Theoretische Mechanik Sommersemester 2023

Prof. Dr. W. Strunz, Dr. R. Hartmann, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tqo/studium/lehre

Lösung – 1. Übung (Besprechung 10.4. - 14.4.)

1. Das begleitende Dreibein

Wir betrachten eine Trajektorie im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch eine Parametrisierung $\vec{r}(t)$. Das räumliche *Bogenlängenelement* $\mathrm{d}\ell$ ist definiert durch $\mathrm{d}\ell := \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t$. Wir nehmen im Weiteren an, dass $\ell(t)$ invertierbar ist und damit $\vec{r}(\ell)$ eine weitere äquivalente Parametrisierung ist.

Außerdem definieren wir den *Tangentenvektor* $\vec{e}_T := \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\ell)}{\mathrm{d}\ell}$, den *Normalenvektor* $\vec{e}_N := \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell} / \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}\right|$ und den *Binormalenvektor* $\vec{e}_B := \vec{e}_T \times \vec{e}_N$.

a) Wir zeigen $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ wobei $i, j \in \{T, N, B\}$.

$$\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\ell} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\ell} = \left(\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\ell}\right)^2 = 1$$

$$\vec{e}_T \cdot \vec{e}_N = \vec{e}_T \cdot \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}\right|} \propto \vec{e}_T \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}(\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}1 = 0$$

Dass $\vec{e}_N$ normiert ist, folgt aus seiner Definition. Die Norm von $\vec{e}_B$ folgt aus der bekannten Identität für das Kreuzprodukt:

$$|\vec{e}_B| = |\vec{e}_T \times \vec{e}_N| = |\vec{e}_T||\vec{e}_N| \sin\varphi = 1,$$

wobei φ den von $\vec{e}_T$ und $\vec{e}_N$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Die restlichen Orthogonalitätsrelationen folgen aus den Eigenschaften des Kreuzproduktes.

b) Der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor sind über die *Zeitableitungen* des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ definiert:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\ell}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = v(t)\ \vec{e}_T(t) \\ \vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{v}(t)\ \vec{e}_T(t) + v(t)\ \dot{\vec{e}}_T(t)\end{aligned}$$

wobei

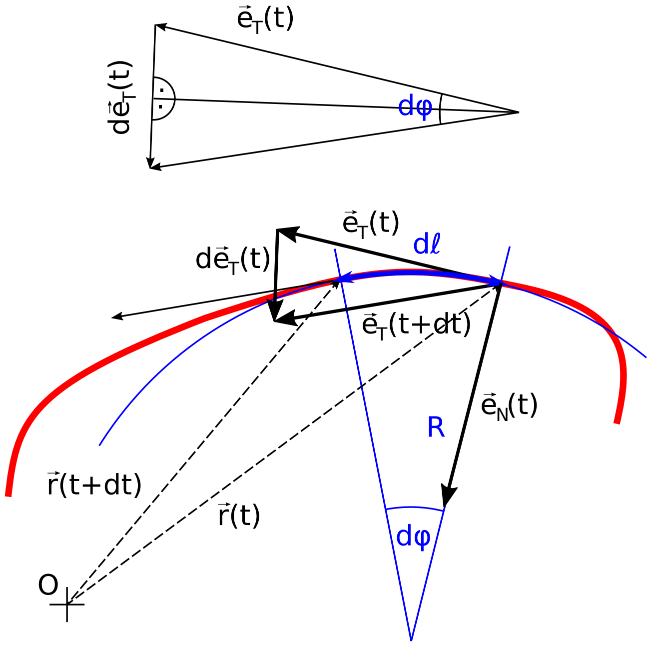
$$\dot{\vec{e}}_T(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = v\left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}\right|\vec{e}_N\ .$$

Geometrische Überlegungen anhand der Abbildung unten führen auf $|\mathrm{d}\vec{e}_T| = \sin(\mathrm{d}\varphi)|\vec{e}_T| = \sin(\mathrm{d}\varphi) = \mathrm{d}\varphi + \mathscr{O}(\mathrm{d}\varphi^3)$, sodass für infinitesimale Änderungen gilt $|\mathrm{d}\vec{e}_T| = \mathrm{d}\varphi$. Des weiteren folgt für die Bogenlänge (als infinitesimales Kreissegment eines Kreises mit Radius R genähert) $\mathrm{d}\ell = R\,\mathrm{d}\varphi$ und damit

$$\left|\frac{d\vec{e}_T}{d\ell}\right| = \frac{1}{R}\ .$$

Es folgt die Zerlegung der Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponente

$$\vec{a}(t) = a(t)\vec{e}_T(t) + \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{e}_N(t)\ .$$



Tangentialvektoren zum Zeitpunkt t und $t + \mathrm{d}t$ an die Kurve $\vec{r}(t)$. Der blaue Kreis deutet eine Approximation im Zeitintervall $[t, t + \mathrm{d}t]$ an.

