Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

Lösung – 4. Übung (Besprechung 1.5. - 5.5.)

1. Stoß zweier Teilchen

a) *Impulsbilanz*:

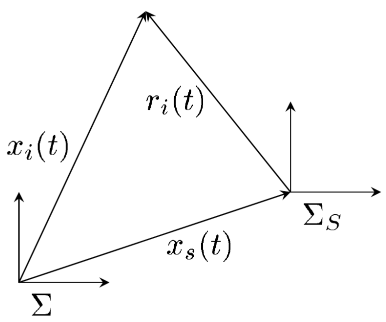
Für ein abgeschlossenes System (keine äußere Kraft) ist die Gesamtimpulsänderung gleich null. Demnach ist der Gesamtimpuls für alle Zeiten konstant, also im speziellen auch vor und nach dem Stoß. Der Gesamtimpuls hängt vom gewählten Inertialsystem Σ ab. Mit

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = \vec{p}_1^{\,\prime} + \vec{p}_2^{\,\prime} = \text{const.} \tag{1}$$

kann im speziellen also ein Inertialsystem Σ_S (*Schwerpunktsystem*) gefunden werden, in dem $\vec{P} = 0$ gilt und damit:

$$\vec{p}^{\,s}_1 + \vec{p}^{\,s}_2 = 0 = \vec{p}^{\,s\prime}_1 + \vec{p}^{\,s\prime}_2 \,. \tag{2}$$

Seien $\vec{x}_i$ die Koordinaten des i-ten Massenpunkts im System Σ und $\vec{r}_i$ dessen Koordinaten im System Σ_S so lässt sich die Relativbewegung zwischen den Inertialsystemem durch die Koordinatentransformation $\vec{x}_i = \vec{x}^{\,s}_i(t) + \vec{r}_i$ beschreiben.



In Σ gilt nach wie vor

$$m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2 = \vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 + (m_1+m_2)\dot{\vec{x}}_s(t) = \vec{P}^s + M\dot{\vec{x}}_s(t)\,. \tag{3}$$

Aus der Forderung $\vec{P}^s = 0$ folgt

$$\vec{x}_s(t) = \frac{\vec{P}}{M}t + \vec{x}_s(t_0)\,. \tag{4}$$

Fordert man, dass zur Zeit t_0 die beiden Inertialsysteme in Deckung sein sollen, so muss $\vec{x}_s(t_0) = 0$ gelten. Möchte man nun $\vec{x}_s$ als Linearkombination von $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ ausdrücken ($\vec{x}_s = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$), so folgt durch Vergleich mit Gl. 4

$$\dot{\vec{x}}_s(t) = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{m_1}{M}\dot{\vec{x}}_1 + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{x}}_2 \tag{5}$$

$$= \alpha\dot{\vec{x}}_1 + \beta\dot{\vec{x}}_2\,, \tag{6}$$

und man erhält für $\vec{x}_s$ die Schwerpunktskoordinate des Systems

$$\boxed{\vec{x}_s = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M}}\,. \tag{7}$$

Energiebilanz:
Die Energiebilanz ist in beiden Systemen formal die selbe (ersetze $\vec{p}$ durch $\vec{p}^s$ für das Schwerpunktsystem)

$$\frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2 = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^{\prime 2} + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^{\prime 2} + Q\,. \tag{8}$$

(Ab jetzt werden die Vektorpfeile unterdrückt, da auch aus dem Kontext klar wird, wo Vektoren bzw. Beträge von Vektoren stehen.)

b) Kennt man p_1, p_2 und möchte $p_1^{'}, p_2^{'}$ bestimmen, so hat man im allgemeinen 3D Fall sechs Unbekannte zu bestimmen. Es stehen aber nur 4 Gleichungen (3 Impulssatz, 1 Energiesatz) zur Verfügung. Das Gleichungssystem ist demnach unterbestimmt, zwei der Unbekannten sind also frei wählbar. Man hat somit die Freiheit das Koordinatensystem beliebig zu drehen.
Im Schwerpunktsystem gilt:

$$\frac{1}{2m_1}{p^s}_1^2 + \frac{1}{2m_2}{p^s}_2^2 = \frac{1}{2m_1}{p^{s\prime}}_1^2 + \frac{1}{2m_2}{p^{s\prime}}_2^2 + Q \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right){p^s}_1^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right){p^{s\prime}}_1^2 + 2Q \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad {p^{s\prime}}_1^2 = {p^s}_1^2 - 2\mu Q \tag{11}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad |{p^{s\prime}}_1| = \sqrt{{p^s}_1^2 - 2\mu Q}} \tag{12}$$

