikalisch relevant als Umkehrbedingung sind. Man sieht also, dass es genau zwei Umkehrpunkte $x_< = -x_0$ und $x_> = +x_0$ gibt, zwischen denen das Teilchen hin und her oszilliert.

c) Da der Energiesatz die Geschwindigkeit mit dem Ort verknüpft, stellt er eine Differentialgleichung dar, die wie folgt geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{2}\dot{x}^2 = E_{\text{ges}} - V(x) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{m}\left(1 - \frac{V(x)}{E_{\text{ges}}}\right)} \\
\Rightarrow \quad & \pm\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{m}{2E_{\text{ges}}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1 - \frac{V(x)}{E_{\text{ges}}}\right)}}\,.
\end{aligned}$$

Es folgt für die Schwingungsdauer

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2E_{\text{ges}}}}\int_{-x_0}^{x_0}\mathrm{d}x\,\left(1 - \frac{V(x)}{E_{\text{ges}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

d) Für einen leicht anharmonischen Oszillator soll gelten $\alpha E_{\text{ges}} \ll k^2$. Die Substitution $V(x)/E_{\text{ges}} = \sin^2(\varphi)$ führt auf folgenden Zusammenhang zwischen x und φ, den wir nach x aufzulösen müssen

$$\begin{aligned}
& \frac{k}{2}x^2 + \alpha x^4 \stackrel{!}{=} E_{\text{ges}}\sin^2(\varphi) \qquad y := x^2 \\
\Rightarrow \quad & y^2 + \frac{k}{2\alpha}y = \frac{E_{\text{ges}}}{\alpha}\sin^2(\varphi) \\
\Rightarrow \quad & y(\varphi) = x^2(\varphi) = -\frac{k}{4\alpha} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16\alpha^2} + \frac{E_{\text{ges}}}{\alpha}\sin^2(\varphi)} \\
& = \frac{k}{4\alpha}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)}\right)\,.
\end{aligned}$$

Da aufgrund der anfänglichen Annahme $\alpha E_{\text{ges}}/k^2$ eine kleine Zahl ist, ist auch $\xi = \frac{16\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)$ ein kleine Zahl und der Wurzelausdruck $\sqrt{1+\xi}$ lässt sich wie folgt approximieren (Taylor-Entwicklung, das quadratische Glied muss berücksichtigt werden, damit die Entwicklung in Bezug auf x von erster Ordnung ist!)

$$\sqrt{1+\xi} = 1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \ldots\,.$$

Man erhält

$$y(\varphi) = x^2(\varphi) = \frac{k}{4\alpha}\left(-1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{16\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi) - \frac{1}{8}\frac{256\alpha^2 E_{\text{ges}}^2}{k^4}\sin^4(\varphi)\right)$$
$$= \frac{k}{4\alpha}\left(\frac{8\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi) - \frac{32\alpha^2 E_{\text{ges}}^2}{k^4}\sin^4(\varphi)\right) .$$

(Die "$-$" Lösung wird nicht berücksichtigt, da es sich bei $y(\varphi) = x(\varphi)^2$ um eine positive Größe handeln muss.)

$$x(\varphi) = \pm\sqrt{\frac{k}{4\alpha}\left(\frac{8\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi) - \frac{32\alpha^2 E_{\text{ges}}^2}{k^4}\sin^4(\varphi)\right)}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{k}}\sin(\varphi)\sqrt{1 - \frac{4\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)}$$
$$\approx \pm\sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{k}}\sin(\varphi)\left(1 - \frac{2\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)\right)$$

Um nun das Integral für die Schwingungsdauer mit der Substitution zu lösen braucht man noch den Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}x(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{k}}\left(\cos(\varphi)\left(1 - \frac{2\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)\right) - \sin(\varphi)\frac{2\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right)$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{k}}\cos(\varphi)\left(1 - \frac{6\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)\right) .$$

