TD – Problème SAT

I – Formes normales

FNC FND

- $x \leftrightarrow y$

$\equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$ double implication

$\equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$ implication

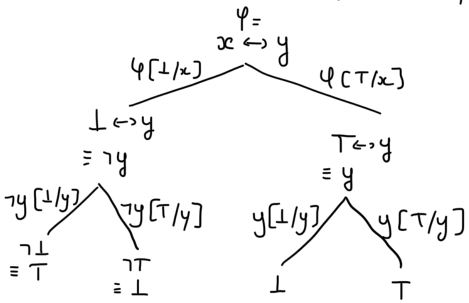
$\equiv ((\neg x \vee y) \wedge \neg y) \vee ((\neg x \vee y) \wedge x)$ distributivité

$\equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge x) \vee (y \wedge x)$ distrib.

$\equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge x)$ tiers exclus + elt. neutre

Ces deux formes normales sont déjà canoniques.

Quine :



Satisfiable.
Non tautologique.
Non antilogique.

- $(x \to \neg y) \wedge (y \vee (\neg x \wedge z))$

$\equiv (\neg x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg x) \wedge (y \vee z)$ implication + distrib.

$\equiv (\neg x \vee (\neg y \wedge y)) \wedge (y \vee z)$ distrib.

$\equiv \neg x \wedge (y \vee z)$ tiers exclus + elt. neutre

$\equiv (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$ distrib.

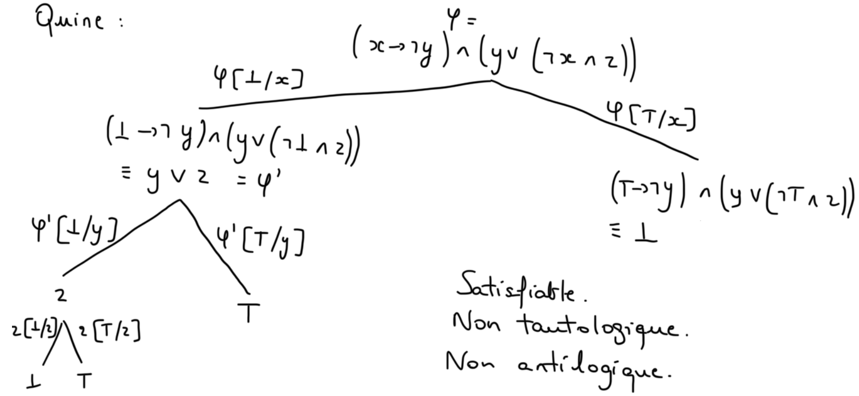
$v(x)$	$v(y)$	$v(z)$	...	$[\![(x \to \neg y) \wedge (y \vee (\neg x \wedge z))]\!]_v$
F	F	F		F
F	F	V		V
F	V	F		V
F	V	V		V
V	F	F		F
V	F	V		F
V	V	F		F
V	V	V		F

FN canoniques :

$(\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$

$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

Quine :



Satisfiable.
Non tautologique.
Non antilogique.

- $x \vee y \vee (\neg z \wedge x) \equiv \ldots \equiv x \vee y$

$v(x)$	$v(y)$	$v(z)$	...	$[\![x \vee y \vee (\neg z \wedge x)]\!]_v$
F	F	F		F
F	F	V		F
F	V	F		V
F	V	V		V
V	F	F		V
V	F	V		V
V	V	F		V
V	V	V		V

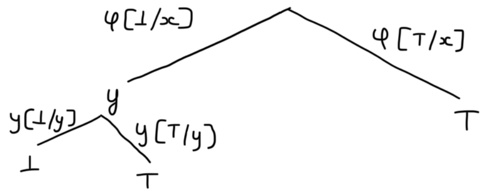
FN canoniques :

$(\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)$
$\vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$

Quine :

$\varphi = x \vee y \vee (\neg z \wedge x)$



Satisfiable.
Non tautologique.
Non antilogique.

