پاسخ‌نامه تشریحی آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد ریاضی

سوال ۱

دامنه توابع رادیکال با فرجه فرد، کل اعداد حقیقی و با فرجه زوج، اعداد حقیقی نامنفی است. در نتیجه کافی است داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{۱۲}{x^۲-۲x} \geq ۰ \\ -۱+\sqrt[۳]{-۱+\sqrt{\dfrac{۱۲}{x^۲-۲x}}} \geq ۰ \end{cases}$$

که با توجه به هر دو نامساوی داریم:

$$\frac{۱۲}{x^۲-۲x} \geq ۴ \Leftrightarrow \frac{۳-x^۲+۲x}{x^۲-۲x} \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{(۳-x)(x+۱)}{x(x-۲)} \geq ۰$$

پس در نتیجه دامنه تابع، مجموعه $[-۱,۰) \cup (۲,۳]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

سوال ۲

فرض می‌کنیم جمله اول دنباله a و قدر نسبت دنباله d باشد در این‌صورت جمله k ام برابر است با $a+(k-۱)d$ عدد a را یک عدد گنگ و d را گویا در نظر می‌گیریم. واضح است که همه جملات دنباله گنگ می‌شوند پس در این حالت $n=۰$ است. سپس a را یک عدد گویا و d را عددی گنگ فرض می‌کنیم. برای هر $k>۱$ مقدار $(k-۱)d$ عددی گنگ است پس $a+(k-۱)d$ نیز گنگ است که نتیجه می‌دهد تنها جمله اول دنباله گویا است پس در این حالت $n=۱$ است. حالا فرض می‌کنیم حداقل دو عدد گویا مانند $a+(k-۱)d$ و $a+(l-۱)d$ در دنباله وجود داشته باشد. داریم

$$(k-l)d = (a+(k-۱)d)-(a+(l-۱)d) \in \mathbb{Q} \xrightarrow{k-l\in\mathbb{Q}} d \in \mathbb{Q}$$
$$\xrightarrow{k-۱\in\mathbb{Q}} (k-۱)d \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = (a+(k-۱)d)-(k-۱)d \in \mathbb{Q}$$

از آن‌جا که ثابت کردیم a,d هر دو گویا می‌شوند نتیجه می‌شود همه اعضای دنباله گویا هستند پس n فقط سه حالت ۰، ۱ و ۱۳۹۷ را می‌تواند داشته باشد.

سوال ۳

می‌دانیم

$$\overbrace{۹۹\ldots۹}^{۹۷} \times \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷} = \left(۱\overbrace{۰۰\ldots۰}^{۹۷}-۱\right) \times \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷} = \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷}\overbrace{۰۰\ldots۰}^{۹۷} - \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷}$$

$$= \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۶}۵\overbrace{۳۳\ldots۳}^{۹۶}۴$$

که مجموع ارقام عدد حاصل، برابر ۸۷۳ است.

سوال ۴

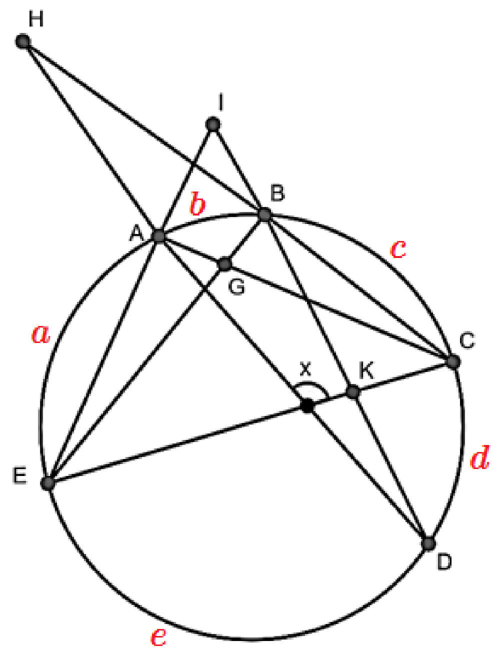
کافیست تعداد کاشی‌کاری‌های کل را از کاشی‌کاری‌های نامطلوب کم کنیم. با توجه به این که امکان ندارد که هم‌زمان هم مسیری از سمت چپ جدول به سمت راست و هم مسیری از ضلع بالای جدول به ضلع پایین آن پدید آید، تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوب دو برابر تعداد کاشی‌کاری‌هایی است که از بالا به پایین مسیری ایجاد شده‌است. برای محاسبه تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوب نیز کافیست تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوبی که به ترتیب یک مسیر، دو مسیر و سه مسیر از بالا به پایین ایجاد می‌شود را محاسبه نماییم.

