

Wissenschaftliche Dokumentation

Bestimmung der Ersatzparameter eines Dreileiterkabels mittels COMSOL

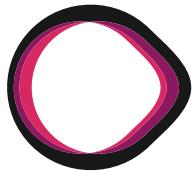
Laurens Perseus, Gian Marco Näf
Studiengang Elektrotechnik
Modul: Angewandter Elektromagnetismus

20. Dezember 2025

Inhaltsverzeichnis

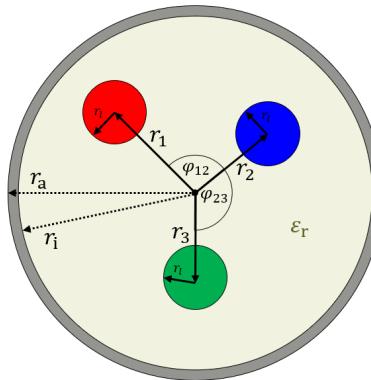
1 Einleitung	4
2 Geometriemodell	5
3 Parametervariation der magnetischen Energie	6
4 Aufgabe 1: Mesh-Studie	7
5 Aufgabe 2: Magneto-quasistatische Simulation	9
6 Aufgabe 3: Elektrostatische Simulation	11
7 Aufgabe 4: Pi-Ersatzschaltbild	13
8 Fazit	14

Aufgabenstellung



7. Bestimmung der Ersatzparameter eines Kabels

Skizze



Erklärung Das dynamische Verhalten von elektrischen Leistungskomponenten, z.B. Transformatoren, ändert sich mit dem Anschliessen eines Kabels. Durch Bestimmung der Ersatzinduktivitäten, Widerstände und Kapazitäten ist es möglich, das komplette System als Ganzes auf das dynamische Verhalten zu testen. Erstelle dazu ein 2D - Modell eines Kabels in COMSOL mit folgenden Angaben:

Abschirmung: $r_a = 5\text{cm}$, $r_i = 4.5\text{cm}$, Aluminium

3 Leiter: $r_l = 1\text{cm}$, Kupfer

Isolierstoff: $\varepsilon_r = 4$

Geometrie: $r_1 = 2.5\text{cm}$, $r_2 = 2.3\text{cm}$, $r_3 = 2.1\text{cm}$, $\varphi_{12} = 55^\circ$, $\varphi_{23} = 61^\circ$

Länge Modell: $L = 1\text{m}$

Aufgabe 1) Erstelle eine Mesh-Studie. Verfeinere das Netz und werte die Veränderung der magnetischen Energie aus.

Aufgabe 2) Berechne mittels magneto - quasistatischer Simulation die Eigeninduktivität und magnetischen Kopplungen der Leiter bei $f = 50$ Hz inkl. den ohmschen Widerständen (Isolation verlustfrei).

Aufgabe 3) Berechne mittels elektrostatischer Simulation die kapazitiven Kopplungen der Leiter zueinander und gegen Erde (Schirm).

Aufgabe 4) Erstelle das Ersatzschaltbild (Pi-Ersatzschaltbild) dieser Leitung, welches alle vorher berechneten Parameter berücksichtigt.

1 Einleitung

Die elektromagnetische Charakterisierung eines mehradrigen Kabels erfordert die Bestimmung von Induktivitäten, Widerständen und Kapazitäten über geeignete Maxwell-basierte Modelle. Die theoretischen Grundlagen folgen der klassischen Elektrodynamik nach Jackson [1], Griffiths [2] und Sadiku [3].

Alle numerischen Berechnungen werden in COMSOL Multiphysics durchgeführt, entsprechend den Dokumentationen in [4].

Modellparameter:

- Abschirmung: $r_a = 5 \text{ mm}$, $r_i = 4.5 \text{ mm}$
- Leiter: Radius $r_l = 1 \text{ mm}$
- Dielektrikum: relative Permittivität $\varepsilon_r = 4$
- Leiterpositionen: $r_1 = 2.5 \text{ mm}$, $r_2 = 2.3 \text{ mm}$, $r_3 = 2.1 \text{ mm}$

2 Geometriemodell

Das Modell wurde als 2D-Querschnitt aufgebaut. Der Innenraum ist vollständig mit einem homogenen Dielektrikum gefüllt. Eine äußere Luftdomäne wurde hinzugefügt, um die Feldabnahme korrekt abzubilden. Gemäß [4] wird empfohlen, die Luftdomäne auf mindestens das Fünffache des Außenradius zu setzen.

