Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

Lösung – Präsenzübung (Besprechung 3.4. - 7.4.)

1. Krummlinige Koordinatensysteme

Zerlegung des Ortsvektors in kartesische Basisvektoren

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{E}_i \,, \quad \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \delta_{ij} \,, \quad \vec{E}_1 = e_x \,, \quad \vec{E}_2 = e_y \,, \quad \vec{E}_3 = e_z$$

a) Variation einer Koordinate q_i:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\vec{r} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{E}_j$$

$\vec{g}_i$ zeigt in die Richtung der Änderung von $\vec{r}$ wenn die Koordinate q_i geändert wird.

Beispiele:

Sei $q_i = x$, so folgt, dass sich $\vec{r}$ in x-Richtung ändert (trivial). Sei $q_i = \varphi$ (Zylinderkoordinaten), so ist die Änderungsrichtung tangential zum Kreisbogen, was somit e_φ definiert.

Die lokalen normierten Basisvektoren erhält man somit

$$\vec{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\vec{r}\right) \Big/ \left|\frac{\partial}{\partial q_i}\vec{r}\right| \,.$$

Zylinderkoordinaten

Ortsvektor

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \rho\cos(\varphi)\vec{e}_x + \rho\sin(\varphi)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

b) lokale Basisvektoren

- $q_1 = \rho$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\vec{r} = \cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y \qquad \left|\frac{\partial}{\partial \rho}\vec{r}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y$$

- $q_2 = \varphi$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{r} = -\rho\sin(\varphi)\vec{e}_x + \rho\cos(\varphi)\vec{e}_y \qquad \left|\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{r}\right| = \rho$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y$$

- $q_3 = z$

$$\frac{\partial}{\partial z}\vec{r} = \vec{e}_z \qquad \left|\frac{\partial}{\partial z}\vec{r}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z = \vec{e}_z$$

Zusammenfassung:

$$\vec{r}(\rho,\varphi,z) = \rho\vec{e}_\rho(\varphi) + z\vec{e}_z$$

c) Linienelement (allgemein)

$$d\vec{r} = \sum_i dx_i\,\vec{E}_i = \sum_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}dq_k\,\vec{E}_i = \sum_k dq_k\,\vec{g}_k = \sum_k\ \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right|\vec{e}_k\,dq_k$$

$$dl^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \sum_{ij}\ \vec{E}_i\cdot\vec{E}_j\,dx_i dx_j = \sum_{ij}\ \vec{g}_i\cdot\vec{g}_j\,dq_i dq_j = \sum_{ij}\ a_{ij}\,dq_i dq_j\ ,$$

Metrische Koeffizienten (Metrik)

$$a_{ij} = \vec{g}_i\cdot\vec{g}_j = \sum_{kl}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_j}\delta_{kl} = \sum_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\,,$$

Für orhtogonale Koordinatensysteme $g_i\perp g_j, \forall i\neq j$

$$dl^2 = \sum_k |g_k|^2 dq_k^2 = \sum_k\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right|^2 dq_k^2$$

speziell für Zylinderkoordinaten

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

d) Geschwindigkeit und Beschleunigung
Vorbereitung: Ableitungen der neuen Basisvektoren nach den neuen Variablen

$$\partial_\varphi\vec{e}_\rho = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi$$

$$\partial_\varphi\vec{e}_\varphi = -\cos(\varphi)\vec{e}_x - \sin(\varphi)\vec{e}_y = -\vec{e}_\rho$$

Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}\vec{r}(\rho(t),\varphi(t),z(t))\\ &= \frac{d}{dt}\left(\rho(t)\,\vec{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\,\vec{e}_z\right)\\ &= \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho(\partial_\varphi\vec{e}_\rho)\dot\varphi + \dot z\vec{e}_z\\ &= \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \dot z\vec{e}_z\end{aligned}$$