$$۲^{۹} - ۲(۳ \times (۷ \times ۷) + ۳ \times ۷ + ۱) = ۱۷۴$$

سوال ۵

عدد دو رقمی $\overline{ab} = ۱۰a + b$ را در نظر می‌گیریم که در شرط سوال صدق می‌کند. طبق فرض سوال باید داشته باشیم $a|۱۰a + b$ و $b|۱۰a + b$. از آن‌جا که $a|۱۰a$ طبق قضایای بخش‌پذیری نتیجه می‌شود $a|b$ و به طور مشابه از آن‌جا که $b|b$ نتیجه می‌شود $b|۱۰a$. از رابطه $a|b$ بدست می‌آید عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری‌که $b = ka$ و با قرار دادن این تساوی در رابطه بخش‌پذیری دیگر بدست می‌آید $ka|۱۰a$ در نتیجه $k|۱۰$ می‌دانیم $b < ۱۰$ پس $ka < ۱۰$. اگر $k = ۱$ برای a، ۹ حالت وجود دارد و b نیز به طور یکتا از روی است می‌آید. اگر $k = ۲$ باید داشته باشیم $۲a < ۱۰$ پس a دو حالت دارد و در نهایت اگر $k = ۵$ باید داشته باشیم $۵a < ۱۰$ پس a تنها یک حالت دارد و پاسخ مسئله برابر است با $۹ + ۴ + ۱ = ۱۴$.

سوال ۶



مطابق شکل، کمان‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم. با توجه به فرض‌های سوال،
روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} d-b=۲۰^\circ & (۱) \\ e-b=۱۴۰^\circ & (۲) \\ b+d+e=۱۹۰^\circ & (۳) \\ a+b+d=۱۴۰^\circ & (۴) \end{cases}$$

همچنین واضح است که داریم:

$$a+b+c+d+e=۳۶۰^\circ \quad (۵)$$

برای یافتن مقدار زاویه x، باید مقدار عبارت $b+c+e$ را بدست آوریم.

از تفاضل روابط (۵) و (۴) داریم:

$$(۵)-(۴) \quad \Rightarrow \quad c+e=۲۲۰^\circ$$

همچنین روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$(۳)+(۱) \quad \Rightarrow \quad ۲d+e=۲۱۰^\circ$$
$$(۳)+(۲) \quad \Rightarrow \quad d+۲e=۳۳۰^\circ$$

سپس از مجموع این دو رابطه داریم: $d+e=۱۸۰^\circ$.

اکنون از رابطه (۳) مقدار b بدست می‌آید: $b=۱۰^\circ$. پس داریم:

$$x=\frac{b+c+e}{۲}=\frac{۲۳۰^\circ}{۲}=۱۱۵^\circ$$

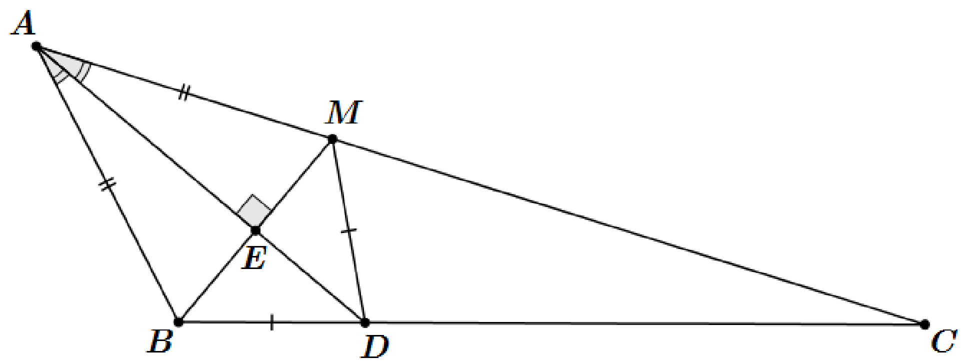
سوال ۷

به سادگی می‌توان دید که $a_۷=۷$. بنابراین ما $\binom{۶}{۳}$ حالت برای انتخاب ۳ عدد $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ داریم که این‌ها را می‌توان به دو طریق طبق شرایط سوال در جایگشت قرار داد. همچنین ۳ عدد $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$ نیز به طور یکتا مشخص شده که به دو طریق می‌توان آن‌ها را در جایگشت قرار داد. به طریق مشابه بقیه جایگاه‌های جایگشت نیز پر می‌شوند که جواب برابر است با

$$\left(\binom{۶}{۳}\times ۲\times ۲\right)^۲=۶۴۰۰$$

سوال ۸

از آنجا که نیمساز AD بر BM عمود است، در مثلث ABM، ارتفاع و نیمساز بر هم منطبق شده‌اند و در نتیجه مثلث ABM متساوی‌الساقین است و همچنین بدست می‌آید که خط AD عمودمنصف پاره‌خط BM می‌باشد.



