باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

معاونت دانش پژوهان جوان

باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ اول

سی و چهارمین دورهٔ المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۴

صبح - ساعت: ۹:۰۰

کد دفترچه : ۱

تعداد سوالات	مدت آزمون (دقیقه)
۳۰	۲۱۰

نام : نام خانوادگی : شماره صندلی :

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگهٔ سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ‌نامه علامت بزنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامهٔ شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد برگهٔ سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمنا مشخصات خواسته شده در پایین پاسخ نامه را با مداد مشکی بنویسید.

۴. برگهٔ پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به‌علاوه خوانا و پر رنگ بنویسید.

۵. پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ نادرست به هر سؤال یک نمره منفی دارد.

۶. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

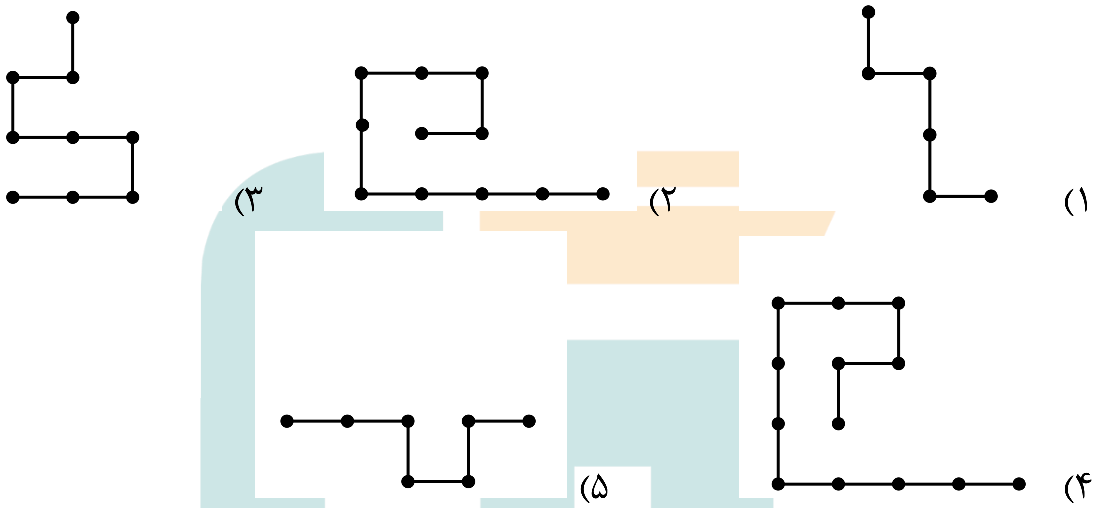
۷. شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستان از بین دانش‌آموزان پایهٔ دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

۸. داوطلبان نمی‌توانند دفترچهٔ سؤالات را با خود ببرند .(دفترچهٔ‌سؤالات باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.)

۹. وبگاه کمیته علمی المپیادریاضی ایران www.mathysc.ir است.

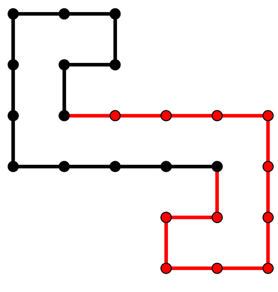
سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱. با کنار هم قرار دادن دو نسخهٔ مشابه از کدام نوع سیم، می‌توان یک چندضلعی بسته ساخت که خودش را قطع نکند و همهٔ اضلاعش افقی و یا عمودی باشد؟



راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

با توجه به شکل زیر می‌توان با استفاده از دو نسخهٔ مشابه از سیم گزینهٔ ۴، یک چندضلعی بستهٔ غیرمتقاطع ساخت:



به سادگی می‌توان دید که این کار برای دیگر گزینه‌ها غیرممکن است.

۲. در مثلث ABC زاویهٔ $\angle BAC = 60^\circ$ است. نقطهٔ E درون ضلع AC و نقطهٔ D روی امتداد ضلع BC از این مثلث به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که C بین B و D قرار دارد و به علاوه

$AB = DE$. اگر $\angle DEC = ۳۰^\circ$ باشد، نسبت $\frac{BC}{CD}$ چند است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۵) $\sqrt{۳}$

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

در مثلث‌های ABC و CDE قانون سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}, \tag{۱}$$

$$\frac{DE}{\sin \angle ACD} = \frac{CD}{\sin \angle CED}. \tag{۲}$$

از آن‌جا که $\angle ACD = ۱۸۰^\circ - \angle ACB$، پس $\sin \angle ACB = \sin \angle ACD$ و از طرفی $AB = DE$. پس طرف‌های چپ دو عبارت (۱) و (۲) با هم برابرند. پس

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{CD}{\sin \angle CED},$$

و در نتیجه

$$\frac{BC}{CD} = \frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}.$$

۳. اعداد حقیقی a، b، c و d در تساوی‌های $ab = ۲$، $b + c = ۳$، $cd = ۴$ و $d + a = ۵$ صدق می‌کنند. چند مقدار ممکن برای a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

با استفاده از تساوی‌های دوم و چهارم می‌توانیم c و d را بر حسب a و b بنویسیم: $c = ۳ - b$ و $d = ۵ - a$. با جایگذاری این روابط در دو معادلهٔ دیگر داریم:

$$ab = ۲, \qquad (۳ - b)(۵ - a) = ۴ \Longrightarrow ۱۵ - (۳a + ۵b) + ab = ۴.$$

با جایگذاری مقدار ab در رابطهٔ دوم به دو رابطهٔ معادل زیر می‌رسیم:

$$ab = ۲, \quad ۳a + ۵b = ۱۳ \iff b = \frac{۱۳}{۵} - \frac{۳a}{۵} \implies (\frac{۱۳}{۵} - \frac{۳a}{۵})a = ۲ \iff ۳a^۲ - ۱۳a + ۱۰ = ۰.$$

در نتیجه a ریشهٔ چندجمله‌ای $۳x^۲ - ۱۳x + ۱۰$ است. دلتای این چندجمله‌ای برابر با ۴۹ و مثبت است، پس دو ریشهٔ متمایز $x_۱, x_۲$ دارد. حال مقادیر ممکن برای a برابر با $x_۱$ و $x_۲$ است و در نتیجه دو مقدار ممکن برای a وجود دارد.

