Lista 3 - EDO 2 - Runge-Kutta
Física Computacional 2 - 92444 (B) - 2/2024
Prof. Matheus Paes Lima

Observações:

- Todos os exercícios desta lista devem ser resolvidos utilizando programas escritos na linguagem de programação Python 3. Recomendamos o uso do Google Colab, pois ele facilita a integração com o Google Sala de Aula.
- A partir da questão 2, é obrigatório utilizar exclusivamente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) para a resolução dos problemas.
- Após finalizar os exercícios, faça o download do arquivo no formato `.ipynb` e envie este arquivo para correção. **Atenção: listas enviadas em outros formatos não serão corrigidas.**

Exercício 1 - Comparação de Métodos: (i) Euler; (ii) Picard; (iii) RK2; e (iv) RK4.
Implemente os métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem (RK2) e de 4ª ordem (RK4). As equações estão no apêndice desta lista. Compare suas soluções com as obtidas pelos métodos de Euler e Picard, aplicando-os aos seguintes problemas:

(a) o oscilador harmônico;

(b) a equação de Bessel de ordem zero.

Utilize um grid com 200 pontos e defina o domínio da variável independente como $[0, 20]$. Apresente gráficos que ilustrem as diferenças entre as soluções obtidas pelos métodos.

Exercício 2 - Problema de Três Corpos: Influência da Órbita de Júpiter na Órbita da Terra.
O algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) é amplamente utilizado no estudo da dinâmica de planetas no Sistema Solar. Utilize este algoritmo para responder aos itens descritos abaixo:

(a) Considere apenas a interação gravitacional entre a Terra e o Sol, assumindo o Sol fixo na origem. Simule a órbita da Terra utilizando as condições iniciais $x = R_T$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 2\pi R_T/1$ ano. Obtenha o valor da distância média Terra-Sol (R_T) e a massa da Terra consultando fontes confiáveis, como livros ou a internet. O tempo máximo de simulação deve ser de 1 ano terrestre. Apresente o programa e o gráfico da órbita (x vs. y).

(b) Repita o item (a) para Júpiter, sabendo que $R_{\text{Júpiter}} = 5.2 R_T$. Para calcular a velocidade inicial de Júpiter, utilize a terceira lei de Kepler. O tempo máximo de simulação deve ser de 1 ano jupiteriano.

(c) Modifique o programa para calcular simultaneamente as órbitas da Terra e de Júpiter. (*Dica: a dimensão de $\vec{y}$ e $\vec{g}$ será maior.*) Elabore gráficos comparando a órbita da Terra com e sem a interação gravitacional entre Terra e Júpiter. Estime, em quilômetros, o desvio causado pela presença de Júpiter na órbita da Terra. O tempo máximo de simulação deve ser de 1 ano jupiteriano.

(d) Repita o item (c) considerando a massa de Júpiter $100\times$ e $1000\times$ maior. Como você acredita que o clima na Terra seria alterado em cada um desses casos? Justifique sua resposta qualitativamente.

Exercício 3 - Caos 3D: Sistema de Lorenz

No sistema de Lorenz, as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ representam as coordenadas de uma partícula, e a dinâmica do sistema é descrita pelas seguintes equações diferenciais ordinárias (EDOs):

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \tag{2}$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz. \tag{3}$$

Os parâmetros σ, r e b são constantes, e a partícula pode ser atraída para pólos atratores, que são posições bem definidas no espaço tridimensional. A localização desses pólos depende dos valores escolhidos para σ, r e b. Considerando $\sigma = 10$, $b = 8/3$, e as seguintes condições iniciais para (x, y, z):

- $(10, 10, 10)$,
- $(15, 1, -10)$,

resolva as tarefas a seguir:

(a) Desenvolva um programa para calcular numericamente a dinâmica do sistema de Lorenz. Utilize $t_{\max} = 100$ (tempo máximo de simulação), $it_{\max} = 10000$ (número de subdivisões no tempo) e $dt = t_{\max}/it_{\max}$ (passo de tempo).

(b) Identifique os pólos atratores para $r = 0.7$.

(c) Identifique os pólos atratores para $r = 10$.

(d) Analise e descreva qualitativamente o comportamento das soluções para $r = 28$.