Für die Umkehrpunkte in der neuen Koordinate $\varphi(\pm x_0)$ gilt:

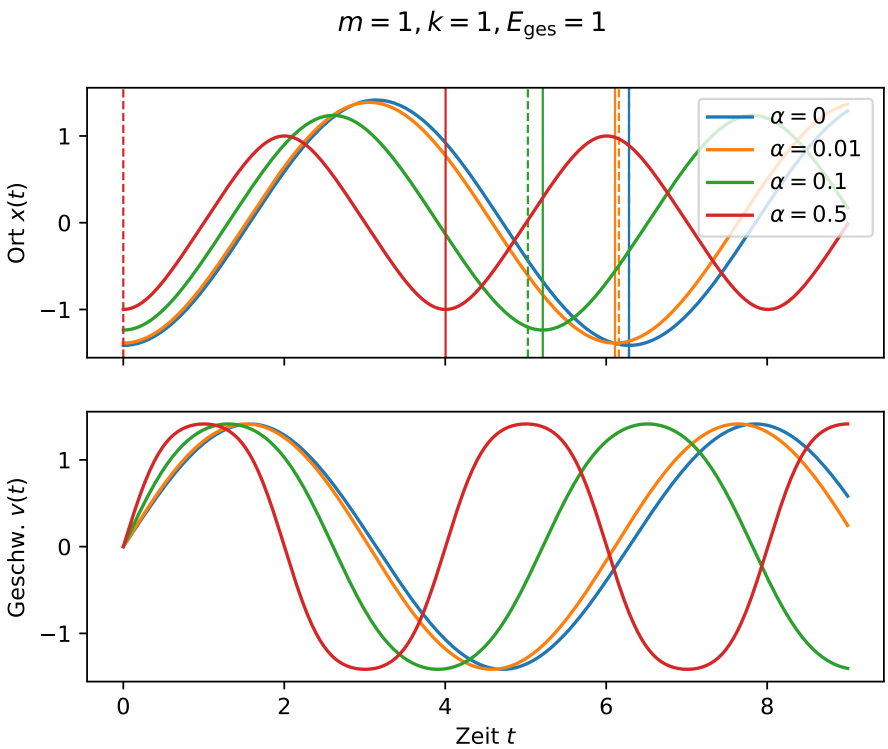
$$V(x_0^{\pm}) = E_{\text{ges}} = E_{\text{ges}}\sin^2(\varphi_0^{\pm}) \quad \Rightarrow \quad \varphi_0^{\pm} = \pm\frac{\pi}{2} .$$

Für die Schwingungsdauer folgt nun

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2E_{\text{ges}}}}\int_{-x_0}^{x_0}\mathrm{d}x\,\left(1 - \frac{V(x)}{E_{\text{ges}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2m}{E_{\text{ges}}}}\int_{\varphi_0^-}^{\varphi_0^+}\mathrm{d}\varphi\,\frac{\mathrm{d}x(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\left(1 - \sin^2(\varphi)\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2m}{E_{\text{ges}}}}\int_{\varphi_0^-}^{\varphi_0^+}\mathrm{d}\varphi\,\sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{k}}\cos(\varphi)\left(1 - \frac{6\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)\right)\cos^{-1}(\varphi)$$
$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\,\left(1 - \frac{6\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\sin^2(\varphi)\right)$$
$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\varphi - \frac{3\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\varphi + \frac{3\alpha E_{\text{ges}}}{2k^2}\sin(2\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

und damit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 - \frac{3\alpha E_{\text{ges}}}{k^2}\right) .$$