۴. سه جفت پیچ و مهرهٔ کوچک، متوسط و بزرگ داریم که نمی‌دانیم کدام پیچ برای کدام مهره است. هر بار می‌توانیم یک پیچ و یک مهره را با هم امتحان کنیم. کم‌ترین تعداد امتحان‌های مورد نیاز برای این که در هر صورت مهرهٔ نظیر هر پیچ را بیابیم، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

روشی ارائه می‌دهیم که با حداکثر سه بار امتحان کردن می‌توان مهرهٔ نظیر هر پیچ را یافت. به این صورت که ابتدا یکی از مهره‌ها را بر می‌داریم و آن را با دو تا از پیچ‌ها امتحان می‌کنیم. حال یا این مهره نظیر یکی از این دو پیچ است که پیچ متناظر با آن را یافته‌ایم و یا این که متناظر با هیچ کدام از این دو پیچ نیست و بنابراین حتماً متناظر با پیچ سوم خواهد بود. پس با حداکثر دو بار امتحان کردن پیچ نظیر این مهره را یافته‌ایم. حال یکی دیگر از مهره‌ها را بر می‌داریم و آن را با یکی از دو پیچ باقی‌مانده امتحان می‌کنیم. اگر این دو نظیر هم بودند که پیچ و مهرهٔ باقی‌مانده هم متناظر با هم هستند و اگر این دو نظیر هم نبودند، این مهره با پیچ سوم متناظر است و پیچ و مهرهٔ مانده هم نظیر هم هستند. پس در هر صورت با این روش در حداکثر سه حرکت می‌توان پیچ و مهره‌ها را متناظر کرد.
از طرف دیگر ادعا می‌کنیم که با دو حرکت لزوماً نمی‌توان پیچ و مهره‌ها را متناظر کرد. اگر در این دو امتحان ما یک پیچ (به طور مشابه یک مهره) مشترک باشند، در مورد دو پیچ دیگر اطلاعاتی به دست نمی‌آوریم. اگر هم در این دو امتحان دو پیچ مختلف را با دو مهرهٔ مختلف مقایسه کنیم و برای مثال در یک امتحان مهره بزرگ‌تر و در دیگری پیچ بزرگ‌تر باشد، نمی‌توانیم مطمئن شویم که کدام مهره مربوط به کدام پیچ است. (می‌توان حالت‌های متفاوتی را مثال زد که همین نتیجه را در مقایسه کردن به دست دهند.)

۵. به یک هفته در سال «جالب» می‌گوییم اگر دوشنبهٔ آن هفته، روز دوم، دوازدهم یا بیست و دوم ماه باشد. در فصل پاییز چند هفته ممکن است جالب باشد؟

بهمن ۹۴

شنبه		۳	۱۰	۱۷	۲۴
یکشنبه		۴	۱۱	۱۸	۲۵
دوشنبه		۵	۱۲	۱۹	۲۶
سه‌شنبه		۶	۱۳	۲۰	۲۷
چهارشنبه		۷	۱۴	۲۱	۲۸
پنجشنبه	۱	۸	۱۵	۲۲	۲۹
جمعه	۲	۹	۱۶	۲۳	۳۰

۱) یک یا دو هفته
۲) یک یا سه هفته
۳) صفر یا سه هفته
۴) صفر، یک یا دو هفته
۵) در هر حالتی دقیقاً دو هفته

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

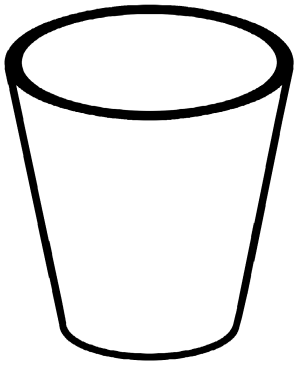
هر یک از ماه‌های پاییز ۳۰ روز دارند، بنابراین اگر روزهای پاییز را به ترتیب از ۱ تا ۹۰ شماره‌گذاری کنیم، روزهای دوم، دوازدهم و بیست‌ودوم ماه‌ها، روزهای

$$۲, ۱۲, ۲۲, ۳۲, ۴۲, ۵۲, ۶۲, ۷۲, ۸۲$$

هستند که باقیماندهٔ این اعداد بر ۷ به صورت زیر است:

$$۲, ۵, ۱, ۴, ۰, ۳, ۶, ۲, ۵$$

حال این‌که یک روز پاییز چه روزی از هفته باشد، به باقیماندهٔ شمارهٔ آن روز بر ۷ و اینکه روز اول پاییز چه روزی از هفته است، وابسته است. یعنی اگر روز اول پاییز روز n-ام هفته باشد (شنبه روز اول هفته است)، روز k-ام پاییز روز باقیماندهٔ $(n+k-1)$-ام هفته است. (اگر باقیمانده ۰ باشد، یعنی جمعه) پس روز k-ام دوشنبه است اگر باقیماندهٔ $n+k-1$ بر ۷ برابر ۳ باشد و یا به عبارت دیگر باقیماندهٔ k و $n-4$ بر ۷ یکسان باشد. حال توجه کنید که باقیماندهٔ روزهای دوم، دوازدهم و بیست‌ودوم ماه‌های پاییز هر عدد ۰ تا ۶ را یک یا ۲ بار می‌گیرد، پس بسته به این‌که باقیماندهٔ $n-4$ بر ۷ چه عددی باشد، تعداد هفته‌های جالب ۱ یا ۲ است.