Beschleunigung

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(\rho(t),\varphi(t),z(t))\\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot\rho(t)\vec{e}_\rho(\varphi(t)) + \rho(t)\dot\varphi(t)\vec{e}_\varphi(\varphi(t)) + \dot z(t)\vec{e}_z\right)\\ &= \ddot\rho\vec{e}_\rho + \dot\rho(\partial_\varphi\vec{e}_\rho)\dot\varphi + \dot\rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \rho\ddot\varphi\vec{e}_\varphi + \rho\dot\varphi(\partial_\varphi\vec{e}_\varphi)\dot\varphi + \ddot z\vec{e}_z\\ &= (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec{e}_\rho + 2\dot\rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \ddot z\vec{e}_z\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

Ortsvektor

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y + r\cos(\theta)\vec{e}_z$$

a) lokale Basisvektoren

- $q_1 = r$

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y + \cos(\theta)\vec{e}_z \qquad \left|\frac{\partial}{\partial r}\vec{r}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y + \cos(\theta)\vec{e}_z$$

- $q_2 = \theta$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{r} = r\cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_x + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y - r\sin(\theta)\vec{e}_z \qquad \left|\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{r}\right| = r$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y - \sin(\theta)\vec{e}_z$$

- $q_3 = \varphi$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{r} = -r\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \qquad \left|\frac{\partial}{\partial r}\vec{r}\right| = r\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y$$

Es folgt:

$$\vec{r}(r,\varphi,\theta) = r\vec{e}_r(\varphi,\theta)$$

b) Linienelement

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2$$

c) Geschwindigkeit und Beschleunigung

Vorbereitung: Ableitungen der neuen Basisvektoren nach den neuen Variablen

$$\partial_\theta\vec{e}_r = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y - \sin(\theta)\vec{e}_z = \vec{e}_\theta$$

$$\partial_\varphi\vec{e}_r = -\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_y = \sin(\theta)\vec{e}_\varphi$$

$$\partial_\theta\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_x - \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y - \cos(\theta)\vec{e}_z = -\vec{e}_r$$

$$\partial_\varphi\vec{e}_\theta = -\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_y = \cos(\theta)\vec{e}_\varphi$$

$$\partial_\theta\vec{e}_\varphi = 0$$

$$\partial_\varphi\vec{e}_\varphi = -\cos(\varphi)\vec{e}_x - \sin(\varphi)\vec{e}_y = -(\sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta)$$

Geschwindigkeit

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}r(t)\vec{e}_r(\theta(t),\varphi(t))$$

$$= \dot{r}\vec{e}_r + r\left((\partial_\theta\vec{e}_r)\dot{\theta} + (\partial_\varphi\vec{e}_r)\dot{\varphi}\right)$$

$$= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Beschleunigung

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2}r(t)\vec{e}_r(\theta(t),\varphi(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$+(\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\vec e_\theta + r\dot\theta\left((\partial_\theta\vec e_\theta)\dot\theta + (\partial_\varphi\vec e_\theta)\dot\varphi\right)$$
$$+(\dot r\sin(\theta)\dot\varphi + r\cos(\theta)\dot\theta\dot\varphi + r\sin(\theta)\ddot\varphi)\vec e_\varphi + r\sin(\theta)\dot\varphi\left((\partial_\theta\vec e_\varphi)\dot\theta + (\partial_\varphi\vec e_\varphi)\dot\varphi\right)$$
$$= (\ddot r - r\dot\theta^2 + r\sin^2(\theta)\dot\varphi^2)\vec e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\varphi^2)\vec e_\theta$$
$$+(2\dot r\sin(\theta)\dot\varphi + 2r\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta) + r\sin(\theta)\ddot\varphi)\vec e_\varphi$$

2. Flächensatz der Astrophysik

a) infinitesimales Zeitintervall: $[t, t+dt]$
die Vektoren $\vec r(t)$, $\vec r(t+dt)$ und $d\vec r(t)$ bilden ein Dreieck
Flächeninhalt: $dA = \frac{1}{2}\,|\vec r(t)\times d\vec r(t)|$
Flächengeschwindigkeit: $\dot A(t) = f(t) = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\,|\vec r(t)\times \dot{\vec r}(t)| = \frac{1}{2}\,|\vec r(t)\times\vec v(t)|$

b) Zeitableitung: $\dot f(t) = \frac{1}{2}\,|\dot{\vec r}(t)\times\vec v(t) + \vec r(t)\times\dot{\vec v}(t)| = \frac{1}{2}\,|\vec r(t)\times\vec a(t)|$
wenn also $\vec r(t)\parallel\vec a(t)$, dann $\Rightarrow \frac{1}{2}\,|\vec r(t)\times\vec a(t)| = \dot f(t) = 0$
also $\Rightarrow \dot A(t) = const$

