08-09-2020

②

"Algèbre linéaire : Rappels et Compléments"

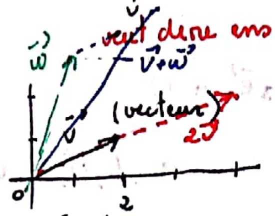
I-) Vecteurs de $\mathbb{R}^n$, bases

1) Espace Vectoriel $\mathbb{R}^n$

; Si $n = 2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} : \{(x,y), x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

veut dire ens des couples x et y.

ex : $\vec{V} = (2,1) \in \mathbb{R}^2$, dans un plan :



- $\mathbb{R}^n$ tout espace vectoriel est muni de deux opérations
  - addition des 2 vecteurs
  - multiplication d'un ~~réel par~~ vecteur par un réel

  (C'est l'homotéthie)

ex : $2\vec{V} = 2.(2,1) = (4,2)$

$\vec{w} = (1,3)$ $\quad \vec{v} + \vec{w}\ (3,4)$

- Pour $n = 3$: $\mathbb{R}^3\ \{(x,y,z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

- Pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{R}^n\ \{(x_1, x_2 \dots x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$

2-) Base de $\mathbb{R}^n$

~~C'est un ens de vecteurs minimales qui permettent~~

C'est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui est génératrice et libre, aucun vecteur ne peut s'exprimer en fonction de combinaison linéaire des autres

a-) famille génératrice

une famille $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ est génératrice si elle "génère" tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \exists\ (a_1, \dots a_n)$ tel que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$

↳ Combinaison linéaire.

. Savoir trouver qu'elle est génératrice.

ex : $\mathbb{R}^2 : \{(1,0); (0,1)\}$ } génératrice et base

. $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ génératrice mais pas base

b-) f. libre

$\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\}$ libre si aucun vecteur $\vec{e_i}$ de la famille ne peut s'exprimer en fonction des autres par combinaison linéaire.

Si $\sum_{i=1}^{n} a_i . \vec{e_i} = \vec{0} \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$; sinon la famille est liée.

ex : $\{(1,2), (2,3)\}$ $\quad \vec{e_1} = (1,2) \quad \vec{e_2} = (2,3)$

$a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} = \vec{0} \Leftrightarrow a_1 (1,2) + a_2 (2,3) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \{a_1 + 2a_2 = 0 \ ;\ 2a_1 + 3a_2 = 0$ $\qquad \boxed{a_1 = a_2 = 0}$ en gros, il faut que $\det \neq 0$

$\Rightarrow \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est libre

ex: montrer que famille est liée dans $\mathbb{R}^2$

méthode 1 $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ avec $\vec{e_1} = (1,0)$, $\vec{e_2} = (0,1)$, $\vec{e_3} = (1,1)$

$\vec{e_3} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ // $\vec{e_3}$ est combinaison linéaire de e_1 et e_2

méthode 2

$a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \vec{0}$

$\begin{cases} \cancel{a_1 = 0} \\ \cancel{a_2 = 0} \\ \cancel{a_3 + a_3 = 0} \end{cases}$

$a_1(1,0) + a_2(0,1) + a_3(1,1) = (0,0\cancel{,0})$

$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ \cancel{a_1 + } \end{cases}$

On a Σ de 2 éq 3 inconnues

a_1 et a_2 en fonction de a_3

$\begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_2 = -a_3 \end{cases}$ avec $a_3 \in \mathbb{R}$; On a une infinité de solution.

ex:

$a_3 = 1$

$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = -1 = a_1 \end{cases}$ donc liée

- Toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ contiennent le m̂ nombre de vecteurs $\Leftrightarrow$ dimension de l'espace vectoriel $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ ont n vecteurs
- La base canomique de $\mathbb{R}^2$ $\{(1,0) ; (0\,1)\}$ (l_1, l_2)

$\mathbb{R}^2$ $\{(1,0\cancel{0}) ; (0,1\cancel{0}) ; (0,0,1)\}$

$\mathbb{R}^n$ $\{(1,0,0\ldots,0), (0,1,0\ldots,0) \ldots (0,0\ldots 1)\}$

- On a une infinité de base possible mais une seule base canomique par espace vectoriel.

II -) Matrice et det. d'une matrice carré.

