Lista 1 - Revisão de FisComp1
Física Computacional 2 - 92444 (B) - 2/2024
Prof. Matheus Paes Lima

Todos os exercícios desta lista devem ser resolvidos utilizando programas escritos na linguagem de programação Python 3. Utilize o Google Colab, pois facilita a integração com o Google Sala de Aula.

Exercício 1 - Constante de Euler-Mascheroni
Dentro do contexto de matemática, a constante de Euler-Mascheroni (γ) possui várias aplicações em Teoria dos números. Ela é definida como o limite da diferença entre a série harmônica e o logaritmo natural quando n tende para infinito, ou seja:

$$\gamma = lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - ln(n)\right) \tag{1}$$

Na expressão acima, o logaritmo natural não está dentro do somatório.
(a) Faça uma tabela com valores da constante γ obtida numericamente com vários valores de n ($n = 10$, 100, 1000, e 100000).
(b) Sabendo que:

$$\gamma = 0.5772156649015328606065120900824 0$$

Em sua melhor estimativa, quantas casas decimais corretas você consegue obter com seu programa aumentando n?

Exercício 2 - Somatórios: Determine numericamente o resultado dos seguintes somatórios: (*Dica: Para efeitos práticos, considere* ∞ *como um número grande determinado de tal forma que o incremento de um termo a mais na série seja menor do que* 0,001 %.)

$$(a) \qquad \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i!}\right)$$

$$(b) \qquad 4\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)}$$

$$(c) \qquad \sum_{i=1}^{10}(2^i + 3i + 1)$$

$$(d) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(1+i)}$$

$$(e) \qquad \sum_{i=1}^{10}(2^i - 40i)$$

Exercício 3 - Integral Numérica: Utilizando o método dos trapézios, resolva numericamente a seguinte equação:

$$x + \int_0^x e^{-y^2} dy = 5$$

(*dica: utilize uma equação recursiva:* $x^{k+1} = 5 - \int_0^{x^k} e^{-y^2} dy$)

Exercício 4 - Funções e Gráficos: A função $arcsin(x)$ pode ser aproximada pela seguinte série:

$$arcsin(x) = \sum_{n=0}^{N_{max}} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \tag{2}$$

Na função acima, considere $N_{max} = 20$. Implemente uma função para calcular o valor de $arcsin(x)$ com a série acima. Faça um gráfico da função que você implementou no intervalo $x \in [-1, 1]$. Neste gráfico, sobreponha a função intrínseca, que em python é `math.asin(x)`, que pode ser importada importada utilizando `import math`.

Exercício 5 - Solução de Sistemas Lineares com Método Iterativos Um sistema linear é definido pela equação $Ax = B$, onde A é uma matriz conhecida, B é um vetor coluna também conhecido, e x é o vetor coluna a se determinar, ou seja, a solução deste sistema linear. Existem vários métodos eficientes para se resolver sistemas lineares, como o Método de Gauss-Seidel e a fatoração LU. Além destes métodos, sistemas lineares também podem ser resolvidos por métodos iterativos, que tem vantagens quando as matrizes são grandes. Estes métodos consistem em dar um chute inicial para a solução (x_0), e utilizar este chute para se aproximar da solução real criando uma série com uma expressão recursiva. Um método iterativo que obtém a solução de Sistemas $Ax = B$ extremamente simples e eficaz foi proposto por Gauss-Jacobi, e está descrito abaixo:
Considere o sistema

$$Ax = B, \tag{3}$$

A matrix A pode ser escrita como a soma de uma matriz diagonal com uma matriz *off-diagonal*:

$$(A^d + A^{off})x = B \tag{4}$$

Manipulando a equação acima:

$$\begin{aligned} A^d x &= B - A^{off} x & (5) \\ x &= (A^d)^{-1}(B - A^{off} x). & (6) \\ & & (7) \end{aligned}$$

