Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

2. Übung (Besprechung 17.4. - 21.4.)

1. Eigenschaften der Galilei-Raumzeit

a) Laut der Definition ist die t'-Achse des Σ' definiert als eine Menge von Punkten (Ereignissen) auf dem Σ-Raumzeitdiagramm, die $x' = 0$ erfüllen. Des weiteren ist die x'-Achse von Σ' definiert als die Menge von Punkten auf dem Σ-Raumzeitdiagramm, die $t' = 0$ erfüllen. Die Zeiten und Orte in beiden Inertialsystemen sind durch die Galilei-Transformation miteinander verknüpft

$$x' = x - vt\,, \qquad t' = t \quad \text{(absolute Zeit)}.$$

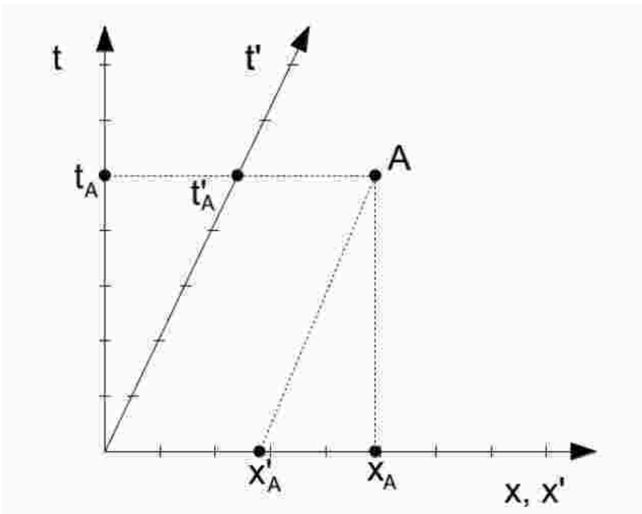
Es folgt also für die t'-Achse von Σ'

$$x' \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v}\,.$$

bzw. für dessen x'-Achse

$$t' \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x' = x\,.$$

Die t'-Achse von Σ' ist also gegenüber der t-Achse von Σ geneigt. x-Achse von Σ und x'-Achse von Σ' fallen zusammen.



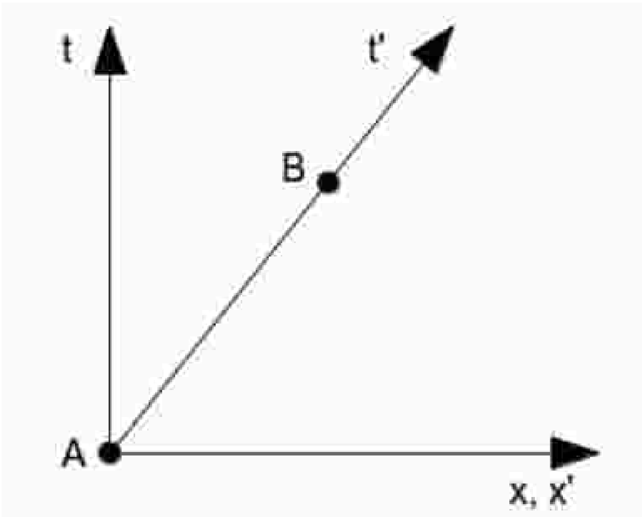
Raumzeitdiagramme zweier Inertialsysteme verknüpft durch Galilei-Transformation. Die Koordinaten eines Ereignisses A findet man durch Projektonen auf die Achsen parallel zu der jeweils anderen Achse.

b) O.B.d.A. sei das erste Ereignis A im Ursprung des Raumzeitdiagramms von Σ gegeben, d.h. $t_A = 0$ und $x_A = 0$. Für B soll es gelten: $t_B > 0$, $x_B > 0$. Bezüglich Σ sind also diese Ereignisse weder gleichzeitig noch gleichortig:

$$\Delta t = t_B - t_A > 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{bzgl. } \Sigma \text{ nicht gleichzeitig}$$
$$\Delta x = x_B - x_A > 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{bzgl. } \Sigma \text{ nicht gleichortig}$$

