Calcul numérique

TD n°1 : Valeurs propres, diagonalisation de matrices

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres.
3. Montrer que A est-elle diagonalisable.
4. Soit P la matrice constituée des vecteurs-colonnes $\{V_1, V_2\}$ associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, en respectant cet ordre. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$. Que remarque-t-on?

Exercice 2

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres associés aux valeurs propres.
2. A est-elle diagonalisable?

Exercice 3

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? On justifiera les réponses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A: A est symétrique ${}^tA = A$ donc diag

B: det(B)=0 est triangulaire supérieur.

Exercice 4

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$.
2. Trouver un vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = -2$, tel que $c = 1$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Soit $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$. Montrer que $V_2 = AV_3 - V_3$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$.
4. Soit P la matrice constituée des vecteurs-colonnes $\{V_1, V_2, V_3\}$. Déterminer la matrice $A' = PDP^{-1}$. Que peut-on dire de A'?

TD 1 : Vp et diag de matrices

Exo 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1-)

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)^2 - 1^2 = 0$

Polynome caractéristique $(2-\lambda+1)(2-\lambda-1) = 0$

Si $P_A(\lambda)=0$; λ est valeur propre. $\iff P_A(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

deux $\lambda \neq \Rightarrow$ A est diag. $\lambda_2 = 3$ $\lambda_1 = 1$

2. $E_1 \Rightarrow AX = \lambda_1 X \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathcal{M}_{2,1}$)

$X \in E_1$ ... (X est vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$

$\iff AX = \lambda X$

$AX = X$

$\begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff$ ~~$x = -y$~~ ~~$x\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$~~

~~$x = -y$~~ avec $y \in \mathbb{R}$

$y = -x$

$X\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, avec $x \in \mathbb{R}$

$E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left\{ X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

: l'ens des vecteurs colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; Sous espace vectoriels Engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\dim(E_1) = 1$

Soit $X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3 \iff AX = 3X$

$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ y + 2x = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ $y = x$

$X\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; avec $x \in \mathbb{R}$

$E_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; ac $x \in \mathbb{R}$; l'ens des vecteurs colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; sous espaces vectoriels engendrés par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• matrice symétrique, on tombe sur des vecteurs orthogonaux.

3-)

a-) ~~diag de A~~ A a 2 vp λ_1 et λ_2

$\begin{cases} \text{multi}(\lambda_1) = 1 \\ \dim(E_1) = 1 \end{cases}$ car engendrée par un seul vecteur.

Pareil pour 3 $\begin{cases} \text{multi}(3) = 1 \\ \text{multi}(E_3) = 1 \end{cases}$ Il y a ... de 2 vecteurs il faut montrer que c'est une base b-) A est une matrice symétrique (réelle) donc elle est diag.

c-) Les valeurs propres sont valeurs propres sont distinctes ; sont tou.

$$\boxed{1 \leq \dim(E_{\lambda_1}) \leq \text{mul}(\lambda_1)}$$ cas général

si $\lambda = 1$
alors $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$

4-) P "matrice de passage"

$P = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ P est inversible, les vecteurs sont indépendants (base) &

$\det(P) = 2 \neq 0$ P est inversible.

et P^{-1}

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ D est diagonale et les éléments diagonaux sont les valeurs propres.

Exo2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1-) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & (2-\lambda) & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda)$

$= (2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 2 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 1 + \lambda$ $\Leftrightarrow$ $(1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1)$

$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 1$

$(1-\lambda)(\cancel{\lambda - \lambda^2}) + \lambda^2 - 4\lambda + 4)$

$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 2$

A admet des valeurs propres si $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0$

Essai : $1 - 5 + 5 - 2$

$\Delta = 16 - 12$
$= 4$

$(\lambda^2 - 4\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 5\lambda^2 + 5\lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \hline \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda + 1 \\ -4\lambda^2 + 5\lambda - 1 & 9 - 12 + 2 \\ -4\lambda^2 + 4\lambda & \\ 0 \quad \lambda - 2 & \end{array}$$

$\Delta = 16 - 4(1)$
$= 12$

$x = \frac{4-2}{2}$ $x = \frac{4+2}{2}$

$= 1$ $x = 3$

Scanné avec CamScanner

② TD2 : Méthode de SARRUS

$\underline{P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)}$ multi(1) = 2

multi(3) = 1

Espaces propres

• ~~E A~~

~~$E_1 = AX = 1X$~~ <=>

Pour (?) on voit que multi(E 3) = 1 alors dim(E_3) = 1 car. $1 \leq \dim(E) \leq \text{multi}(E)$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff AX = 1X \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \\ x + y + z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ $\quad x + y = 0$, ~~$x + y = 0$~~, ~~$x + y = 0$~~

~~$x+y+z=$~~

$\begin{cases} y = -x \ ; \text{ avec } \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Trouver tout en fonct° de z

$\iff X \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$= x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_2}$

famille génératrice famille génératrice

E_1 est l'espace vectoriel engendré par

$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow (V_1, V_2)$ forment une famille génératrice
$e_1 \quad e_2$

et aussi libre, on ne peut pas construire $\vec{e_1}$ à partir de $\vec{e_2}$ (ils sont

V_1 et V_2 sont libres car non proportionnels

C'est famille est une base de E_1 avec 2 vecteurs ; $\boxed{\dim(E_1) = 2}$

• E_3

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \iff AX = 3X$ $\begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \\ x + y + z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ ~~x + y = 0~~ \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ $\quad y = +x$, $2x - 2z = 0$, $z = x$

$X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

famille génératrice et libre de E_3

$\dim(E_3) = 1 = \text{multi}(\lambda_3) = 1$

• A est diag.

Scanné avec CamScanner

trace de la matrice somme des valeurs propres = Σ des éléments diagonaux.

Exo 3

$D = (1-\lambda)(5-\lambda)(8-\lambda)(-\lambda)$; le spectre (B)

$\{1, 5, 8, 0\}$ <=> distinctes en dim(4) ; elle est diagonalisable
4vp

$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ Pas de vp dans $\mathbb{R}$; pas de racines.

0 ; il faut au moins 2