

# Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden  
<https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre>

## Präsenzübung (Besprechung 3.4. - 7.4.)

### 1. Krummlinige Koordinatensysteme

Im Ursprung  $\mathcal{O}$  eines dreidimensionalen Euklidischen Raums sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Basisvektoren  $\{\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z\} \equiv \{\vec{E}_i\}_{i=1,2,3}$  mit  $\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \delta_{ij}$  errichtet. Die Trajektorie  $\vec{r}(t)$  hat in diesem Bezugssystem die Darstellung  $\vec{r}(t) = x(t) \vec{E}_x + y(t) \vec{E}_y + z(t) \vec{E}_z \equiv \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{E}_i$ . Die Koordinaten  $x_i = x_i(t)$  seien beliebige Funktionen der Zeit  $t$ .

Die Einführung krummliniger Koordinaten  $q_k = q_k(t)$  basiert auf der Angabe von Transformationsgleichungen der Form  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \equiv x_i(q_k)$  aus denen sich die (normierten) lokalen Basisvektoren gemäß  $\vec{e}_k = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right) / \left| \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right) \right|$  berechnen. Es gilt also für die Darstellung des infinitesimalen Abstandsvektors:  $d\vec{r} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right| dq_k \vec{e}_k$ .

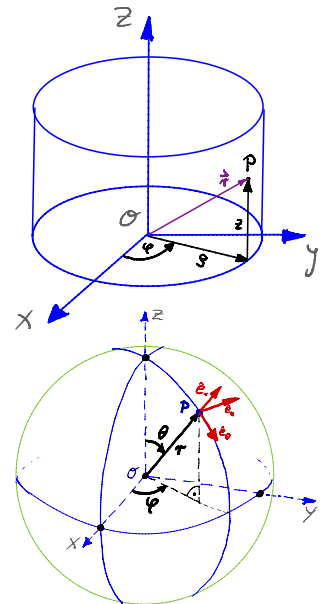
Wichtige Beispiele für krummlinige Koordinatensysteme sind:

- **Zylinderkoordinaten**,  $(q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z)$

$$\begin{aligned}x_1 &= x = \rho \cos(\varphi) \\x_2 &= y = \rho \sin(\varphi) \\x_3 &= z = z\end{aligned}$$

- **Kugelkoordinaten**,  $(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi)$

$$\begin{aligned}x_1 &= x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\x_2 &= y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\x_3 &= z = r \cos(\theta)\end{aligned}$$



- Veranschaulichen Sie sich die Relation  $\vec{e}_k \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$ .
- Berechnen Sie jeweils die lokalen Basisvektoren  $\vec{e}_k$  und geben Sie die Komponentendarstellung des Ortsvektors  $\vec{r}(t)$  bezüglich Zylinder- und Kugelkoordinaten an. Notieren Sie explizit die Abhängigkeit des Ortsvektors von den Koordinaten  $q_k$ , d.h.

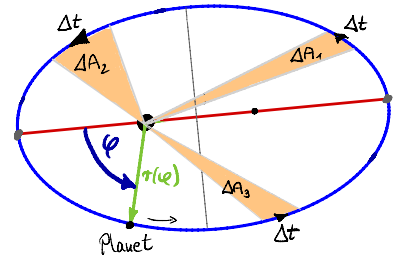
$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) = \sum_{k=1}^3 c_k(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_k(q_1, q_2, q_3) .$$

- Verifizieren Sie, dass für das Quadrat der Linienelemente  $d\ell^2 := |d\vec{r}|^2$  gilt:  $d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$  bzw.  $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2$ .
- Leiten Sie die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  und die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  in Kugelkoordinaten her.

## 2. Flächensatz der Planetenbahnen

“Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.” (Johannes Kepler, 17. Jh.)

- a) Ein Massenpunkt bewege sich auf einer Raumkurve  $\vec{r}(t)$ . Zeigen Sie über die geometrische Bedeutung des Vektorprodukts, dass in einem kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  die Verbindungslinie (Fahrstrahl) vom Ursprung  $\mathcal{O}$  zur Position  $\vec{r}(t)$  des Massenpunktes die Fläche  $\Delta A(t) = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \Delta \vec{r}(t)|$  überstreicht. Leiten Sie somit die Flächengeschwindigkeit  $f(t) := \dot{A}(t) = dA/dt$  her.