A relação acima permita obter um valor x^{k+1} a partir de um valor x^k:

$$x^{k+1} = (A^d)^{-1}(B - A^{off} x^k). \tag{8}$$

Dado um chute inicial para x_0, é possível obter elementos $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\}$. O processo recursivo é repetido até que todos os elementos de x_{k+1} fiquem próximos aos elementos de x_k. ($|x_k^i - x_{k+1}^i| < \epsilon, \quad \forall i$. Aqui, i rerefe-se a cada elemento do vetor x_k). Dois pontos

devem ser notados: (i) A inversa de A^d é muito fácil de se calcular, pois basta inverter os elementos diagonais $(A^d)^{-1}_{ii} = 1/A^d_{ii}$. (ii) O método não funciona se a matriz A tiver elementos diagonais nulos. Mas muitas vezes este inconveniente pode ser driblado permutando linhas do sistema linear. Utilize o algoritmo para resolver os seguinte sistemas:
(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & 10 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 10 & 11 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 16 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 56 \\ 1 & 18 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 75 \\ 1 & 1 & 20 & 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 1 & 1 & 1 & 22 & 1 & 1 & 1 & 113 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 24 & 1 & 1 & 132 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 26 & 1 & 151 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 28 & 170 \end{array}\right)$$

(c)

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 31 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 93 \\ 2 & 34 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 102 \\ 2 & 2 & 37 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 111 \\ 2 & 2 & 2 & 40 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 120 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 43 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 129 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 46 & 2 & 2 & 2 & 2 & 138 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 49 & 2 & 2 & 2 & 147 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 52 & 2 & 2 & 156 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 55 & 2 & 165 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 58 & 174 \end{array}\right)$$

Exercício 6 - Matrizes: Defina uma matriz A com dimensões 10×10 onde seus elementos a_{ij} são dados pela expressão abaixo: (i e j referem-se a linha e coluna, respectivamente, e assumem valores entre 1 e 10.)

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 2i + 7j + 2, \text{ se } \quad i < j; \\ a_{ij} = (3i)^2, \text{ se } \quad i = j; \\ a_{ij} = 4(i^3) + 5(j^2) + 1, \text{ se } \quad i > j. \end{cases} \tag{9}$$

Além disso, considere um vetor coluna B com os elementos:

$$B = (37, 26, -9, -122, -107, -602, -257, -1606, -459, -3326)^T. \tag{10}$$

Obtenha a solução do sistema linear $Ax = B$ com um método numérico à sua escolha. (*Dica: a linguagem Python disponibiliza bibliotecas de algebra linear com funções para se revolver sistemas lineares, como por exemplo, a função* `numpy.linalg.solve(A,B)` *que pode ser acessada com* `import numpy`.)

Exercício 7 - Trajetória: Um projétil de 0,7 kg é lançado do solo com velocidade inicial v =100 km/h em uma direção que forma um ângulo de 55° com a horizontal. Sabendo que as únicas forças envolvidas são (i) força peso ($\vec{P} = -mg\hat{k}$) [$\hat{k}$ é um versor que aponta para cima]; e (ii) força de resistência do ar: $\vec{F}_{ar} = -\gamma\vec{v}$, $\gamma = 0.8N \cdot s/m$ [$\vec{v}$ é o vetor velocidade], escreva um programa para simular a trajetória da partícula até imediatamente antes de atingir o solo (componente z positiva). A partir de suas simulações responda as questões abaixo:
(a) Qual a distância horizontal percorrida até o objeto atingir o solo?
(b) Qual o módulo da velocidade da partícula ao atingir o solo?
(c) Qual a altura máxima alcançada pela partícula?
(d) Qual o tempo decorrido ao longo do trajeto?
(e) Faça um gráfico da trajetória da particula antes de atingir o solo.
(*Dica: Determine o vetor velocidade inicial* $\vec{v}(t = 0)$ *com os dados fornecidos, e considere que o projétil é lançado da origem. O Movimento será no plano vertical, e portanto os vetores envolvidos só têm duas componentes. Obtenha as posições ao longo da trajetória com a aproximação de Euler dada por* $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t$ *para as posições, e* $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + (\vec{F}(t)/m)\Delta t$ *para as velocidades.*)