Zusätzlich wurde die maximale Elementskalierung (*maximum element size*) auf den dimensionslosen Wert *0.2* festgelegt, um eine ausreichende Feldauflösung an den Leitern zu gewährleisten.

Der Radius der äußeren Luftdomäne wurde auf *0.01 m* gesetzt – ein optimaler Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenzeit.

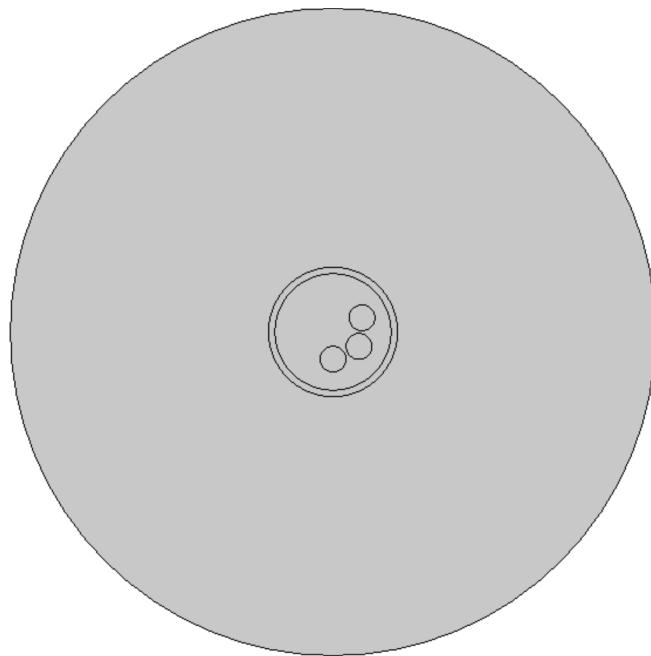


Abbildung 1: Geometrie des Dreileiterkabels.

3 Parametervariation der magnetischen Energie

Zur Untersuchung des Einflusses der geometrischen Ausdehnung des Luftbereichs auf das magnetische Verhalten des Systems wurde eine parametrische Studie durchgeführt. Dabei wurde der Luftradius r_{air} schrittweise von 0.1 m bis 2 m in Schritten von 0.05 m variiert. Für jeden Parameterwert wurde eine magneto-quasistatische Simulation durchgeführt.

Als Auswertegröße dient die im Modell gespeicherte magnetische Energie W_m , welche aus der magnetischen Energiedichte über das gesamte Rechengebiet integriert wurde. Diese Größe ist direkt mit der effektiven Induktivität des Systems verknüpft und eignet sich daher zur Beurteilung der Konvergenz sowie des Einflusses der äußeren Modellgrenzen.