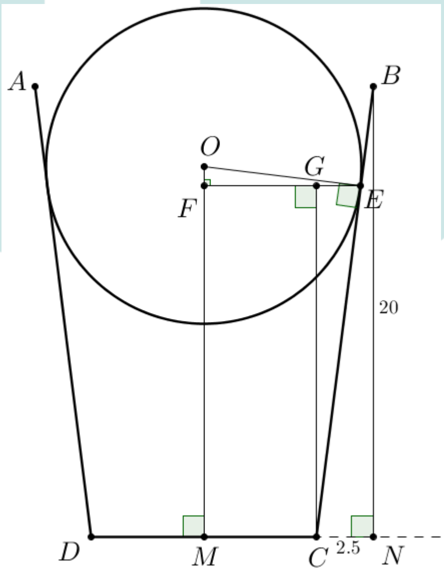


۶. گلدانی به شکل مخروطی ناقصی با ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و قطر دهانه و کف به ترتیب ۱۵ و ۱۰ سانتی‌متر روی زمین قرار گرفته است. توپی به شعاع ۷ سانتی‌متر را در این گلدان می‌اندازیم. ارتفاع بالاترین نقطهٔ توپ از سطح زمین (بر حسب سانتی‌متر) به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷ ۵) ۲۹

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

از آنجا که قطر توپ از قطر دهانهٔ گلدان کوچک‌تر است، پس حتماً توپ با سطح داخلی گلدان تماس پیدا می‌کند. شکل زیر، تصویر جانبی گلدان و توپ را نشان می‌دهد.



O را مرکز توپ و M را وسط CD بگیرید و N را پای عمود از B بر امتداد CD بگیرید. داریم

$$\sin \angle BCN = \frac{BN}{BC} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 2.5^2}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

چون چهارضلعی $OMCE$ محاطی است، داریم

$$\angle FOE = \angle BCN$$

پس

$$FE = ۷\sin\angle FOE = ۷\sin\angle BCN = ۷\frac{BN}{CN} = \frac{۵۶}{\sqrt{۶۵}}$$

و مشابهاً

$$OF = ۷\cos\angle FOE = ۷\cos\angle BCN = \frac{۷}{\sqrt{۶۵}} \qquad (۳)$$

اکنون از C بر FE عمود می‌کنیم تا آن را در G قطع کند. داریم

$$GE = FE - FG = FE - MC = \frac{۵۶}{\sqrt{۶۵} - ۵}$$

اکنون با توجه به تشابه مثلث‌های GEC و BCN داریم

$$\frac{GC}{GE} = \frac{۲۰}{۲{,}۵} = ۸$$

بنابراین

$$GC = ۸(\frac{۵۶}{\sqrt{۶۵}} - ۵) \qquad (۴)$$

پس ارتفاع بالاترین نقطهٔ توپ برابر است با

$$PM = ۷ + OM = ۷ + OF + FM = ۷ + OF + GC$$

که بنابر روابط (۳) و (۴) به دست می‌آوریم:

$$PM = ۷ + \frac{۷}{\sqrt{۶۵}} + ۸(\frac{۵۶}{\sqrt{۶۵}} - ۵) = \frac{۴۵۵}{\sqrt{۶۵}} - ۳۳$$

که حاصل آن عددی بین ۲۲ و ۲۳ است.

۷. a و b دو عدد حقیقی هستند که $a^۲ + b^۲ = ۸$. حداکثر مقدار $۲(a+b) - ab$ چند است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۸}$ ۴) ۶ ۵) ۸

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 8 + 2ab \Longrightarrow ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - 4.$$

حال اگر $a+b$ را با x نشان دهیم، داریم:

$$2(a+b) - ab = 2x - \frac{x^2}{2} + 4.$$

اما توجه کنید که $a^2 + b^2 = 8$ معادلهٔ نقاط یک دایره به شعاع $2\sqrt{2}$ به مرکز مبدأ است، بنابراین با توجه به شکل دایره، ماکزیمم و مینیمم $a+b$ روی آن برابر با $\pm 2 \times 2$ است. در نتیجه جواب مسأله برابر با ماکزیمم چندجمله‌ای $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ روی بازهٔ $[-4, 4]$ است.

اما نمودار این چندجمله‌ای، یک سهمی رو به پایین است که ماکزیمم آن در نقطهٔ ۲ رخ می‌دهد که در بازهٔ $[-4, 4]$ هم قرار دارد. (ماکزیمم چندجمله‌ای cx^2+dx+e در صورتی که c منفی باشد، در $x = -\frac{d}{2c}$ است) بنابراین برای به دست آوردن جواب، باید $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ را در $x = 2$ حساب کنیم که حاصل عدد ۶ است.

۸. در یک هتل ۱۳ اتاق وجود دارد که شمارهٔ اتاق‌ها از ۱ تا ۱۳ روی درب اتاق و روی کلید هر اتاق درج شده است، ولی کلید هر اتاق یکتا نیست و همهٔ کلیدهایی که تفاضل شمارهٔ نوشته شده روی آن‌ها و شمارهٔ اتاق بر ۳ بخش‌پذیر باشد، درب اتاق را باز می‌کنند. به چند طریق می‌توان کلیدها را به اتاق‌ها نسبت داد تا درب همهٔ اتاق‌ها قابل باز شدن باشند؟

۱) $5! \times (4!)^2$ ۲) $4! \times (5!)^2$ ۳) $\frac{5! \times (4!)^2}{3!}$ ۴) $\frac{4! \times (5!)^2}{3!}$ ۵) $13!$

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که تفاضل دو عدد درصورتی بر ۳ بخش‌پذیر است که آن‌دو باقیماندهٔ یکسانی بر ۳ داشته باشند. در میان اعداد ۱ تا ۱۳ هم ۴ عدد باقیماندهٔ ۰، ۵ عدد باقیماندهٔ ۱ و ۴ عدد باقیماندهٔ ۲ بر ۳ دارند.