• $(x \vee \neg y) \wedge \neg(z \wedge \neg(u \wedge w))$

$\equiv (x \vee \neg y) \wedge (\neg z \vee (u \wedge w))$ de Morgan

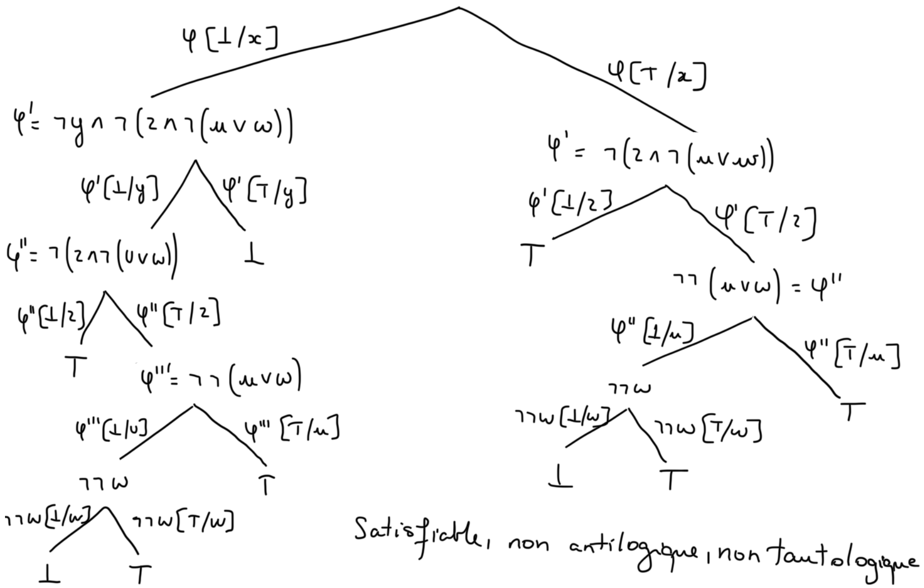
$\equiv (x \vee \neg y) \wedge (\neg z \vee u) \wedge (\neg z \vee w)$ distrib.

$\equiv (x \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \neg z) \vee (u \wedge w \wedge x) \vee (u \wedge w \wedge \neg y)$ distrib.

La table de vérité comporte $2^5 = 32$ lignes, donc il y a 32 (min-termes + max-termes) dans les FN canoniques.

Quine :

$\varphi = (x \vee \neg y) \wedge \neg(z \wedge \neg(u \vee w))$



Satisfiable, non antilogique, non tautologique.

II - Problème k-SAT

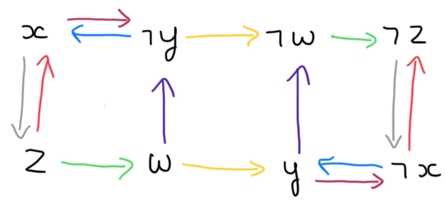
• $x \wedge y \wedge \neg z \wedge w \wedge u \wedge \neg t \wedge \neg y$

est une instance de 1-SAT, insatisfiable car comporte le littéral y et sa négation $\neg y$.

• $(x \vee y) \wedge (w \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee x) \wedge (\neg w \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg w \vee \neg y)$

est une instance de 2-SAT.

Graphe associé :



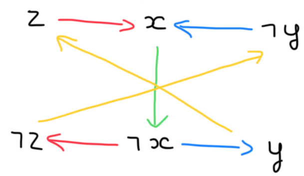
Composantes fortement connexes : $\{x, z, w, \neg y\}$ et $\{\neg x, y, \neg w, \neg z\}$

Donc la formule est satisfiable.

• $(x \vee y) \wedge \neg x \wedge (\neg z \vee x) \wedge (\neg y \vee z)$

est une instance de 2-SAT.

Graphe associé :



Composante fortement connexe : $\{x, \neg x, \neg z, \neg y, y, z\}$

donc la formule est une antilogie.

• $(\neg x \vee z \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge \neg w \wedge (z \vee y \vee w \vee x) = \varphi$

est une instance de 4-SAT, on utilise donc l'algo de Quine.

- φ
  - $\varphi[\bot/w]$: $\varphi' = (\neg x \vee z \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (z \vee y \vee x)$
    - $\varphi'[\bot/y]$: $\varphi'' = (\neg x \vee z) \wedge \neg x \wedge (z \vee x)$
      - $\varphi''[\bot/x]$: z
        - $z[\bot/z]$: $\bot$
        - $z[\top/z]$: $\top$
      - $\varphi''[\top/x]$: $\bot$
    - $\varphi'[\top/y]$: $\top$
  - $\varphi[\top/w]$: $\bot$

Satisfiable.

III - Modéliser une situation par une formule prop.