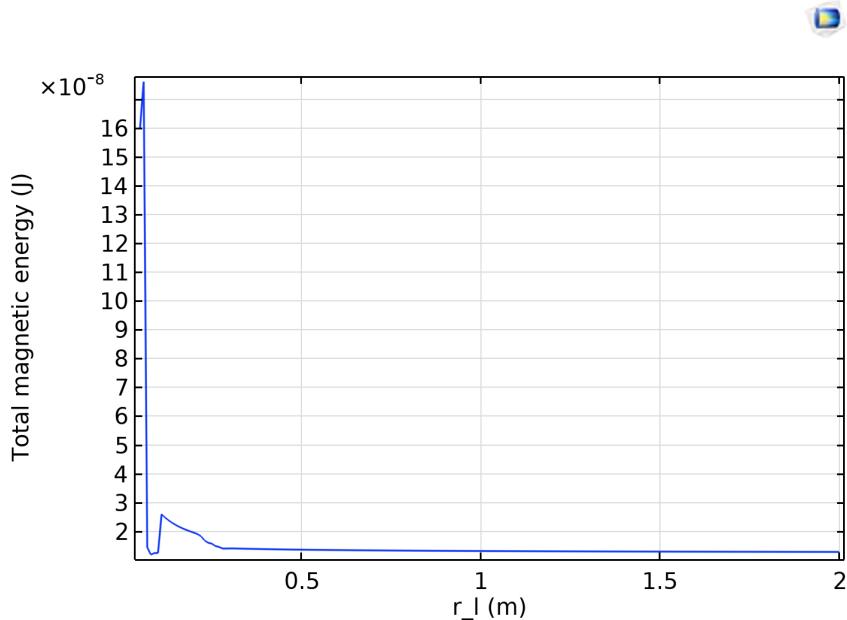


Abbildung 2: Magnetische Energie W_m in Abhängigkeit vom Luftradius r_{air} aus einer parametrischen Studie.

Abbildung 2 zeigt den Verlauf der magnetischen Energie in Abhängigkeit vom Luftradius. Mit zunehmendem Radius vergrößert sich das feldführende Volumen, wodurch sich die magnetische Energie zunächst deutlich ändert. Ab einem bestimmten Radius geht der Kurvenverlauf in ein nahezu konstantes Plateau über.

Dieses Verhalten zeigt, dass der Einfluss der äußeren Randbedingungen auf das magnetische Feld ab diesem Punkt vernachlässigbar ist. Der gewählte Luftradius kann somit als ausreichend groß betrachtet werden, um Randartefakte zu vermeiden. Gleichzeitig stellt dieser Radius einen sinnvollen Kompromiss zwischen numerischer Genauigkeit und Rechenaufwand dar.

4 Aufgabe 1: Mesh-Studie

Zur Überprüfung der Netzkonvergenz wird die magnetische Energie W_{mag} betrachtet. Diese beschreibt die im Magnetfeld gespeicherte Energie und wird aus der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} und der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} über das gesamte Rechengebiet berechnet. Da diese Größe vom resultierenden Magnetfeld abhängt, eignet sie sich gut, um den Einfluss der Netzverfeinerung zu beurteilen.

Im Rahmen der Konvergenzstudie wurde das Netz schrittweise verfeinert. Für jede Netzstufe wurde eine magneto-quasistatische Simulation durchgeführt und anschließend die magnetische Energie ausgewertet. Durch den Vergleich der Ergebnisse kann festgestellt werden, wie stark sich die Lösung bei einer weiteren Verfeinerung des Netzes noch ändert.

Der in der Abbildung dargestellte Verlauf zeigt, dass sich die magnetische Energie mit zunehmender Netzfeinheit stabilisiert. Ab einer bestimmten Netzauflösung sind die Änderungen nur noch gering. Dies deutet darauf hin, dass das Ergebnis nicht mehr wesentlich vom Netz abhängt.

Das in Abbildung 3 gezeigte Netz wurde daher als finales Netz gewählt. Es bietet eine ausreichende Genauigkeit bei gleichzeitig vertretbarem Rechenaufwand und wird für alle weiteren Simulationen verwendet.

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

wie definiert in [1].

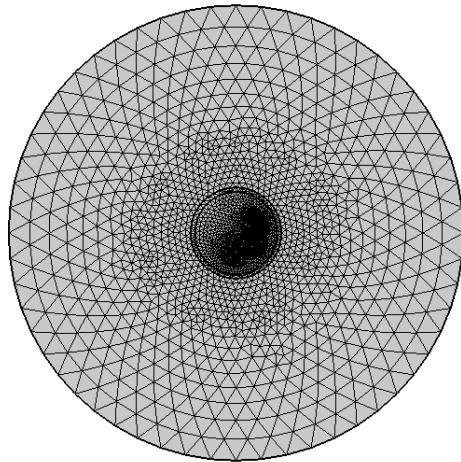


Abbildung 3: Finales Netz nach Konvergenzstudie.