درنتیجه اگر بخواهیم به هر اتاق کلیدی نسبت دهیم که در اتاق را باز کند، به اتاق‌هایی که باقیماندهٔ ۰ بر ۳ دارند، جایگشتی از کلیدهای با باقیماندهٔ ۳ را باید متناظر کنیم (!۴ حالت)، به اتاق‌های با باقیماندهٔ ۱، کلیدهای با باقیماندهٔ ۱ (!۵ حالت) و به اتاق‌های

با باقیماندهٔ ۲، کلیدهای با باقیماندهٔ ۲ (!۴ حالت). پس با توجه به مستقل بودن این انتخاب‌ها و اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر با حاصل‌ضرب این اعداد یعنی $5! \times 4!^2$ است.

۹. مقدار سینوس زاویهٔ 11^{100} درجه به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) -1 ۲) $-0/5$ ۳) صفر ۴) $0/5$ ۵) ۱

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

می‌دانیم که اگر $x \overset{360}{\equiv} y$، آن‌گاه $\sin x = \sin y$. اکنون داریم

$$
\begin{aligned}
11^{100} &\overset{360}{\equiv} 11 \times (11^3)^{33} = 11 \times (1331)^{33} \\
&\overset{360}{\equiv} 11 \times (251)^{33} = 11 \times 251 \times (251)^{32} \\
&= 2761 \times (63001)^{16} \overset{360}{\equiv} 240 \times 1^{16} = 240,
\end{aligned}
$$

پس

$$\sin(11^{100}) = \sin(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0/86.$$

۱۰. در ذوزنقهٔ $ABCD$ ($AB \parallel CD$) نقطه‌های P، Q، R، S و T را به ترتیب وسط‌های AB، BC، CD، AC و BD هستند. می‌دانیم نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت مثلث PST برابر $\frac{1395}{1394}$ است. نسبت دو قاعدهٔ این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\sqrt{1394}$ ۲) $\sqrt{1395}$ ۳) ۶۹۷ ۴) ۱۳۹۵ ۵) ۲۷۸۹

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

ابتدا سعی می‌کنیم که مساحت هر کدام از دو مثلث PQR و PST را بر حسب اجزای ذوزنقهٔ $ABCD$ محاسبه کنیم. برای این منظور ارتفاع ذوزنقه را با h نمایش می‌دهیم.

در مورد مثلث PQR داریم:

$$S_{PQR} = S_{PBCR} - S_{PQB} - S_{QCR}$$

حال چون مثلث BPQ و BAC با نسبت $\frac{۱}{۲}$ متشابه هستند، $S_{BPQ} = \frac{۱}{۴}S_{BAC} = \frac{۱}{۸}AB.h$ و به طریق مشابه $S_{QRC} = \frac{۱}{۸}CD.h$. در مورد ذوزنقهٔ $PBCR$ هم داریم $S_{PBCR} = \frac{۱}{۲}(PB+CR)h = \frac{۱}{۴}(AB+CD)h$ پس:

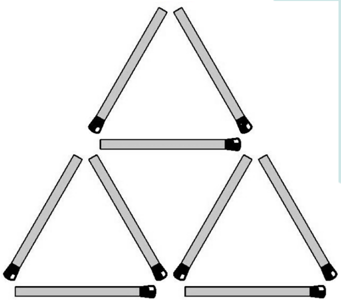
$$S_{PQR} = \frac{۱}{۴}(AB+CD)h - \frac{۱}{۸}AB.h - \frac{۱}{۸}CD.h = \frac{۱}{۸}(AB+CD)h$$

در مورد مثلث PST می‌دانیم که ارتفاع آن برابر $\frac{h}{۲}$ است و قاعدهٔ آن $ST = QS - QT$. با استفاده از قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که $QS = \frac{۱}{۲}CD$ و $QT = \frac{۱}{۲}AB$. پس:

$$S_{PST} = \frac{۱}{۲}(\frac{CD}{۲} - \frac{AB}{۲})\frac{h}{۲} = \frac{۱}{۸}(CD - AB)h$$

پس نسبت مساحت این دو مثلث برابر $\frac{CD+AB}{CD-AB}$ است که طبق فرض مسئله برابر $\frac{۱۳۹۵}{۱۳۹۴}$ شده است. این فرض با یک محاسبهٔ سرراست نتیجه می‌دهد که نسبت $\frac{CD}{AB}$ برابر ۲۷۸۹ خواهد بود.

۱۱. به چند طریق می‌توان ۳ چوب‌کبریت از ۹ چوب‌کبریت موجود در شکل روبه‌رو را حذف کرد که هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟



۱) ۶   ۲) ۹   ۳) ۱۸   ۴) ۲۷   ۵) ۸۰

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که در شکل ۵ مثلث وجود دارد: یک مثلث بزرگ که شامل چوب‌کبریت‌های دور شکل است و چهار مثلث کوچک متشکل از ۳ چوب‌کبریت که یکی در بالا، دیگری در پایین و راست، دیگری در پایین و چپ (مثلث‌های کناری) و آخری در وسط شکل قرار دارد. حال ۳ مثلث کناری هیچ چوب‌کبریت مشترکی ندارند و اگر بخواهیم بعد از حذف ۳ چوب‌کبریت مثلثی باقی نماند، باید از هر کدام از آنها یک چوب‌کبریت حذف کنیم. چوب کبریتی که برای حذف کردن از هر کدام از این مثلث‌ها انتخاب می‌کنیم، ۳ حالت دارد و بنابراین به ۲۷ طریق می‌توانیم ۳ چوب‌کبریت از شکل حذف کنیم که این مثلث‌ها باقی نمانند.