- b) Zeigen Sie, dass der Flächensatz  $\frac{d}{dt}f(t) = \dot{f}(t) = 0$  gilt, wenn die Beschleunigung  $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$  proportional zu  $\vec{r}(t)$  ist.
- c) Gegeben sei die Bahnkurve  $\vec{r}(t) = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$  in Zylinderkoordinaten. Betrachten Sie speziell eine Bewegung in der  $x, y$ -Ebene mit  $\rho(t)$ ,  $\varphi(t)$  und  $z(t) = 0$  und leiten Sie den Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit  $f(t) = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \rho^2$  her.

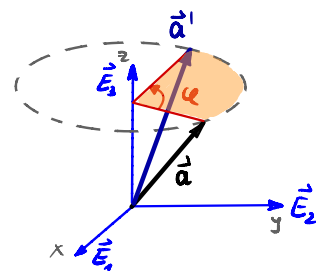
## 3. Drehungen als orthogonale Transformationen

Wir betrachten eine *aktive* Drehung eines Vektors  $\vec{a} \xrightarrow{R} \vec{a}'$  bezüglich eines *festgehaltenen* kartesischen Basissystems  $\{\vec{E}_i\}$  im dreidimensionalen Raum. Die Vektorkomponenten  $a'_i$  und  $a_i$  sind über die Komponenten  $(R)_{ij} = R_{ij}$  der Rotationsmatrix  $R$  gemäß  $a'_i = \sum_j R_{ij} a_j$  verknüpft. Für orthogonale Transformationen gilt die definierende Eigenschaft:  $R^T = R^{-1}$  bzw. in Komponentenschreibweise  $(R^{-1})_{ij} = (R^T)_{ij} = (R)_{ji}$ .

- a) Zeigen Sie, dass das Produkt  $R_1 R_2$  zweier orthogonaler Matrizen  $R_1$  und  $R_2$  wieder eine orthogonale Matrix ergibt.
- b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  zweier Vektoren unter orthogonalen Transformationen eine Invariante darstellt.
- c) Überprüfen Sie wesentliche Zusammenhänge aus Teil a) und b) anhand der konkreten Rotationsmatrizen

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

welche Drehungen um die  $z$ -Achse vermitteln.



# Homework 0 solutions

## Question 1

(a)

$$\hat{q}_k = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \quad (1)$$

The relation between two curvilinear coordinates and Cartesian coordinates are given by

cylindrical coordinates  $(\rho, \varphi, z)$

$$x = \rho \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

spherical coordinates  $(r, \vartheta, \varphi)$

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\vartheta)$$

We do a transformation using equation (1) to spherical coordinates:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -r \sin(\vartheta) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

with

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| &= \sqrt{\sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\vartheta)} = 1 \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| &= \sqrt{r^2 \cos^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta)} = r \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| &= \sqrt{r^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi)} = r \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

we get the unit vectors:

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{bmatrix}, \quad \hat{\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

with transformation matrix:

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\vartheta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -\sin(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\vartheta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

We now verify the orthogonality of our new unit vectors using cross product:

$$\begin{aligned}\hat{r} \times \hat{\vartheta} &= \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \sin(\varphi)(-\sin(\vartheta)) - \cos(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos(\varphi) - \sin(\vartheta) \cos(\varphi)(-\sin(\vartheta)) \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) - \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\sin^2(\vartheta) \sin(\varphi) + \cos^2(\vartheta) \sin(\varphi)) \\ \cos^2(\vartheta) \cos(\varphi) + \sin^2(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) - \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\varphi}\end{aligned}$$

correct, but I wanna do a double check:

$$\hat{\vartheta} \times \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \sin(\varphi)0 - (-\sin(\vartheta)) \cos(\varphi) \\ (-\sin(\vartheta))(-\sin(\varphi)) - \cos(\vartheta) \cos(\varphi)0 \\ \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \cos(\varphi) - \cos(\vartheta) \sin(\varphi)(-\sin(\varphi)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{bmatrix} = \hat{r}$$

Now we do the same transformation to cylindrical coordinates:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \begin{bmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\rho \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| &= \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1 \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| &= \sqrt{\rho^2 \sin^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\varphi)} = \rho \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| &= 1\end{aligned}$$

therefore:

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

with transformation matrix:

