Lista 5 - Solução Numérica da Equação de Laplace
Física Computacional 2 - 92444 (B) - 2/2024
Prof. Matheus Paes Lima

Observações:

- Todos os exercícios desta lista devem ser resolvidos utilizando programas escritos na linguagem de programação Python 3. Recomendamos o uso do Google Colab, pois ele facilita a integração com o Google Sala de Aula.

- Após finalizar os exercícios, faça o download do arquivo no formato `.ipynb` e envie este arquivo para correção. **Atenção: listas enviadas em outros formatos não serão corrigidas.**

Exercício 1 - Gráfico de funções de duas variáveis e suas derivadas.
Para as funções $f(x, y)$ abaixo, faça gráficos das superfícies no domínio $x \in [-5, 5]$, $y \in [-5, 5]$ utilizando um grid uniforme com 100 subdivisões em cada direção (x e y). Além disso, determine numericamente a primeira derivada em relação a x e faça seu gráfico. A figura abaixo mostra um exemplo para o item (a).

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

(b) $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$;

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

(d) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$;

(e) $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$.

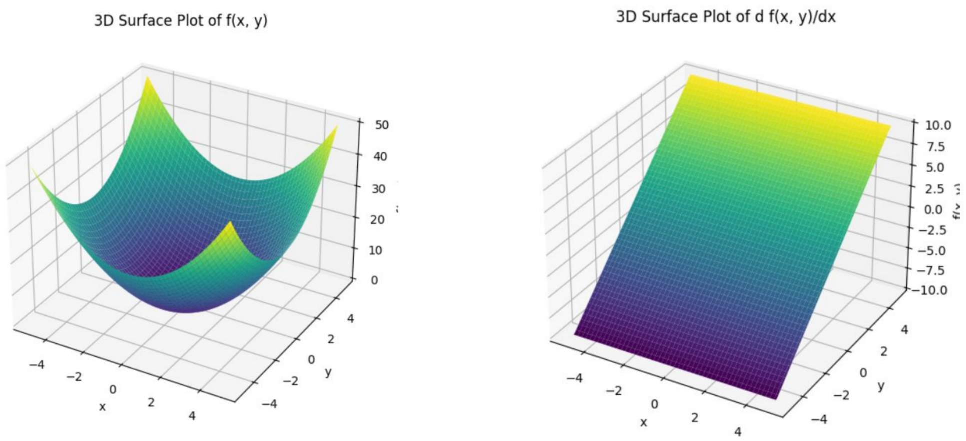


Figura 1: Gráficos da função e sua priemira derivada em relação a x para o item (a)

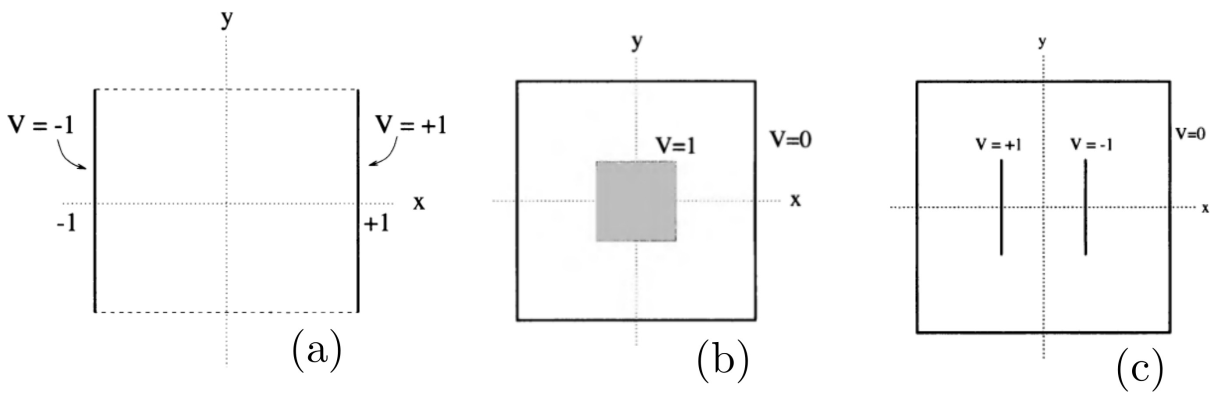
Exercício 2 - Equação de Laplace 2D
Considerando os métodos discutidos em sala de aula, escreva um programa para obter a solução numérica da equação de Laplace 2D com simetria retangular nas condições apresentadas abaixo em (a), (b) e (c). Para todos os casos, utilize os parâmetros:

- Número de pontos no grid: $N_x = N_y = 100$;
- Comprimento do domínio: $L_x = L_y = 1$;
- Critério de convergência: $\delta = 10^{-6}$.