اما توجه کنید که در بعضی از این حالت‌ها مثلث بزرگ و مثلث وسط باقی می‌مانند: اگر بعد از حذف ۳ چوب‌کبریت مثلث بزرگ باقی بماند، باید هر سه چوب‌کبریت از مثلث وسط انتخاب شده باشند که فقط یک حالت دارد. همین‌طور اگر از بعد از حذف ۳ چوب‌کبریت به روش بالا، مثلث وسط باقی مانده باشد، باید از هر یک از مثلث‌های کناری چوب‌کبریتی را حذف کرده باشیم که دور شکل قرار دارد. (که برای هر کدام دقیقاً ۲ تاست) پس تعداد حالاتی که این اتفاق رخ می‌دهد، ۸ حالت است. پس باید در کل ۹ حالت را از ۲۷ حالت قبل حذف کنیم و جواب نهایی برابر ۱۸ است.

۱۲. یک مستطیل با اضلاع ۳۰ و ۴۰ را با رسم خطوطی موازی اضلاع به شبکه‌ای ۴۰×۳۰ از مربع‌های واحد تبدیل کرده‌ایم. یکی از قطرهای مستطیل اولیه را در نظر بگیرید. دایرهٔ محاطی چند تا از مربع‌های واحد شبکه‌بندی به این قطر مماس هستند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۸ ۵) ۴۰

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

فرض کنید مستطیل را به گونه‌ای در صفحه قرار داده‌ایم که رأس پایین چپ آن بر مبدأ مختصات منطبق شده، اضلاع آن موازی محورها بوده و ضلع بزرگ‌تر آن روی محور x باشد. حال معادلهٔ خط شامل قطری که مبدأ را به ضلع روبه‌رویش متصل می‌کند به صورت $y = \frac{۳۰}{۴۰}x$ است. اگر دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۲}$ (شعاع همهٔ دایره‌های محاطی برابر $\frac{۱}{۲}$ است) بر این خط مماس باشند، مرکز دایره در فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از این خط قرار دارد. یعنی مرکز همهٔ دایره‌های مماس به این قطر (با شعاع $\frac{۱}{۲}$) روی دو خط موازی با فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از این قطر قرار دارند. معادلهٔ این دو خط به صورت $y = \frac{۳}{۴}x \pm \frac{۵}{۸}$ است.

مرکز دایره‌های محیطی مربع‌های شبکه‌بندی، همان مرکز مربع‌ها هستند. به این نقطه‌ها در ادامهٔ راه‌حل نقطه‌های مرکزی می‌گوییم. به دلیل تقارن شکل نسبت به وسط قطر، تعداد نقطه‌های مرکزی روی این دو خط با هم برابر است و بنابراین کافی است تنها تعداد نقطه‌های روی یکی از خط‌ها را محاسبه کنیم. نقطه‌های مرکزی به شکل $(m + \frac{۱}{۲}, n + \frac{۱}{۲})$ هستند که $۰ \leq m < ۴۰$ و $۰ \leq n < ۳۰$.

نقطهٔ $(m + \frac{۱}{۲}, n + \frac{۱}{۲})$ روی خط $y = \frac{۳}{۴}x + \frac{۵}{۸}$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $m = \frac{۳n+۲}{۴}$. پس $۴|۳n+۲$ و این یعنی n به فرم $۴k+۲$ است که $۰ \leq k \leq ۹$. از آن‌جا که در همهٔ موارد $m = \frac{۳n+۲}{۴} = ۳k+۲$

بین ۰ و ۳۰ قرار دارد، تعداد نقطه‌های مطلوب روی این خط برابر ۱۰ و بنابراین تعداد کل نقطه‌های مرکزی که از قطر فاصلهٔ $\frac{۱}{۴}$ دارند، برابر ۲۰ است.

۱۳. طول جهش‌های یک قورباغه می‌تواند هر یک از اعداد $۱, ۵, ۵^۲, ۵^۳, \ldots$ باشد. این قورباغه روی نقطهٔ صفر از محور اعداد صحیح نشسته و در هر مرحله می‌تواند به سمت راست یا چپ جهش کند. اگر این قورباغه نتواند دو جهش با طول مساوی انجام دهد، به چند تا از اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۱۳۹۴\}$ می‌تواند برود؟

۱) ۶۳ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۲۱ ۵) ۲۴۳

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

ابتدا توجه کنید برای هر k، حاصل‌جمع توان‌های ۵ کمتر از ۵^k برابر است با:

$$۱ + ۵ + ۵^۲ + \cdots + ۵^{k-۱} = \frac{۵^k - ۱}{۴} < ۵^k,$$

و در نتیجه اگر قورباغه تعدادی پرش داشته باشد و طول بزرگترین پرشش ۵^k باشد، اگر این پرش به سمت راست باشد، مکان نهایی قورباغه در اعداد مثبت است و اگر این پرش به سمت چپ باشد، مکان نهایی قورباغه در اعداد منفی است. علت آن هم این است که جمع طول همهٔ پرش‌های دیگر از طول بزرگترین پرش کمتر است.