Der Impuls ist also vom Betrag her kleiner als vor dem Stoß, falls $Q \neq 0$. Andernfalls gilt $|{p^{s\prime}}_1| = |{p^s}_1|$ (elastischer Stoß).
Im Laborsystem (mit der Bedingung $p_2 = 0$) gilt der folgende Zusammenhang zum Schwerpunktsystem

$$\dot{x}_s = \frac{P}{M} = \frac{p_1}{M}\,. \tag{13}$$

Damit lässt sich eine Beziehung für p_1^s und p_1 herstellen

$$p_1^s = m_1\dot{r}_1 = m_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) \tag{14}$$

$$= \frac{m_1}{M}p_1 - m_1\dot{x}_1 = \frac{m_1}{M}p_1 - p_1 \tag{15}$$

$$= \left(\frac{m_1}{M} - 1\right)p_1 = \frac{m_2}{M}p_1 \tag{16}$$

und für p_1' findet man auf ähnliche Weise

$$p_1' = m_1\dot{x}_1' = m_1(\dot{x}_s + \dot{r}_1') \tag{17}$$

$$= \frac{m_1}{M}p_1 + m_1\dot{r}_1' = \frac{m_1}{M}p_1 + {p^{s\prime}}_1\,. \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

Es gilt nun die Abschätzung

$$|p_1'| \leq \frac{m_1}{M}|p_1| + |{p^s}_1'| = \frac{m_1}{M}|p_1| + \sqrt{{p^s}_1^2 - 2\mu Q} \tag{20}$$

$$\boxed{|p_1'| \leq \frac{m_1}{M}|p_1| + \sqrt{\left(\frac{m_2}{M}p_1\right)^2 - 2\mu Q}}\,. \tag{21}$$

Im elastischen Fall ($Q = 0$) folgt

$$|p_1'| \leq \left(\frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M}\right)|p_1| = |p_1|\,. \tag{22}$$

Ruht ein Teilchen im Laborsystem, so ist durch die Geschwindigkeit des anderen eine Richtung ausgezeichnet. Wählt man diese z.B als x-Richtung so spielt sich der ganze Stoßprozess nur auf der x-Achse ab. Man hat dann zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. (Die folgende Rechnung demonstriert lediglich die direkte Berechnung der Impulse nach dem Stoß).

$$p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = P = p_1' + p_2' \tag{23}$$

$$\frac{1}{2m_1}p_1^2 = \frac{1}{2m_1}{p'}_1^2 + \frac{1}{2m_2}{p'}_2^2 + Q\,. \tag{24}$$

Das Gleichungssystem führt auf die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2m_1}p_1^2 = \frac{1}{2m_1}{p'}_1^2 + \frac{1}{2m_2}(p_1^2 - 2p_1p_1' + {p'}_1^2) + Q \tag{25}$$

$$\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)p_1^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right){p'}_1^2 - \frac{2}{m_2}p_1p_1' + 2Q \tag{26}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = {p'}_1^2 - \frac{2\mu}{m_2}p_1p_1' + 2\mu Q + \left(\frac{\mu}{m_2} - \frac{\mu}{m_1}\right)p_1^2 \tag{27}$$

$$= {p'}_1^2 - \frac{2m_1}{M}p_1p_1' + 2\mu Q + \frac{m_1 - m_2}{M}p_1^2 \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

mit der Lösung

$$p'_1 = \frac{m_1}{M}p_1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{M}p_1 - 2\mu Q}\,. \tag{30}$$

c) Da die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung nicht verringert werden kann (Gesamtimpulserhaltung), wird die dissipierte Energie Q maximal, genau dann wenn die Impulse in Schwerpunktskoordinaten verschwinden (keine kinetische Energie im Schwerpunktsystem).

$$Q_{\max} = \frac{1}{2m_1}{p^s}_1^2 + \frac{1}{2m_2}{p^s}_2^2 = \frac{{p^s}_1^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{{p^s}_1^2}{2\mu}\,. \tag{31}$$