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

- (b) The position vector  $\vec{r}$  in combination of basis vectors from cartesian coordinates and factors of curvilinear coordinates is given by

$$(spherical) \quad \vec{r} = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \hat{x} + r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \hat{y} + r \cos(\vartheta) \hat{z} \quad (8)$$

$$(cylindrical) \quad \vec{r} = \rho \cos(\varphi) \hat{x} + \rho \sin(\varphi) \hat{y} + z \hat{z} \quad (9)$$

our goal is to obtain an expression of position vector, such that it is explicitly expressed by curvilinear coordinates, like in the following equation:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) = \sum_{k=1}^3 c_k(q_1, q_2, q_3) \hat{q}_k(q_1, q_2, q_3)$$

Now we replace unit vectors of cartesian coordinates with which from curvilinear coordinates using transformation matrices.

For spherical coordinates, we use equation (4):

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\vartheta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

we insert position vector form (8),

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & & \\ & r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \\ & & r \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & & \\ & r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \\ & & r \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\vartheta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos^2(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ r \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin^2(\varphi) & r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ r \cos^2(\vartheta) & -r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\vartheta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) \hat{r} + r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos^2(\varphi) \hat{\vartheta} - r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \hat{\varphi} \\ r \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) \hat{r} + r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin^2(\varphi) \hat{\vartheta} + r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \hat{\varphi} \\ r \cos^2(\vartheta) \hat{r} - r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \hat{\vartheta} \end{bmatrix} \\ &= (r \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r \cos^2(\vartheta)) \hat{r} \\ &\quad + (r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin^2(\varphi) - r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)) \hat{\vartheta} \\ &\quad + (-r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \hat{\varphi} \\ &= r \hat{r} \end{aligned}$$

And for cylindrical coordinates:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \rho \cos(\varphi) & & \\ & \rho \sin(\varphi) & \\ & & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho \cos(\varphi) & & \\ & \rho \sin(\varphi) & \\ & & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho \cos^2(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) & 0 \\ \rho \sin^2(\varphi) & \rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho \cos^2(\varphi) \hat{\rho} - \rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) \hat{\varphi} \\ \rho \sin^2(\varphi) \hat{\rho} + \rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) \hat{\varphi} \\ z \hat{z} \end{bmatrix} \\
&= (\rho \cos^2(\varphi) + \rho \sin^2(\varphi)) \hat{\rho} + (-\rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \rho \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \hat{\varphi} + z \hat{z} \\
&= \rho \hat{\rho} + z \hat{z}
\end{aligned}$$

(c) The (square of) line element is given by

$$dl := |d\vec{r}|^2$$

with  $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$

In spherical coordinates, it is

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{bmatrix} dr + \begin{bmatrix} r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -r \sin(\vartheta) \end{bmatrix} d\vartheta + \begin{bmatrix} -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi \end{aligned}$$

therefore,

$$\begin{aligned} |d\vec{r}|^2 &= \begin{bmatrix} \sin(\vartheta)^2 \cos(\varphi)^2 \\ \sin(\vartheta)^2 \sin(\varphi)^2 \\ \cos(\vartheta)^2 \end{bmatrix} dr^2 + \begin{bmatrix} r^2 \cos(\vartheta)^2 \cos(\varphi)^2 \\ r^2 \cos(\vartheta)^2 \sin(\varphi)^2 \\ r^2 \sin(\vartheta)^2 \end{bmatrix} d\vartheta^2 + \begin{bmatrix} r^2 \sin(\vartheta)^2 \sin(\varphi)^2 \\ r^2 \sin(\vartheta)^2 \cos(\varphi)^2 \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2 \end{aligned}$$

In cylindrical coordinates, it is

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\rho + \begin{bmatrix} -\rho \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dz \end{aligned}$$

therefore

$$\begin{aligned} |d\vec{r}|^2 &= \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\rho^2 + \begin{bmatrix} \rho^2 \sin^2(\varphi) \\ \rho^2 \cos^2(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dz^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \end{aligned}$$