Exercício 8 - Demonstração Numérica do Teorema de Bertrand. Uma força central aponta para um ponto fixo no espaço, independente da localização do objeto que se move. Um exemplo conhecido é a força de atração gravitacional, que atua na Terra devido ao Sol, pois em qualquer momento do ano a terra é atraída em direção ao Sol, que pode ser considerado fixo. Um exemplo um pouco mais geral de força central atuando em um objeto de massa m localizado em $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, é:

$$\vec{F} = -kr^{\alpha}\hat{r}. \tag{11}$$

Neste exemplo, o polo atrativo é a origem do sistema de coordenadas. $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa a distância do objeto que se move à origem, enquanto k e α são constantes reais, e $\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j}$ é um versor radial. Neste contexto, o **teorema de Bertrand** afirma que uma partícula em movimento orbital sujeita à força descrita acima assume órbitas fechadas somente se $\alpha = +1$ ou -2. O objetivo deste exercício é demonstrar a validade do **teorema de Bertrand** utilizando o método de Euler em duas dimensões.
(a) Utilizando o método de Euler, com $k = m = 1$, passo temporal $\Delta t = 0.0001$, tempo máximo de simulação tmax = 20, posição inicial $\vec{r}_0 = \hat{i}$, e velocidade inicial $\vec{v}_0 = 0{,}5\hat{i} + \hat{j}$ faça gráficos das órbitas para $\alpha = 2$, 1, 0, -1, -2 e -3.

Questão 9 - Força Restauradora Movimentos oscilatórios são obtidos com forças restauradoras que podem ter a fórmula $F(x) = -kx^{\alpha}$, sendo k uma constante real, α um número inteiro ímpar, e x a coordenada cartesiada da partícula ao longo do eixo x. O caso particular do oscilador harmônico é obtido com $\alpha = 1$.
(a) Com o método de Euler-Cromer, calcule $x(t)$ para um oscilador Harmônico ($\alpha = 1$) utilizando como parâmetros de simulação $k = 1\,\mathrm{N/m}^{\alpha}$, Δt =0,001 s, massa=1 kg, tempo máximo de simulação t_{max} =100 s, velocidade inicial $v_0 = 0$. Envie gráficos para $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, e $x = 3$ (amplitudes iniciais, em metros).
(b) Para $\alpha \neq 1$ é esperado que os períodos de oscilação dependam da amplitude de oscilação. Envie gráficos para $\alpha = 3$, e 5, considerando $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ e $x_0 = 3$ para cada valor de α.
(c) Utilizando $\alpha = 5$, determine a dependência da frequência ($freq(x_0)$) com a amplitude

de oscilação (x_0) para $1 < x_0 < 10$. Ou seja, faça um gráfico xy onde o eixo x representa a amplitude e o eixo y a frequência. Cada ponto neste gráfico pode ser determinado por uma simulaççao de dinâmica.

Questão 10 - Dinâmica de Populações com o Método de Euler: Uma reserva natural abriga duas populações: coelhos (presas) e raposas (predadores). A dinâmica populacional entre essas espécies pode ser descrita pelas equações de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \tag{12}$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y, \tag{13}$$

onde:

- $x(t)$ é o número de coelhos (presas) no instante de tempo t,
- $y(t)$ é o número de raposas (predadores) no instante de tempo t,
- $\alpha = 0.1$ é a taxa de crescimento natural dos coelhos na ausência de predadores,
- $\beta = 0.02$ é a taxa de predação, ou seja, o impacto dos predadores na população de presas,
- $\delta = 0.01$ é a taxa de crescimento dos predadores devido ao consumo de presas,
- $\gamma = 0.1$ é a taxa de mortalidade natural dos predadores na ausência de presas.

Considerando uma população inicial de 80 mil coelhos ($x(0) = 80$) e 30 mil raposas ($y(0) = 30$), e um tempo de simulação máximo de 400 unidades de tempo, utilize o método de Euler com um passo temporal $\Delta t = 0.01$ para determinar, neste intervalo de tempo:
(a) os gráficos de $x(t)$ e $y(t)$ ao longo do tempo,
(b) a população máxima de coelhos,
(e) a população mínima de raposas,
(c) a população mínima de coelhos,
(d) a população máxima de raposas,
(e) Modifique o programa para explorar as condições sob as quais ocorre a extinção de uma das espécies.