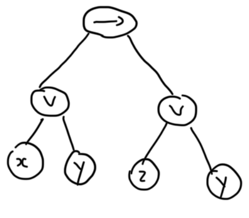
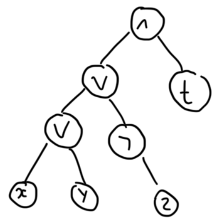
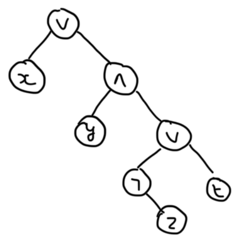
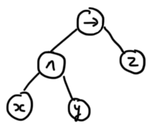
TD - Syntaxe et sémantique des formules logiques

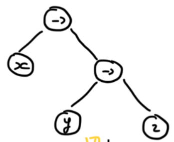
I- Logique propositionnelle

1.

Formule	$(x \vee y) \to (z \vee y)$	$((x \vee y) \vee \neg z) \wedge t$	$x \vee (y \wedge (\neg z \vee t))$
Repr. arborescente			
Taille	7	8	8
Hauteur	2	3	4
Sous-formules	$\{(x \vee y) \to (z \vee y),\ x \vee y,\ z \vee y,\ x,\ y,\ z\}$	$\{((x \vee y) \vee \neg z) \wedge t,\ t,\ (x \vee y) \vee \neg z,\ x \vee y,\ \neg z,\ x,\ y,\ z\}$	$\{x \vee (y \wedge (\neg z \vee t)),\ x,\ y \wedge (\neg z \vee t),\ y,\ \neg z \vee t,\ \neg z,\ t,\ z\}$

2. $(x \wedge y) \to z$ $\qquad\qquad$ $x \to (y \to z)$





$v(x)$	$v(y)$	$v(z)$	$[\![x \wedge y]\!]_v$	$[\![(x \wedge y) \to z]\!]_v$	$[\![y \to z]\!]_v$	$[\![x \to (y \to z)]\!]_v$
F	F	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V

Les arbres sont différents, ces 2 formules sont syntaxiquement différentes. Leurs tables de vérité sont cependant identiques, elles sont sémantiquement équivalentes.

3. Ces deux formules ont la même représentation arborescente, elles sont donc syntaxiquement équivalentes.

4.

$v(x)$	$v(y)$	$[\![\varphi = x \vee y]\!]_v$	$[\![\psi = x \to y]\!]_v$	$[\![\omega = \varphi \to \psi]\!]_v$
F	F	F	V	V
F	V	V	V	V
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

Les valuations donnant la même valeur de vérité à φ et ψ sont :

* $v(x) = F,\ v(y) = V$
* $v(x) = V,\ v(y) = V$

L'ensemble des modèles de ω, $Mod(\omega) = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec :

* $v_1(x) = F,\ v_1(y) = F$
* $v_2(x) = F,\ v_2(y) = V$
* $v_3(x) = V,\ v_3(y) = V$

Les 3 formules φ, ψ, ω sont contingentes.

Les conséquences sémantiques suivantes sont correctes : $\psi \models \omega$ et $\{\varphi, \psi\} \models \omega$

5. $\varphi = x \wedge (\neg y \to (y \to x))$ $\qquad$ $\psi = (x \vee y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$

* $v(x) = F,\ v(y) = V$

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]_v &= f_\wedge([\![x]\!]_v, f_\to(f_\neg([\![y]\!]_v), f_\to([\![y]\!]_v, [\![x]\!]_v))) \\
&= f_\wedge(F, f_\to(f_\neg(V), f_\to(V, F))) \\
&= f_\wedge(F, f_\to(F, F)) \\
&= f_\wedge(F, V) \\
&= F
\end{aligned}
$$

$$[\![\psi]\!]_v = f_{\leftrightarrow}\Big(f_{\vee}\big([\![x]\!]_v, [\![y]\!]_v\big), f_{\vee}\big(f_{\neg}([\![x]\!]_v), f_{\neg}([\![y]\!]_v)\big)\Big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}\big(f_{\vee}(F,V), f_{\vee}(f_{\neg}(F), f_{\neg}(V))\big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}\big(V, f_{\vee}(V,F)\big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}(V,V)$$
$$= V$$

* $v(x) = F$, $v(y)$ inconnue.