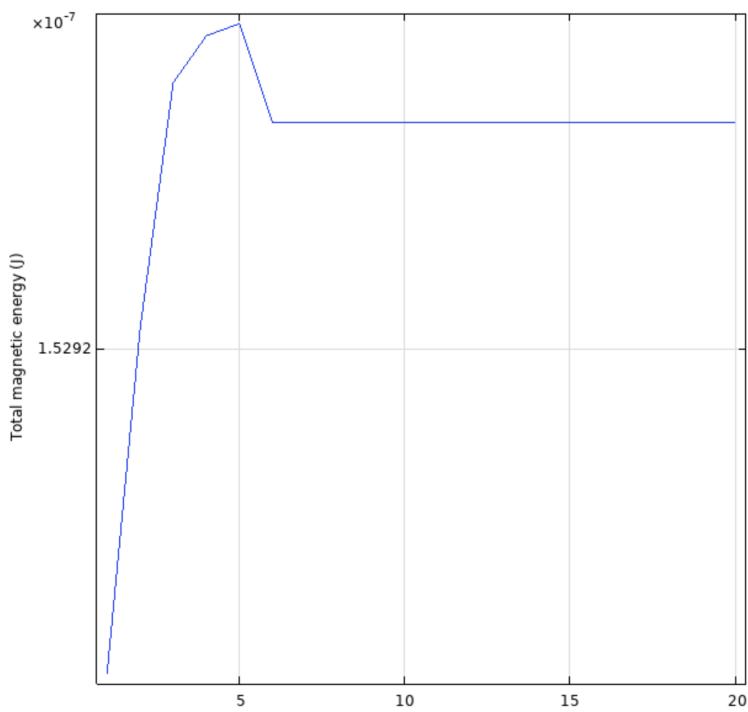


Abbildung 4: Konvergenzverlauf der magnetischen Energie.

5 Aufgabe 2: Magneto-quasistatische Simulation

Die Induktivitäten der Leiter werden über das magnetische Vektorpotential bestimmt. Dabei beschreibt L_{ij} die Selbst- bzw. Gegeninduktivität zwischen Leiter i und Leiter j . Das magnetische Vektorpotential \mathbf{A}_i wird durch den Strom im Leiter i erzeugt, während \mathbf{J}_j die Stromdichte im Leiter j darstellt. Durch die Integration über das gesamte Volumen wird die magnetische Kopplung der beiden Leiter erfasst. Die Normierung mit dem Quadrat des Stroms stellt sicher, dass die Induktivität unabhängig von der gewählten Stromstärke ist.

Die Induktivität zweier Leiter ergibt sich aus dem magnetischen Vektorpotential [3]:

$$L_{ij} = \frac{1}{I_j^2} \int \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{J}_j \, dV.$$

Die Leitungswiderstände ergeben sich über das Materialgesetz:

$$R = \rho \frac{L}{A},$$

siehe [2].

Die elektrischen Widerstände der Leiter werden aus dem Materialgesetz berechnet. Der Widerstand R hängt dabei vom spezifischen elektrischen Widerstand des Materials ρ , der Leiterlänge L sowie der Querschnittsfläche A ab. Ein längerer Leiter oder ein Material mit höherem spezifischem Widerstand führt zu einem größeren Widerstand, während ein größerer Leiterquerschnitt den Widerstand reduziert.

Ermittelte Induktivitäten und Widerstände

Die aus COMSOL extrahierten Werte lauten:

Tabelle 1: Ermittelte Induktivitäten und Widerstände.

Parameter	Wert
L_{11}	3.0933×10^{-7} H
L_{12}	3.1359×10^{-7} H
L_{13}	3.2381×10^{-7} H
R_1	6.7021×10^{-5} Ω

Aus Symmetriegründen gilt:

$$L_{12} = L_{21}, \quad L_{13} = L_{31}.$$

Weitere Einträge der Matrix ergeben sich analog durch Bestromung der anderen Leiter.