Dica: Para estudar as trajetórias, você pode criar gráficos 2D das projeções das coordenadas xy, yz e zx em painéis separados.

Exercício 4 - Correções relativísticas na órbita de Mercúrio

Devido a correções relativísticas, a força gravitacional entre Mercúrio e o Sol possui uma pequena modificação em relação à força gravitacional clássica, sendo descrita pela expressão:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{GM_sM_m}{r^3}\left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)\vec{\mathbf{r}},$$

onde:

- $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ é a constante gravitacional;
- $M_s = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ é a massa do Sol;
- $M_m = 3.285 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$ é a massa de Mercúrio;
- $\alpha = 0.010 R_T^2$, com $R_T = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ representando a distância média entre o Sol e a Terra.

Tarefa: Calcule a órbita de Mercúrio ao redor do Sol, considerando o Sol fixo na origem do sistema de coordenadas. Use as seguintes condições iniciais para Mercúrio:

- $x_0 = 0.703120 \times 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad y_0 = 0,$
- $v_x = 0, \quad v_y = 3.8899 \times 10^4\,\mathrm{m/s}.$

Simule o movimento por um ano terrestre, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), com 2000 passos de tempo. Apresente:

- o programa desenvolvido;
- o gráfico da trajetória de Mercúrio no plano $x \times y$.

Exercício 5 - Soluções de EDOs oscilatórias

Para cada um dos problemas de valor inicial abaixo, reescreva as EDOs no formato $\frac{d\vec{\mathbf{y}}}{dt} = \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{y}}, t)$ e obtenha a solução no intervalo $[x_0, x_0+5]$. Apresente um gráfico da solução e o programa utilizado para cada item. Utilize o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) com passo $h = 0.01$.

(a) $y'' + 5y' + 6y = \sin(2x), \quad x_0 = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1.$

(b) $y''' + 4y' - 2y = \cos(x), \quad x_0 = -1, \quad y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = -1, \quad y''(x_0) = 0.$

(c) $(x+1)y^{(4)} - y'' + 3y = 0, \quad x_0 = 2, \quad y(x_0) = 2, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 1, \quad y'''(x_0) = -1.$

(d) $y^{(5)} + 2y''' + y' = \sin(3x), \quad x_0 = 0, \quad y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 1, \quad y'''(x_0) = -1, \quad y^{(4)}(x_0) = 2.$

(e) $y'' - 4y = \cos(4x), \quad x_0 = -2, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 2.$

Apêndice: Métodos de Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem

Método de Runge-Kutta de 2ª ordem (RK2):

O método de Runge-Kutta de 2ª ordem é definido pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{c}}_1 &= \Delta t \cdot \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{y}}, t), \\
\vec{\mathbf{c}}_2 &= \Delta t \cdot \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{y}} + \nu_{21}\vec{\mathbf{c}}_1, t + \nu_{21}\Delta t),
\end{aligned}$$

onde:

$$\vec{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \vec{\mathbf{y}}(t) + \alpha_1\vec{\mathbf{c}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{c}}_2.$$

Uma possível escolha para os coeficientes é:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}, \quad \nu_{21} = \frac{3}{4}.$$

—

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4):

Considere as seguintes equações para o método de Runge-Kutta de 4ª ordem:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{c}}_1 &= \Delta t \cdot \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{y}}, t), \\
\vec{\mathbf{c}}_2 &= \Delta t \cdot \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{c}}_1/2, t + \Delta t/2), \\
\vec{\mathbf{c}}_3 &= \Delta t \cdot \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{c}}_2/2, t + \Delta t/2), \\
\vec{\mathbf{c}}_4 &= \Delta t \cdot \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{c}}_3, t + \Delta t).
\end{aligned}$$

E finalmente:

$$\vec{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \vec{\mathbf{y}}(t) + \frac{1}{6}\left(\vec{\mathbf{c}}_1 + 2\vec{\mathbf{c}}_2 + 2\vec{\mathbf{c}}_3 + \vec{\mathbf{c}}_4\right).$$

Essas equações permitem maior precisão na resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, com o método RK4 sendo amplamente utilizado em problemas que exigem alta fidelidade numérica.