Man betrachte die Relativgeschwindigkeit

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \dot{x}_s + \dot{r}_1 - (\dot{x}_s + \dot{r}_2) = \dot{r}_1 - \dot{r}_2 \tag{32}$$

$$= \frac{p_1^s}{m_1} - \frac{p_2^s}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p_1^s = \frac{p_1^s}{\mu}\,. \tag{33}$$

Somit folgt für $Q_{\max}$

$$Q_{\max} = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}_1 - \dot{r}_2)^2 \,. \tag{34}$$

Es kann also maximal genau die kinetische Energie in andere Energieformen umgewandelt werden, die in der Relativbewegung der beiden Stoßpartner steckt.

2. Sturz ins Zentrum

Bewegung im (attraktiven) Zentralpotential ($z = 0$ -Ebene)

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \qquad\qquad r = |\vec{r}|$$

a) Energiesatz: Verwende Polarkoordinaten $\vec{r} = r\cos\phi\vec{e}_x + r\sin\phi\vec{e}_y$

$$E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{\alpha}{r^2} = const$$

Da es sich um eine Zentralkraft handelt gilt die Drehimpulserhaltung:

$$|\vec{L}| = \ell = mr^2\dot{\phi} = const$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2} \tag{35}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2}}_{V_{\text{eff}}} \tag{36}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{\text{eff}}(r)\right)} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{m}\left(Er^2 + \alpha - \frac{\ell^2}{2m}\right)} \tag{37}$$

wobei für den Sturz ins Zentrum ($\dot{r} < 0$) das negative Vorzeichen in Gl. (3) maßgeblich ist.
Damit ergibt sich nach Kettenregel ($\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}\frac{\ell}{mr^2}$) für die Bahngleichung:

$$\phi - \phi_0 = -\frac{\ell}{m}\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'\sqrt{\frac{2}{m}\left(Er'^2 + \alpha - \frac{\ell^2}{2m}\right)}} \tag{38}$$

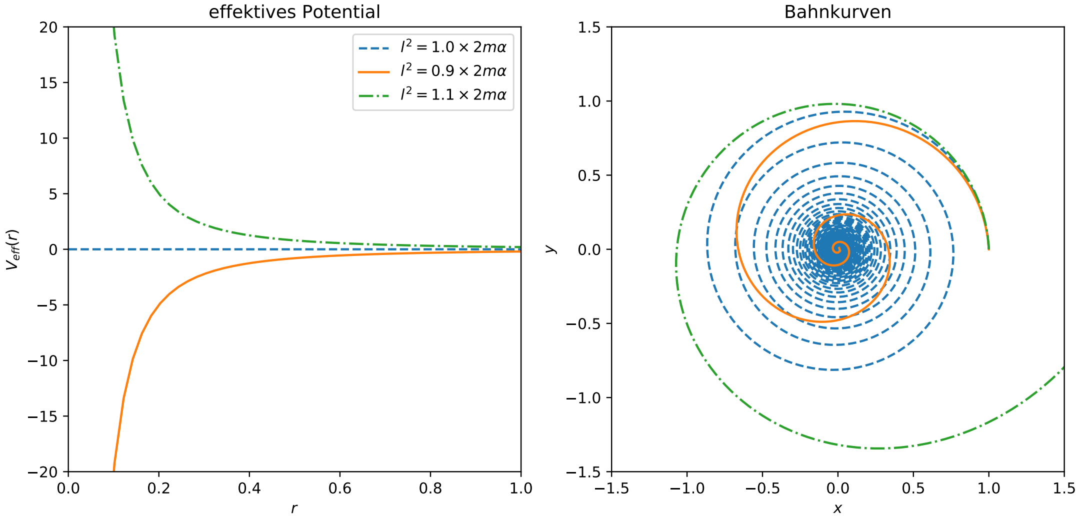


Abbildung 1: Beispiele von Bahnkurven für verschiedene Werte von l. Für $\ell > 2m\alpha$ ist das Potential abstoßend und das Teilchen erreicht das Zentrum nicht.