Définition: Une matrice A a n lignes et p colonnes

On note $A = a_{ij}$ $i = 1\ldots n$, $j = 1\ldots p$

ex:

$$A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3} \quad n=2,\ p=3$$

$\mathcal{M}_{n,p}$ = est un espace vectoriel = Ens des matrices à n lignes et p colonnes $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

• Opérations de bases des matrices

a-) additions

$A + B = C$; il faut qu'elle soit de m̂ format

b-) multiplication de matrice par réel.

$\underset{(n,p)}{k.A} = \underset{(n,p)}{D}$

a-) b-) On montre que M_{np} muni de ces deux opérations est un espace vectoriel.

c-) On peut faire le produit des matrices.

$\underset{(n,p)}{A} \times \underset{(p,q)}{B} = \underset{(n,q)}{E}$ {Réapprendre ça}

d-) Transposition (Transposée)

$A \in M_{n,p}$; transposée de A est une matrice de format (p,n)

$\underset{\text{ou } A'}{B = {}^tA}$ tq $b_{i,j} = a_{ji}$

$\forall i = 1, \dots n$

$\forall j = 1 \dots p$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ utilisée dans la régression linéaire.

• Les matrices Carrés

$A \in M_{n,p}$ est carré ssi $n = p$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

précise le corps de la matrice, les éléments peuvent ∈ à $\mathbb{C}$

• Puissance d'une matrice carré.

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ matrice d'ordre n

$A^k = \underset{(n,n)}{A} \times \underset{(n,n)}{A} \times \underset{(n,n)}{A}$ Ex:

• Liens entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ et matrice lignes et colonnes.

$\vec{x}\ (2,1) \in \mathbb{R}^2$

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ = \text{vecteur colonne} \end{array} \right.$

${}^tX = (2, 1) \in \mathcal{M}_{1,2}$ vecteurs lignes.

- ~~Matrices inversibles et~~ Déterminant d'une matrice carré

det : $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longmapsto \det(A)$, dont le calcul est

$n=1$ $\det(A) = a$

$n=2$ $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$

$n \geq 2$

- formule de récurrence. = développement d'un det par rapport à une ligne ou une colonne.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(1+j)} \times a_{ij} \times \det(A_{ij})}$$

(somme sur les colonnes)

avec A_{ij} ~~obtenu en p~~ extraite de A, obtenue $_{n-1,n-1}$ en supprimant la ième ligne et jème colonne.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A)$ ou $|A|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$ $|A_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$ $|A_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$|A_{11}| = -48$ $|A_{12}| = -42$ $|A_{13}| = 32 - 35 = -3$

$1 \times 1 \times (-48) - 2(-42) + 3(-3)$

$-48 + 84 - 6 = \cancel{-90} - \cancel{48} = \cancel{-138} = 27$

- Autre méthode (spécifique pour $n=3$) méthode de SARRUS

$$\det(A) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} L_1 & a & b & c \\ L_2 & e & f & g \end{array}$$

- On recopie ligne L_1 et L_2

- On fait des paquets de 3
- Puis dans l'autre sens

$= afj + eic + hbg - hfc - aig - ebj$

④ CN

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

1 2 3

4 5 6

$= 1\times5\times0 + 4\times8\times3 + 7\times2\times6 = 0+96+84$

$= -3\times7\times5 - 6\times8\times1 - \underbrace{0\times4\times2}_{0} = -48-105 = 27$

- Applicat Propriété du det. que sur matrice carré

$$\det(kA) = k^n \times \det(A) \quad A \in M_{n,n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad kA\begin{pmatrix} k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix} = k^2(1\times4 - 3\times2)$$

$$= k^2(4-6)$$

$$= -2k^2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 11 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 = L_1 + L_2 \end{matrix}$$ est Combinaison linéaire de L_1 et L_2

det de matrice

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L'_3 = L_3 - L_1 - L_2 \end{matrix}$$

$\det(A) = 0$

- Propriété : On ne change pas le det d'une matrice si à une ligne ou colonne, on retranche une combinaison linéaire des autres.

$$L'_j = L_j + \sum_{k \neq j} a_k L_k$$

- $\det({}^tA) = \det(A)$

- Lien entre det. et matrice inversible.