(d) The position vector in spherical coordinates is

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

the speed  $\vec{v}(t)$  is the derivative of position vector  $\vec{r}$  with respect to time  $t$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \dot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \dot{r}(t) \begin{bmatrix} \sin(\vartheta(t)) \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{bmatrix} + r(t) \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sin(\vartheta(t)) \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{bmatrix}}_{\boxed{\text{A}}}\end{aligned}$$

with

$$\boxed{\text{A}} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}(t) \cos(\vartheta(t)) \cos(\varphi(t)) - \sin(\vartheta(t)) \dot{\varphi}(t) \sin(\varphi(t)) \\ \dot{\vartheta}(t) \cos(\vartheta(t)) \sin(\varphi(t)) + \sin(\vartheta(t)) \dot{\varphi}(t) \cos(\varphi(t)) \\ -\dot{\vartheta}(t) \sin(\vartheta(t)) \end{bmatrix}$$

therefore

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(\vartheta(t)) \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{bmatrix}}_{\hat{r}(t)} + r(t) \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\vartheta}(t) \cos(\vartheta(t)) \cos(\varphi(t)) - \sin(\vartheta(t)) \dot{\varphi}(t) \sin(\varphi(t)) \\ \dot{\vartheta}(t) \cos(\vartheta(t)) \sin(\varphi(t)) + \sin(\vartheta(t)) \dot{\varphi}(t) \cos(\varphi(t)) \\ -\dot{\vartheta}(t) \sin(\vartheta(t)) \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{r}}(t)} \quad (10)$$

the acceleration  $a$  is given by

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}(t)\hat{r}(t) + \dot{r}(t)\dot{\hat{r}}(t) + \dot{r}(t)\dot{\hat{r}}(t) + r(t)\ddot{\hat{r}}(t) \quad (11)$$

with

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}(t) &= \begin{bmatrix} \ddot{\vartheta}C_{\vartheta}C_{\varphi} + \dot{\vartheta}(\dot{\vartheta}S_{\vartheta}C_{\varphi} - \dot{\varphi}C_{\vartheta}S_{\varphi}) - \ddot{\varphi}S_{\vartheta}S_{\varphi} - \dot{\varphi}(\dot{\vartheta}C_{\vartheta}S_{\varphi} + \dot{\varphi}S_{\vartheta}C_{\varphi}) \\ \ddot{\vartheta}C_{\vartheta}S_{\varphi} + \dot{\vartheta}(-\dot{\vartheta}S_{\vartheta}S_{\varphi} + \dot{\varphi}C_{\vartheta}C_{\varphi}) + \ddot{\varphi}S_{\vartheta}C_{\varphi} + \dot{\varphi}(\dot{\vartheta}C_{\vartheta}C_{\varphi} - \dot{\varphi}S_{\vartheta}S_{\varphi}) \\ -\dot{\vartheta}S_{\vartheta} - (\dot{\vartheta})^2C_{\vartheta} \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{r}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}(t) \cos(\vartheta(t)) \cos(\varphi(t)) - \sin(\vartheta(t)) \dot{\varphi}(t) \sin(\varphi(t)) \\ \dot{\vartheta}(t) \cos(\vartheta(t)) \sin(\varphi(t)) + \sin(\vartheta(t)) \dot{\varphi}(t) \cos(\varphi(t)) \\ -\dot{\vartheta}(t) \sin(\vartheta(t)) \end{bmatrix} \\ \hat{r}(t) &= \begin{bmatrix} \sin(\vartheta(t)) \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{bmatrix}\end{aligned}$$



## Question 2

- (a) The trajectory of the mass point is given by  $\vec{r}(t)$

Cross product of two vectors gives a "directionalized(?) area"(a vector) with magnitude equals to area of the parallelogram that spanned by two vectors.

In our case, the circular sector  $A$  can be approximated to a triangle with a infinitesimal arc element  $d\vec{r}$ , therefore we have

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times d\vec{r}(t)|$$

$d\vec{r}(t)$  is the path of mass point along the the orbit  $\vec{r}(t)$  in time  $dt$

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) dt| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| dt \end{aligned}$$

therefore

$$f(t) = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)|$$

- (b) We are going to prove that

$$\frac{d}{dt} f(t) = 0$$

$$\begin{aligned} df(t) &= f(t+dt) - f(t) \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t+dt) \times \dot{\vec{r}}(t+dt)| - \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| \\ &= \frac{1}{2} |(\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)dt) \times (\dot{\vec{r}}(t) + \ddot{\vec{r}}(t)dt)| - \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) + \vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)dt + \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)dt^2}_{dt^2=0}| - \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| \\ &= \frac{1}{2} (|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) + \underbrace{\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)dt}_{=0}| - |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)|) \\ &= \frac{1}{2} (|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| - |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)|) \\ &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} f(t) &= 0 \end{aligned}$$

