TD - plus court chemin dans un graphe

1. Dans un graphe non pondéré, la distance $\delta(s_1, s_2)$ entre deux sommets s_1 et s_2 est le nombre minimal d'arcs/arêtes d'un chemin reliant s_1 à s_2.

2+3. Il s'agit du parcours en largeur.

Entrées : G liste d'adjacence d'un graphe, dep sommet de G

Algo :

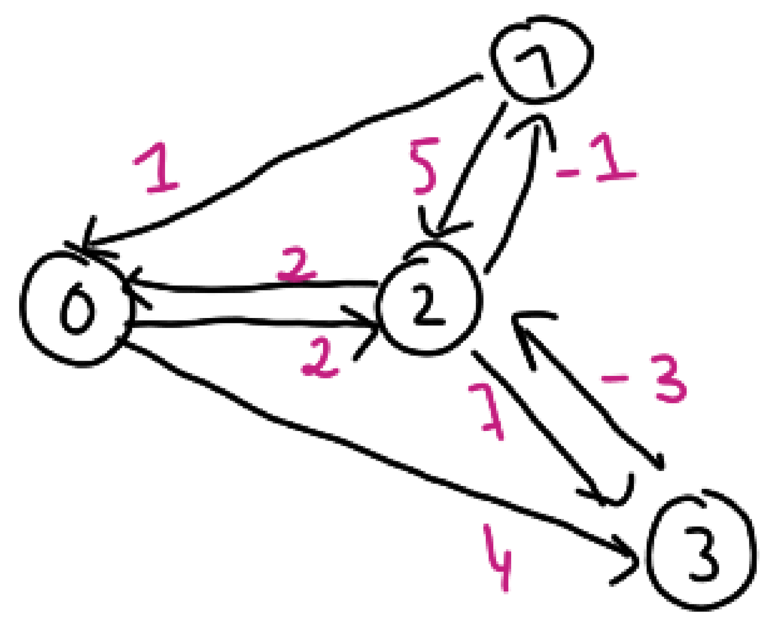
```
a_traiter ← creer_file ()
a_traiter ← enfiler (dep)
vus ← {dep}
distances ← creer_tableau-associatif ()
distances ← associer à la clé dep la valeur 0
predecesseurs ← creer_tableau-associatif ()
TANT QUE a-traiter est non vide FAIRE
    s ← defiler (a_traiter)
    POUR TOUT voisin v de s dans G FAIRE :
        SI v ∉ vus ALORS
            a_traiter ← enfiler (v)
            vus ← vus ∪ {v}
            distances ← associer à la clé v la valeur distances[s]+1
            predecesseurs ← associer à la clé v la valeur s
        FIN SI
    FIN POUR
FIN TQ
renvoyer distances et predecesseurs
```

4. Entrées : un tableau associatif predecesseurs et 2 sommets dep et arr

Algo :

```
chemin ← liste contenant arr
TANT QUE arr ≠ dep FAIRE
    arr ← predecesseurs [arr]
    chemin ← ajouter arr en tête
FIN TQ
renvoyer chemin
```

5. Dans un graphe pondéré, le poids d'un chemin est défini comme la somme des poids des ~~arêtes~~ arcs qui le compose ; et la distance $\delta(s_1, s_2)$ entre deux sommets s_1 et s_2 est défini comme le poids minimal d'un chemin reliant s_1 à s_2.

6. 

7.

	Matrice des distances	Matrice des prédécesseurs
Initialisation	$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & \infty \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & x \\ 2 & 2 & x & 2 \\ x & x & 3 & x \end{pmatrix}$
Prise en compte du sommet 0	$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 2 & 2 & x & 0 \\ x & x & 3 & x \end{pmatrix}$
Prise en compte du sommet 1	$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ x & x & 3 & x \end{pmatrix}$
Prise en compte du sommet 2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & 2 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{pmatrix}$
Prise en compte du sommet 3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & 2 & 3 & 0 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{pmatrix}$

8.

Matrice des distances — Matrice des prédécesseurs

Initialisation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & -1 & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 & \times & \times \\ \times & \times & 1 & \times & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 5 & \times & 5 & \times \end{pmatrix}$$

Prise en compte du sommet 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & -1 & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 & \times & \times \\ \times & \times & 1 & \times & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 5 & \times & 5 & \times \end{pmatrix}$$

Prise en compte du sommet 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & -1 & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \times & \times & 1 & \times & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 5 & \times & 5 & \times \end{pmatrix}$$

Prise en compte du sommet 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & -1 & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \times & \times & 1 & \times & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 5 & \times & 5 & \times \end{pmatrix}$$

Prise en compte du sommet 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & -1 & \infty & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \times & \times & 1 & \times & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 5 & \times & 5 & \times \end{pmatrix}$$

Prise en compte du sommet 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ \infty & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ \times & \times & 1 & 4 & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 5 & 4 & 5 & \times \end{pmatrix}$$

Prise en compte du sommet 5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \infty & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 0 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ \times & \times & 1 & 4 & 5 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 4 & \times & \times \\ \times & \times & 5 & 4 & 5 & \times \end{pmatrix}$$

9. M → (E, 10) ; (L, 7) ; (N, 4)
E → (M, 10) ; (L, 8) ; (S, 10) ; (T, 4)
T → (E, 4) ; (S, 8)
L → (M, 7) ; (E, 8) ; (N, 2) ; (S, 5)
S → (T, 8) ; (E, 10) ; (L, 5) ; (N, 8)
N → (M, 4) ; (L, 2) ; (S, 8)

10.