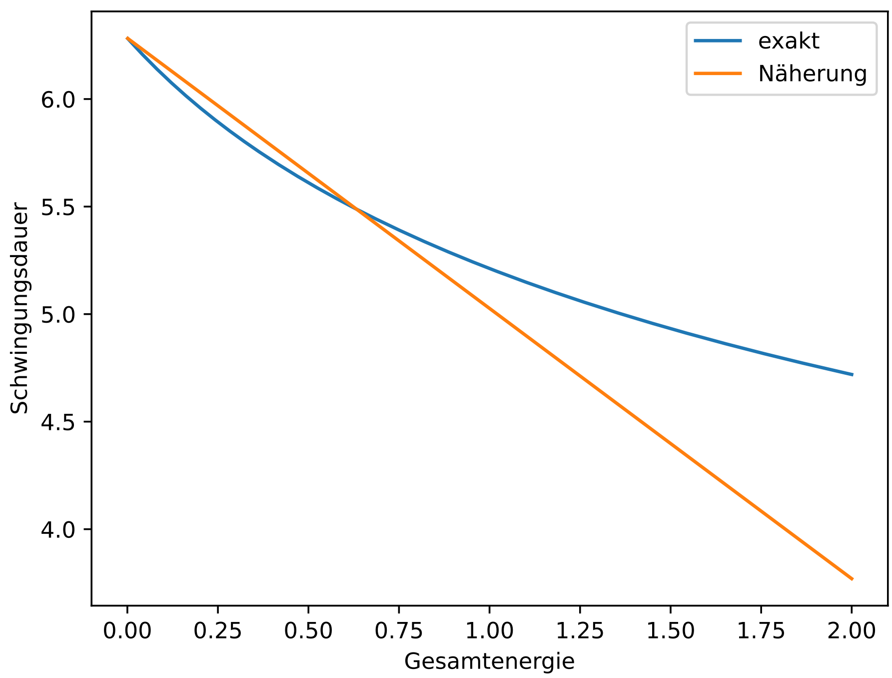


Dynamik des Massenpunkts für verschiedene Werte des Anharmonizitätsparameters α bei fester Energie $E_{\mathrm{ges}} = 1$. Die vertikalen durchgezogenen Linien entsprechen der exakten Periodendauer, die gestichelten Linien der näherungsweise bestimmten Periodendauer.

e) Python3 Quellcode:

```
from scipy.integrate import quad
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def V(x, k, a):
    # anharmonisches Potential
    return k/2*x**2 + a*x**4

# Konstanten
k = 1
m = 1
a = 0.1

# verschiedene Werte für die Gesamtenergie
E_values = np.linspace(0.001, 2, 150)
# Listen (noch leer) für die zu berechnenden Schwingungsdauern
T_values = []
T_aprx_values = []

for E in E_values:
    # zu E gehöriger Anfangsort, oBdA negativ gewählt
    x0 = -np.sqrt(np.sqrt(k**2/16/a**2 + E/a) - k/4/a)

    # numerische Integration
```

```
        T, T_err = quad(
            func=lambda x: (1 - V(x, k, a)/E)**(-0.5),
            a = -abs(x0),
            b = abs(x0),
        )
        # Skalierung
        T = 2*np.sqrt(m/2/E)*T

        # Näherungslösung
        T_aprx = 2*np.pi*np.sqrt(m/k)*(1 - 2*a*E/k**2)

        # füge Ergebnis den Listen hinzu
        T_values.append(T)
        T_aprx_values.append(T_aprx)

    # Erstellen des Diagrams
    plt.plot(E_values, T_values, label="exakt")
    plt.plot(E_values, T_aprx_values, label="Näherung")
    plt.legend()
    plt.xlabel("Gesamtenergie")
    plt.ylabel("Schwingungsdauer")
```