Da es in der Galilei-Raumzei (Newton'sche Mechanik) keine Maximalgeschwindigkeit gibt, darf die Relativitgeschwindigkeit v zwischen Σ und Σ' beliebig sein. Folglich existiert eine Galilei-Transformation (bzw. auch ein Galileisystem Σ' bezüglich dem Ereignisse A und B am gleichen Ort stattfinden

$$\begin{aligned}\Delta x' = x'_B - x'_A &= (x_B - vt_B) - (x_A - vt_A) \\ &= \Delta x - v\Delta t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ .\end{aligned}$$

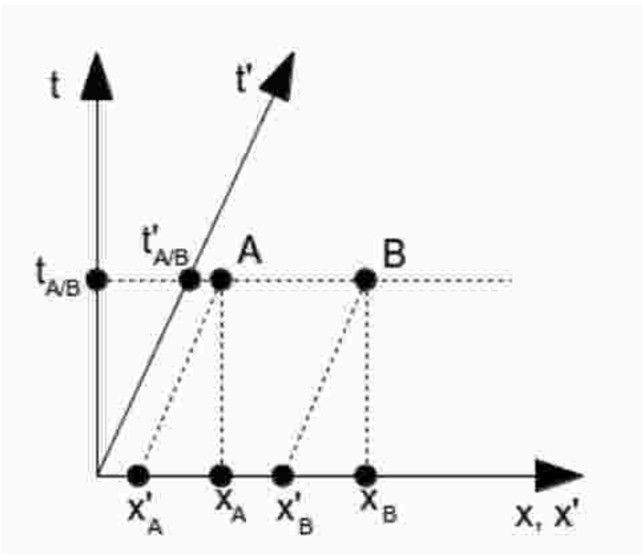


Galilei-Transformation: uneingeschränkte Relativität der Gleichortigkeit

c) Da $t' = t$ gilt, bekommt die Gleichzeitigkeit eine *absolute* Bedeutung. Aus $\Delta t = t_B - t_A = 0$ (Gleichzeitigkeit in Σ) folgt unmittelbar $\Delta t' = t'_B - t'_A = t_B - t_A = \Delta t = 0$. Damit ist auch gezeigt, dass Δt in allen Galileisystem gleich ist. In anderen Worten: Δt ist *Galilei-invariant*.

Gleiches folgt für den räumlichen Abstand Δx *gleichzeitiger* Ereignisse

$$\Delta x' = x'_B - x'_A = x_B - x_A + v(t_B - t_A) = \Delta x + v\Delta t \overset{\Delta t=0}{=} \Delta x \ .$$



Galilei-Transformation: räumlicher Abstand gleichzeitiger Ereignisse

2. Eigenschaften der Minkowski-Raumzeit

a) Raumzeitdiagramm (Minkowski-Diagramm)

Die Zeiten und Orte in beiden Inertialsystemen Σ' und Σ sind durch die Lorentz-Transformation verknüpft

$$x' = \gamma(x - vt) \ , \quad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

mit den üblichen Abkürzungen

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \ , \quad \beta = \frac{v}{c} \ , \quad c = \text{Lichtgeschwindigkeit} \ .$$

Analog zum Galileisystem ist die t'-Achse von Σ' durch die Bedingung $x' = 0$ bestimmt

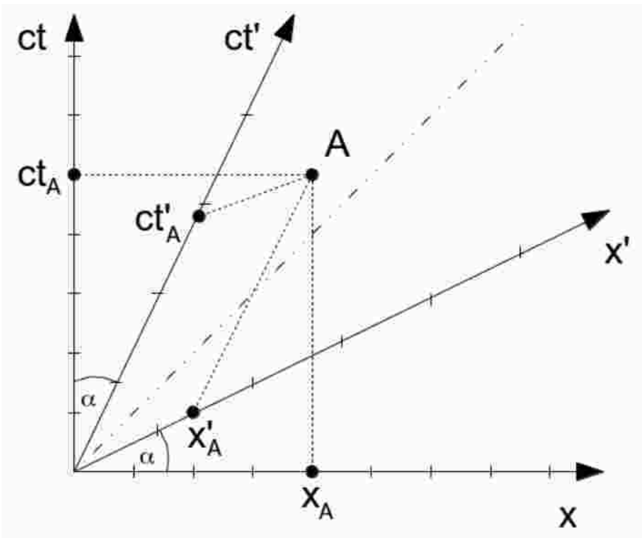
$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad ct = \frac{c}{v}x = \frac{1}{\beta}x \ .$$

Für die x'-Achse folgt aus der Bedingung $t' = 0$

$$t' = 0 \quad \Rightarrow \quad ct = \frac{v}{c}x = \beta x \ .$$

Bemerkung: Es ist üblich auf der Zeit-Achse ct aufzutragen. Beide Achsen haben damit die Einheit einer Länge. Die Koeffizienten der Transformation sind dann einheitenlos.