b) Das Teilchen müsste für den Sturz ins Zentrum das abstoßende Zentifugalpotential überwinden können. Damit ist die maßgebliche Bedingung dafür

$$\alpha \geq \frac{\ell^2}{2m}$$

siehe Abbildung 1. 1. Fall: $\alpha - \frac{\ell^2}{2m} = 0$: Intergal elementar auswertbar:

$$\Rightarrow \phi - \phi_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2mE}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow r(\phi) = \left[\frac{1}{r_0} + \frac{\sqrt{2mE}}{\ell} (\phi - \phi_0) \right]^{-1}, \tag{39}$$

$$\phi_n = 2\pi n, \qquad n \text{ - Anzahl der Umläufe}$$

Für $\phi \to \infty$ geht $r \to 0$. Massenpunkt fliegt spiralförmig gegen das Zentrum und benötigt dafür unendlich viele Umläufe.

2.Fall: $\alpha - \frac{\ell^2}{2m} > 0$: Das Integral (38) lässt sich zwar leicht exakt auswerten:

$$\phi - \phi_0 = -\frac{\ell}{\sqrt{2mE}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{1 + \frac{A^2}{r'^2}}}, \qquad A^2 = \frac{m}{2E}(\alpha - \frac{\ell^2}{2m}) \geq 0$$

$$= \frac{\ell}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{A} \int_{\frac{A}{r_0}}^{\frac{A}{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \qquad \text{subst.: } \xi = \frac{A}{r'}; \quad d\xi = -\frac{A dr'}{r'^2}$$

$$\Rightarrow \qquad A \frac{\sqrt{2mE}}{\ell} (\phi - \phi_0) = \ln \left[\frac{\frac{A}{r} + \sqrt{1 + \frac{A^2}{r^2}}}{\frac{A}{r_0} + \sqrt{1 + \frac{A^2}{r_0^2}}} \right],$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{A}{r} + \sqrt{1 + \frac{A^2}{r^2}} = \left(\frac{A}{r_0} + \sqrt{1 + \frac{A^2}{r_0^2}} \right) \exp \left(A \frac{\sqrt{2mE}}{\ell} (\phi - \phi_0) \right) \tag{40}$$

das Resultat (40) aber nicht mehr so einfach nach $r = r(\phi)$ auflösen.
Gleichung (40) ist von der Form: $f(r) + \sqrt{1 + f^2(r)} = F(\phi)$. Hieraus folgen durch Quadrieren bzw. nach Multiplikation mit 2f die unabhängige Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} 2f^2 + 2f\sqrt{1+f^2} + 1 = F^2 \\ 2f^2 + 2f\sqrt{1+f^2} = 2fF \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{F+1} + \frac{1}{F-1}$$

Explizit:

$$\begin{aligned} \frac{r}{A} = \quad & \left\{ \left(\frac{A}{r_0} + \sqrt{1 + \frac{A^2}{r_0^2}} \right) \exp\left(A\frac{\sqrt{2mE}}{\ell}(\phi - \phi_0) \right) + 1 \right\}^{-1} \\ & + \left\{ \left(\frac{A}{r_0} + \sqrt{1 + \frac{A^2}{r_0^2}} \right) \exp\left(A\frac{\sqrt{2mE}}{\ell}(\phi - \phi_0) \right) - 1 \right\}^{-1} \end{aligned} \tag{41}$$

Diskussion der Bahngleichung (41):
i) im Grenzfall $A \to 0$ erhalten wir das Resultat für $A = 0$.
ii) Berechne den Grenzfall $\frac{r}{r_0} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} = A \quad & \left\{ \left(A + \sqrt{r_0^2 + A^2} \right) \exp\left(A\frac{\sqrt{2mE}}{\ell}(\phi - \phi_0) \right) + r_0 \right\}^{-1} \\ & + \left\{ \left(A + \sqrt{r_0^2 + A^2} \right) \exp\left(A\frac{\sqrt{2mE}}{\ell}(\phi - \phi_0) \right) - r_0 \right\}^{-1} \end{aligned}$$

$\frac{r}{r_0} \ll 1$ impliziert aber $\phi - \phi_0 \gg 1$, also asymptotisch:

$$\frac{r}{r_0} = \frac{2A}{A + \sqrt{r_0 + A^2}} \exp\left(-A\frac{\sqrt{2mE}}{\ell}(\phi - \phi_0) \right)$$