Def : $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

ou

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible, s'il existe une autre matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ tq

$A.B = I_n = B.A$

- Et on note l'inverse A^{-1}, la matrice inverse est unique
  - elle existe si $\det(A) \neq 0$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

* Caractérisation.

Penser au comatrice
matrice augmentée
mat. échelonnée.

A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$

$n=2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a.) A est inversible
$\det(A) = ad - bc \neq 0$

b.) Si A est inversible ni $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -2$

$A^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Matrice et Σ linéaire

Un Σ linéaire peut s'écrire matriciellement :

~~A(x)~~ $\underset{(np)\,(p,1)}{AX} = \underset{(n,1)}{B}$, avec n équat° et p inconnus

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ vecteur des inconnus.

A : la matrice du Σ

B : $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 2nd membre de chacune de équations.

Ex : $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

3 cas
* Soit A est carré et inversible

$\boxed{AX = B \iff X = A^{-1}B}$

(1)

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad x = 1$, $y = \frac{1}{2}$

On a une solution unique.
Dans le cas (1) on est sûr d'avoir une solution unique.

$\frac{6}{2} - \frac{5}{2}$

(2) A non carré ou non inversible (Dans ce cas, on résoud le Σ à la main.

ou

(3) Pivot de Gauss $\Rightarrow$ Dans ce cas 3 solutions

solut° : - infinité de solution
- ∅
- solution unique

Scanné avec CamScanner

ex : $\begin{cases} x+2y=2 & L_1 \\ 3x+4y=5 & L_2 \\ 4x+6y=7 & L_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y=2 & L_1 \text{ (ligne pivot)} \\ -2y=-1 & L_2-3L_1 \\ \cancel{-2y=-1} & L_3-4L_1 \end{cases}$ solut° unique

ex : $\begin{cases} x+2y=2 \\ 3x+4y=5 \\ 4x+6y=8 \end{cases} \iff \begin{cases} -2y=-1 \\ -2y=0 \end{cases}$

$S=\emptyset$ incompatible

$\begin{cases} x+2y=2 & L_1 \\ 3x+6y=6 & L_2=3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=2 \iff x = -2y+2 \quad \text{avec } y\in\mathbb{R} \\ 0=0 \end{cases}$

$\boxed{S=\{(2-2y;y), \text{avec } y\in\mathbb{R}\}}$

ex : $(2,0)$ est 1 solution

III-) Vecteurs Propres et matrices diagonales

1). Vecteur propre et valeurs propres d'une matrice

Définition : Soit A une matrice carré d'ordre n.

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

λ valeur propre de A $\iff$ $\exists$ un vecteur $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \neq \vec{0}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Tel que $\boxed{AX=\lambda X}$, X est par définition un vecteur propre de A.

ex : $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; λ est une valeur propre de A, ssi, $\exists$ $X\neq 0$ tel que $AX=\lambda X$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$

$\iff \underset{(2,2)}{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}}\underset{(2,1)}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} = \lambda\underset{(2,1)}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}$

$\iff \begin{cases} x+2y=\lambda x \\ 2x+y=\lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x+2y=0 \\ 2x+(1-\lambda)y=0 \end{cases}$ Pas $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ~~car sinon dans λ pas~~

$\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & (1-\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ autre solut° que $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, le système doit avoir avoir + ieurs solut°

- la mat. ne doit pas être inversible.

donc det doit être $=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(1-\lambda)^2 - 4 = 0}_{\text{Polynome caractéristique}} \iff (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$$

$$(-\lambda-1)(-\lambda+3) = 0$$

$\lambda = -1$ ou $\lambda = 3$

donc les valeurs propres de A sont 3 et -1 :

On note $Spec(A) = \{3, -1\}$

"spectre de A"

Rem : $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - \lambda I_2$

Caractérisations d'une valeur propre

λ est valeur propre de A $\iff$ $\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$

C'est le polynome caractéristique de A ; $\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - I_n)}$, polynome de degré n

le terme constant est le déterminant $\det(A)$ si $X = \vec{0}$ $(x=0; y=0)$ sachant que pour $x=0$ et $y=0$ pas de λ

* Pour chaque valeur propre, on définit l'ensemble $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1},\ AX = \lambda X\}$

= ensemble des vecteurs propres associés à λ $\underset{\text{union}}{\cup}$ $\{\vec{0}\}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

. determinons les vecteurs propres de A.

