

# Wissenschaftliche Dokumentation

## Bestimmung der Ersatzparameter eines Dreileiterkabels mittels COMSOL

Laurens Perseus, Gian Marco Näf  
Studiengang Elektrotechnik  
Modul: Angewandter Elektromagnetismus

10. Dezember 2025

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Geometriemodell</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Aufgabe 1: Mesh-Studie</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Aufgabe 2: Magneto-quasistatische Simulation</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Aufgabe 3: Elektrostatische Simulation</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Aufgabe 4: Pi-Ersatzschaltbild</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>12</b>

# Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung basiert auf dem offiziellen Aufgabenblatt des Moduls Angewandter Elektromagnetismus (Prof. Dr. Smajic, OST). Gefordert sind:

- Durchführung einer Mesh-Studie und Bewertung der Konvergenz.
- Berechnung der Eigen- und Gegeninduktivitäten sowie der ohmschen Widerstände.
- Elektrostatische Simulation zur Bestimmung der Kapazitätsmatrix.
- Aufbau des Pi-Ersatzschaltbilds.

# 1 Einleitung

Die elektromagnetische Charakterisierung eines mehradrigen Kabels erfordert die Bestimmung von Induktivitäten, Widerständen und Kapazitäten über geeignete Maxwell-basierte Modelle. Die theoretischen Grundlagen folgen der klassischen Elektrodynamik nach Jackson [1], Griffiths [2] und Sadiku [3].

Alle numerischen Berechnungen werden in COMSOL Multiphysics durchgeführt, entsprechend den Dokumentationen in [4].

Modellparameter:

- Abschirmung:  $r_a = 5 \text{ mm}$ ,  $r_i = 4.5 \text{ mm}$
- Leiter: Radius  $r_l = 1 \text{ mm}$
- Dielektrikum: relative Permittivität  $\varepsilon_r = 4$
- Leiterpositionen:  $r_1 = 2.5 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 2.3 \text{ mm}$ ,  $r_3 = 2.1 \text{ mm}$

## 2 Geometriemodell

Das Modell wurde als 2D-Querschnitt aufgebaut. Der Innenraum ist vollständig mit einem homogenen Dielektrikum gefüllt. Eine äußere Luftdomäne wurde hinzugefügt, um die Feldabnahme korrekt abzubilden. Gemäß [4] wird empfohlen, die Luftdomäne auf mindestens das Fünffache des Außenradius zu setzen.

Zusätzlich wurde die maximale Elementskalierung (*maximum element size*) auf den dimensionslosen Wert  $0.2$  festgelegt, um eine ausreichende Feldauflösung an den Leitern zu gewährleisten.

Der Radius der äußeren Luftdomäne wurde auf  $0.01\text{ m}$  gesetzt – ein optimaler Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenzeit.

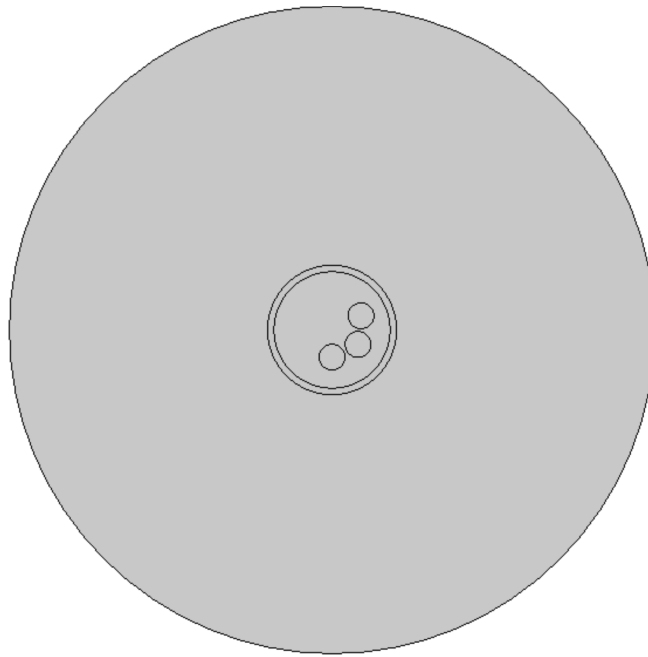


Abbildung 1: Geometrie des Dreileiterkabels.

### 3 Aufgabe 1: Mesh-Studie

Die magnetische Energie dient als Konvergenzkriterium:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

wie definiert in [1].

Das finale Netz ist in Abbildung 2 dargestellt.