E	L	M	N	S	T
∞	∞	$\boxed{0}$	∞	∞	∞
10 (M)	7 (M)	X	$\boxed{4\ (M)}$	∞	∞
10 (M)	$\boxed{6\ (N)}$	X	X	12 (N)	∞
$\boxed{10\ (M)}$	X	X	X	11 (L)	∞
X	X	X	X	$\boxed{11\ (L)}$	14 (E)
X	X	X	X	X	$\boxed{14\ (E)}$
X	X	X	X	X	X

Au départ, on ne connait la distance que du sommet M à lui-même (0), les autres sommets ne sont pas encore accessibles

On fixe le sommet de plus petite distance parmi ceux non fixés : M de distance 0. On regarde les voisins de M :
- la distance jusque E était ∞, mais en venant de M on trouve $0 + 10 = 10$ donc on met à jour.
- la distance jusque L était ∞, mais en venant de M on trouve $0 + 7 = 7$ donc on met à jour.
- la distance jusque N était ∞, mais en venant de M on trouve $0 + 4 = 4$ donc on met à jour.

On fixe le sommet de plus petite distance parmi ceux non fixés : N de distance 4. On regarde les voisins de N :
- M est fixé, on ne fait rien.
- la distance jusque L était 7, mais en venant de N on trouve $4 + 2 = 6$ donc on met à jour.
- la distance jusque S était ∞, mais en venant de N on trouve $4 + 8 = 12$ donc on met à jour

On fixe le sommet de plus petite distance parmi ceux non fixés : L de distance 6 On regarde les voisins de M :
- M et M sont fixés, on ne fait rien.
- la distance jusque E était 10, et en venant de L on trouve $6 + 8 = 14 > 10$ donc on ne fait rien.
- la distance jusque S était 12, mais en venant de L on trouve $6 + 5 = 11$ donc on met à jour.

Avec un raisonnement similaire, E de distance 10 est fixé, seul son voisin T est mis à jour ($10 + 4 = 14$).

Raisonnement similaire, S de distance 11 est fixé, aucun voisin ne nécessite une mise à jour.

T est finalement fixé, c'est terminé.

Le plus court chemin de M à S est sonc M – N – L – S.

11.

0	1	2	3	4	
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	Initialisation
	$9_{(0)}$	∞	∞	$\boxed{5_{(0)}}$	0 fixé
	$8_{(4)}$	$14_{(4)}$	$\boxed{7_{(4)}}$		4 fixé
	$\boxed{8_{(4)}}$	$13_{(3)}$			3 fixé
		$\boxed{9_{(1)}}$			1 fixé
					2 fixé

12. Je ne détaille pas, n'hésitez pas à me demander si besoin.

Matrices finales obtenues avec Floyd-Warshall :

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0 & 1 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \\ b & 1 & 0 & 5 & 2 & 8 & 3 & 3 \\ c & 5 & 5 & 0 & 3 & 4 & 2 & 8 \\ d & 3 & 2 & 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ e & 9 & 8 & 4 & 7 & 0 & 6 & 5 \\ f & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ g & 4 & 3 & 8 & 5 & 11 & 6 & 0 \end{array}$$

Distances

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & \times & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ b & 1 & \times & 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ c & 2 & 3 & \times & 2 & 2 & 2 & 1 \\ d & 1 & 3 & 3 & \times & 5 & 3 & 1 \\ e & 2 & 6 & 4 & 2 & \times & 2 & 4 \\ f & 1 & 3 & 5 & 5 & 5 & \times & 1 \\ g & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 3 & \times \end{array}$$

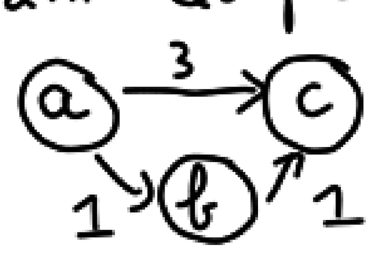
Prédécesseurs

Distances finales obtenues avec Dijkstra depuis le sommet a :
a : 0 / b : 1 / d : 3 / f : 4 / g : 4 / c : 5 / e : 9.

13. Dijkstra ne s'applique qu'avec graphes dont tous les poids sont positifs.
Floyd-Warshall ne s'applique qu'aux graphes ne contenant aucun cycle de poids < 0.

14. * En additionnant les poids avec une constante, les plus courts chemins peuvent changer.

Preuve en exemple :



Le plus court chemin de a à c est a → b → c
En ajoutant 10 à tous les poids, c'est désormais a → c

* En multipliant les poids par une constante positive ne change pas les plus courts chemins.

Preuve :
Soit $G = (S, A, w)$ graphe pondéré et soit $c > 0$ constante.
Considérons $G' = (S, A, w')$ avec $w'(a) = w(a) \times c$ pour tout a.
Le poids d'un chemin $s_0, s_1, \dots, s_n$ dans G' est $\sum_{i=0}^{n-1} w'(s_i - s_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (w(s_i - s_{i+1}) \times c) = c \times \sum_{i=0}^{n-1} w(s_i - s_{i+1})$
Or la somme $\sum_{i=0}^{n-1} w(s_i - s_{i+1})$ est le poids du chemin $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ dans G.
Donc minimiser le poids d'un chemin dans G' revient à minimiser son poids dans G :
les plus courts chemins sont les mêmes dans G et G'.

15. Soit M la matrice des distances calculée avec Floyd-Warshall pour le graphe orienté $G = (S, A)$.
Le poids minimum d'un cycle de G est le minimum des $M_{s,t} + M_{t,s}$ pour tout $s, t \in S$.

16 : Floyd-Warshall a une complexité en $O(|S|^3)$.
Dijkstra est en $O((|S| + |A|) \times \log |S|)$ en supposant la file de priorité implémentée par un tas-min.