Die x'-Achse von Σ' ist also gegenüber der x-Achse von Σ geneigt (Neigungswinkel $\alpha = \tan^{-1}(\beta)$). Ebenso ist die t'-Achse von Σ' gegenüber der t-Achse von Σ um den Winkel α geneigt. Da stets $v \leq c$ gilt (nichts kann schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein) ist $\alpha \leq \pi/4$.



Raumzeitdiagramm zweier Inertialsystemen verknüpft durch die Lorentz-Transformation. Die Koordinaten eines Ereignisses A findet man durch Projektonen auf die Achsen parallel zu der jeweils anderen Achse.

b) Für zwei Ereignisse A, B im System Σ gelte $\Delta x > 0$ und $\Delta t > 0$.

Wir zeigen, dass für $\Delta x < c\Delta t$ (zeitartiger-Differenzvektor) ein System Σ' existiert, in dem die Ereignisse am gleiche Ort eintreten, d.h. $\Delta x' = 0$.

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma(t_B - \frac{v}{c^2}x_B) - \gamma(t_A - \frac{v}{c^2}x_A) = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$$

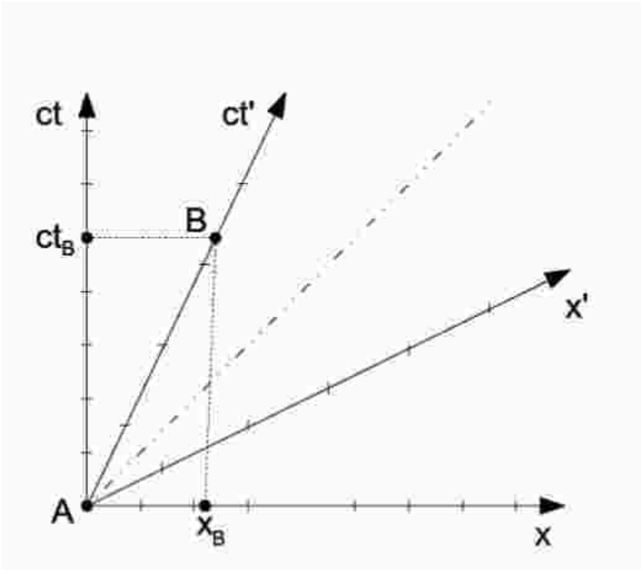
$$c^2\Delta t'^2 = \gamma^2(c^2\Delta t^2 + \beta^2\Delta x^2 - 2v\Delta t\Delta x)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta x'^2 = \gamma^2(x_B - vt_B - (x_A - vt_A))^2 = \gamma^2(\Delta x^2 + v^2\Delta t^2 - 2v\Delta x\Delta t)\ .$$

Auflösen der unteren Gleichung nach $2v\Delta t\Delta x$ und in die darüber einsetzen liefert

$$c^2\Delta t'^2 = \gamma^2(c^2\Delta t^2 + \beta^2\Delta x^2 - (\Delta x^2 + v^2\Delta t^2)) = \frac{1}{1-\beta^2}\Big((c^2 - v^2)\Delta t^2 + (\beta^2 - 1)\Delta x^2\Big)$$

$$0 < c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \implies c\Delta t > \Delta x.$$