از طرف دیگر توجه کنید که:

$$۱ + ۵ + ۵^۲ + ۵^۳ + ۵^۴ = ۷۸۱ < ۱۳۹۴ < ۲۳۴۴ = ۵^۵ - (۱ + ۵ + ۵^۲ + ۵^۳ + ۵^۴),$$

پس اگر قورباغه نهایتاً در یک عدد مثبت کمتر یا مساوی ۱۳۹۴ باشد، طول بزرگترین پرشش حداکثر $۵^۴$ است و این پرش هم به سمت راست است. پس مکان نهایی قورباغه به صورت:

$$۵^a + (\text{۰ یا ۱ یا ۱-})۵^{a-۱} + \cdots + (\text{۰ یا ۱ یا ۱-})۵ + (\text{۰ یا ۱ یا ۱-}),$$

است که a حداکثر برابر ۴ است. به راحتی می‌توان دید که یک عدد حداکثر یک نمایش به صورت بالا دارد. (مثلاً با در نظر گرفتن باقیمانده بر ۵ می‌توان فهمید که ضریب ۱ کدام یک از ۰ یا ۱ یا ۱- بوده و بعد با کم کردن مقدار این جمله از عدد و تقسیم بر ۵، ضریب ۵ در نمایش بالا را به دست آورد و ...)

تعداد اعدادی که نمایشی به صورت بالا دارند، برای هر مقدار a برابر با ۳^a است (تعداد حالات انتخاب ۰ یا ۱ یا ۱- از هر پرانتز) و در نتیجه اگر این مقدار را برای هر $a \leq ۴$ (و $a = ۰$) جمع بزنیم، $۱۲۱ = ۸۱ + ۲۷ + ۹ + ۳ + ۱$ به دست می‌آید.

۱۴. چند چهارتایی مرتب (a, b, c, d) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق کند؟

$$\begin{cases} a^{۳} + bc = d^{۳} \\ b^{۳} + cd = a^{۳} \\ c^{۳} + da = b^{۳} \\ d^{۳} + ab = c^{۳} \end{cases}$$

۱) ۱   ۲) ۵   ۳) ۲۵

۴) ۴۹   ۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

اگر همهٔ معادلات را با هم جمع بزنیم، خواهیم داشت:

$$a^{۳} + b^{۳} + c^{۳} + d^{۳} + ab + bc + cd + da = a^{۳} + b^{۳} + c^{۳} + d^{۳} \Longrightarrow (a+c)(b+d) = ۰.$$

بنابراین یکی از $a + c$ و $b + d$ برابر صفر است.

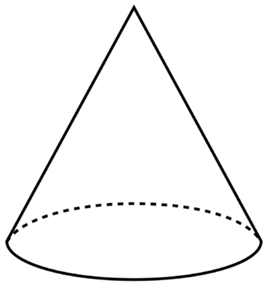
در حالت اول $c = -a$ و اگر این رابطه را در معادلات اول و چهارم جایگذاری کنیم، داریم:

$$\begin{cases} a^{۳} - ab = d^{۳} \\ d^{۳} + ab = -a^{۳} \end{cases} \Longrightarrow d^{۳} + ab = a^{۳} = -a^{۳} \Longrightarrow a = ۰, c = ۰.$$

بعد از جایگذاری صفر به جای a و c در معادلات اول و دوم هم خواهیم داشت، $b = d = ۰$.

حالت دوم $b + d = ۰$ هم تنها به جواب $a = b = c = d = ۰$ منجر می‌شود. پس این دستگاه معادلات فقط یک جواب دارد.

۱۵. نقطهٔ P در جسم A را «خاص» گوییم، اگر نقطه‌های متمایز X و Y در A وجود نداشته باشند که P نقطهٔ وسط پاره‌خط XY باشد. کدام گزینه در مورد نقاط خاص یک مخروط توپر با قاعدهٔ دایره صحیح است؟



۱) مخروط تنها یک نقطهٔ خاص دارد.
۲) هر خطی که وجه دایره‌ای مخروط را قطع کند، حتماً شامل یک نقطهٔ خاص مخروط است.
۳) هر صفحه‌ای که مخروط را قطع کند، حتماً شامل نقطه‌ای خاص از مخروط است.
۴) همهٔ نقطه‌های سطح جانبی مخروط، خاص هستند.
۵) یک و فقط یک کره در فضا وجود دارد که همهٔ نقاط خاص مخروط روی سطح آن قرار بگیرند.

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

با توجه این که مخروط جسمی محدب است (اگر دو نقطه در مخروط باشند، پاره‌خط واصل بین آن‌ها نیز به طور کامل در مخروط قرار دارد) اشتراک هر خط با مخروط یک پاره‌خط و یا یک نقطه است. با توجه به این نکته ادعا می‌کنیم که نقطه‌های خاص دقیقاً نقطه‌هایی مثل P هستند که بتوان برای آن‌ها خطی مثل l یافت که نقطهٔ P نقطهٔ مرزی پاره‌خط اشتراک l با مخروط نباشد. زیرا اگر چنین خطی پیدا شد می‌توان روی همان پاره‌خط (اشتراک خط و مخروط) دو نقطهٔ متمایز یافت که P وسط آن‌ها باشد. بالعکس، اگر دو نقطهٔ متمایز یافت شد که P نقطهٔ میانی آن‌ها باشد، نقطهٔ P نقطهٔ مرزی اشتراک خط گذرا از این دو نقطه و مخروط نیست.
حال ادعا می‌کنیم نقطه‌های خاص مخروط دقیقاً نقطهٔ رأس به علاوهٔ همهٔ نقطه‌های مرزی وجه دایره‌ای مخروط هستند.
در مورد هر کدام از نقطه‌های این مجموعه مثل P می‌توان صفحه‌ای به نام $\pi(P)$ یافت که مخروط در یک طرف صفحه نقطه‌ای ندارد و به علاوه اشتراک $\pi(P)$ با مخروط در یک پاره‌خط یا یک نقطه است که P نقطهٔ مرزی این پاره‌خط اشتراک است (در مورد رأس مخروط صفحه‌ای موازی قاعده و در مورد نقطه‌های مرزی وجه دایره‌ای صفحه‌ای را بگیرید که از آن نقطه و رأس مخروط می‌گذرد و دایره را تنها در P قطع می‌کند).
حال خطی گذرا از P مانند l را در نظر بگیرید. اگر این خط به تمامی در $\pi(P)$ قرار دارد، یا تنها در تک‌نقطهٔ P با مخروط اشتراک دارد و یا شامل پاره‌خط واصل بین p و رأس

مخروط است که P نقطهٔ مرزی آن است. اگر هم l از $\pi(P)$ عبور کند، چون مخروط در یک طرف صفحه نقطه‌ای ندارد، مجدداً نقطهٔ P نقطهٔ مرزی پاره‌خط اشتراک خواهد شد.
پس همهٔ این نقطه‌ها خاص هستند.
ادعا می‌کنیم که هیچ یک از نقطه‌های دیگر نمی‌توانند خاص باشند.

