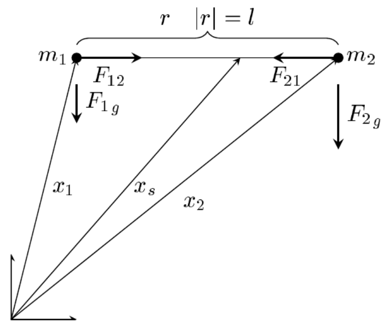
Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

Lösung – 5. Übung (Besprechung 8.5. - 12.5.)

1. Zweikörperproblem im Schwerefeld der Erde

a) Skizze der Anordnung:



Schwerpunkts- und Relativkoordinate:

$$\vec{x}_s = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M} \tag{1}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \tag{2}$$

Bewegungsgleichung der Massen:

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1 = m_1\vec{g} + \vec{F}_{12} \tag{3}$$

$$m_2\ddot{\vec{x}}_2 = m_2\vec{g} + \vec{F}_{21} \tag{4}$$

Die Addition dieser liefert

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = (m_1 + m_2)\vec{g} + \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{0} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \qquad M\ddot{\vec{x}}_s = M\vec{g}\,. \tag{6}$$

Der Schwerpunkt verhält sich wie ein Massenpunkt der Masse $M = m_1 + m_2$ im Schwerefeld der Erde. Mit $\vec{x}_s(t = 0) = 0$ und $\dot{\vec{x}}_s(t_0) = \vec{v}_0$ erhält man

$$\boxed{\vec{x}_s(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t}\,. \tag{7}$$

b) Aus Gl. 1 und Gl. 2 folgt

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_s - \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \vec{x}_2 = \vec{x}_s + \frac{m_1}{M}\vec{r}\,. \tag{8}$$

Damit lässt sich der Gesamtdrehimpuls wie folgt schreiben

$$\vec{L} = \quad m_1(\vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1) + m_2(\vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2) \tag{9}$$

$$= \quad m_1((\vec{x}_s - \frac{m_2}{M}\vec{r}) \times (\dot{\vec{x}}_s - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}})) + m_2((\vec{x}_s + \frac{m_1}{M}\vec{r}) \times (\dot{\vec{x}}_s + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}})) \tag{10}$$

$$= \quad m_1(\vec{x}_s \times \dot{\vec{x}}_s) - \frac{m_1 m_2}{M}\vec{r} \times \dot{\vec{x}}_s - \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\vec{r}} \times \vec{x}_s + m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{11}$$

$$+m_2(\vec{x}_s \times \dot{\vec{x}}_s) + \frac{m_2 m_1}{M}\vec{r} \times \dot{\vec{x}}_s + \frac{m_2 m_1}{M}\dot{\vec{r}} \times \vec{x}_s + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{12}$$

$$= \quad M(\vec{x}_s \times \dot{\vec{x}}_s) + \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{13}$$

$$= \quad M(\vec{x}_s \times \dot{\vec{x}}_s) + \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \equiv \vec{L}_s + \vec{L}_r\,, \tag{14}$$

Für L_s gilt explizit

$$\vec{L}_s = M\left(\vec{x}_s \times \dot{\vec{x}}_s\right) \tag{15}$$

$$= M\left(\left(\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t\right) \times (\vec{g}t + \vec{v}_0)\right) \tag{16}$$

$$= M\left(\left(\frac{1}{2}\vec{g}t^2 \times \vec{v}_0\right) + (\vec{v}_0 t \times \vec{g}t)\right) \tag{17}$$

$$= M\left(\left(\frac{t^2}{2}\vec{g} \times \vec{v}_0\right) - t^2(\vec{g} \times \vec{v}_0)\right) \tag{18}$$

$$= -\frac{Mt^2}{2}\vec{g} \times \vec{v}_0\,. \tag{19}$$

c) Die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung lautet:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{x}}_2 - \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{g} + \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \left(\vec{g} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}\right) \tag{20}$$

$$\Rightarrow \qquad \mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}\,. \tag{21}$$

Da $\vec{F}_{12}$ entlang der Verbindungslinie verläuft, und diese gleich der Relativkoordinate ist, gilt

$$\vec{F}_{12} \sim \vec{r}\,. \tag{22}$$

Es handelt sich bei $\vec{F}_{12}$ also um eine Zentralkraft.
Für die Zeitabhängigkeit des Relativdrehimpulses findet man

$$\dot{\vec{L}}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu\left(\underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}_{0} + \underbrace{(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})}_{0}\right) = 0\,. \tag{23}$$