Magnetische Flussdichte

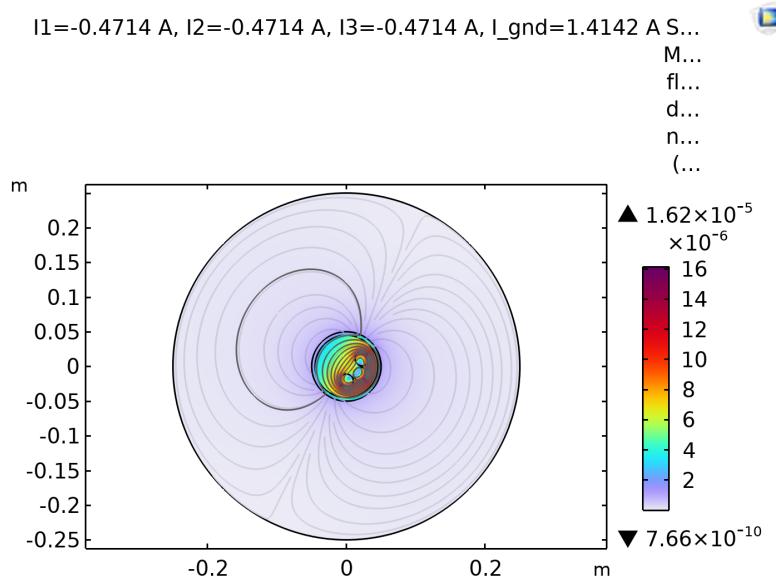


Abbildung 5: Magnetische Flussdichte $|\mathbf{B}|$ für den Gesamtfall.

Magnetische Flussdichte – alle Einzelfälle

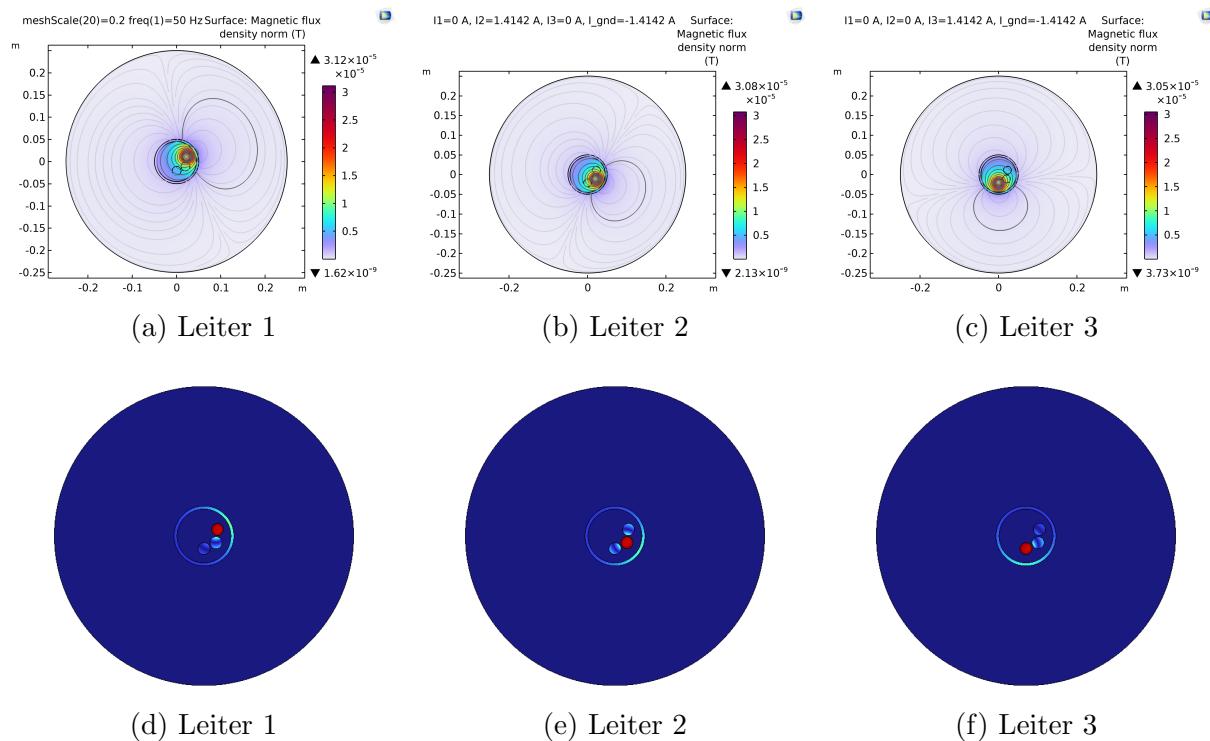


Abbildung 6: Magnetische Flussdichte $|\mathbf{B}|$ (oben) und Stromdichte $|\mathbf{J}|$ (unten) für Einzellast der drei Leiter.