با توجه به هم‌نهشتی مثلث‌های ABE و AME و همچنین مثلث‌های BDE و MDE، مساحت این مثلث‌ها را به ترتیب $S_۱$ و $S_۲$ می‌نامیم. چون $\frac{AM}{CM}=\frac{۱}{۲}$ است، می‌توانیم نسبت مساحت‌های زیر را بدست آوریم:

$$\frac{AM}{CM}=\frac{S_{ADM}}{S_{CDM}}=\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{۱}{۲}$$

اکنون مساحت این مثلث‌ها را بر حسب $S_۱$ و $S_۲$ بازنویسی می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$S_{CDM}=۲S_{ADM}=۲(S_۱+S_۲) \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{۲S_۱}{۲S_۱+۴S_۲}=\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad S_۱=۲S_۲$$

پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{BMD}=۲S_۲ \\ S_{ABC}=۴S_۱+۴S_۲=۱۲S_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BMD}}=۶$$

سوال ۹

با توجه به رشد سمت چپ معادله، x نمی‌تواند از -۲ کمتر و یا بیشتر مساوی ۴ شود. پس در نتیجه مجموعه اعداد $[-۲,۴)$ را بازه‌بندی می‌کنیم:

۱) $x \in [-۲,-۱) \Rightarrow (-۲)(x-۱)=-۲x$

معادله جواب ندارد.

$۲)\ x \in [-۱,۰)\ \Rightarrow (-۱)(x-۱) = -۲x\ \Rightarrow x = -۱$

با توجه به بازه x قبول است.

$۳)\ x \in [۰,۱)\ \Rightarrow (۰)(x-۱) = ۲x\ \Rightarrow x = ۰$

با توجه به بازه x قبول است.

$۴)\ x \in [۱,۲)\ \Rightarrow (۱)(x-۱) = ۲x\ \Rightarrow x = -۱$

با توجه به بازه x قبول نیست.

$۵)\ x \in [۲,۳)\ \Rightarrow (۲)(x-۱) = ۲x$

معادله جواب ندارد.

$۶)\ x \in [۳,۴)\ \Rightarrow (۳)(x-۱) = ۲x\ \Rightarrow x = ۳$

با توجه به بازه x قبول است.

پس معادله اصلی دارای سه جواب حقیقی است.

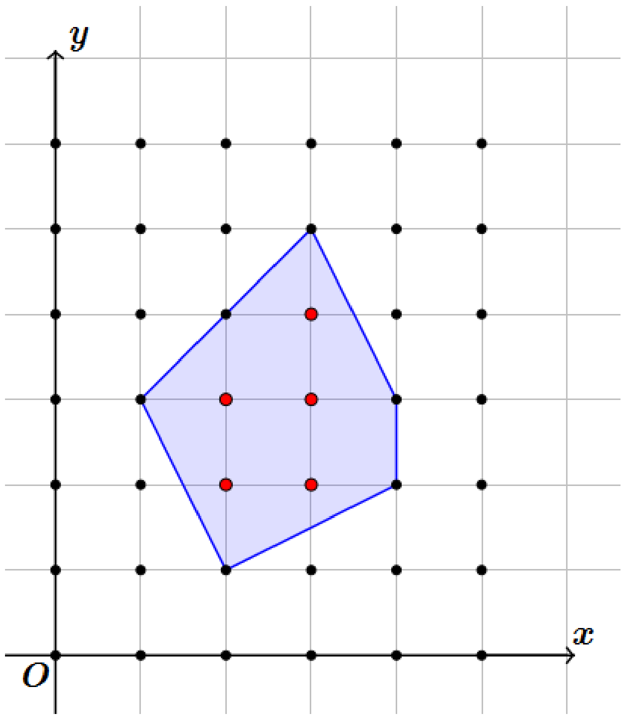
سوال ۱۰

برای $n = ۴$ می‌توانیم اعداد ۲،۴،۷ و ۹ را در نظر بگیریم که در شرایط سوال صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم ۵ عدد $a_۱ < a_۲ < a_۳ < a_۴ < a_۵$ وجود داشته باشد که اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها عددی اول باشد. می‌توانیم فرض کنیم $a_۵$ زوج است زیرا اگر همه اعداد را با ۱ جمع کنیم اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها تغییری نمی‌کند اما زوجیت $a_۵$ تغییر می‌کند. اختلاف $a_۵$ و $a_۲$ حداقل ۳ است پس $a_۲$ فرد است زیرا در غیر این‌صورت اختلاف آن‌ها باید برابر با ۲ می‌شد. به طور مشابه $a_۱$ نیز فرد است. اگر $a_۳$ زوج باشد نتیجه می‌شود $a_۵ - a_۳ = ۲$ پس بین $a_۵$ و $a_۳$ فقط یک عدد طبیعی وجود دارد و آن باید $a_۴$ باشد اما این امکان ندارد زیرا اختلاف $a_۵$ و $a_۴$ برابر با ۱ می‌شود. پس $a_۳$ نیز فرد است. حالا دقت کنید که زوجیت $a_۱$ و $a_۳$ یکسان است و مشابه قبل می‌توانیم به تناقض برسیم پس $n < ۵$ و پاسخ مسئله $n = ۴$ است.

سوال ۱۱

چندضلعی که رئوس آن با مختصات صحیح باشند را «*چندضلعی شبکه‌ای*» می‌نامیم.

تعداد نقاط با مختصات صحیح روی مرز (محیط) یک چندضلعی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی آن را با i نشان می‌دهیم.



طبق **قضیه پیک**، مساحت چندضلعی شبکه‌ای (محدب یا مقعر) از رابطه $S = i + \frac{b}{۲} - ۱$ بدست می‌آید.

