Lista 2 - EDO 1 - Redução da Ordem
Física Computacional 2 - 92444 (B) - 2/2024
Prof. Matheus Paes Lima

Todos os exercícios desta lista devem ser resolvidos utilizando programas escritos na linguagem de programação Python 3. Utilize o Google Colab, pois facilita a integração com o Google Sala de Aula. As questões 2 em diante devem usar o método de Picard implementado e testado na questão 1.

Exercício 1 - Compração do Método de Euler com o Método de Picard
Faça gráficos comparando as soluções do oscilador Harmônico obtidas com os métodos de (i) Euler e (ii) Picard. Por simplicidade, utilize $k = 1$ e $m = 1$, sendo que a partícula está inicialmente parada na posição $x = 2.0$. Além disso, adote um tempo máximo de 50 unidades de tempo. Utilize como referência o programa em python fornecido no início desta aula para o método de Euler. Você deve criar uma nova função para obter a solução com o método de picard. Em cada item abaixo, sobreponha o gráfico da solução ontida com o método de Euler com a solução obtida com o método de Picard comsiderando os passos temporais Δt indicados:
(a) $\Delta t = 0.1$
(b) $\Delta t = 0.01$
(c) $\Delta t = 0.001$

Exercício 2 - Soluções de EDO's Variadas: Para cada um dos problemas de valor inicial abaixo coloque as EDOs no formato $\frac{d\vec{\mathbf{y}}}{dx} = \vec{\mathbf{g}}(y, x)$, e faça um gráfico da solução no intervalo $[x_0, x_0 + 5]$. Utilize o método de Picard com um passo $\Delta x = 0.01$. (Nestas equações, a variável dependente é y e a variável independente é x)
(a) $7y'' + 4y' - 3y = 0$, $x_0 = 0$, $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1$.
(b) $y''' - \frac{8}{x^3}y = 0$, $x_0 = 1$, $y(x_0) = 1$ e $y'(x_0) = 1$, $y''(x_0) = 0$.
(c) $(x + 2)y^{(4)} + 3y' - 2y = 0$, $x_0 = -1$, $y(x_0) = 3$, $y'(x_0) = -1$, $y''(x_0) = 0$, $y'''(x_0) = 1$
(d) $y^{(5)} - 9y' = 0$, $x_0 = 1$, $y(x_0) = 2$, $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$, $y'''(x_0) = 1$, $y^{(4)} = 1$.

Exercício 3 - Solução Numérica da Equação de Bessel As funções de Bessel são amplamente utilizadas na física, tendo aplicações em ondas eletromagnéticas, condução de calor, vibrações, difusão, processamento de sinais (filtro Bessel), Soluções para a equação de Schrödinger radial (em coordenadas esféricas e cilíndricas) de uma partícula livre, etc. A EDO que define uma função de bessel é:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{1}$$

Na qual a solução $y = y(x)$ é uma função da variável independente x, e p é uma constante. Obtenha as solupões numéricas da equação de Bessel para $p = 0, 1, 2, 3, e4$ com o método de Picard $x_0 < x < 20.0$ utilizando um passo $\Delta x = 0.1$. Para $p = 0$, utilize condições iniciais $x_0 = 0.0001$, $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = -0.0001$. Para os demais valores de p adote como codições inciais $x_0 = 0.0001$, $y(x_0) = 0.0001$, $y'(x_0) = 1$. Todas as soluções devem ser normalizadas, ou seja, após obter uma solução numérica $y_p(x)$ não normalizada, deve-se definir uma solução normalizada por $yn_p(x) = Cy(x)$, (onde C é uma constante), tal que

$$\int_0^{20} |yn_p(x)|^2 dx = 1.0$$

. Compare seu gráficos com soluções disponíveis na internet, ou outras fontes.

Exercício 4 - Sistema de equações diferenciais Este exercícios considera a equação de van der Pol, amplamente utilizada no âmbito de Caos. Nesta equação, as coordenadas cartesianas $x(t)$ e $y(t)$ para um certo sistema hipotético são determinadas pelas seguintes EDOs acopladas:

$$\frac{dx}{dt} = y - f_\mu(x) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \tag{3}$$

onde,

$$f_\mu(x) = x^3 - \mu x. \tag{4}$$

$\mu \in [-1, +1]$. Dependendo do valor de μ, o sistema pode ser atraído para um polo. Determine trajetórias desta partícula hipotética (ou seja, gráfico de x *.vs.* y) para diversos valores da constante real μ, e responda para que valores de μ a solução é atraída para um polo. (dica: para cada valor de μ utilize o método de Picard para gerar 4 soluções como condições iniciais (x_0, y_0)=$(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, e $(-1, 0)$), respectivamente. Neste exercício, os parâmetros de simulação (passo, tempo máximo) devem ser determinados por você.