$$[\![\varphi]\!]_v = f_{\wedge}\Big([\![x]\!]_v, f_{\rightarrow}\big(f_{\neg}([\![y]\!]_v), f_{\rightarrow}([\![y]\!]_v, [\![x]\!]_v)\big)\Big)$$
$$= f_{\wedge}\Big(F, f_{\rightarrow}\big(f_{\neg}([\![y]\!]_v), f_{\rightarrow}([\![y]\!]_v, F)\big)\Big)$$
$$= F \quad (\text{car } f_{\wedge}(F,F) = f_{\wedge}(F,V) = F)$$

$$[\![\psi]\!]_v = f_{\leftrightarrow}\Big(f_{\vee}\big([\![x]\!]_v, [\![y]\!]_v\big), f_{\vee}\big(f_{\neg}([\![x]\!]_v), f_{\neg}([\![y]\!]_v)\big)\Big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}\big(f_{\vee}(F, [\![y]\!]_v), f_{\vee}(f_{\neg}(F), f_{\neg}([\![y]\!]_v))\big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}\big([\![y]\!]_v, f_{\vee}(V, f_{\neg}([\![y]\!]_v))\big) \quad (\text{car } f_{\vee}(F,F) = F \text{ et } f_{\vee}(F,V) = V)$$
$$= f_{\leftrightarrow}([\![y]\!]_v, V) \quad (\text{car } f_{\vee}(V,V) = f_{\vee}(V,F) = V)$$
$$= [\![y]\!]_v \quad (\text{car } f_{\leftrightarrow}(F,V) = F \text{ et } f_{\leftrightarrow}(V,V) = V)$$

* $v(x)$ inconnue, $v(y) = F$

$$[\![\varphi]\!]_v = f_{\wedge}\Big([\![x]\!]_v, f_{\rightarrow}\big(f_{\neg}([\![y]\!]_v), f_{\rightarrow}([\![y]\!]_v, [\![x]\!]_v)\big)\Big)$$
$$= f_{\wedge}\big([\![x]\!]_v, f_{\rightarrow}(f_{\neg}(F), f_{\rightarrow}(F, [\![x]\!]_v))\big)$$
$$= f_{\wedge}\big([\![x]\!]_v, f_{\rightarrow}(V,V)\big)$$
$$= f_{\wedge}([\![x]\!]_v, V)$$
$$= [\![x]\!]_v$$

$$[\![\psi]\!]_v = f_{\leftrightarrow}\Big(f_{\vee}\big([\![x]\!]_v, [\![y]\!]_v\big), f_{\vee}\big(f_{\neg}([\![x]\!]_v), f_{\neg}([\![y]\!]_v)\big)\Big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}\big(f_{\vee}([\![x]\!]_v, F), f_{\vee}(f_{\neg}([\![x]\!]_v), f_{\neg}(F))\big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}\big([\![x]\!]_v, f_{\vee}(f_{\neg}([\![x]\!]_v), V)\big)$$
$$= f_{\leftrightarrow}([\![x]\!]_v, V)$$
$$= [\![x]\!]_v$$

φ et ψ sont satisfiables, non tautologiques, non antilogiques.

L'ensemble $\Gamma = \{\varphi, \psi\}$ est consistant (valuation $v(x) = V$, $v(y) = F$).

6.

$v(x)$	$v(y)$	$[\![x \rightarrow y]\!]_v$	$[\![\varphi_1]\!]_v$	$[\![y \rightarrow x]\!]_v$	$[\![\varphi_2]\!]_v$	$[\![x \wedge y]\!]_v$	$[\![\neg y]\!]_v$	$[\![x \rightarrow \neg y]\!]_v$	$[\![\varphi_3]\!]_v$
F	F	V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	V	F
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F

φ_1 satisfiable, φ_2 tautologie, φ_3 antilogie.

7. φ tautologie ssi pour toute valuation v, $[\![\varphi]\!]_v = V$

Or $[\![\neg\varphi]\!]_v = f_{\neg}([\![\varphi]\!]_v)$ et $f_{\neg}(V) = F$

Donc φ tautotologie ssi pour toute valuation v, $[\![\neg\varphi]\!]_v = F$

Autrement dit, φ tautologie ssi $\neg\varphi$ insatisfiable.

8.

$[\![\varphi]\!]_v$	$[\![\psi]\!]_v$	$[\![\neg(\varphi \vee \psi)]\!]_v$	$[\![\neg\varphi \wedge \neg\psi]\!]_v$	$[\![\neg(\varphi \wedge \psi)]\!]_v$	$[\![\neg\varphi \vee \neg\psi]\!]_v$
F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F

$1^{\text{ère}}$ loi de De Morgan — $2^{\text{ème}}$ loi

On montre de la même manière les autres équivalences fondamentales.