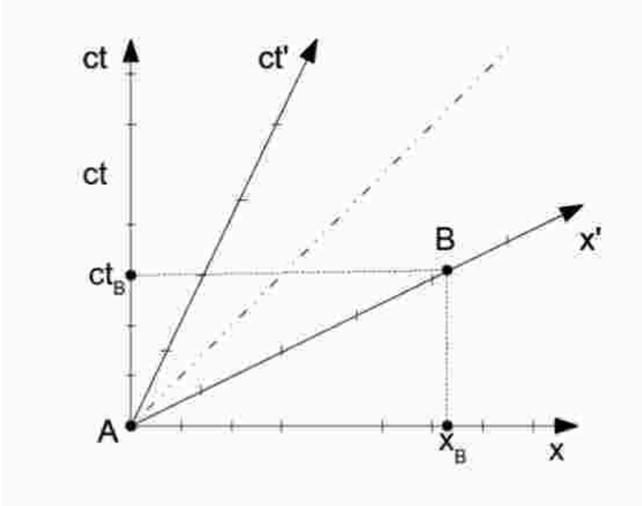
Lorentz-Transformation: Die Forderung, dass zwei Ereignisse in einem System am gleichen Ort stattfinden können, ist an die Bedingung $\Delta x < c\Delta t$ geknüpft (Eingeschränkte Relativität der Gleichortigkeit).
Gilt jedoch $\Delta x > c\Delta t$ (raumartiger-Differenzvektor), so können wir ein System Σ' finden in dem $\Delta t' = 0$, d.h. die Ereignisse A und B finden in Σ' gleichzeitig statt.

$$c^2\Delta t'^2 = \gamma^2(c^2\Delta t^2 + \beta^2\Delta x^2 - 2v\Delta t\Delta x) = 0$$

$$\Delta x'^2 = \gamma^2(\Delta x^2 + v^2\Delta t^2 - 2v\Delta x\Delta t)$$

Auflösen nach $2v\Delta t\Delta x$ in der ersten Gleichung und einsetzen in die zweite liefert

$$0 < \Delta x'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 \implies \Delta x > c\Delta t.$$



Lorentz-Transformation: Relativität der Gleichzeitigkeit

c) Kausalität (siehe auch Kausalstruktur)

Zwei Ereignisse A und B unterliegen im System Σ einer zeitlichen Reihenfolge, z.b. $\Delta t > 0$.

Wenn wir fordern, dass diese Reihenfolge im System Σ' gelten soll, so ergibt sich

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \overset{!}{>} 0 \qquad \Rightarrow c\Delta t > \beta\Delta x \; .$$

Die Reihenfolge wird "absolut", wenn sie in *jedem* System gilt. Mit $\beta^2 < 1$ finden wir also die Bedingung

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 > 0 \; .$$

Da die Kausalität zweier Ereignisse nicht vom Bezugssystem abhängen sollte, sagen wir, "Zwei Ereignisse sind kausal verknüpft, wenn $S^2 := c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ gilt". Die Größe S stellt gerade den Abstand hinsichtlich der Minkowski-Metrik dar, sodass der Wert von S in jedem System gleich ist. S ist invariant unter Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} S'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 &= \gamma^2\left(c^2\Delta t^2 - 2v\Delta t\Delta x + \frac{c^2}{v^2}\Delta x^2\right) \\ &\quad - \gamma^2\left(\Delta x^2 - 2v\Delta t\Delta x + v^2\Delta t^2\right) \\ &= \frac{1}{1-\beta^2}\left((1-\beta^2)c^2\Delta t^2 - (1-\beta^2)\Delta x^2\right) \\ &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = S^2 \; . \end{aligned}$$

3. Zweiteilchensysteme und Galilei-Transformationen

a) Galilei-Transformation

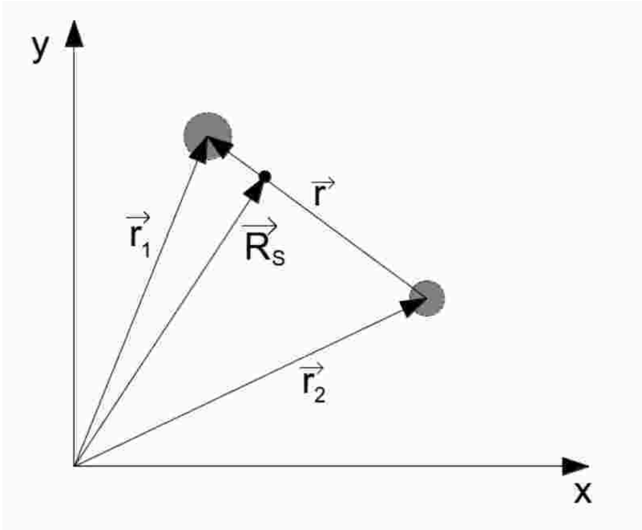
$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t \; .$$

Invarianz des Relativabstands unter Galilei-Transformation

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,' = \vec{r}_2 - \vec{u}t - \vec{r}_1 + \vec{u}t = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$$

und dessen Geschwindigkeit

$$\vec{v}\,' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\vec{r}\,'(t') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}\,'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}_2(t) - \vec{u}t - \vec{r}_1(t) + \vec{u}t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = \vec{v} \; .$$



Skizze Zweiteichensystem: Relativabstand, Schwerpunkt

b) Transformation ins Schwerpunktssystem

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{R}_s = \vec{r}_i{}' + (m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t))/M$$

mit $\vec{r}_i{}'$ als Ortsvektor im Schwerpunktssystem.