(c) It is given that

$$\vec{r}(t) = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

and

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} + \dot{z}\hat{z}$$

with  $z(t) = 0$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} = \dot{\rho} \begin{pmatrix} C_\varphi \\ S_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}S_\varphi \\ \dot{\varphi}C_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

therefore

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| \\ &= \frac{1}{2}|(\rho\hat{\rho} + z\hat{z}) \times (\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi})| \\ &= \frac{1}{2}|\rho\hat{\rho} \times \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + z\hat{z} \times \dot{\rho}\hat{\rho} + z\hat{z} \times \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}| \\ &= \frac{1}{2}|-\rho^2\dot{\varphi}\hat{z} + z\dot{\rho}\hat{\varphi} - z\rho\dot{\varphi}\hat{\rho}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\rho^4\dot{\varphi}^2 + z^2\dot{\rho}^2 + z^2\rho^2\dot{\varphi}^2} \\ (z(t) = 0) &= \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

### Question 3

(a) We are going to prove

$$(R_1 R_2)^T (R_1 R_2) = \mathbb{1}$$

*Proof.*

$$\begin{aligned}(R_1 R_2)^T (R_1 R_2) &= R_2^T R_1^T R_1 R_2 \\ &= R_2^T \mathbb{1} R_2 \\ &= R_2^T R_2 \\ &= \mathbb{1}\end{aligned}$$

□

(b) We are going to prove

$$(R\vec{a}) \cdot (R\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

with  $R$  orthogonal

*Proof.*

$$\begin{aligned}(R\vec{a}) \cdot (R\vec{b}) &= (R\vec{a})^T (R\vec{b}) \\ &= \vec{a}^T R^T R \vec{b} \\ &= \vec{a}^T \mathbb{1} \vec{b} \\ \vec{a}^T \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

□

(c) We define two rotation matrices that rotate two different angles

$$R(\varphi_1) = \begin{pmatrix} C_{\varphi_1} & S_{\varphi_1} & 0 \\ -S_{\varphi_1} & C_{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\varphi_2) = \begin{pmatrix} C_{\varphi_2} & S_{\varphi_2} & 0 \\ -S_{\varphi_2} & C_{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

therefore

$$\begin{aligned} R(\varphi_1)R(\varphi_2) &= \begin{pmatrix} C_{\varphi_1} & S_{\varphi_1} & 0 \\ -S_{\varphi_1} & C_{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\varphi_2} & S_{\varphi_2} & 0 \\ -S_{\varphi_2} & C_{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{\varphi_1}C_{\varphi_2} - S_{\varphi_1}S_{\varphi_2} & S_{\varphi_1}C_{\varphi_2} + C_{\varphi_1}S_{\varphi_2} & 0 \\ -S_{\varphi_1}C_{\varphi_2} - C_{\varphi_1}S_{\varphi_2} & C_{\varphi_1}C_{\varphi_2} - S_{\varphi_1}S_{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (R(\varphi_1)R(\varphi_2))^T &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-(\varphi_1 + \varphi_2)) & \sin(-(\varphi_1 + \varphi_2)) & 0 \\ -\sin(-(\varphi_1 + \varphi_2)) & \cos(-(\varphi_1 + \varphi_2)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (R(\varphi_1)R(\varphi_2))^T(R(\varphi_1)R(\varphi_2)) &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

We define two vectors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

with dot product defined

$$\vec{a}^T \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

We apply a orthogonal transformation (rotation matrix  $R(\varphi)$ ) to each vector

$$\begin{aligned} (R(\varphi)\vec{a})^T(R(\varphi)\vec{b}) &= \left( \begin{pmatrix} C_{\varphi} & S_{\varphi} & 0 \\ -S_{\varphi} & C_{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} C_{\varphi} & S_{\varphi} & 0 \\ -S_{\varphi} & C_{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{\varphi}a_1 + S_{\varphi}a_2 \\ -S_{\varphi}a_1 + C_{\varphi}a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_{\varphi}b_1 + S_{\varphi}b_2 \\ -S_{\varphi}b_1 + C_{\varphi}b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= (C_{\varphi}a_1 + S_{\varphi}a_2)(C_{\varphi}b_1 + S_{\varphi}b_2) + (-S_{\varphi}a_1 + C_{\varphi}a_2)(-S_{\varphi}b_1 + C_{\varphi}b_2) + a_3b_3 \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \vec{a}^T \vec{b} \end{aligned}$$