c) $\vec v$ in Zylinderkoordinaten siehe Aufgabe 1
$\vec v = \dot\rho\,\vec e_\rho + \rho\dot\varphi\,\vec e_\varphi + \dot z\,\vec e_z\,,\quad \dot z = 0$
$\dot A(t) = \frac{1}{2}\,|\vec r(t)\times\vec v(t)| = \frac{1}{2}\,\dot\varphi\,\rho^2\,|\vec e_\rho\times\vec e_\varphi| = \frac{1}{2}\,\dot\varphi\,\rho^2\,\vec e_z = L_z$

3. Drehungen als orthogonale Transformationen

Eigenschaften orthogonaler Matrizen: $R^T = R^{-1}$ oder $RR^T = \mathbf{1}$

a) Die Transponierte von $R = R_1R_2$ lässt sich in Komponenten berechnen

$$(R^T)_{ij} = R_{ji} = \sum_k (R_1)_{jk}(R_2)_{ki} = \sum_k (R_1^T)_{kj}(R_2^T)_{ik} = \sum_k (R_2^T)_{ik}(R_1^T)_{kj} = (R_2^TR_1^T)_{ij}$$

also $(R_1R_2)^T = R_2^TR_1^T$ und damit

$$RR^T = (R_1R_2)(R_2^TR_1^T) = R_1\underbrace{(R_2R_2^T)}_{\mathbf{1}}R_1^T = R_1R_1^T = \mathbf{1}$$

b) Skalarprodukt von $\vec a$ und $\vec b$ in Komponenten: $s = \sum_i a_ib_i$
transformierte Vektoren: $\vec a' = R\,\vec a,\quad \vec b' = R\,\vec b$
in Komponenten: $a_i' = \sum_k R_{ik}a_k,\quad \sum_l b_i' = R_{il}b_l$ damit

$$s' = \sum_i a_i'b_i' = \sum_i\sum_k R_{ik}a_k\sum_l R_{il}b_l = \sum_{kl} a_kb_l\sum_i R_{ik}R_{il}$$

aus a) wissen wir

$$\sum_i R_{ik}R_{il} = \sum_i R_{ki}^TR_{il} = (R^TR)_{kl} = \mathbf{1}_{kl} = \delta_{kl}$$

und damit

$$s' = \sum_i a_i'b_i' = \sum_{kl} a_kb_l\sum_i R_{ik}R_{il} = \sum_{kl} a_kb_l\delta_{kl} = \sum_k a_kb_k = s$$

c)

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(-\varphi)$$

$$R^T(\varphi)R(\varphi) = \mathbf{1}$$

Zwei Drehungen hintereinander

$$\begin{aligned} &R_{12} = R(\varphi_1)R(\varphi_2) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) & 0 \\ -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) & -\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir nutzen
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$R_{12} = R(\varphi_1)R(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) & 0 \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(\varphi_1+\varphi_2)$$

Skalarprodukte:
$a_1' = \cos(\varphi)a_1 + \sin(\varphi)a_2 \qquad a_2' = -\sin(\varphi)a_1 + \cos(\varphi)a_2 \qquad a_3' = a_3$
$b_1' = \cos(\varphi)b_1 + \sin(\varphi)b_2 \qquad b_2' = -\sin(\varphi)b_1 + \cos(\varphi)b_2 \qquad b_3' = b_3$

$$\begin{aligned} \sum_i a_i'b_i' =& [\cos(\varphi)a_1 + \sin(\varphi)a_2][\cos(\varphi)b_1 + \sin(\varphi)b_2] \\ &+ [-\sin(\varphi)a_1 + \cos(\varphi)a_2][-\sin(\varphi)b_1 + \cos(\varphi)b_2] + a_3b_3 \\ =& [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)]a_1b_1 + [\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi)]a_1b_2 \\ &+ [\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)]a_2b_1 + [\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)]a_2b_2 + a_3b_3 \\ =& a_1b_1 + b_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$