Aus beiden Grenzfällen wird deutlich, dass der Massenpunkt eine unendliche Anzahl von Umdrehungen benötigt ($\phi = 2\pi n \to \infty$) um das Zentrum zu erreichen ($r \to 0$).
c) Aus Gl. (3) ergibt sich

$$t = \int_{t_0=0}^{t} dt' = -\int_{r_0}^{0} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r'^2} - \frac{\ell^2}{2mr'^2}\right)}} = \int_0^{r_0} \frac{r'dr'}{\sqrt{\frac{2E}{m}r'^2 + \frac{2}{m}\left(\alpha - \frac{\ell^2}{2m}\right)}}$$

Dieses Integral ist trivial auswertbar

$$t = \frac{m}{2E}\left(\sqrt{\frac{2E}{m}r_0^2 + \frac{2}{m}\left(\alpha - \frac{\ell^2}{2m}\right)} - \sqrt{\frac{2}{m}\left(\alpha - \frac{\ell^2}{2m}\right)} \right)$$

Für den Spezialfall $\alpha = \frac{\ell^2}{2m}$ ergibt sich eine Sturzzeit bis zum Punkt $r = 0$ von

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}}r_0$$

Aus

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2} \\ v &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r^2}\right)} \end{aligned}$$

folgt offensichtlich, dass für $r \to 0$ Winkelgeschwindigkeit, sowie Bahngeschwindigkeit divergieren.

3. Sphärischer Oszillator

a) Aus dem gegeben harmonischen Potential ergibt sich die Kraft vom i-ten auf den j-ten Körper $\vec{F}_{ij}$ zu

$$\vec{F}_{21} = -\nabla_1 V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Der Übergang zu Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und Schwerpunktskoordinaten $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ liefert mit der Gesamtmasse $m = m_1 + m_2$

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{21} = k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) & \qquad m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{12} = -k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ \implies m\ddot{\vec{R}} &= 0 & \frac{m_1 m_2}{m}\ddot{\vec{r}} &= \mu\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}, \end{aligned}$$

mit der reduzierten Masse μ. Qualitativ ergibt sich eine Überlagerung aus der uniformen Translation des Schwerpunktes und einer harmonischen Oszillation als Relativbewegung.

Für die Energie des Gesamtsystems gilt

$$E = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + \frac{k}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{2}\vec{r}^2 = \text{const.}$$

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$ bildet eine Erhaltungsgröße, denn

$$\dot{\vec{L}} = m_1\vec{r}_1 \times \ddot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \ddot{\vec{r}}_2 = k(\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \vec{r}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = 0.$$

b) Bezüglich des I.S. lautet der Energiesatz

$$E(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + \frac{k}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = \text{const.}$$

Der Übergang von Laborkoordinaten $\vec{r}_i$ zu Koordinaten $\vec{r}_i'$ bezüglich des Schwerpunktsystems ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \vec{r}_1' = \vec{R} - \frac{m_2}{m}\vec{r} \implies \vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \vec{r}_2' = \vec{R} + \frac{m_1}{m}\vec{r} \implies \vec{r}_2' = \frac{m_1}{m}\vec{r}. \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich aufgrund von $\ddot{\vec{R}} = 0$ auch um ein Inertialsystem. Für den Schwerpunkt bezüglich Schwerpunktskoordinaten gilt natürlich nach Konstruktion $\vec{R}' = 0$. Damit ist die obige Transformation eine *Galilei-Transformation* gegeben durch

$$\boxed{\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i' = \vec{r}_i - \dot{\vec{R}}t}.$$

Für den Energiesatz in Schwerpunkt-Koordinaten gilt dann

$$\begin{aligned} E(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, \vec{r}_1', \dot{\vec{r}}_1', \vec{r}_2', \dot{\vec{r}}_2') &= \frac{m_1}{2}(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1')^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2')^2 + \frac{k}{2}(\vec{r}_1' - \vec{r}_2')^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}^2 + m_1\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_1' + m_2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_2' + \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2'^2 + \frac{k}{2}(\vec{r}_1' - \vec{r}_2')^2 \\ &= E_{\text{SP}} + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{(m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2')}_{=m\vec{R}=0} + E'(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) \end{aligned}$$

Die Energie transformiert sich bei Übergang ins Schwerpunktsystem (ausgedrückt durch Relativkoordinaten) also wie

$$E(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \mapsto E'(\vec{r}_i', \dot{\vec{r}}_i') = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{2}\vec{r}^2 = E_{\text{rel}} = \text{const.}$$

Dieser Ausdruck entspricht einem effektiven Einteilchensystem (harmonischer Oszillator mit effektiver Masse μ).