E_3 et E_{-1}

a.) $X \in E_3 \iff AX = 3X \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$

-> On a une infinité de solutions

$X \in E_3 \iff \begin{cases} y = x \\ y = x \end{cases}$ $y = x,\ x \in \mathbb{R} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$

sous espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

-> Tous les vecteurs s'écrivant sous la forme $x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A associés à $\lambda = 3$

b -> $X \in E_{-1} \iff AX = -X$

$\iff \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ \cancel{2x + 2y = 0} \end{cases} \iff y = -x,\ x \in \mathbb{R}$

$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

vecteur directeur ou base

$E_3 = \left\{X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$E_{-1} = \left\{X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Trouver valeurs propres et vecteurs propres de A.

a-) λ est valeur propre de A $\Leftrightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$(1-\lambda)^2 = 0$

$1 - \lambda = 0$ matrice triangulaire

$\lambda = 1$

une valeur propre ~~double~~ $\underline{\underline{1}}$ est une racine double de $P_A(\lambda)$

b-) On a un espace propre E_1

$X \in E_1$ (c à d X est vecteur propre de A associé à $\lambda = 1$)

$AX = \lambda X$

$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x + 2y = x & (1) \\ \cancel{y = y} \end{cases}$

~~0 = 0 } infinité de solut°~~

$2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$; en remplaçant ; on voit $x = x$. $x \in \mathbb{R}$

$S = y = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Problème ; ici on a un seul vecteur propre, on ne peut pas avoir une base.

ex$_3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a-) $\det(A - \lambda I_2) = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$= 0$

$\underline{\underline{\lambda = 1}}$

b-)

$AX = X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow X \in \mathbb{R}^2$

• Diagonalisation de matrice.

($A \in M_n(\mathbb{R})$) Une matrice est diagonalisable si on peut trouver une base de vecteur propre de A

Méthode:

① - Rechercher toutes les valeurs propres de A

② - Pour chaque valeurs propres λ_i, on compare la $\dim E_{\lambda_i}$ et sa multiplicité dans le polynome caractéristique dans le $P_A(\lambda)$

~~[illegible]~~

Si $\boxed{\dim E_{\lambda_i} = \text{multi}(\lambda_i)}$ $\forall i$, la matrice sera diagonalisable.

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

① $\text{Spec}(A) = \{-1, 3\}$

$P_A(\lambda) = (-1-\lambda)(3-\lambda)$

~~Pour λ_1~~

② Pour $\lambda_1 = -1$, $E_{-1} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E_{-1} ; car il génère tout l'espace E_{-1} et comme un vecteur seul est libre le vecteur est libre et générateur.

$E_{-1} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\dim(E_{-1}) = 1 = \text{multi}(\lambda)}$

• Pour $\lambda = 3$ ~~$E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$~~ $E_3 = \left\{ X, X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sous espace ; vect engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim(E_3) = 1 = \text{multi}(3)$

Résumons :

$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } E_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ " " } E_{-1} \end{cases}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, vecteur propre de A

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ (Ils ne sont pas colinéaires ou propor dans $\mathbb{R}^2$ donc forment une base)

$\Downarrow$

une famille de 2 vecteurs libres forme une base.

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ libres car non proportionnelles

deux vecteurs libres dans un espace de dimension 2 forment une base

donc A est bien diagonalisable.

A est diagonalisable $\iff$ Applicat° linéaire associée à A, a pour matrice :

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

7

2ème ex:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.

a.) $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$

$=$ multi$(1) = 2$

b.) $\dim(E_1) = 1$ car $E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ~~[illegible]~~

$\dim(E_1) = 1 <$ multi (1)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de E_1

dim = nombre de vecteur de la base

A n'est pas diag.

• une matrice diagonale est déjà diagonale (matrice identité)

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\dim E_1 = 2$

$\underbrace{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

famille génératrice montré qu'elle est libre.

propr^{té}

Complément pour la diag° de matrice

2 résultats:

1. Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à n valeurs vp $\neq$tes (distinctes) alors elle est diagonalisable (donc elle a une base de vp)

2. Si A est symétrique alors elle est diag.

$\hookrightarrow$

Scanné avec CamScanner