Wir erkennen, dass für $\ddot{\vec{R}}_S = 0 \to \vec{R}_s(t) = \vec{u}t$ (gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts) die Transformation ins Schwerpunktssystem eine Galilei Transformation ist mit

$$\to \vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{u}t \quad , \quad \vec{v}_i{}' = \vec{v}_i - \vec{u}\ .$$

c)

$$\vec{f}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \equiv \frac{f(r)}{r}\vec{r}$$

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ist Galilei invariant $\Longrightarrow$ $\vec{f}_{12}$ ist Galilei invariant.
$\vec{f}_{21} = f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = -\frac{f(r)}{r}\vec{r} = -\vec{f}_{12}$ (3. Newton'sches Gesetz).

4. Schräger Wurf mit Reibung

a) Newton'sche Bewegungsgleichung (da konstante Masse m)

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z - \alpha\dot{\vec{r}}$$

O.B.d.A. wählen wir das Koordinatensystem so, dass die Bewegung in der x-z-Eben stattfindet, d.h. $y(t) = 0$.
Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $z(t)$ (zwei unabhängige Differentialgleichungen)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\gamma\dot{x} && \text{homogene, linear} \\ \ddot{z} &= -\gamma\dot{z} - g && \text{inhomogene, linear} \\ \text{mit} \quad \gamma &:= \frac{\alpha}{m} \end{aligned}$$

Lösung der x-Komponente (exp-Ansatz für $\dot{x}$)

$$\dot{x}(t) = C_1 e^{-\gamma t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = -C_1\gamma^{-1}e^{-\gamma t} + C_2\ .$$

Die Lösung der inhomogenen DGL erfordert a) lösen der homogenen Gleichung und b) finden einer partikulären Lösung für $\dot{z}$.
a) Lösung der homogenen DGL

$$\dot{z}_h(t) = C_3 e^{-\gamma t}$$

b) partikuläre Lösung

$$\dot{z}_p(t) = -g\gamma^{-1}$$

Wir finden demnach als allgemeine Lösung

$$\dot{z}(t) = \dot{z}_h(t) + \dot{z}_p(t) = C_3 e^{-\gamma t} - g\gamma^{-1}$$

uns somit

$$z(t) = -C_3\gamma^{-1}e^{-\gamma t} - g\gamma^{-1}t + C_4 \ .$$

Die Konstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(0) = 0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = u_x\vec{e}_x + u_z\vec{e}_z \ .$$

Aus der Anfangsgeschwindigkeit folgt

$$\begin{aligned} &\dot{x}(0) = C_1 = u_x \\ &\dot{z}(0) = u_z = C_3 - g\gamma^{-1} \implies C_3 = u_z + g\gamma^{-1} \ . \end{aligned}$$

Aus dem Anfangsort ergibt sich

$$\begin{aligned} &x(0) = 0 = -u_x\gamma^{-1} + C_2 \implies C_2 = u_x\gamma^{-1}, \\ &z(0) = 0 = -\left(u_z + g\gamma^{-1}\right)\gamma^{-1} + C_4 \implies C_4 = \gamma^{-1}\left(u_z + g\gamma^{-1}\right) . \end{aligned}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen ist somit

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{u_x}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \\ z(t) &= -\frac{g}{\gamma}t + \frac{g/\gamma + u_z}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \ . \end{aligned}$$

b) Am Scheitelpunkt gilt $\dot{z} = 0$. Die Lösung dieser Gleichung

$$0 = -g/\gamma + (g/\gamma + u_z)\, e^{-\gamma t_s}$$

liefert uns die Zeit wo der Scheitelpunkt erreicht ist

$$t_s = -\gamma^{-1}\ln\left(\frac{1}{1 + u_z\gamma/g}\right) = \gamma^{-1}\ln\left(1 + u_z\gamma/g\right) \ .$$