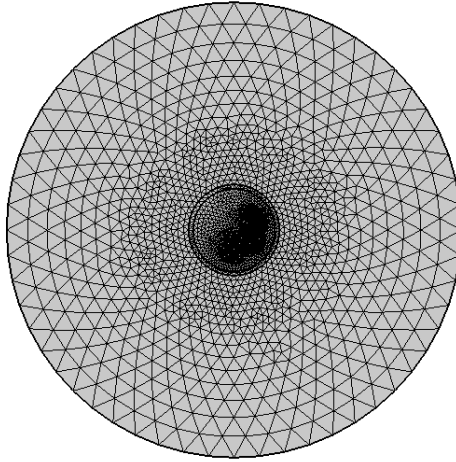


Abbildung 2: Finales Netz nach Konvergenzstudie.

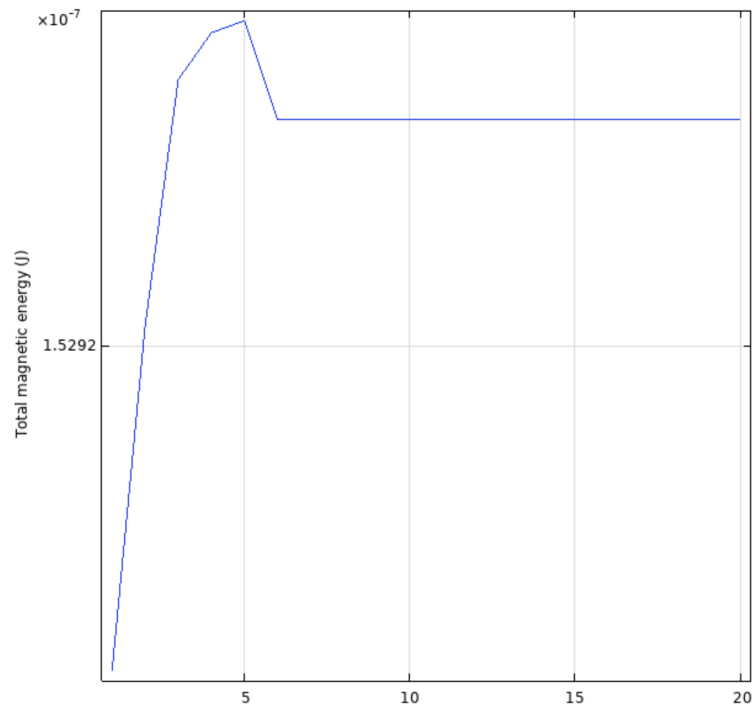


Abbildung 3: Konvergenzverlauf der magnetischen Energie.

## 4 Aufgabe 2: Magneto-quasistatische Simulation

Die Induktivität zweier Leiter ergibt sich aus dem magnetischen Vektorpotential [3]:

$$L_{ij} = \frac{1}{I_j^2} \int \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{J}_j dV.$$

Die Leitungswiderstände ergeben sich über das Materialgesetz:

$$R = \rho \frac{L}{A},$$

siehe [2].

### Ermittelte Induktivitäten und Widerstände

Die aus COMSOL extrahierten Werte lauten:

Tabelle 1: Ermittelte Induktivitäten und Widerstände.

Parameter	Wert
$L_{11}$	$3.0933 \times 10^{-7} \text{ H}$
$L_{12}$	$3.1359 \times 10^{-7} \text{ H}$
$L_{13}$	$3.2381 \times 10^{-7} \text{ H}$
$R_1$	$6.7021 \times 10^{-5} \Omega$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$L_{12} = L_{21}, \quad L_{13} = L_{31}.$$

Weitere Einträge der Matrix ergeben sich analog durch Bestromung der anderen Leiter.

