$\ln(a \times b) = \ln a \cdot \ln b$

$e^0 = 1$

$e^x y = 0$ imp

TD 1
Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Dérivées partielles

Après avoir écrit leur domaine de définition, déterminer les dérivées partielles premières et secondes, quand elles existent, et donner la matrice Hessienne des fonctions suivantes:

1. $f(x,y) = xy^2 + 3x^2$
2. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + y$
3. $f(x,y) = e^{xy}$
4. $f(x,y) = \sqrt{xy}$
5. $f(x,y) = x^3 e^y + \ln(xy) + y^2 \ln(x)$
6. $f(x,y,z) = x^2 yz$
7. $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 + 3z^2 x$

Exercice 2. Mineurs principaux

Pour les matrices suivantes, donner les mineurs principaux, ainsi que les mineurs principaux diagonaux. Puis dire si ces matrices sont définies ou semie-définies, positives ou négatives.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
4. $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 3. Optimisation

Résoudre le programme d'optimisation $\mathcal{P} : \max_{x,y} f(x,y)$

1. avec $f(x,y) = xy$
2. avec $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$

Exercice 1

1.)

$Df = \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2 + 6x$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2x$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2y$

$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$

2.)

$Df =$ $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1 - \frac{x}{y^2}$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$

$H = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}$

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}$

$f(x) = u(x)^n$

$f'(x) = n\,u'(x)\,u(x)^{n-1}$

3.) $Df = \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = ye^{xy}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^{xy}$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \cancel{2ye^{xy} + xy^2e^{xy}}$ $e^{xy} + xye^{xy}$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = y^2e^{xy}$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$

$H = \begin{bmatrix} y^2e^{xy} & \cancel{2ye^{xy} + xy^2e^{xy}} \\ \cancel{2ye^{xy} + xy^2e^{xy}} & x^2e^{xy} \end{bmatrix}$

Scanné avec CamScanner

4-) $f(x) = \sqrt{xy}$ ②

$D_f = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{y}{y} & 1 \\ 1 & -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \times \left(-\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)$$

5-)

$f(x,y) = x^3e^y + \ln(xy) + y^2\ln x$ $D_f = (\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-) \cap \mathbb{R}^+$ α

Poser $\begin{cases} xy > 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $z \in \mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}^{+*})^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2e^y + \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3e^y + \frac{1}{y} + 2y\ln(x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xe^y - \frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$ $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2e^y + \frac{2y}{2x}$

$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = x^3e^y - \frac{1}{y^2} + 2\ln(x)$

6-)

$f(x,y,z) = x^2yz$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2z$ $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2y$

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2yz & 2xz & 2xy \\ x^2 & 0 & x^2 \\ 2xy & 2xy & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{D_f = \mathbb{R}^3}$

7-) $\underline{D_f = \mathbb{R}^3}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + y + 3z^2$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + 2y$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 6zx$

TD1 (7)

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 1 & 6z \\ 0 & 2 & 0 \\ 6z & 1 & 6x \end{bmatrix}$$

Hess est symétrique; qu'est ce qu'une matrice symétrique?

Exo 2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Soit A une matrice carré ~~symétrique~~ (On appliquera les méthodes des mineurs sur les Hessiennes.

A est défini positive si mineurs diagonaux $D_1 > 0$; $D_2 > 0$...

négative $\Leftrightarrow D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$

A semi-définie positive $\Leftrightarrow$ si tous les mineurs principaux (diag inclus) ≥ 0

A semi-définie négative $\Leftrightarrow$ tous les mp ordre 1 ≤ 0
(Parfois c'est à negatives) 2 ≥ 0
3 ≤ 0

. mineurs d'ordre 1 : $2, -1$

D_1 2 ; $D_1 > 0$

. mineurs d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad D_4 > 0$$ A est définie positive.

2.) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

mineur p. ordre 1 : $1, 3$.

D_1 : 1 $D_1 > 0$

mp ordre 2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 < 0$$ B est ~~quelconque~~ n'appartient ~~à~~ aucun des cas

$D_2 = -2 < 0$

3-) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$

mp ordre 1 : $1, 3, 0$

D_1 : 1

mp ordre 2 : $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$; $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$; $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 6$; $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 \qquad D_3 = -12 < 0$$

mp ordre 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$

- Matrice $\notin$ à aucun des cas

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- mp ordre 1 : 1, 2 ; 2 > 0

$\boxed{D_1 = 1}$

- mp ordre 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$\boxed{D_2 = 0}$

- mp ordre 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6-4-2(3-2) + \underbrace{(2-2)}_{0}$$

$$= 2-2(1)$$

$\boxed{mp\ O_3 = 0}$ Ni ⊕ ; ni ⊖

Exo 3

1-) $f(x,y) = xy$ $\qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x$

$P: \max\limits_{x,y} f(x,y)$

CPO $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ Si $\exists$ un optimum $z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y^2} = 0$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x \partial y}$ $\qquad H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 - I_2$

ni semi def / ni def - ni ⊕ ni ⊖

- On cherche les mineurs.

mp 1 = 0, 1 $\qquad$ mp2 = -1

D = 0 $\qquad$ $D_2 = -1$

$\cancel{⊕}$ $\cancel{⊖}$ $\cancel{⊕}$ $\cancel{⊖}$ $\notin$ à aucun des des cas, pas de max ou de

④ TD3

elle n'admet donc pas d'optimum : Justificat° par les des mineurs diagonaux.

2-) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3y - 3x^2 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3\cancel{y}x - 3y^2$$

S'il y a un optimum, il vérifie le Σ suivant $\begin{cases} -3x^2 + 3y = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x^2} = -6x \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y^2} = -6y$$

$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = y \\ x = y^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^4 \\ x = y^2 \end{cases}$

2 solutions possibles $(0,0)$
$(1,1)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x \partial y} = 3 \qquad H_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{bmatrix} \qquad H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

· $mp1 = 0, 3$ $\boxed{D_1 = 0}$ $\qquad mp_2 = -9$ $\boxed{D_2 = -9}$

· Pas d'optimum en 0,0 E

· $H(1,1) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ $\qquad mp_1 = -6, 3$ $\boxed{D_1 = -6} < 0$ $\qquad mp_2 = 27$ $\boxed{D_2 = 27} > 0$

⊝ ✓ $D_1 < 0$; $D_2 > 0$

H(1,1) définie négative, f elle admet un <u>maximum local</u> ; global si

<u>Hessienne est définie négative pour tout x, y</u>

Quand c'est locale, c'est maximum sur l'intervalle mais pas sur l'ens du domaine de définit°