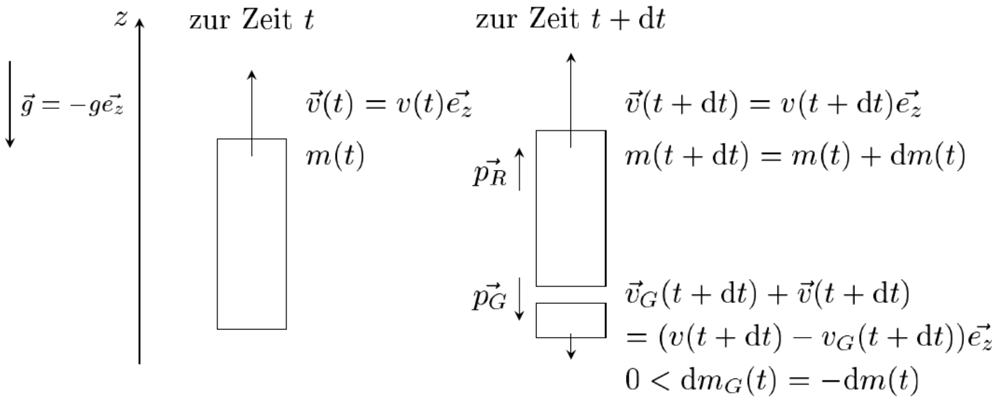
2. Raketengleichung

a) Wir finden die Bewegungsgleichung für einen Körper mit zeitabhängiger Masse (Rakete), indem wir für das Gesamtsystem "Rakete plus ausgestoßene (Schub verleihende) Verbrennungsgase" die Bilanzgleichung für den Gesamtimpuls $\vec{p}$ an zwei verschiedenen, infinitesimal benachbarter Zeitpunkten t und $t + \mathrm{d}t$ auswerten (siehe

Abbildung):

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = d\vec{p}(t) = \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}(t) = \vec{F}(t)\,.$$

$\vec{F}$ ist die auf die Rakete einwirkende äußere Schwerkraft.



Zur Zeit t zählt zum Gesamtsystem die Masse $m(t)$ der Rakete, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bewegt, d.h. es gilt

$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t) \equiv \vec{p}_R(t).$$

Zur Zeit $t + dt$ setzt sich der Gesamtimpuls des Systems zusammen aus:

- dem Impuls der Rakete

$$\vec{p}_R(t+\mathrm{d}t) = m(t+\mathrm{d}t)\vec{v}(t+\mathrm{d}t) = m(t+\mathrm{d}t)v(t+\mathrm{d}t)\,\vec{e}_z$$

- dem Impuls der ausgestoßenen Verbrennungsgase

$$\vec{p}_G(t+\mathrm{d}t) = dm_G(t)\,[\vec{v}(t+\mathrm{d}t) + \vec{v}_G(t+\mathrm{d}t)] = dm_G(t)\,[v(t+\mathrm{d}t) - v_G(t+\mathrm{d}t)]\,\vec{e}_z.$$

Dabei ist $m(t+\mathrm{d}t)$ und $\vec{v}(t+\mathrm{d}t)$ die verbleibende Masse und Geschwindigkeit der Rakete sowie $dm_G(t) = -\dot{m}(t)\,\mathrm{d}t$ die Masse der mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_G(t+\mathrm{d}t)$ (relativ zur Rakete) austretenden und Schub verleihenden Verbrennungsgase. Wir schreiben die Impulsbilanz auf:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{p}(t) &= \vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = m(t)\vec{g}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big(p_R(t+\mathrm{d}t) + p_G(t+\mathrm{d}t) - p_R(t)\Big)\vec{e_z} \\
&= \Big((m(t)+\mathrm{d}m(t))(v(t)+\mathrm{d}v(t)) + \mathrm{d}m_G(t)(v(t)+\mathrm{d}v(t) - (v_G(t)+\mathrm{d}v_G(t))) \\
&\qquad - m(t)v(t)\Big)\vec{e_z} \\
&= -m(t)g\,\mathrm{d}t\,\vec{e_z}\,.
\end{aligned}$$

Dies ergibt als lineare Gleichung in den Differentialen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}p(t) &= p(t+\mathrm{d}t) - p(t) \\
&= m(t)\mathrm{d}v(t) + v(t)\mathrm{d}m(t) + \mathrm{d}m_G(t)\,(v(t) - v_G(t)) \\
&= \mathrm{d}\,(m(t)\,v(t)) + \mathrm{d}m_G(t)\,(v(t) - v_G(t))
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{d}p(t) = dp_R(t) + dp_G(t) = -m(t)g\mathrm{d}t\,.$$