Der Relativdrehimpuls ist demnach zeitlich konstant (Erhaltungsgröße).

d) Da die zwei Massen mit einer Stange verbunden sind gilt $|\vec{r}| = l =$ konst.. Bei der Relativbewegung handelt es sich demnach um eine Kreisbewegung. In Polarkoordinaten gilt daher

$$\vec{r} = |\vec{r}|\vec{e}_r = l\vec{e}_r \tag{24}$$

$$\dot{\vec{r}} = |\vec{r}|\dot{\vec{e}}_r = l\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,, \tag{25}$$

also $\vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$. Daher gilt

$$|\vec{L}| = \mu|(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})| = \mu|\vec{r}||\dot{\vec{r}}| = \mu l^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega = \frac{|\vec{L}|}{\mu l^2} = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \omega t\,. \tag{27}$$

Mit $\vec{e}_r = \cos(\varphi(t))\vec{e}_x + \sin(\varphi(t))\vec{e}_y$ folgt

$$\vec{r} = l(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)\,. \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

$\vec{r}$ beschreibt jetzt die Bewegung der Masse m_2 von der Masse m_1 aus gesehen. Von Interesse ist nun aber die Bewegung der Massen vom gemeinsamen Schwerpunkt aus betrachtet. Für diese Abstände gilt

$$\vec{r}_1 = \vec{x}_1 - \vec{x}_s = \vec{x}_s - \frac{m_2}{M}\vec{r} - \vec{x}_s = -\frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{30}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_1| = \frac{m_2}{M} l = \text{konst.} \tag{31}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{x}_2 - \vec{x}_s = \vec{x}_s + \frac{m_1}{M}\vec{r} - \vec{x}_s = +\frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{32}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_2| = \frac{m_1}{M} l = \text{konst.} \tag{33}$$

außerdem

$$\dot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} = +|r_1|\omega(\sin(\omega t)\vec{e}_x - \cos(\omega t)\vec{e}_y) \tag{34}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = +\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}} = -|r_2|\omega(\sin(\omega t)\vec{e}_x - \cos(\omega t)\vec{e}_y) \tag{35}$$

Die Bahnen der Massen m_1 und m_2 sind also Kreisbahnen mit Radius $|\vec{r}_1| = \frac{m_2}{M} l$ und $|\vec{r}_2| = \frac{m_1}{M} l$ um den gemeinsamen Schwerpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{L}|/(\mu l^2)$ und $\frac{|\vec{r}_1|}{|\vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$.

2. Runge-Lenz-Vektor

a) Wir bestimmen β so, dass $\dot{\vec{\Lambda}} = 0$ gilt, d.h. $\vec{\Lambda}$ eine Erhaltungsgröße ist. Aufgrund der Kugelsymmetrie des Potentials handelt es sich um eine Zentralkraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\alpha\beta r^{\beta-1}\vec{e}_r.$$

Folglich gilt Drehimpulserhaltung $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$. Damit ergibt sich mit $F = \dot{\vec{p}}$ und $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha|}{\alpha}\dot{\vec{\Lambda}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} + \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{m\alpha}\dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2}\dot{r} \\ &= -\beta r^{\beta-2}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

Auswerten des doppelten Kreuzprodukt und nutzen dass $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}$ liefert

$$\frac{|\alpha|}{\alpha}\dot{\vec{\Lambda}} = -\beta r^{\beta-2}\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) + \beta r^{\beta-2}\dot{\vec{r}} r^2 + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^3}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\,.$$

Die Konstanz des Runge-Lenz-Vektors folgt also für $\boxed{\beta = -1}$.

b) Wegen $\dot{\vec{L}} = 0$ liegt $\vec{L}$ in einer festen Ebene. Für die Projektion von $\vec{r}$ auf $\vec{L}$ gilt:

$$\begin{aligned}\vec{L}\cdot\vec{r} = \Lambda r\cos\varphi &= \frac{\alpha}{|\alpha|}\left(\frac{1}{m\alpha}(\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}\right)\\ &= \frac{\alpha}{|\alpha|}\left(\frac{(\vec{r}\times\vec{p})\cdot\vec{L}}{m\alpha} + r\right) = \frac{L^2}{m|\alpha|} + \frac{\alpha}{|\alpha|}r\ .\end{aligned}$$