2. Teilchen auf einer Schraubenlinie

Gegeben sei die Schraubentrajektorie mit Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \rho\cos(\omega t)\vec{E}_x + \rho\sin(\omega t)\vec{E}_y + h\omega t\vec{E}_z \quad t \in [t_1, t_2],$$

wobei ρ, ω, h reelle Konstanten seien und $\vec{E}_i$ die kartesischen Einheitsvektoren.

a) Für die Bogenlängenelement gilt $\mathrm{d}\ell := \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t$ (siehe Aufgabe 1).
Es folgt für die Geschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = -\rho\omega\sin(\omega t)\vec{E}_x + \rho\omega\cos(\omega t)\vec{E}_y + h\omega\vec{E}_z$$

und damit für das infinitesimale Bogenlängenelement

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\rho\omega)^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + (h\omega)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\rho^2 + h^2}\,\omega\mathrm{d}t\ .$$

Die Bogenlänge ergibt sich dann durch Integration über das infinitesimale Bogenlängenelement

$$\ell(t_1, t) = \int_0^\ell \mathrm{d}\ell' = \int_{t_1}^t \sqrt{\rho^2 + h^2}\omega\mathrm{d}t = \sqrt{\rho^2 + h^2}\omega \cdot (t - t_1)\ .$$

b) Aus der Definition des Tangentenvektors ergibt sich

$$\vec{e}_T = \frac{d\vec{r}(\ell)}{d\ell} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\frac{dt}{d\ell} = \left(-\rho\sin(\omega t)\vec{E}_x + \rho\cos(\omega t)\vec{E}_y + h\vec{E}_z\right)\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}\ .$$

Da $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\ell} > 0$ folgt für den Normalenvektor

$$\vec{e}_N = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell} \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}\right|^{-1} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}t} \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}t}\right|^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho\omega}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\left(-\cos(\omega t)\vec{E}_x - \sin(\omega t)\vec{E}_y\right)$$

und somit

$$\vec{e}_N = -\left(\cos(\omega t)\vec{E}_x + \sin(\omega t)\vec{E}_y\right) =: -\vec{e}_\rho \ .$$

$\vec{e}_\rho$ bezeichnet den radialen Einheitsvektor in Zylinderkoordinaten.
Auswerten des Kreuzproduktes liefert den Binormalenvektor

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_N = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+h^2}}(h\sin(\omega t)\vec{E}_x - h\cos(\omega t)\vec{E}_y + \rho\vec{E}_z) \ .$$

Krümmungsradius der Bahnkurve:

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}\ell}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\rho\omega}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\frac{1}{\omega\sqrt{\rho^2+h^2}}$$

$$R = \frac{\rho^2+h^2}{\rho} = \rho\left(1+\frac{h^2}{\rho^2}\right)$$

c) Aus Aufgabe 1 kennen wir bereits die Zerlegung der Beschleunigung $\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_T + v\dot{\vec{e}}_T$. Da der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist (siehe 2a) $v = \omega\sqrt{\rho^2+h^2} \Rightarrow \dot{v} = 0$ und mit dem Ergebnis aus 2b) folgt

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = -\frac{\rho\omega}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\vec{e}_\rho \ .$$

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom $\vec{F} = m\vec{a}$ ergibt sich also

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\rho\vec{e}_\rho$$

als Radialkraft, die nötig ist um das Teilchen auf der Schraubenbahn zu halten.

d) Ansatz: $\vec{B} = B_0\vec{E}_z$, $\vec{E}$ beliebig
Mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Schraubenkurve ergibt sich die Lorentz-Kraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= q\vec{E} + \frac{q}{c}\left(\rho\omega\left(-\sin(\omega t)\vec{E}_x + \cos(\omega t)\vec{E}_y\right) + h\omega\vec{E}_z\right) \times B_0\vec{E}_z \\ &= q\vec{E} + \frac{q\rho\omega B_0}{c}\vec{e}_\varphi \times \vec{E}_z \ .\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass für $B_0 = -\frac{cm\omega}{q}$ und $\vec{E} = 0$ die Lorentz-Kraft gerade die nötige Radialkraft liefert um das Teilchen auf der Schraubenlinie zu halten.