Ähnliche Überlegungen gelten für den Drehimpuls:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = m_1(\vec{R} + \vec{r}_1') \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1') + m_2(\vec{R} + \vec{r}_2') \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2') \\ &= m\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + (m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2') \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times (m_1\dot{\vec{r}}_1' + m_2\dot{\vec{r}}_2') + m_1\vec{r}_1' \times \dot{\vec{r}}_1' + m_2\vec{r}_2' \times \dot{\vec{r}}_2' \\ &= m\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + m_1\vec{r}_1' \times \dot{\vec{r}}_1' + m_2\vec{r}_2' \times \dot{\vec{r}}_2' = \vec{L}_{\text{SP}} + \vec{L}'\end{aligned}$$

Damit folgt für den Drehimpulserhaltungssatz im Schwerpunktsystem

$$\dot{\vec{L}} = m\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} = m_1\vec{r}_1' \times \ddot{\vec{r}}_1' + m_2\vec{r}_2' \times \ddot{\vec{r}}_2' = 0,$$

da einerseits $\ddot{\vec{R}} = 0$ und

$$\dot{\vec{L}}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(-\frac{m_2}{m}\vec{r}) \times (-\frac{m_2}{m}\dot{\vec{r}}) + m(\frac{m_1}{m}\vec{r}) \times (\frac{m_1}{m}\dot{\vec{r}})\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_1 m_2}{m}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0,$$

wobei wir die Newtonsche Bewegungsgleichung $\ddot{\vec{r}} \propto \vec{r}$ benutzt haben.

c) Im Grenzfall $m_1 \to \infty$ gilt $\mu = \frac{m_2}{1+m_2/m_1} \to m_2$. Da, wie in b) gezeigt, der Relativdrehimpuls $\vec{L}'$ eine Erhaltungsgröße ist, spielt sich die Bewegung in einer festen Ebene ab. Wir führen Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ein, so dass $\vec{L}' \propto \vec{e}_z$ gilt.
Dann gilt für die Energie der Relativbewegung:

$$E' = \frac{mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{2}\vec{r}^2 = \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\varphi^2) + \frac{k}{2}\rho^2.$$

Wir eliminieren $\dot{\varphi}$ mit $L'^2 = \mu^2\rho^4\dot{\varphi}^2 = \text{const}$. Dann folgt aus der obigen Gleichung

$$E' = \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{L'^2}{2\mu\rho^2} + \frac{k}{2}\rho^2}_{=:V_{\text{eff}}(\rho)}.$$

Für eine Kreisbahn mit Radius ρ_0 muss dann gelten (Extremalstelle des Potentials)

$$0 = \frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0) = k\rho_0 - \frac{L'}{\mu\rho^3} \implies \rho_0 = \sqrt{\frac{L'}{\sqrt{\mu k}}}.$$

Da $\frac{\mathrm{d}^2V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0) > 0$ handelt es sich um eine stabile Kreisbahn.

Für kleine Auslenkungen $\rho = \rho_0 + \eta$ mit $\eta \ll \rho_0$ entwickeln wir V_{eff} bis zur quadratischen Ordnung in η (die lineare Ordnung verschwindet, da es sich um ein lokales Minimum handelt):

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + \frac{1}{2}V_{\text{eff}}''(\rho_0)\eta^2$$

mit $V_{\text{eff}}(\rho_0) = k + \frac{3L'^2}{\mu\rho_0^4} = 4k$. Damit trägt die Auslenkung η ein harmonisches Potential

$$V_{\text{eff}}(\eta) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + 2k\eta^2$$

zur Gesamtenergie bei:

$$E'(\eta, \dot{\eta}) = \frac{\mu}{2}\dot{\eta}^2 + 2k\eta^2 + \text{const.}$$

Aus der zugehörigen Newtonschen Bewegungsgleichung $\ddot{\eta} + \frac{4k}{\mu}\eta = 0$ lesen wir die Oszillatorfrequenz $\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{4k}{\mu}}}$ ab.