در نتیجه با توجه به اینکه حداقل ۵ نقطه روی مرز این چندضلعی شبکه‌ای قرار دارد و مساحت آن نیز برابر ۷ است، داریم:

$$b \geq ۵ \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{۲} - ۱ \geq \frac{۳}{۲}$$

پس بدست می‌آید که

$$i = S - (\frac{b}{۲} - ۱) \leq ۷ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱۱}{۲}$$

با توجه به فرض‌های مساله، حداکثر ۵ نقطه درون این شکل قرار دارد.

برای اطمینان از این پاسخ، باید مثالی ارائه کنیم که در شکل مقابل، دیده می‌شود.

سوال ۱۲

می‌توانیم این اعداد رابه ۳۸۳ دسته مانند زیر تقسیم کنیم.

$$\{۷۶۵\}, \{۱,۷۶۴\}, \{۲,۷۶۳\}, \ldots, \{۳۸۲,۳۸۳\}$$

بدیهی است که از یک دسته بیش از یک عضو نمی‌توان انتخاب کرد. چرا که مجموع آن‌ها برابر ۷۶۵ خواهد شد. همچنین تعدادی دسته هستند که از آن‌ها هیچ عضوی نمی‌توان برداشت چرا که هر دو عضو آن‌ها مربع کامل هستند. دسته ای مانند $\{a^۲, b^۲\}$ را در نظر بگیرید که هر دو عضو آن مربع کامل باشد. داریم:

$$\begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۷۶۵ \\ ۳|a^۲ + b^۲ \end{cases} \to ۳|a\,, ۳|b$$

فرض کنید که $a'^۲ = \frac{a^۲}{۹}$ و $b'^۲ = \frac{b^۲}{۹}$. آنگاه خواهیم داشت که $a'^۲ + b'^۲ = ۸۵$. پس مقدار $(a'^۲, b'^۲)$ تنها دو حالت مختلف خواهد داشت. پس تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$۳۸۳ - ۲ = ۳۸۱$$

سوال ۱۳

ثابت می‌کنیم برای هر $a \leq \frac{۱}{۲}$ که $a \neq 0$، تابع f یک‌به‌یک است و برای سایر مقادیر a یک‌به‌یک نیست.

فرض کنید تابع f یک‌به‌یک نباشد. بنابراین x و y وجود دارند که $f(x)=f(y)$ و $x\neq y$. اکنون دو حالت می‌تواند رخ دهد:

حالت اول: $[x]=[y]$. در این حالت نتیجه می‌شود $ax=ay$ و چون $x\neq y$ پس $a=۰$.

حالت دوم: $[x]>[y]$. در این حالت $ax-ay=[x]-[y]$. از طرفی از آنجا که $x<[x]+۱$ و $y\geq[y]$ داریم $x-y<[x]-[y]+۱$ پس

$$a=\frac{[x]-[y]}{x-y}>\frac{[x]-[y]}{[x]-[y]+۱}=۱-\frac{۱}{[x]-[y]+۱}$$

حال چون $[x]$ و $[y]$ اعداد صحیح هستند پس $[x]-[y]\geq 1$ که از آن نتیجه می‌شود $a>\frac{۱}{۲}$.

پس اگر $a\leq\frac{۱}{۲}$ و $a\neq ۰$ هیچ یک از دو حالت فوق نمی‌تواند رخ دهد و در نتیجه تابع f یک‌به‌یک است.

حالت سوم: $[x]<[y]$. این حالت کاملاً مشابه حالت دوم است.

حال ثابت می‌کنیم برای سایر مقادیر a تابع f یک‌به‌یک نیست. در این قسمت نیز سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $a=۰$. در این حالت $f(x)=-[x]$ که به وضوح یک‌به‌یک نیست.

حالت دوم: $\frac{۱}{۲}<a\leq ۱$. در این حالت داریم $f(\frac{۱}{a})=۱-[\frac{۱}{a}]=۱-۱=۰$. پس $f(\frac{۱}{a})=f(۰)$ و در نتیجه تابع یک‌به‌یک نیست.

حالت سوم: $a>۱$. در این حالت داریم $f(-\frac{۱}{a})=-۱+۱=۰=f(۰)$ و در نتیجه تابع یک‌به‌یک نیست.

بنابراین مقادیر مطلوب سؤال عبارتند از $\{-\frac{۵}{۵},-\frac{۴}{۵},-\frac{۳}{۵},-\frac{۲}{۵},-\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵}\}$ و در نتیجه جواب سؤال برابر است با ۷.

سوال ۱۴

مسئله به خاطر حالت های فراوان، مسئله ای پیچیده به نظر می آید! زیرا n می تواند تعداد ارقام فراوانی داشته باشد، هر میزان کوچک یا بزرگ باشد و ما باید همه حالت ها را تحلیل کنیم. در چنین مسائلی که حالت ها زیاد است و نمی دانیم از کجا شروع کنیم، چگونه می توانیم به فرآیند کشف و حل نزدیک شویم و مانند یک کارآگاه مسئله را مجبور سازیم تا خود، رازهایش را برایمان تدریجاً فاش کند؟!