- اگر P رأس مخروط یا در وجه دایره‌ای نباشد، خط واصل بین رأس مخروط و P، مخروط را در یک پاره‌خط قطع می‌کند که یک سر آن نقطهٔ رأس و سر دیگر آن نقطه‌ای از دایرهٔ قاعده است، پس P نمی‌تواند نقطهٔ مرزی این پاره‌خط باشد و لذا عادی است! (خاص نیست.)
- اگر P نقطه‌ای درون (و نه روی مرز) دایرهٔ قاعده باشد، خط دل‌خواهی در صفحهٔ شامل دایره در نظر بگیرید که از P عبور کند. به وضوح این خط مخروط را در یک وتر از دایره قطع می‌کند که نقطه‌های مرزی آن روی مرز دایره هستند و لذا در این حالت هم P نمی‌تواند نقطهٔ مرزی باشد و بنابراین نقطه‌ای خاص نیست.

حال با توجه به آن چه که در مورد نقطه‌های خاص فهمیدیم به سراغ گزینه‌ها می‌رویم.

- گزینهٔ ۱. دیدیم که نقطه‌های خاص بیش از یکی است. پس این گزینه غلط است.
- گزینهٔ ۲. خطی عمود بر وجه دایره‌ای بگیرید که از رأس مخروط عبور نکند. به وضوح چنین خطی نمی‌تواند از نقطه‌های مرزی دایره که سایر نقاط خاص ما بودند بگذرد، پس شامل نقطه‌ای خاص نیست. بنابراین این گزینه هم غلط است.
- گزینهٔ ۳. صفحه‌ای موازی وجه دایره‌ای مخروط بگیرید که از رأس عبور نکند. به وضوح این صفحه هم شامل هیچ یک از نقطه‌های خاص نیست و بنابراین این گزینه نمی‌تواند درست باشد.
- گزینهٔ ۴. دیدیم که همهٔ نقطه‌های سطح جانبی خاص نیستند و بنابراین این گزینه هم نمی‌تواند درست باشد.
- گزینهٔ ۵. مرکز چنین کره‌ای باید روی خط عمود بر وجه دایره‌ای در مرکز دایره باشد،

چون باید از همهٔ نقطه‌های دایره به یک فاصله باشد. از طرف دیگر اگر یکی از نقطه‌های دایره را به دل‌خواه در نظر گرفته و صفحهٔ عمود منصف این نقطه و رأس مخروط را در نظر بگیریم، چون رأس مخروط خارج از صفحهٔ وجه دایره‌ای است، این صفحهٔ عمود منصف موازی خط عمود بر دایره نیست و بنابراین با آن دقیقاً در یک نقطه اشتراک دارد. این نقطهٔ اشتراک مرکز کره‌ای است که از وجه دایره‌ای و رأس مخروط می‌گذرد. پس چنین کره‌ای وجود دارد و چون مرکز و در نتیجه شعاع آن به طور یک‌تا تعیین می‌شود، چنین کره‌ای یک‌تا است. پس گزینهٔ ۵، گزینهٔ درست است.

۱۶. علی فرمولی برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۲ کشف کرده است که با کمک آن می‌تواند مقدار چندجمله‌ای درجهٔ دویی را در نقطهٔ ۳ بر حسب مقدار آن در نقاط صفر و ۱ و ۲ به دست آورد. فرمول علی برای چندجمله‌ای P به شکل زیر است:

$$P(۳) = aP(۰) + bP(۱) + cP(۲),$$

که در آن a، b و c سه عدد ثابت هستند. این سه عدد را پیدا کنید و مشخص کنید که مقدار $a - b + c$ چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

فرض کنید $P(x) = px^۲ + qx + r$ باشد. پس علی a، b و c را به گونه‌ای یافته است که برای هر p، q و r:

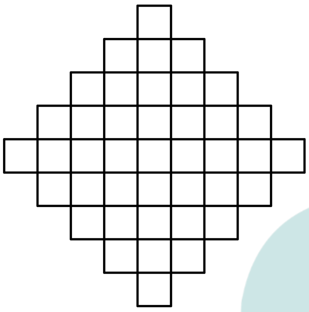
$$\begin{aligned}\underbrace{۹p + ۳q + r}_{P(۳)} &= a(\underbrace{r}_{P(۰)}) + b(\underbrace{p + q + r}_{P(۱)}) + c(\underbrace{۴p + ۲q + r}_{P(۲)})\\ \Rightarrow\ ۹p + ۳q + r &= p(b + ۴c) + q(b + ۲c) + r(a + b + c)\end{aligned}$$

و چون p و q و r دل‌خواه هستند، باید ضرایب آن‌ها در دو طرف تساوی برابر باشند:

$$\begin{cases} b + ۴c = ۹, \\ b + ۲c = ۳, \\ a + b + c = ۱, \end{cases}$$

با استفاده از دو رابطهٔ اول و دوم نتیجه می‌شود که $c = ۳$ و $b = -۳$ و با قرار دادن این دو در رابطهٔ سوم $a = ۱$ به دست می‌آید. پس $a - b + c = ۷$ و گزینهٔ (۵) صحیح است.