$$\vec{F}_L = \frac{q\rho\omega B_0}{c}\vec{e}_\rho = -m\omega^2\rho\vec{e}_\rho = \vec{F} \ .$$

Anfangsbedingungen ($t_0 = 0$):

$$\vec{r}(t_0) = \rho\vec{E}_x \qquad \vec{v}(t_0) = \rho\omega\vec{E}_y + h\omega\vec{E}_z$$

3. Infinitesimale Drehungen und Drehvektor

a) Aus $\cos(\mathrm{d}\varphi) = 1 + \mathcal{O}(\mathrm{d}\varphi)^2$ und $\sin(\mathrm{d}\varphi) = \mathrm{d}\varphi + \mathcal{O}(\mathrm{d}\varphi)^2$ folgt für die spezielle Drehmatrix

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\mathrm{d}\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{d}\varphi & 0 \\ -\mathrm{d}\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \mathrm{d}t & 0 \\ -\omega \mathrm{d}t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1} + \Omega \mathrm{d}t$$

b) Für eine infinitesimale Drehung um eine *beliebige* Achse hat die Drehmatrix die allgemeines Gestalt (Potenzreihenentwicklung bis zur ersten Ordnung in dt) $R(\mathrm{d}\varphi) = \mathbb{1} + \Omega \mathrm{d}t$, bzw. in Komponentenschreibweise $R_{ij} = \delta_{ij} + dR_{ij} = \delta_{ij} + \Omega_{ij} dt$. Aus der allgemeinen Eigenschaft von Drehmatrizen $RR^T = \mathbb{1}$

$$RR^T = \mathbb{1} + (\Omega + \Omega^T)\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\mathrm{d}t)^2 \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \ ,$$

folgt, dass die Matrix Ω antisymmetrisch sein muss

$$\Omega = -\Omega^T \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \ .$$

c) Die antisymmetrische Matrix Ω hat i.A. 3 strikte (unabhängige) Komponenten. Der Ansatz $\Omega_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\, \omega_k$ mit dem vollständig antisymmetrischen ϵ Tensor (Levi-Civita-Symbol) erfüllt die Antisymmetrie und ist durch die drei Komponenten des sogenannten Drehvektors $\vec{\omega}$ vollständig bestimmt. Wir identifizieren daher $\Omega \leftrightarrow \vec{\omega}$. Fernen finden wir

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \varepsilon_{ijl} \Omega_{ij} &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijl}\, \varepsilon_{ijk}\, \omega_k = \sum_{jk} \left(\delta_{jj}\delta_{lk} - \delta_{jk}\delta_{lj}\right) \omega_k \\ &= \sum_k \left(3\delta_{lk} - \delta_{lk}\right) \omega_k = 2\omega_l \\ \Rightarrow \quad \omega_l &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ijl} \Omega_{ij} \ . \end{aligned}$$

Aus a) lesen wir ab, dass $\Omega_{12} = \omega$ und $\Omega_{13} = 0 = \Omega_{23}$ gilt. Mit

$$\begin{aligned} \omega = \Omega_{12} &= \varepsilon_{123}\, \omega_3 = \omega_3 \\ 0 = \Omega_{13} &= \varepsilon_{132}\, \omega_2 = -\omega_2 \\ 0 = \Omega_{23} &= \varepsilon_{231}\, \omega_1 = \omega_1 \end{aligned}$$

finden wir $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3 \equiv \omega \vec{e}_z$.

d) Ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ ist durch die Angabe der Koordinaten x_i sowie der zugehörigen Basisvektoren $\vec{E}_i$ eindeutig bestimmt, d.h.

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{E}_i \ .$$

Der gleiche Vektor hat in einer anderen Basis $\vec{E}'_i$ die Koordinaten x'_i. Es muss also gelten

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{E}_i = \sum_i x'_i \vec{E}'_i \ .$$

Sind die Koordinaten durch die Drehung R mittels $x_i = \sum_j R^{-1}_{ij} x'_j = \sum_j R_{ji} x'_j$ verknüpft, so folgt für die Basisvektoren $\vec{E}_i$ und $\vec{E}'_i$ aus

$$\sum_i x_i \vec{E}_i = \sum_{ij} R_{ji} x'_j E_i = \sum_j x'_j \sum_i R_{ji} \vec{E}_i \stackrel{!}{=} \sum_j x'_j \vec{E}'_j$$

die Beziehung (nach Umbenennung der Indizes)

$$\vec{E}'_i = \sum_j R_{ij} \vec{E}_j \ .$$

Das Differential von $\vec{r}$ liefert die Differentiale der Komponenten bezüglich Verschiedener Basen.