Diese Gleichung für die Gesamtimpulsänderung dp zeigt den Antriebsmechanismus auf: Neben der wirkenden Schwerkraft $F(t) = -m(t)g$ erfährt die Rakete noch eine zusätzliche Schubkraft aufgrund der ausgestoßenen Verbrennungsgase, deren Impuls $\mathrm{d}p_G = \mathrm{d}m_G\,(v(t) - v_G(t))$ durch die Masse dm_G und die Austrittsgeschwindigkeit $v(t) - v_G(t)$ (bezogen auf Erde) bestimmt wird.

Die Impulsänderung der Rakete setzt sich demnach aus dem gravitativen Anteil $F(t)\mathrm{d}t$ und dem auf die Rakete übertragenen Impuls $-\mathrm{d}p_G = \mathrm{d}m_G\,(v_G(t) - v(t))$ zusammen. Es folgt somit die Impulsänderung der Rakete

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p_R(t) &= \mathrm{d}(m(t)v(t)) = F(t)\mathrm{d}t - \mathrm{d}p_G\\ &= -m(t)g\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}m_G\,(v_G(t) - v(t))\,.\end{aligned}$$

Da nun $\mathrm{d}m_G = -\mathrm{d}m$ gilt, folgt die Differentialgleichung für die momentane Geschwindigkeit der Rakete vom Erdboden ausgesehen

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu(t)v_G(t)}{m(t)} - g$$

wobei

$$\mu(t) = -\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho_G(t)\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \rho_G(t)A\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \rho_G(t)Av_G(t)\,.$$

b) Seien nun v_G und μ konstant. Aus $\mu(t) = -\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = \mu = \text{const} > 0$ folgt

$$m(t) = m_0 - \mu t\,,$$

und es bleibt die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu v_G}{m_0 - \mu t} - g$$

durch Integration für $v(t)$ zu lösen:

$$\begin{aligned}v(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t'\,\frac{\mu v_G}{m_0 - \mu t'} - g\\ &= \left[\mu v_G \ln(m_0 - \mu t')\frac{1}{-\mu} - gt'\right]_0^t\end{aligned}$$

$$v(t) = -v_G \ln\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) - gt$$

Startbedingung, positive Beschleunigung

$$0 < a(t = 0) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu v_G}{m_0} - g \Leftrightarrow m_0 g < \mu v_G$$

3. Lasso (Massenpunkt an einem Faden)

a) Die Symmetrie des Problems legt es nahe Zylinderkoordinaten zu verwenden. Da sich die Dynamik in der x-y Ebene abspielen soll, gilt außerdem $z = 0$. Für die Newton'sche Bewegungsgleichung $\vec{F} = m\vec{a}$ benötigen wir die Beschleunigung. Diese erhalten wir (allgemein) in Zylinderkoordinaten wie folgt:

- Ortsvektor

$$\begin{aligned}
\vec{r}(\rho,\varphi,z) &= \rho\vec{e}_\rho(\varphi) + z\vec{e}_z \qquad \text{mit} \quad \vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y \\
\Rightarrow \quad & \vec{e}_\varphi \sim \partial_\varphi\vec{r} \sim \partial_\varphi\vec{e}_\rho = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y \\
\Rightarrow \quad & \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y
\end{aligned}$$

- Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

- Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \dot{\vec{v}} \\
&= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \\
&= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