پیشنهاد بنده همیشه یک چیز است: مثال زدن و بررسی حالات کوچک تر و ساده تر مسئله! استراتژی ای که به زعم بنده در درصد بزرگی از مسائل جواب می دهد: چه مسئله مرحله اول باشد، چه مسئله مرحله دوم و چه سؤال المپیاد جهانی!

پس بیایید مثال های ساده تر را ابتدا بررسی کنیم:

ساده ترین حالت، زمانی است که n، تک رقمی باشد. در این صورت، $S(n)=P(n)=n$ پس $S(n)+P(n)=۲n\neq n$ و در این حالت جوابی وجود ندارد.

حالت کمی پیچیده تر، زمانی است که n، دورقمی باشد. در این صورت، اگر $n=\overline{xy}$، پس:

$$S(n)+P(n)=x+y+xy \text{ و } n=۱۰x+y$$

در نتیجه رابطه $S(n)+P(n)=n$ معادل است با این رابطه:

$$xy+x+y=۱۰x+y\Leftrightarrow xy=۹x\Leftrightarrow y=۹$$

پس دقیقا اعداد به فرم $\overline{x۹}$ در بین اعداد دو رقمی جواب مسئله هستند که تعدادشان دقیقاً ۹ تا عدد است.

حال می رویم سراغ اعداد سه رقمی مثل $n=\overline{xyz}$:

$$P(n)=xyz \text{ و } S(n)=x+y+z \text{ و } n=۱۰۰x+۱۰y+z$$

پس رابطه $S(n)+P(n)=n$ به صورت زیر در می آید:

$$xyz+x+y+z=۱۰۰x+۱۰y+z\Leftrightarrow$$

$$xyz=۹۹x+۹y$$

با دقت در نتیجه به دست آمده می توان فهمید که تساوی ذکر شده ایراد دارد، چون طرف راست بیشتر از طرف چپ است! جمله مؤثر در این ادعا جمله بزرگتر است یعنی$۹۹x$. دقت کنید که خود این جمله به تنهایی از کل عبارت طرف چپ بزرگتر است؛ زیرا:

$$۹۹x>xyz\Leftrightarrow ۹۹>yz$$

و می دانیم y و z هر کدام حداکثر ۹ هستند، پس:

$$yz\leq ۹\times ۹=۸۱<۹۹$$

پس تساوی ذکر شده و در نتیجه خاصیت $S(n)+P(n)=n$ برای یک عدد سه رقمی n یک خاصیت تناقض آمیز است و جوابی ندارد، چون n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است.

آیا استدلالی مشابه برای اعداد با تعداد ارقام بیشتر کار می کند و می توان گفت رابطه مسئله برای اعداد حداقل سه رقمی، یک رابطه تناقض آمیز است، چون n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است؟! سعی می کنیم مشابه روند استدلال اعداد سه رقمی را امتحان کنیم تا ببینیم تناقض را می توان حاصل کرد یا نه! برای این کار فرض کنید $n=\overline{a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۰}$ یک عدد kرقمی طبیعی است که$k\geq ۳$. داریم:

$$n = 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

$$S(n) = a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_0 \quad \text{و} \quad P(n) = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0$$

پس رابطه $S(n)+P(n)=n$ به صورت زیر در می آید:

$$a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0 + a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_0 = 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 = (10^{k-1}-1)a_{k-1} + (10^{k-2}-1)a_{k-2} + \cdots + (10-1)a_1$$

مشابهاً به نظر می رسد که طرف راست از طرف چپ بیشتر است! حتی مانند قبل می توان گفت جمله $(10^{k-1}-1)a_{k-1}$ از طرف راست بیشتر است، زیرا:

$$a_{k-2}\cdots a_0 \leq 9\times 9\times\cdots\times 9 = 9^{k-1} < 10^{k-1}-1$$

(چون $k \geq 3$ نامساوی بالا به راحتی ثابت می شود)

پس داریم:

$$a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 < (10^{k-1}-1)a_{k-1}$$

(دقت کنید که چون عدد kرقمی است پس $a_{k-1} \neq 0$)

پس کاملاً مشابه حالت سه رقمی ثابت می شود که طرف راست از چپ بیشتر است و در نتیجه برای n حداقل سه رقمی، n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است و در تساوی مورد نظر مسئله صدق نمی کند. مشاهده نمودید که در روند طی شده راز مسئله تدریجاً افشا شد و حالا همه چیز به طور کامل ثابت شده است!

پس مسئله کلاً ۹ تا جواب دورقمی دارد و هیچ جواب متفاوتی با تعداد ارقام دیگر ندارد. در نتیجه پاسخ مسئله ۹ است.

سوال ۱۵

خط BM را امتداد دهید تا CD را در نقطهٔ E قطع کند. با توجه به این که $MD = \frac{1}{2}BC$، از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که $ED = \frac{1}{2}EC$ و $EM = \frac{1}{2}EB$. چون دایرهٔ مذکور دایرهٔ محاطی داخلی مثلث BCE است، داریم $BP = \frac{1}{2}(BC + BE - CE)$. از طرف دیگر، از فرض $MP = BC$ نتیجه می‌شود که $BP = \frac{1}{2}BE - BC$. بنابراین

$$\frac{1}{2}(BC + BE - CE) = \frac{1}{2}BE - BC$$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم $CE = 3BC$ و در نتیجه $CD = \frac{3}{2}BC$.