Durch Umstellen nach r ergibt sich

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{m|\alpha|}\left(\Lambda\cos\varphi - \frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^{-1}\ .$$

Dies folgt durch rein algebraische Überlegungen ohne Integration der Bewegungsgleichung aus der Konstanz von $\vec{L}$ und $\vec{L}$. Dabei zeigt $\vec{L}$ vom Brennpunkt der Bahn zum nächstgelegenen Bahnpunkt.

c) Aus b) mit $\alpha \mapsto -|\alpha|$ ergibt sich zunächst wieder die Bahngleichung

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{m|\alpha|}\left(1 + \Lambda\cos\varphi\right)^{-1}$$

Durch Vergleich mit der üblichen Ellipsengleichung sieht man, dass die Exzentrität gegeben ist durch $\varepsilon = \Lambda$.

3. Trägheitskräfte und Schwerkraft

Kräftefreie Bewegung bzgl. eines beliebigen Inertialsystems IS:

$$m_t\ddot{\vec{r}}(t) = 0 \tag{36}$$

Homogenes Schwerefeld, d.h. $\vec{F}_s = m_s\vec{g}$:

$$m_t\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_s = m_s\vec{g} \tag{37}$$

a) Sei BS′ in Bezugssystem mit konst. Beschleunigung. Es gilt $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)$ wobei $\vec{r}\,'(t)$ die Koordinaten BS′ bezeichnet und $\vec{R}(t) = \frac{\vec{a}}{2}t^2 + \vec{v}t + \vec{R}_0$.
Entsprechend erhält man in BS′:

$$m_t\ddot{\vec{r}}\,' = -m_t\vec{a} = \vec{F}_t \qquad \text{(Trägheitskräfte bzgl. BS}')$$

b) Inklusive Schwerkraft:
Ausgehend $m_t\ddot{\vec{r}}(t) = m_s\vec{g}$ im Inertialsystem IS, folgt for BS′:

$$m_t\ddot{\vec{r}}\,' = m_t\left(\ddot{\vec{r}}(t) - \ddot{\vec{R}}(t)\right) = m_s\vec{g} - m_t\vec{a} \equiv \vec{F}_{\text{eff}}\ .$$

c) Frei fallendes Bezugssystem BS″:
Im freien Fall gilt $\vec{a} = \vec{g}$. Gleichung (37) transformiert sich dann zu:

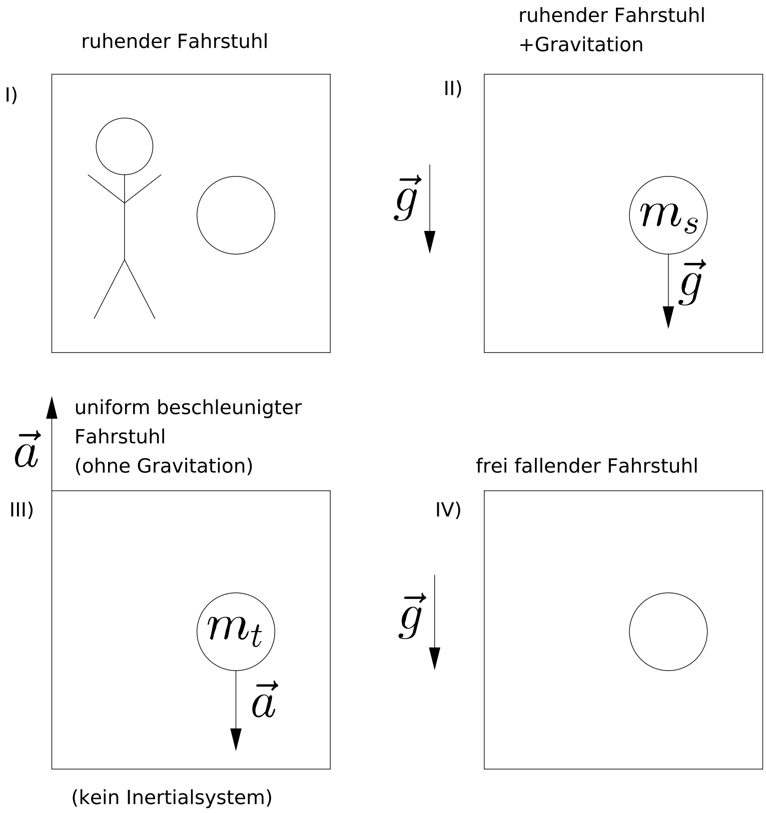
$$m_t\ddot{\vec{r}}\,'' = (m_s - m_t)\vec{g}\ .$$