6 Aufgabe 3: Elektrostatische Simulation

Die elektrostatische Feldverteilung im Modell wird durch das elektrische Skalarpotential ϕ beschrieben. Die Grundgleichung stellt sicher, dass in ladungsfreien Gebieten die Divergenz des elektrischen Flusses verschwindet. Das Materialverhalten geht dabei über die Permittivität ε in die Gleichung ein und bestimmt die Feldverteilung im Isolationsmaterial.

Aus der berechneten elektrischen Flussdichte \mathbf{D} kann die auf einem Leiter gespeicherte Ladung bestimmt werden. Dazu wird der Normalanteil der Flussdichte über die Oberfläche des jeweiligen Leiters integriert. Diese Ladung hängt von der angelegten elektrischen Spannung ab.

Durch Anlegen einer Spannung V_j an einen Leiter und Berechnung der resultierenden Ladung Q_i an allen Leitern kann die Kapazitätsmatrix bestimmt werden. Die Matrixelemente C_{ij} beschreiben dabei sowohl die Eigenkapazitäten der einzelnen Leiter als auch die kapazitiven Kopplungen zwischen den Leitern.

Die elektrostatische Grundgleichung lautet [2]:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = 0.$$

Die Ladung eines Leiters ergibt sich zu:

$$Q_i = \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA,$$

woraus die Kapazitätsmatrix folgt:

$$C_{ij} = \frac{Q_i}{V_j}.$$

Potentialfeld

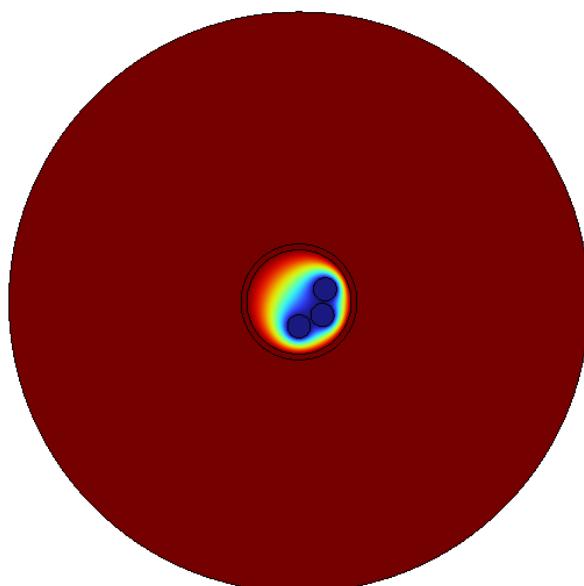


Abbildung 7: Elektrisches Potentialfeld bei $V_1 = 1 \text{ V}$.

Elektrische Feldstärke

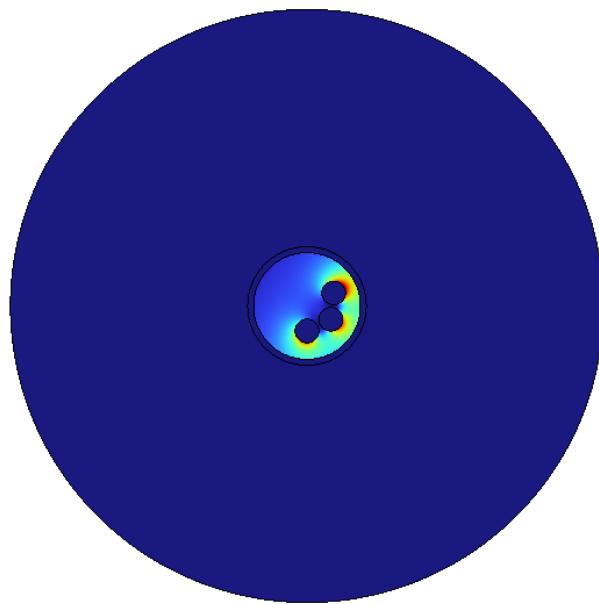


Abbildung 8: Elektrische Feldstärke $|\mathbf{E}|$.

Tabelle 2: Kapazitätsmatrix des Dreileiterkabels (in pF).