سوال ۱۶

از بین ۲ و۳ حداقل یک نفر دروغ‌گوست پس ۳ دروغ‌گوست. اگر ۴ راست‌گو باشد همه جز ۳ راست می‌گویند که اما ۲و۴ سازگار نیستند. پس ۴ نیز دروغ‌گوست. پس ۲ راست‌گوست. پس ۵ هم دروغ‌گوست چون اگر راستگو باشد دو راستگو حداقل داریم پس دروغ گفته است. اگر نفر اول دروغ‌گو باشد دقیقا ۱ راست‌گو داریم پس ۵ راست گفته که تناقض است. پس ۱ هم راست‌گوست. پس دقیقا ۳ دروغ‌گو و مجرم داریم.

سوال ۱۷

با توجه به اینکه $x = ۰$ جزو دامنه‌ی نمودار نیست پس گزینه ۲ صحیح نیست. از طرفی از آنجا که $x = \pi \approx ۳.۱۴$ جزو دامنه است و مقدار تابع در آن مثبت است پس گزینه‌های ۳ و ۴ نیز صحیح نیستند. از طرفی تابع X^x برای $x > ۱$ تابعی صعودی است ولی نمودار سؤال این طور نیست. پس گزینه‌ی ۱ نیز صحیح نیست و در نتیجه گزینه ۵ صحیح است.

سوال ۱۸

داریم $A\widehat{N}M = \hat{A} - ۹۰ = \hat{C}$. بنابراین دو مثلث قائم الزاویهٔ CMP و NMA متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{CM}{MP} = \frac{MN}{AM} \quad \Rightarrow \quad CM.AM = MN.MP = ۲MN^۲$$

با فرض $AO = CO = x$ و $OM = y$، خواهیم داشت $CM = x - y$ و $AM = x + y$. بنابراین

$$(x+y)(x-y) = ۲ \times MN^۲ \;\Rightarrow\; x^۲ - y^۲ = ۲MN^۲$$

از طرف دیگر طبق قضیهٔ فیثاغورث در مثلث OMN داریم $y^۲ = OM^۲ - MN^۲$. پس طبق تساوی فوق داریم

$$x^۲ = y^۲ + ۲MN^۲ = OM^۲ + MN^۲ = ۲۰^۲ + ۲۱^۲ = ۸۴۱$$

بنابراین $x = \sqrt{۸۴۱} = ۲۹$ و در نتیجه $AC = ۲x = ۵۸$.

سوال ۱۹

رابطه $a_{n+۱} = \frac{{a_n}^۲}{a_{n-۱}}$ معادل است با رابطه $a_n^۲ = a_{n-۱}a_{n+۱}$ ؛ یعنی هر جمله از دنباله، میانگین هندسی جمله قبل و بعد از خود است. این امر خود گزاره معروفی معادل با این است که دنباله، تصاعد هندسی باشد؛ زیرا رابطه را می توان تبدیل کرد به:

$$\frac{a_n}{a_{n-۱}} = \frac{a_{n+۱}}{a_n} (n \geq ۲)$$

پس کل روابط معادل است با:

$$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\frac{a_۴}{a_۳}=\dots$$

به این معنی که اگر نسبت ثابت را q بنامیم، هر جمله از حاصلضرب q در جمله قبلی دنباله به دست آید که معادل با تصاعد هندسی بودن دنباله است.

پس سوال در واقع این است که چند تصاعد هندسی نامتناهی در اعداد طبیعی وجود دارد که $a_۳ = ۵۴۰۰۰$ ؟

دنباله ما به فرم زیر است:

$$a_۱, a_۱q, a_۱q^۲, \dots$$

دقت کنید که $a_1 \in \mathbb{N}$، اما نمی توانیم در ابتدا مطمئن باشیم که $q \in \mathbb{N}$! در واقع q نسبت دو عدد طبیعی است پس می توان گفت برابر با کسری ساده شده مثل $\frac{r}{s}$ است $(r, s \in \mathbb{N}, (r, s) = ۱)$ حال توجه کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_۱q^n = a_۱\left(\frac{r}{s}\right)^n$ عددی طبیعی است؛ پس:

$$\left.\begin{matrix} s^n|ar^n \\ (s^n, r^n) = ۱ \end{matrix}\right\} \xRightarrow[\text{اقلیدس}]{} s^n|a$$