Wir nehmen an, dass die ungestrichen Basis zeitunabhängig ist, d.h. $\mathrm{d}\vec{E}_i = 0$ während in der gestrichene Basis die Koordinaten sich im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ um den Winkel $\mathrm{d}\varphi$ drehen sollen. Beide Basen ligen o.B.d.A. zur Zeit t_0 übereinander, $E_i(t_0) = E'_i(t_0)$.

Entsprechend der obigen Überlegungen folgt

$$\mathrm{d}\vec{E}'_i = \vec{E}'_i(t_0 - \mathrm{d}t) - \vec{E}'_i(t) = \sum_j R_{ij} \vec{E}'_j(t_0) - \vec{E}'_i(t_0) = \sum_j \Omega_{ij} \vec{E}'_j(t_0) \mathrm{d}t \ .$$

Das Differential $\mathrm{d}\vec{r}$ liefert in der ungestrichen Basis

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \mathrm{d}x_i \vec{E}_i(t_0)$$

und in der gestrichenen Basis

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r} &= \sum_i (\mathrm{d}x'_i \vec{E}'_i(t_0) + x'_i \mathrm{d}\vec{E}'_i(t_0)) \\
&= \sum_i \mathrm{d}x'_i \vec{E}'_i(t_0) + \sum_{ij} x'_i \Omega_{ij} \vec{E}'_j(t_0) \mathrm{d}t \\
&= \sum_i \mathrm{d}x'_i \vec{E}'_i(t_0) + \sum_{ijk} x'_i \epsilon_{ijk} \omega_k \vec{E}'_j(t_0) \mathrm{d}t \\
&= \sum_i \left(\mathrm{d}x'_i + \sum_{jk} x'_j \epsilon_{jik} \omega_k \mathrm{d}t \right) \vec{E}'_i(t_0) \quad \text{(Umbenennung der Indizes } i \leftrightarrow j).
\end{aligned}$$

Da $\vec{E}_i(t_0) = \vec{E}'_i(t_0)$ finden wir für die Differential der Komponeneten die Beziehung zwischen den Bezugssystemen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_i &= \mathrm{d}x'_i + \sum_{jk} x'_j \epsilon_{jik} \omega_k \mathrm{d}t \quad \text{bzw. mit } \epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk} \\
&= \sum_j \left(\delta_{ij} \mathrm{d}x'_j - \sum_k x'_j \epsilon_{ijk} \omega_k \mathrm{d}t \right) \ .
\end{aligned}$$

In Vektorschreibweise ergibt sich somit als Relation für die Geschwindigkeit in den verschiedenen Basen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

mit

$$\vec{v} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \vec{E}_i \quad \text{und} \quad \vec{v}\,' = \sum_i \frac{\mathrm{d}x'_i}{\mathrm{d}t} \vec{E}'_i$$

e) Analog finden wir aus der obigen Gleichung für die Geschwindigkeiten den Ausdruck für deren Differentiale

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{v} &= \sum_i \mathrm{d}v_i \vec{E}_i \\
&= \sum_i \left(\Big(\mathrm{d}v'_i + \sum_{jk} \epsilon_{ijk}(x'_k \mathrm{d}\omega_j + \omega_j \mathrm{d}x'_k)\Big)\vec{E}'_i + \Big(v'_i + \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\omega_j x'_k\Big)\mathrm{d}\vec{E}'_i \right) .
\end{aligned}
$$

Einsetzen des Ausdrucks für $\mathrm{d}\vec{E}'_i$, Sortieren der Terme nach den Basisvektoren $\vec{E}'_i$ und Umbenennen der Indizes liefert mit $\mathrm{d}\omega_j = \dot{\omega}_j \mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}x'_k = v'_k \mathrm{d}t$

$$
\mathrm{d}v_i = dv'_i + dt \sum_{jk} \epsilon_{ijk}(\dot{\omega}_j x'_k + 2\omega_j v'_k) + dt \sum_{ln} \epsilon_{lni}\omega_l \sum_{kj} \epsilon_{nkj}\omega_k x'_j
$$

sodass für die Beschleunigung in Vektorschreibweise folgt

$$
\vec{a} = \vec{a}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')
$$

Für die Newtonsche Grundgleichung der Dynamik impliziert dieser Zusammenhang das Auftreten der Coriolis- und Zentrifugalkraft (Trägheitskräfte) im rotierenden Koordinatensystem.