- **Club britannique** :

e = membre écossais
c = membre portant des chaussures rouges
k = membre portant un kilt
d = membre sortant le dimanche
m = membre marié

$$\varphi = (\neg e \to c) \wedge (k \vee \neg c) \wedge (m \to \neg d) \wedge (d \Leftrightarrow e) \wedge (k \to (e \wedge m)) \wedge (e \to k)$$

- φ
  - $\varphi[\bot/e]$: $\varphi'' = c \wedge (k \vee \neg c) \wedge (m \to \neg d) \wedge \neg d \wedge \neg k$
    - $\varphi''[\bot/k]$: $\varphi'' = c \wedge \neg c \wedge (m \to \neg d) \wedge \neg d$
      - $\varphi''[\bot/c]$: $\bot$
      - $\varphi''[\top/c]$: $\bot$
    - $\varphi''[\top/k]$: $\bot$
  - $\varphi[\top/e]$: $\varphi'' = (k \vee \neg c) \wedge (m \to \neg d) \wedge d \wedge (k \to m) \wedge k$
    - $\varphi''[\bot/k]$: $\bot$
    - $\varphi''[\top/k]$: $\varphi'' = (m \to \neg d) \wedge d \wedge m$
      - $\varphi''[\bot/m]$: $\bot$
      - $\varphi''[\top/m]$: $\varphi''' = \neg d \wedge d$
        - $\varphi'''[\bot/d]$: $\bot$
        - $\varphi'''[\top/d]$: $\bot$

Toutes les feuilles sont $\bot$, donc φ est une antilogie. Ainsi le réglement du club ne permet pas d'accueillir des membres.

Avec les équivalences fondamentales, on retrouve en effet $\varphi \equiv \bot$.

- **Desert** :

g = le chemin gauche mène à une oasis
d = " droit " .

Soit φ_1 = affirmation du 1er sphinx.
φ_2 = " 2ème " .

$\varphi_1 = g \vee d$ et $\varphi_2 = \neg d$ donc le problème se modélise par

$$\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = ((g \vee d) \wedge \neg d) \vee (\neg(g \vee d) \wedge \neg\neg d)$$

- φ
  - $\varphi[\bot/d]$: $((g \vee \bot) \wedge \neg\bot) \vee (\neg(g \vee \bot) \wedge \neg\neg\bot) \equiv g \vee \bot \equiv g$
    - $g[\bot/g]$: $\bot$
    - $g[\top/g]$: $\top$
  - $\varphi[\top/d]$: $((g \vee \top) \wedge \neg\top) \vee (\neg(g \vee \top) \wedge \neg\neg\top) \equiv (g \wedge \bot) \vee (\neg\top \wedge \top) \equiv \bot \vee \bot \equiv \bot$

La formule est satisfiable, le chemin qui mène à la feuille $\top$ nous donne la solution au problème : le chemin de droite ne mène pas à une oasis, le chemin de gauche mène à une oasis. On suit donc le chemin gauche, et on remercie les 2 sphinx de nous avoir dit la vérité !

Avec les équivalences fondamentales, on retrouve bien $\varphi \equiv g \wedge \neg d$.

- <u>Portes</u> : r = la porte rouge est sûre
  v = " verte "
  b = " bleue "

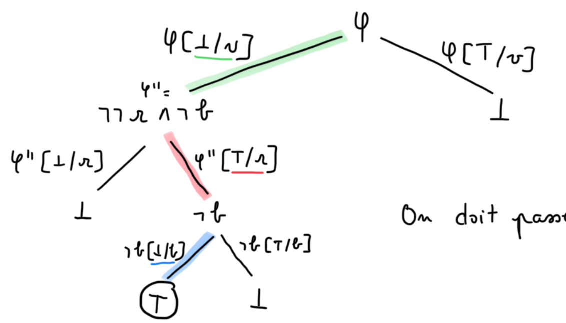
φ_1, φ_2 et φ_3 désignent respectivement la 1ère, 2ème et 3ème affirmations.

$\varphi_1 = \neg r \vee v \quad \varphi_2 = (r \wedge v) \to \neg b \quad \varphi_3 = \neg v \wedge b$

donc le problème se modélise par :

$\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \neg \varphi_2) \vee (\neg \varphi_1 \wedge \neg \varphi_3 \wedge \varphi_2)$

$= \Big((\neg r \vee v) \wedge (\neg v \wedge b) \wedge \neg ((r \wedge v) \to \neg b) \Big) \vee \Big(\neg(\neg r \vee v) \wedge \neg(\neg v \wedge b) \wedge ((r \wedge v) \to \neg b) \Big)$



On doit passer par la porte rouge.

Avec les équivalences fondamentales, on retrouve bien

$(\varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \neg \varphi_2) \equiv \perp$ et $(\neg \varphi_1 \wedge \neg \varphi_3 \wedge \varphi_2) \equiv r \wedge \neg v \wedge \neg b$,

donc seule la porte rouge est sûre et la 2ème affirmation est vraie.