اگر $s > ۱$ آن گاه به ازای n به اندازه کافی بزرگ $s^n > a$ ، پس s^n نمی تواند a را عاد کند که تناقض است. پس $s = ۱$ و در نتیجه $q \in \mathbb{N}$. حال توجه کنید که $a_۱q^۲ = a_۳ = ۵۴۰۰۰$ پس q یک عدد طبیعی است که $q^۲|۵۴۰۰۰$ و $a_۱$ هم به صورت یکتا از روی q به دست می آید ($a_۱ = \frac{۵۴۰۰۰}{q^۲}$) و همه اعضای دنباله به طور یکتا از روی $a_۱$ و q تعیین می شوند. هم چنین توجه کنید که اگر q عدد طبیعی دلخواهی با شرط $q^۲|۵۴۰۰۰$ باشد و با توجه به رابطه ذکر شده $a_۱$ را از روی آن تعیین کنیم، آنگاه چون a_1 و q طبیعی هستند، همه اعضای دنباله ای که از روی آن ها به صورت $a_n = a_۱q^{n-۱}(n \in \mathbb{N})$ ساخته می شود، طبیعی می شود. هر دنباله به صورت یکتا از روی q تعیین می شود و هر دو دنباله ای که مقدار q برای آن ها متفاوت باشد، چون مقدار $a_۱$ هم متفاوت می شود، با هم متمایز می شوند. پس تعداد دنباله های موردنظر مسئله برابر است با تعداد اعداد طبیعی q با شرط $q^۲|۵۴۰۰۰$.

حال توجه کنید که $۵۴۰۰۰ = ۲^۴ \times ۳^۳ \times ۵^۳$؛ پس $q = ۲^\alpha \times ۳^\beta \times ۵^\gamma$ طوری که: $۲^{۲\alpha} \times ۳^{۲\beta} \times ۵^{۲\gamma}|۲^۴ \times ۳^۳ \times ۵^۳$

در نتیجه: $۰ \le \alpha \le ۲$، $۰ \le \beta \le ۱$ و $۰ \le \gamma \le ۱$. در نتیجه تعداد مقادیر ممکن برای q،

$$۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$$

است.

سوال ۲۰

به هر زیر مجموعه ناتهی $S \subseteq \{۱, \dots ,۱۳۹۷\}$ زیر مجموعه $۱۳۹۸ - S = \{۱۳۹۸ - x | x \in S\}$ را جفت می‌کنیم. (زیرمجموعه های قرینه دسته های تکی تشکیل می‌دهند و بقیه دسته های دو تایی تشکیل می‌دهند) میانگین میانگین های مجموعه‌های هر دسته برابر ۶۹۹ می‌شود. پس میانگین کل ۶۹۹ می‌شود.

سوال ۲۱

متغیرهای جدید x و y را به این صورت تعریف می‌کنیم.

$$x = a + b$$
$$y = a - b$$

اکنون می‌توانیم معادلات مسأله را به این صورت بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} x^۳ = ۲y \\ ۳y^۲ = x^۲ - y^۲ \end{cases}$$

معادله‌ی دوم نتیجه می‌دهد $x^۲ = ۴y^۲$ که از معادله‌ی اول نتیجه می‌دهد $x^۲ = x^۶$. بنابر این x سه مقدار ممکن ۰ و ۱ و ۱− را دارد و مقادیر متناظر y به ترتیب برابر است با ۰ و $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$.

بنابراین سه زوج مرتب (a, b) به دست می‌آیند: $(۰,۰)$و $(\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴})$ و $(-\frac{۳}{۴}, -\frac{۱}{۴})$.

بنابراین جواب صحیح ۳ است و گزینه‌ی ۴ صحیح است.

سوال ۲۲

در چهارضلعی $PYCZ$ دو زاویه روبرو قائمه هستند. پس این چهارضلعی محاطی است. دایرهٔ محیطی آن را $W_۱$ بنامید. به طور مشابه چهارضلعی $PXBZ$ نیز محاطی است و دایرهٔ محیطی آن را $W_۲$ بنامید. از متساوی الساقین بودن مثلث نتیجه می‌گیریم که $\hat{B} = \hat{C} = ۷۰$. بنابراین $Y\hat{Z}X = Y\hat{C}Z$. در نتیجه زاویهٔ $Y\hat{Z}X$ یک زاویهٔ ظلی برای دایرهٔ $W_۱$ است و بنابراین XZ در نقطهٔ Z بر $W_۱$ مماس است. به طور مشابه YZ در نقطهٔ Z بر $W_۲$ مماس است. حال با در نظر گرفتن کمان PZ در دو دایره نتیجه می‌گیریم $P\hat{Z}X = P\hat{Y}Z$ و $P\hat{X}Z = P\hat{Z}Y$. بنابراین دو مثلث PXZ و PZY متشابه هستند. پس خواهیم داشت

$$\frac{PX}{PZ} = \frac{PZ}{PY} \Rightarrow PZ^۲ = PX.PY = ۲ \times ۴ = ۸$$

بنابراین $PZ = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$.

سوال ۲۳

برای بررسی این مسئله، ابتدا باید شرایط مساوی شدن کد دو استاد را تحلیل کنیم.