Die zugehörige Position ist demnach

$$\begin{aligned} z(t_s) &= \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(\frac{1}{1 + u_z\gamma/g}\right) + \frac{u_z}{\gamma} \\ x(t_s) &= \frac{u_x u_z}{g + u_z\gamma} \ . \end{aligned}$$

Die Energie am Startpunkt ist (nur kinetische Energie)

$$E_0 = \frac{1}{2m}(u_x^2 + u_z^2) \; .$$

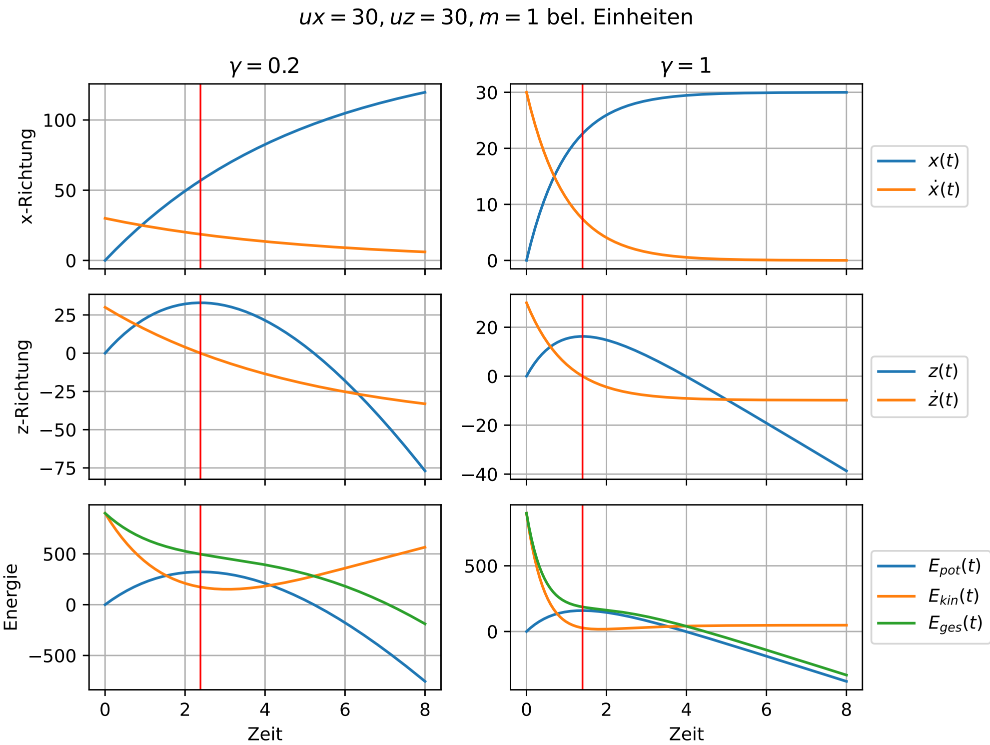
Die Energie am Scheitelpunkt ist

$$E(t_s) = mgz(t_s) + \frac{1}{2m}\dot{x}(t_s)^2$$

woraus sich der Energieverlust

$$\Delta E = E(t_s) - E_0 < 0$$

ergibt.



c) Änderung der mechanischen Energie eines Teilchens (Schwerkraft + Reibung)
Kräfte

$$\vec{F}_g = -m\vec{g}, \quad \vec{g} = \text{const.}, \quad \vec{F}_R = -f(v)\vec{v}.$$

Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}} = -m\vec{g} - f(v)\vec{v} \quad &\Big| \cdot \vec{v} \\ m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = -m\vec{g} \cdot \vec{v} - f(v)\vec{v} \cdot \vec{v} & \\ \implies \dot{E}_{\text{mech}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}v^2 + m\vec{g}\vec{r}\right) = -f(v)v^2 & \end{aligned}$$

mit $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ und $\frac{m}{2}v^2 + m\vec{g}\vec{r} = E_{\text{mech}}$.
Die Energieänderung lässt sich somit schreiben als

$$\dot{E}_{\text{mech}} = \vec{F}_R(\vec{v}) \cdot \vec{v},$$

mit der nicht-konservativen Reibungskraft $\vec{F}_R(\vec{v})$.