## Magnetische Flussdichte

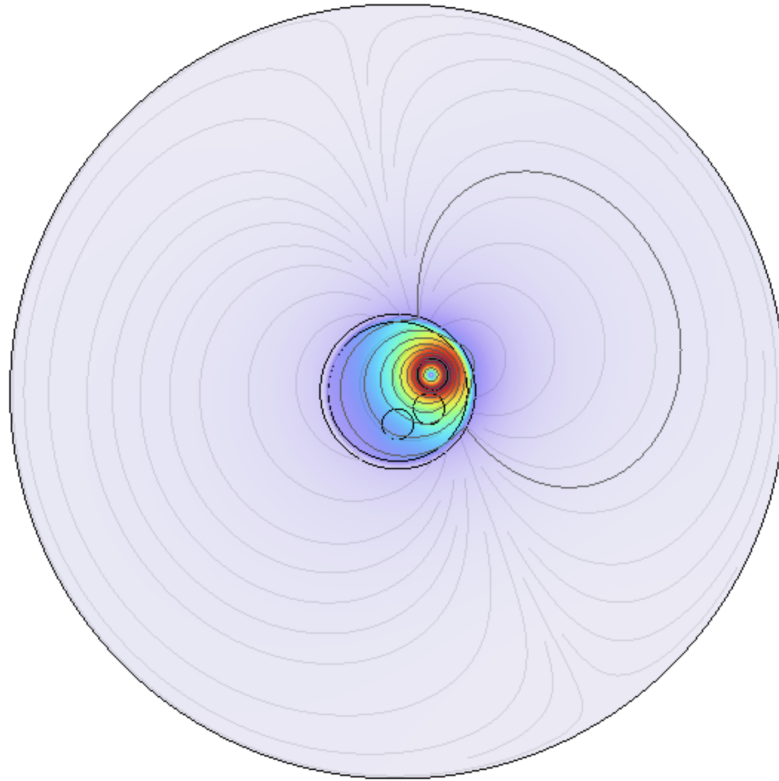


Abbildung 4: Magnetische Flussdichte  $|\mathbf{B}|$  für den Gesamtfall.

## Magnetische Flussdichte – alle Einzelfälle

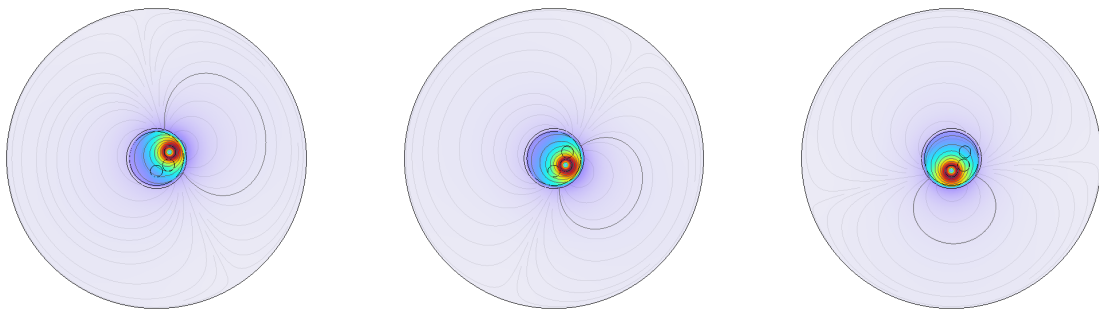


Abbildung 5: B-Feld  $|\mathbf{B}|$  für Bestromung von Leiter 1, 2 und 3.

## Stromdichte – alle Einzelfälle

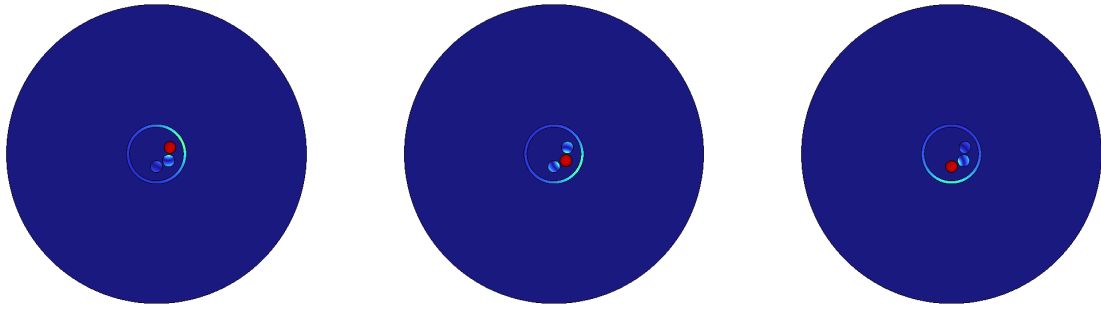


Abbildung 6: Stromdichte  $|\mathbf{J}|$  für Bestromung der drei Leiter.



## 5 Aufgabe 3: Elektrostatistische Simulation

Die elektrostatische Grundgleichung lautet [2]:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = 0.$$

Die Ladung eines Leiters ergibt sich zu:

$$Q_i = \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA,$$

woraus die Kapazitätsmatrix folgt:

$$C_{ij} = \frac{Q_i}{V_j}.$$

### Potentialfeld

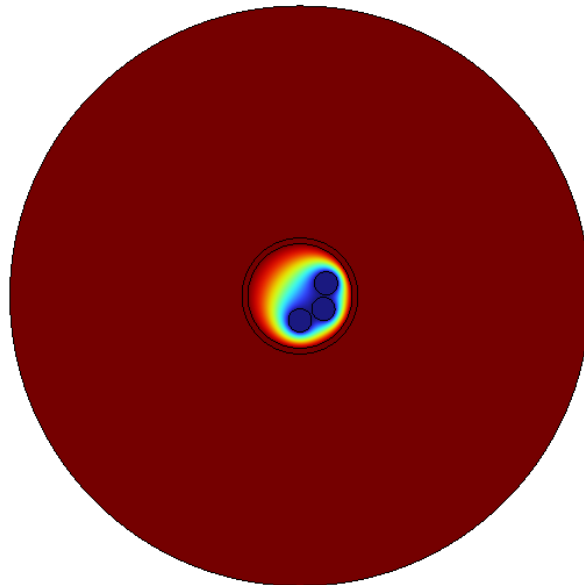


Abbildung 7: Elektrisches Potentialfeld bei  $V_1 = 1$  V.

