

# Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

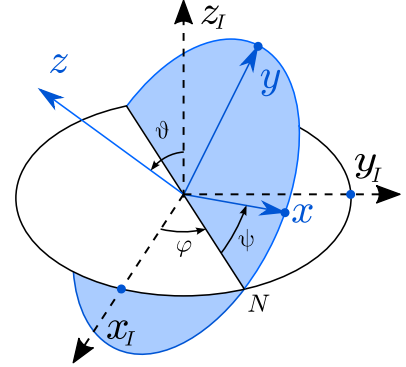
Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden  
<https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre>

---

## 7. Übung (Besprechung 22.5. - 26.5.)

### 1. Euler'sche Winkel

Mit Hilfe der Euler'schen Winkel  $\varphi$ ,  $\vartheta$  und  $\psi$  sei die Orientierung eines körperfesten Koordinatensystems  $(x, y, z)$  bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems  $(x_I, y_I, z_I)$  gegeben.



- Stellen Sie mit Hilfe der Euler'schen Winkel die Matrix  $A$  auf, die einen Vektor gegeben in körperfesten Koordinaten in einen Vektor in raumfesten Koordinaten überführt.
- Als körperfestes Koordinatensystem betrachten wir nun die Hauptträgheitsachsen eines symmetrischen Kreisels ( $I_1 = I_2$ ) mit den Hauptträgheitsmomenten  $I_1, I_2, I_3$ . Drücken Sie zunächst den Drehimpuls im körperfesten Koordinatensystem mit Hilfe der Euler'schen Winkel bzw. deren Zeitableitungen aus. Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Relationen zwischen der momentanen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\Omega}$  um die Hauptträgheitsachsen und den Euler'schen Winkeln

$$\Omega_1 = \sin(\vartheta) \sin(\psi) \dot{\varphi} + \cos(\psi) \dot{\vartheta}$$

$$\Omega_2 = \sin(\vartheta) \cos(\psi) \dot{\varphi} - \sin(\psi) \dot{\vartheta}$$

$$\Omega_3 = \cos(\vartheta) \dot{\varphi} + \dot{\psi}.$$

Bestimmen Sie nun die raumfesten Komponenten des Drehimpulses.

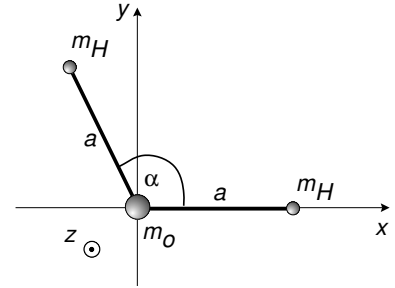
- Leiten Sie daraus den Ausdruck für einen "schnellen Kreisel", d.h.  $\dot{\psi} \gg \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}$ , her

$$\vec{L} \approx I_3 \dot{\psi} \left( \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \vec{e}_{x_I} - \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \vec{e}_{y_I} + \cos(\vartheta) \vec{e}_{z_I} \right)$$

und überlegen Sie sich die Orientierung von  $\vec{L}$ .

## 2. Wassermolekül

Ein einfaches Modell eines Wassermoleküls ( $\text{H}_2\text{O}$ ) besteht aus drei starr verbundenen Punktmassen (ein Sauerstoffatom mit Masse  $m_O$  und zwei Wasserstoffatome mit Masse  $m_H$ ). Das O-Atom liege im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, die H-Atome haben davon einen Abstand  $a$ . Eines liege auf der positiven  $x$ -Achse, das andere in der  $x$ - $y$ -Ebene in einer um den Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse gedrehten Richtung (s. Skizze).

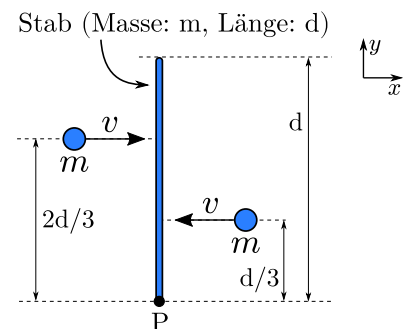


Für das Wassermolekül gilt  $\alpha = 104.5^\circ$ ,  $a = 9.6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

- Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes.
- Berechnen Sie die Komponenten des auf den Schwerpunkt bezogenen Trägheitstensors bei der eingezeichneten Wahl der Koordinatenrichtungen.
- Bestimmen Sie die Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente.
- Nutzen Sie den Satz von Steiner um den Trägheitstensor bezüglich eines Koordinatensystems mit Ursprung bei einem der Wasserstoffatome zu bestimmen.

## 3. Kollision mit einem starren Stab

Ein Stab der Masse  $m$  (homogene Dichte) und Länge  $d$  (Breite sei zu vernachlässigen) liege anfangs in Ruhe auf einem Tisch. Um seine Lagerung am Drehpunkt  $P$  kann der Stab reibungsfrei rotieren. Ein Massenpunkt, ebenfalls mit Masse  $m$ , bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung. Er treffe den Stab im Abstand  $2d/3$  vom Drehpunkt und bleibe dort stecken. Ein zweiter Massenpunkt (Masse  $m$ , Geschwindigkeit  $v$ ) treffen den Stab zeitgleich von der anderen Seite im Abstand  $d/3$  vom Drehpunkt und bleibe ebenfalls stecken.



- Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit mit der der Stab nach der Kollision um den Punkt  $P$  rotiert.
- Um wie viel Prozent ist die kinetische Energie des Systems nach dem Stoß kleiner als die kinetische Energie der zwei Massenpunkte vor dem Stoß?