	Leiter 1	Leiter 2	Leiter 3	Schirm
Leiter 1	86.875	-46.347	-3.1250	-37.403
Leiter 2	-46.347	115.99	-44.687	-24.952
Leiter 3	-3.1250	-44.687	79.474	-31.663
Schirm	-37.403	-24.952	-31.663	94.017

7 Aufgabe 4: Pi-Ersatzschaltbild

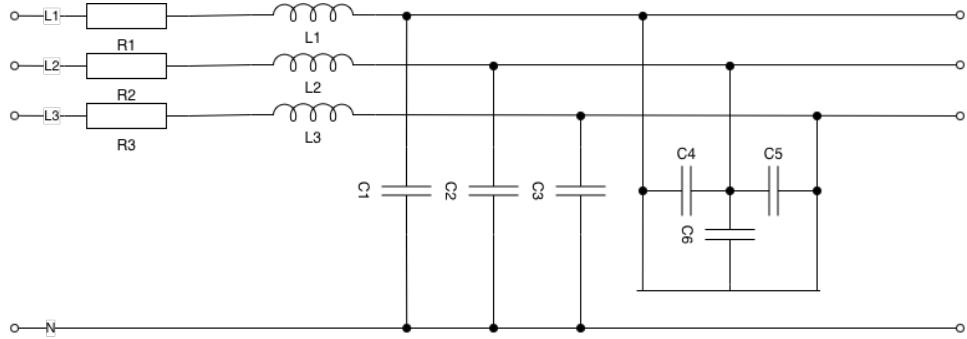


Abbildung 9: Pi-Ersatzschaltbild des Dreileiterkabels.

Tabelle 3: Parameter des Pi-Ersatzschaltbilds des Dreileiterkabels.

Parameter	Beschreibung	Wert
R_1	Widerstand Leiter 1	$6.70 \times 10^{-5} \Omega$
R_2	Widerstand Leiter 2	$6.70 \times 10^{-5} \Omega$
R_3	Widerstand Leiter 3	$6.70 \times 10^{-5} \Omega$
L_1	Eigeninduktivität Leiter 1	$3.09 \times 10^{-7} \text{ H}$
L_2	Eigeninduktivität Leiter 2	$3.09 \times 10^{-7} \text{ H}$
L_3	Eigeninduktivität Leiter 3	$3.09 \times 10^{-7} \text{ H}$
C_1	Kapazität Leiter 1 – Schirm	37.40 pF
C_2	Kapazität Leiter 2 – Schirm	24.95 pF
C_3	Kapazität Leiter 3 – Schirm	31.66 pF
C_4	Kapazität Leiter 1 – Leiter 2	46.35 pF
C_5	Kapazität Leiter 1 – Leiter 3	3.13 pF
C_6	Kapazität Leiter 2 – Leiter 3	44.69 pF

Die Tabelle fasst alle für das Pi-Ersatzschaltbild relevanten Parameter zusammen. Die Widerstände und Induktivitäten beschreiben die Längsparameter der Leiter, während die Kapazitäten die Kopplungen der Leiter untereinander sowie gegen den Schirm modellieren. Damit ist das Kabel vollständig für zeit- und frequenzabhängige Systemsimulationen beschrieben.

8 Fazit

Alle relevanten Ersatzparameter des Kabels wurden erfolgreich bestimmt. Die Simulationsergebnisse zeigen die magnetischen Kopplungen zwischen den Leitern klar auf. Durch die vollständige Bestimmung der Induktivitäts-, Kapazitäts- und Widerstandsparameter kann das Kabel realitätsnah in Gesamtsystemsimulationen eingebettet werden.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erklären wir, dass wir die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unerlaubte Hilfen erstellt haben. Alle verwendeten Quellen sind vollständig angegeben. Die Arbeit wurde zuvor nicht eingereicht.

Ort, Datum: _____

Unterschriften: _____

Literatur

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. Wiley, 1999.
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed. Cambridge University Press, 2017.
- [3] M. N. O. Sadiku, *Elements of Electromagnetics*, 6th ed. Oxford University Press, 2014.
- [4] COMSOL AB, *COMSOL Multiphysics Reference Manual*, 2023, version 6.x.