In unserem konkreten Fall mit $z = 0$ (Polarkoordinaten) folgt also

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi \ .
\end{aligned}$$

Da die Kraft nur entlang des Fadens übertragen werden kann, gilt $\vec{F} = F\vec{e}_\rho$. Aus der Newton'sche Bewegungsgleichung folgen somit die zwei Gleichungen (Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten)

$$F = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \ , \qquad 0 = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \ .$$

b) Da im vorliegenden Fall $\vec{F}||\vec{r}$ stets erfüllt ist, gilt die Erhaltung des Drehimpulses $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$.
Allgemein folgt dies unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

für $\vec{F}||\vec{r}$ verschwindet.
Im hier betrachteten Fall ist diese Aussage gleichbedeutend mit der zweiten Gleichung der obigen Bewegungsgleichungen. Mit

$$\vec{L} = \rho\vec{e}_\rho \times m(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

folgt unmittelbar

$$\dot{\vec{L}} = m\rho(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_z = 0 \ .$$

Die Drehimpulserhaltung ist äußerst nützlich, da wir $\dot{\varphi}$ durch ρ ausdrücken können

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{m\rho^2}$$

wobei L_0 der durch die Anfangsbedingung festgelegte Anfangsdrehimpuls ist.

c) Wir betrachten nun die Bewegung auf einer Kreisbahn, d.h. $\rho =$ konst.

Die verrichtete Arbeit entspricht der Energiedifferenz zwischen den Kreisbahnen mit Radius r_0 und $r_0/2$. Die Energie des Massenpunktes ist gerade seine kinetische Energie

$$E(\rho) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{L_0^2}{2m\rho^2} \ .$$

Um den Radius der Kreisbahn von r_0 aud $r_0/2$ zu verringern, muss also die Arbeit

$$A = E_{\text{Ende}} - E_{\text{Anf.}} = E(r_0/2) - E(r_0) = 4\frac{L_0^2}{2m\rho_0^2} - \frac{L_0^2}{2m\rho_0^2} \equiv 3E_0$$

aufgebracht werden.

Bemerkung: Dies ist konsistent mit dem Bild, dass wir den Faden mit einer gewissen Kraft festhalten müssen. Um die Länge zu verändern müssen wir gegen diese Kraft ziehen und somit Arbeit verrichten.

Die Kraft mit der der Massenpunkt auf der Kreisbahn gehalten wird lässt sich aus dessen Beschleunigung (siehe a) ableiten. Auf der Kreisbahn gilt ja $\dot{\rho} = 0$ und damit auch $\ddot{\varphi} = -2\dot{\rho}\dot{\varphi}/\rho = 0$. Wir finden als Kraft die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{\text{ZF}} = m\vec{a} = -m\rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = -\frac{L_0^2}{m\rho^3} e_\rho =: F_{\text{ZF}}(\rho)\vec{e}_\rho$$

mit der der Faden am Massenpunkt zieht.

Gegen diese Kraft müssen wir am Faden ziehen und erhalten somit als Arbeit

$$A = \int_{r_0}^{r_0/2} \mathrm{d}\rho \, F_{\text{ZF}}(\rho) = -\frac{L_0^2}{m}\left[\frac{1}{-2}\rho^{-2}\right]_{r_0}^{r_0/2} = 3\frac{L_0^2}{mr_0^2} \ .$$

d) Sei nun $\rho(t) = kt$. Die Bahnkurve $\varphi(\rho)$ folgt aus der Überlegung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho} &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \frac{L_0^2}{m\rho^2}\frac{1}{k} \\ \Rightarrow \quad \varphi(\rho) - \varphi(\rho_0) &= \frac{L_0^2}{mk}\int_{\rho_0}^{\rho} \mathrm{d}\rho' \frac{1}{\rho'^2} \\ \Rightarrow \quad \varphi(\rho) &= \varphi_0 + \frac{L_0^2}{mk}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \ . \end{aligned}$$

Für unendlich große Zeiten geht $\rho \to \infty$. Der Winkel nähert sich also asymptotisch dem Wert $\varphi(\infty) = \varphi_0 + \frac{L_0^2}{mk}\frac{1}{\rho_0}$ an.