9. $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$

$\equiv \neg((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \varphi) \vee \psi$ (decomposition de l'implication)

$\equiv (\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg\varphi) \vee \psi$ (de Morgan)

$\equiv ((\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi) \vee \psi$ (de Morgan)

$\equiv ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi) \vee \psi$ (double négation)

$\equiv ((\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi)) \vee \psi$ (distributivité)

$\equiv (\top \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi)) \vee \psi$ (tiers exclus)

$\equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi) \vee \psi$ (elt. neutre)

$\equiv \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \psi)$ (associativité + commutativité)

$\equiv \neg\varphi \vee \top$ (tiers exclus)

$\equiv \top$ (elt. absorbant)

$\top$ est une tautologie, donc $((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi$ aussi.

10. Le système $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet.

or $x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y)$ (de Morgan + double négation)

Donc le système $\{\neg, \vee\}$ est complet.

et $\begin{cases} \neg x \equiv \neg(x \vee \bot) \equiv x \downarrow \bot \\ x \vee y \equiv \neg\neg(x \vee y) \equiv \neg(x \downarrow y) \equiv (x \downarrow y) \downarrow \bot \end{cases}$

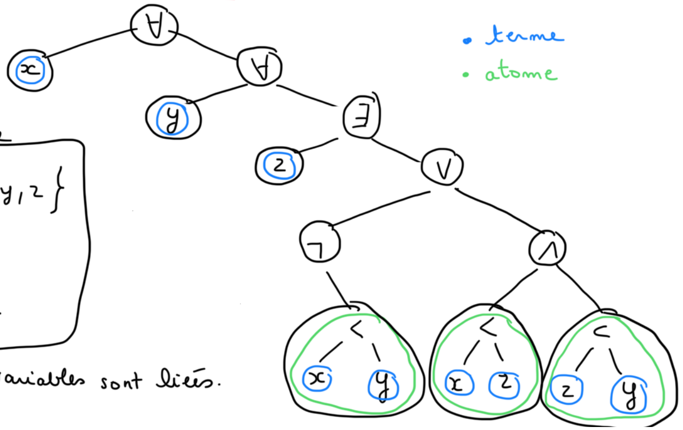
Donc le système $\{\downarrow\}$ est complet.

11. $\forall x . \varphi \equiv \varphi[\top/x] \wedge \varphi[\bot/x]$

$\exists x . \varphi \equiv \varphi[\top/x] \vee \varphi[\bot/x]$

II Logique du 1er ordre

1.



Domaine

$X = \{x, y, z\}$

$S_f = \{\}$

$S_r = \{<\}$

Toutes les variables sont liées.

2. Prédicats : * ecole (x) signifie "x est une école".
* ordi (x,y) signifie "x est un ordi de l'école y".
* reseau (x,y) signifie "l'ordi x est connecté au réseau y".

• ⌜Dans une école, il existe des ordis non connectés au réseau local⌝.

$\exists x . (\text{ordi}(x,y) \wedge \neg \text{reseau}(x, \text{local}))$

• ⌜Dans les écoles, tous les ordis sont connectés à un réseau local.⌝

$\forall y . (\text{ecole}(y) \to \forall x . (\text{ordi}(x,y) \to \text{reseau}(x, \text{local})))$

• ⌜Dans chaque école, au moins un ordi est connecté au réseau local et à Internet⌝.

$\forall y . (\text{ecole}(y) \to \exists x . (\text{ordi}(x,y) \wedge \text{reseau}(x, \text{local}) \wedge \text{reseau}(x, \text{internet})))$

Avec x, y des variables et local, internet des constantes (= fcts d'arité 0).

3. • $\forall i \in [0,n[. \forall j \in [0,n[. i \neq j \to t[i] = t[j]$

s'interprète en ⌜tous les éléments de t sont égaux⌝

ex : $t =$ |0|0|0|0|0|0|0|

• $\forall i \in [0,n[. \exists j \in [0,n[. i \neq j \wedge t[i] = t[j]$

s'interprète en ⌜tout élément de t a (au moins) un doublon⌝

ex : $t =$ |0|1|1|0|2|2|1|

• $\exists i \in [0,n[. \forall j \in [0,n[. i \neq j \wedge t[i] = t[j]$

s'interprète en ⌜un élément de t est égal à tous les autres⌝

ex : $t =$ |0|0|0|0|0|0|0|0|

• $\exists i \in [0,n[. \exists j \in [0,n[. i \neq j \wedge t[i] = t[j]$

s'interprète en ⌜t contient 2 élément égaux⌝

ex : $t =$ |0|1|2|3|1|4|5|

Toutes les formules impliquent l'existence de doublons, mais seule la dernière n'impose rien d'autre.

Les invariants sont :

• boucle interne : $\forall k \in [i+1, j[. t[k] \neq t[i]$

• boucle externe : $\forall k \in [0,i[. \forall \ell \in [0,n[. k \neq \ell \to t[k] \neq t[\ell]$