Damit bezüglich des freifallenden Bezugssystems BS″ sich Massenpunkte kräftefrei bewegen, muss $m_t\ddot{\vec{r}}\,'' = 0$ erfüllt sein. Dies erfordert aber die Gleichheit von schwerer und träge Masse, d.h.

$$\underline{m_t = m_s = m}\ .$$

Für einen Beobachter in BS″ wirken auf den Massenpunkt keine (im Newtonschen Sinne einprägenden) Kräfte ein.

d) Äquivalenzprinzip:



Wenn das Äquivalenzprinzip gilt, dann kann ein Beobachter im frei fallenden Fahrstuhl (unten rechts in der Abbildung) nicht unterscheiden, ob er sich im freien Fall, oder in der Schwerelosigkeit befindet. Ein freifallender (nichtrotierender) Beobachter im homogenen Schwerefeld repräsentiert ein Inertialsystem.

4. Larmor Theorem

- Lorentzkraft: $\vec{F}_L = \frac{q}{c}\,\dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0$
- Im Inertialsystem IS gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L$
- Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem RS':

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

- Beschleunigung im rotierenden Bezugssystem RS':

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\vec{r}\,' \\ &= \left(\ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')\right).\end{aligned}$$

- Damit lässt sich die Bewegungsgleichung in den Koordinaten des rotierenden Bezugssystem RS' schreiben:

$$m\left(\ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')\right) \tag{38}$$

$$= \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{r}}' \times \vec{B}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \times \vec{B}_0\right) \tag{39}$$

- umstellen:

$$m\ddot{\vec{r}}' = -\left(2m\vec{\omega} + \frac{q}{c}\vec{B}_0\right) \times \dot{\vec{r}}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \times \left(\frac{q}{c}\vec{B}_0 + m\vec{\omega}\right). \tag{40}$$

- Der erste Term entfällt, falls man $\vec{\omega} = \vec{\omega}_L$ mit der *Larmorfrequenz*

$$\boxed{\vec{\omega}_L = -\frac{q}{2mc}\vec{B}_0}$$

wählt.

- Für diesen Fall lautet die Bewegunsggleichung:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}' &= \frac{q}{2c}(\vec{\omega}_L \times \vec{r}') \times \vec{B}_0 && (41)\\ &= \frac{q^2}{4mc^2}\vec{B}_0 \times (\vec{B}_0 \times \vec{r}') && (42)\\ &= \frac{q^2 B_0^2}{4mc^2} \underbrace{\left(\frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{r}')}{B_0}\frac{\vec{B}_0}{B_0} - \vec{r}'\right)}_{=:-\vec{r}'_\perp} && (43) \end{aligned}$$

wobei die Graßmann-Identität (BAC - CAB) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ benutzt wurde. Hierbei bezeichnet $\vec{r}'_\perp$ die Projektion des Ortsvektors senkrecht zum Magnetfeld. Der Vorfaktor beschreibt das Verhältnis von magnetischer Feldenergie zur Ruhenergie des Teilchens. Falls dieses Verhältnis vernachlässigbar ist, wird die Wirkung des Magnetfeldes nahezu kompensiert.
Wir können also mehrere Schlussfolgerungen ziehen: (i) Das mit $\vec{\omega}_L$ rotierende Bezugssystem repräsentiert näherungsweise ein Inertialsystem, da sich der führende Coriolis-Term heraushebt und der quadratische Term vernachlachlässigbar ist für $\frac{q^2 B_0^2}{4mc^2} \ll 1$. (ii) Die verbleibende Wirkung des Magnetfeldes äußert sich als Zentralkraft-Kraft (iii) Der Übergang zu dem rotierenden Bezugssystem vereinfacht die Lösung des Bewegungsproblems beträchtlich, da Gl. (4) dort die Gestalt annimmt:

$$m\ddot{\vec{r}}'_\perp = -\frac{q^2 B_0^2}{4mc^2}\vec{r}'_\perp\,, \qquad m\ddot{\vec{r}}'_\parallel = 0\,. \tag{44}$$