## Elektrische Feldstärke

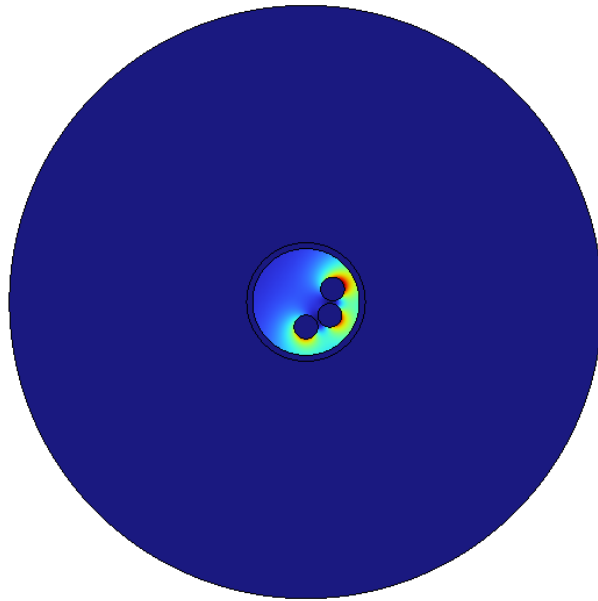


Abbildung 8: Elektrische Feldstärke  $|\mathbf{E}|$ .

Tabelle 2: Kapazitätsmatrix des Dreileiterkabels (in pF).

	Leiter 1	Leiter 2	Leiter 3	Schirm
Leiter 1	86.875	-46.347	-3.1250	-37.403
Leiter 2	-46.347	115.99	-44.687	-24.952
Leiter 3	-3.1250	-44.687	79.474	-31.663
Schirm	-37.403	-24.952	-31.663	94.017

## 6 Aufgabe 4: Pi-Ersatzschaltbild

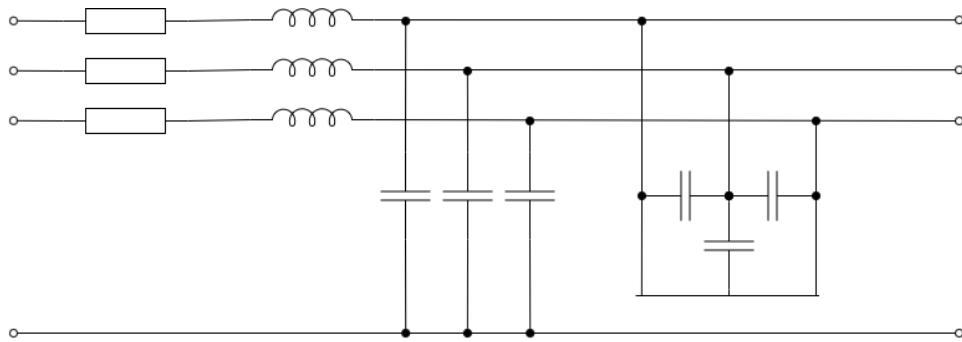


Abbildung 9: Pi-Ersatzschaltbild des Dreileiterkabels.

## 7 Fazit

Alle relevanten Ersatzparameter des Kabels wurden erfolgreich bestimmt. Die Simulationsergebnisse zeigen die magnetischen Kopplungen zwischen den Leitern klar auf. Durch die vollständige Bestimmung der Induktivitäts-, Kapazitäts- und Widerstandsparameter kann das Kabel realitätsnah in Gesamtsystemsimulationen eingebettet werden.

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erklären wir, dass wir die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unerlaubte Hilfen erstellt haben. Alle verwendeten Quellen sind vollständig angegeben. Die Arbeit wurde zuvor nicht eingereicht.

Ort, Datum: \_\_\_\_\_

Unterschriften: \_\_\_\_\_

## Literatur

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. Wiley, 1999.
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed. Cambridge University Press, 2017.
- [3] M. N. O. Sadiku, *Elements of Electromagnetics*, 6th ed. Oxford University Press, 2014.
- [4] COMSOL AB, *COMSOL Multiphysics Reference Manual*, 2023, version 6.x.