(a) Utilize condições periódicas de contorno na direção y ($y = 0$ e $y = L_y$) e condições de Dirichlet homogêneas na direção x ($x = 0$ e $x = L_x$).

(b) Considere um quadrado interno com 10×10 pontos do grid, centrado no domínio maior. O quadrado interno possui condições de Dirichlet fixas com valor $V = 1$, enquanto as bordas externas ($x = 0, x = L_x, y = 0, y = L_y$) possuem condições de Dirichlet homogêneas ($V = 0$).

(c) Considere duas linhas internas que representam condições de Dirichlet com valores fixos de $V = 1$: uma localizada em $i = 30$ no intervalo $30 < j < 70$, e outra em $i = 70$ no intervalo $30 < j < 70$. As bordas externas ($x = 0, x = L_x, y = 0, y = L_y$) possuem condições de Dirichlet homogêneas ($V = 0$).



Exercício 3: Solução da Equação de Laplace em Coordenadas Polares

Coordenadas polares utilizam o raio r e o ângulo polar θ para descrever o plano cartesiano através das relações:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Essas relações são úteis para resolver problemas com simetria cilíndrica ou polar, como em cilindros e círculos.

No caso da equação de Laplace, o potencial V pode ser escrito como uma função de r e θ:

$$V \equiv V(r, \theta).$$

O laplaciano ∇^2 em coordenadas polares é dado por:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Utilizando o método recursivo, determine numericamente a solução da equação de Laplace em uma região circular do espaço compreendida entre os raios r_{min} e r_{max}, como

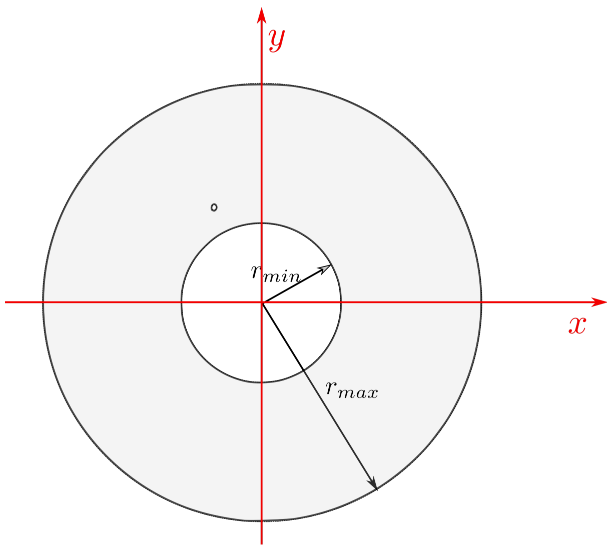


Figura 2: Representação de uma região circular no espaço definida entre r_{min} e r_{max}.

na figura 2. Para tal, faça a discretização uniforme das coordenadas radiais e angulares, conforme as relações:

$$r_i = r_{min} + i\Delta_r, \tag{1}$$
$$\theta_j = j\Delta_\theta, \tag{2}$$

onde i e j são inteiros nos intervalos $[1, N_r]$ e $[1, N_\theta]$, respectivamente, e N_r e N_θ representam o número de pontos usados para discretizar as coordenadas r e θ. Além disso, $\Delta_r = (r_{max} - r_{min})/(N_r - 1)$ e $\Delta_\theta = 2\pi/(N_\theta - 1)$. As aproximações para as derivadas de primeira e segunda ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &\approx \frac{V(i+1,j) - V(i-1,j)}{2\Delta_r}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &\approx \frac{V(i+1,j) - 2V(i,j) + V(i-1,j)}{\Delta_r^2}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &\approx \frac{V(i,j+1) - 2V(i,j) + V(i,j-1)}{\Delta_\theta^2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

(a) Faça um programa para calcular numericamente a solução da equação de Laplace em coordenadas polares. Teste seu programa com as condições de contorno $V(r_{min}, \theta) = 1$ e $V(r_{max}, \theta) = 5$, $\forall\theta$, onde $r_{min} = 1$, $r_{max} = 5$, $N_r = N_\theta = 100$. Envie o gráfico obtido.
(b) Faça gráficos para a solução numérica da equação de Laplace com as condições de contorno:

$$V(r_{min}, \theta) = 0, \quad V(r_{max}, \theta) = \cos(m\theta), \quad \forall\theta,$$

para $m = 1, 2, 7$, $r_{min} = 1$, $r_{max} = 5$.