Bemerkung: Die Relation zwischen den Geschwindigkeit lässt sich auch direkt aus der Transformation $x_i(t) = \sum_j R^{-1}_{ij}(t) x'_j(t)$ durch Ableiten nach der Zeit und Auswerten an der Stelle $t = t_0$ herleiten. Um selbiges für die Beschleunigung durchzuführen benötigt man unter anderem die zweite Ableitung der Transformationsmatrix an der Stelle t_0, und damit die Entwicklung bis einschließlich der zweiten Ordnung im Winkel $\mathrm{d}\varphi$.

4. Potential und Arbeit

a) In Komponenenten berechnet man mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention zunächst ($\partial_i \equiv \partial/\partial_{x_i}$)

$$
\begin{aligned}
\partial_i |\vec{r}\,| = \partial_i \sqrt{x_j x_j} &= \frac{1}{2}\frac{1}{|\vec{r}\,|}\partial_i(x_j x_j) \qquad \text{mit } \partial_i(x_j x_j) = 2x_i \\
&= \frac{x_i}{|\vec{r}\,|} .
\end{aligned}
$$

Damit folgt auch mit der Kettenregel

$$
\partial_i |\vec{r}\,|^{-1} = -1|\vec{r}\,|^{-2}\frac{x_i}{|\vec{r}\,|} = -\frac{x_i}{|\vec{r}\,|^3} .
$$

Für die Rotation von $\vec{r}/|\vec{r}\,|$ finden wir in Komponentenschreibweise

$$
\left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|}\right)_k = \epsilon_{ijk}\partial_i \frac{x_j}{|\vec{r}\,|} = \epsilon_{ijk}\left(\frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}\,|} - \frac{x_j x_i}{|\vec{r}\,|^3}\right) = 0,
$$

da der Term in $(\ldots)$ symmetrisch und ϵ_{ijk} antisymmetrisch unter Vertauschung von i und j.

Für die Divergenz von $\vec{r}/|\vec{r}\,|$ ergibt sich

$$
\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|} = \partial_i \frac{x_i}{|\vec{r}\,|} = \frac{\delta_{ii}}{|\vec{r}\,|} - \frac{x_i x_i}{|\vec{r}\,|^3} = \frac{3}{|\vec{r}\,|} - \frac{|\vec{r}\,|^2}{|\vec{r}\,|^3} = \frac{2}{|\vec{r}\,|} .
$$

b) Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ heißt *konservativ*, falls $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ für alle geschlossenen Kurven Γ. Ein Kraftfeld ist konservativ genau dann, wenn es ein *Gradientenfeld* ist, d.h es gibt ein Potential Φ, sodass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$.
Lokal (genauer: in einfach zusammenhängenden Gebieten) ist dies äquivalent zur Rotationsfreiheit: $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$. Analog zu a) findet man

$$\vec{\nabla} \times \lambda \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^\alpha} = \lambda \epsilon_{ijk} \partial_i \frac{x_j}{|\vec{r}\,|^\alpha} = \lambda \epsilon_{ijk} \left(\frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}\,|^\alpha} - \alpha \frac{x_j x_i}{|\vec{r}\,|^{\alpha+2}} \right) = 0,$$

d.h. $\vec{F}$ ist konservativ[1]. Durch einen geeigneten Ansatz sieht man für $\alpha \neq 2$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}\,|^{\alpha-2}} = -(\alpha - 2) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^\alpha} \implies \Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{(\alpha-2)} \frac{1}{|\vec{r}\,|^{\alpha-2}} \,.$$

c) Die Kraft auf ein elektrisch geladenes Teilchen im homogenen elektromagnetischen Feld wird durch die *Lorentzkraft* $\vec{F}_L = q(\vec{E}_0 + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0)$ beschrieben. Wir berechnen das Arbeitsintegral $A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_L \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, wobei $P_i = \vec{r}(t_i)$ $(i = 1, 2)$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_L \cdot \vec{v} \mathrm{d}t = q \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}_0 \cdot \vec{v} + \underbrace{(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{v}}_{=0, \mathrm{da} \vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{B}_0} \mathrm{d}t = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{r} \,.$$

Man sieht, dass das Magnetfeld $\vec{B}_0$ *keine* Arbeit verrichtet, da die zugehörige Kraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung steht.

[1] Da $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ einfach zusammenhängend ist (die Null muss ausgeschlossen werden, da $1/x$ dort nicht definiert), folgt die Existenz des Potentials auf diesem Definitionsbereich.