فرض کنید دو استاد با شماره های متفاوت m و n ، کد یکسانی پیدا کنند. در این صورت $m+i$ و $n+i$ $(۱ \leq i \leq ۴)$ عامل اول مشترکی دارند مثل p_i (توجه کنید بعضی از این اعداد p_i می توانند برابر باشند.)

$$\left.\begin{matrix} p_i|m+i \\ p_i|n+i \end{matrix}\right\} \rightarrow p_i|m-n$$

پس $m-n$ مضرب $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ است. حال سؤال این جاست که حداقل چند تا از اعداد $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ متمایزند؟ برای پاسخ این سؤال ابتدا دقت کنید که امکان ندارد که همه این اعداد برابر باشند چون $m+۱$ و $m+۲$ نسبت به هم اولند و عامل اول مشترک ندارند. هم چنین اگر اعداد $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ ، فقط از دو مقدار تشکیل شده باشند، در این صورت چون هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند پس $p_۱ \neq p_۲$ و $p_۲ \neq p_۳$ پس $p_۱ = p_۳$ و به طریق مشابه $p_۲ = p_۴$؛ در نتیجه :

$$\left.\begin{matrix} p_۱|m+۱ \\ p_۱|n+۳ \end{matrix}\right\} \rightarrow p_۱|۲ \rightarrow p_۱ = ۲$$

$$\left.\begin{matrix} p_۲|m+۲ \\ p_۲|n+۴ \end{matrix}\right\} \rightarrow p_۲|۲ \rightarrow p_۲ = ۲$$

که با $p_۱ \neq p_۲$ در تضاد است. پس $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ حداقل شامل سه مقدار هستند و در نتیجه $m-n$ مضرب حداقل سه عدد اول متمایز مثل p و q و r است. پس $pqr \mid m-n$ و در نتیجه $|m-n| \geq pqr$ و چون pqr برابر با حاصلضرب سه عدد اول متمایز است، داریم:

$$pqr \geq ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$$

و در نتیجه $|m-n| \geq ۳۰$.

پس اگر فاصله هر دو شماره از اساتید کمتر از ۳۰ باشد، کد هیچ دو استادی برابر نمی شود و در نتیجه اگر دانشکده حداکثر ۳۰ استاد داشته باشد، این اتفاق می افتد.

بنابراین، ۳۰ تعداد مناسبی برای اساتید دانشکده است که خواسته مسأله را برآورده می کند؛ اما مسئله تمام نشده است! آیا ۳۰ دقیقا حداکثر مقدار ممکن است؟ اگر نشان دهیم، در صورتی که دانشکده حداقل ۳۱ استاد داشته باشد، آن گاه حتما دو استاد دانشکده وجود دارند که می توانند کد برابر انتخاب کنند، کار تمام است! دقت کنید که طبق استدلال هی قبل می دانیم فاصله شماره آن دو استاد باید حداقل ۳۰ باشد. پس تنها انتخاب ما اگر بخواهیم برای حداقل ۳۱ استاد دو کد برابر پیدا کنیم استاد شماره ۱ و ۳۱ است. اگر نشان دهیم این دو استاد می توانند کد برابر انتخاب کنند، کار تمام است. توجه کنید که استاد شماره ۱ می تواند کد ۲،۳،۴ و ۵ را انتخاب کند و اتفاقا استاد شماره ۳۱ هم می تواند چنین کدی را انتخاب کند! پس واقعاً کار تمام است و پاسخ مسئله برابر با ۳۰ است.

سوال ۲۴

برای هر b ماکزیمم و مینیمم $a^۲ - ab + b^۲$ را به ازای $۰ \le a \le ۳$ به ترتیب M_b و m_b می‌نامیم.

تابع فوق نسبت به a یک تابع درجه دوم است که ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم آن مثبت است. پس مقدار ماکزیمم آن روی هر بازه در یکی از دو انتهای بازه رخ می‌دهد و مقدار مینیمم آن به ازای همه‌ی مقادیر a در نقطه‌ی $a = \frac{b}{۲}$ رخ می‌دهد و چون $۱ \le b \le ۲$ پس این نقطه در بازه‌ی $[۰,۳]$ نیز هست. بنابراین $m_b = \frac{۳b^۲}{۴}$ و $M_b = \max\{b^۲, ۹ - ۳b + b^۲\}$ که مجدداً از آنجا که $۱ \le b \le ۲$، پس $M_b = ۹ - ۳b + b^۲$.

اکنون داریم

$$M = \max_{۱\le b\le ۲} M_b = \max_{۱\le b\le ۲}(۹ - ۳b + b^۲) = ۷$$

$$m = \min_{۱\le b\le ۲} m_b = \min_{۱\le b\le ۲} \frac{۳b^۲}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

پس $۴(M - m) = ۲۵$ و در نتیجه جواب صحیح ۲۵ است.

سوال ۲۵

هر تابع مطلوب در تناظر با یکی از کوتاهترین مسیرها از نقطه پایین چپ به بالا راست از جدول زیر است که همواره بین دو خط مورب مشخص شده بماند. (ارتفاعی که از ستون i ام به ستون $i+۱$ ام می‌رود $f(i)$ است). روی هر نقطه مجاز تعداد مسیر های ممکن رسیدن به آن نوشته شده است که به صورت بازگشتی جمع نقاط مجازی است که گام قبل می‌توانسته باشد.