Exercício 5 - Determinação numérica de órbitas de corpos celestes O cometa 1P/Halley, popularmente conhecido como cometa Halley, é um dos cometas mais populares da astronomia. Ele pertence à classe dos cometas de curto período, retornando às proximidades da Terra aproximadamente a cada 76 anos. Seu ciclo foi descrito pela primeira vez pelo astrônomo inglês Edmond Halley, que, em 1705, previu corretamente que o cometa observado em 1682 voltaria em 1758. Isso permitiu que Halley fosse o primeiro a provar que alguns cometas orbitam o Sol, estabelecendo um marco na ciência astronômica. O movimento do Cometa Halley pode ser aproximado considerando-se apenas a atração gravitacional entre o cometa e o sol, desprezando-se todos os outros corpos celestes. Sabendo que no afélio a velocidade do cometa é $9.12 \times 10^2 m/s$ e sua distância ao sol $5.28 \times 10^{12} m$, utilize o método de Picard para responder os itens abaixo a partir da solução numérica.

(a) a distância mínima até o sol (periélio)

(b) o tempo necessário para uma órbita completa em anos.

(c) Faça um gráfico da órbita do cometa.

(d) O módulo da velocidade máxima.

dica: Utilize a lei da gravitação, e pesquise na internet os valores da massa do sol, massa do cometa Halley, constante gravitacional, etc.

Exercício 6 - A Catenária Considere o problema de uma corda flexível presa em suas extremidades. A forma assumida por esta corda é denominada catenária, e pode ser calculada através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\omega_0}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}. \tag{5}$$

Nesta representação, f é a distância entre a corda e o solo, e x a distância horizontal. ω_0 é a densidade linear de massa, em kg/m e T_0 é a tensão da corda.
(a) Considere um cabo de aço com $\omega_0 = 0.77kg/m$. Supondo que este cabo possui uma das extremidades presa no topo em um poste de $5m$ de altura (Ponto A), calcule a altura de um segundo poste, distante 25m do primeiro, para que o cabo fique preso em sua extremidade superior (ponto B), sabendo que $T_0 = 150N$, e $f'(x = A) = -0.1445$
(b) Nas mesmas condições do item (a), qual seria um novo valor de $f'(x = A)$ para que o segundo poste tenha a mesma altura do primeiro?
(c) Nas mesmas condições do item (a), qual seria um novo valor de T_0 para que o segundo poste tenha a mesma altura do primeiro?
(d) qual a distância mínima entre a corda e o solo nos itens (a), (b) e (c)?

Questão 7 Demonstração Numérica do Teorema de Bertrand. Uma força central é aquela que aponta para um ponto fixo no espaço, independente da localização do objeto que se move. Um exemplo conhecido é a força de atração gravitacional, que atua na Terra devido ao Sol, pois em qualquer momento do ano a terra é atraída em direção ao Sol. Um exemplo um pouco mais geral de força central atuando em um objeto de massa m localizado em $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, é:

$$\vec{F} = -kr^{\alpha}\hat{r}. \tag{6}$$

Neste exemplo, o polo atrativo é a origem do sistema de coordenadas. $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa a distância do objeto que se move à origem, enquanto k e α são constantes reais, e $\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j}$ é um versor radial. Neste contexto, o **teorema de Bertrand** afirma que uma partícula em movimento orbital sujeita à força descrita acima assume órbitas fechadas somente se $\alpha = +1$ ou -2. O objetivo deste exercício é demonsmostrar a validade do **teorema de Bertrand** utilizando simulações numéricas de trajetórias em duas dimensões.

Utilizando o método de Euler, com $k = m = 1$, passo temporal $\Delta t = 0.0001$, tempo máximo de simulação $t_{max} = 20$, posição inicial $\vec{r}_0 = \hat{i}$, e velocidade inicial $\vec{v}_0 = 0{,}5\hat{i} + \hat{j}$ faça gráficos das trajetórias da para $\alpha = 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2$ e -3.