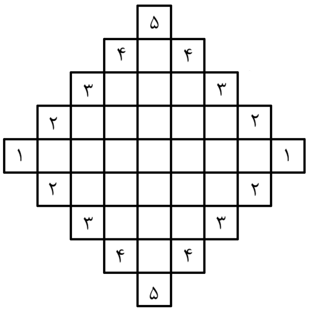
۱۷. به چند طریق می‌توان در شکل روبه‌رو ۸ خانه را انتخاب کرد که هیچ دو تایی از آن‌ها هم‌سطر و یا هم‌ستون نباشند؟



۱) ۱۵ ‏ ۲) ۲۰ ‏ ۳) ۲۸ ‏ ۴) ۳۲ ‏ ۵) ۶۴

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که چون می‌خواهیم ۸ خانه با خاصیت مورد نظر انتخاب کنیم و ۹ ستون داریم. دقیقاً باید یکی از ستون‌ها خالی باشند.



حال به دو خانهٔ با شمارهٔ ۱ در شکل روبه‌رو توجه کنید، چون هر کدام از این خانه‌ها یک ستون هستند، با توجه به نکتهٔ بالا باید حداقل یکی از این دو خانه انتخاب شوند و از سوی دیگر چون هم‌سطر هستند، حداکثر یکی از این دو خانه می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین دقیقاً یک خانه از بین دو خانهٔ ۱ انتخاب می‌شود و هیچ از خانه‌های سطر میانی غیر از این خانه انتخاب نمی‌شود و ضمناً همهٔ ستون‌های دیگر خانهٔ انتخاب‌شده دارند. توجه کنید که برای انتخاب این یک خانه دو حالت داریم.

حال به خانه‌های با شمارهٔ ۲ توجه کنید. چون این خانه‌ها، تنها خانه‌های مجاز دو ستون را شامل هستند باید دقیقاً دو تا از این چهار خانه انتخاب شوند. که برای انتخاب دو خانه که هم‌سطر و هم‌ستون نباشند، دو حالت داریم. با انتخاب این دو خانه دیگر هیچ خانه‌ای از سه سطر میانی انتخاب نخواهد شد.

مشابه بالا باید از بین خانه‌های با شمارهٔ ۳ و ۴، هر کدام دو خانه انتخاب کرد که هم‌سطر و هم‌ستون نباشند که برای هر شماره انتخاب به دو طریق امکان‌پذیر است.

در نهایت باید از بین دو خانهٔ با شمارهٔ ۵، یکی را انتخاب کرد که این هم به دو طریق

امکان دارد.
پس در کل برای انتخاب ۸ خانه با خاصیت مطلوب، $۳۲ = ۲^۵$ طریق ممکن وجود دارد.

۱۸. حداکثر چند عدد از میان اعداد $\{۱,۲,\ldots,۱۳۹۴\}$ می‌توان انتخاب کرد که حاصل‌ضرب هر ۵ تا از آن‌ها مضرب ۱۴ باشد؟

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۷ ۴) ۱۱۱ ۵) ۱۱۴

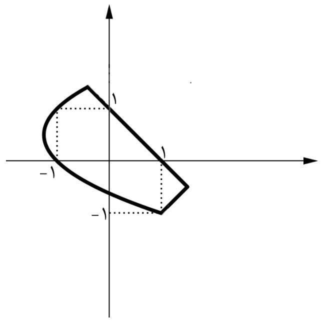
راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد ۱ تا ۱۳۹۴ باشد که حاصل‌ضرب اعضای هر زیرمجموعهٔ ۵ تایی از آن بر ۱۴ بخش‌پذیر است. همچنین فرض کنید تعداد اعضای A که بر ۱۴ بخش‌پذیرند، a تا، تعداد اعضایی که بر ۲ بخش‌پذیر و بر ۷ بخش‌پذیر نیستند، b تا، تعداد اعضایی که بر ۷ بخش‌پذیر و بر ۲ بخش‌پذیر نیستند، c تا و باقی اعضا d تا باشند. حال خاصیت A ایجاب می‌کند که در هر زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از آن، یک عضو موجود باشد که بر ۲ بخش‌پذیر است و همچنین یک عضو که بر ۷ بخش‌پذیر است. در نتیجه تعداد اعضایی که بر ۲ بخش‌پذیر نیستند، (یعنی $c+d$) حداکثر ۴ است و همین‌طور تعداد اعضایی که بر ۷ بخش‌پذیر نیستند (یعنی $b+d$) هم حداکثر ۴ است. پس:

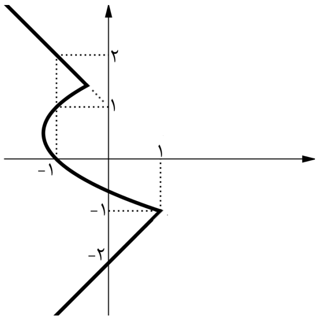
$$\text{تعداد اعضای } A = a+b+c+d \le a+(b+d)+(c+d) \le a+۸.$$

از طرف دیگر در اعداد ۱ تا ۱۳۹۴، ۹۹ عدد بر ۱۴ بخش‌پذیرند و در نتیجه $a \le ۹۹$. پس تعداد اعضای A حداکثر برابر ۱۰۷ است. برای ساختن یک مثال ۱۰۷ عضوی که در شرط مسأله صدق کند، می‌توان مجموعهٔ همهٔ اعداد بخش‌پذیر بر ۱۴ را به همراه ۴ عدد دیگر بخش‌پذیر بر ۲ و ۴ عدد دیگر بخش‌پذیر بر ۷ در $\{۱,۲,\ldots,۱۳۹۴\}$ را در نظر گرفت.

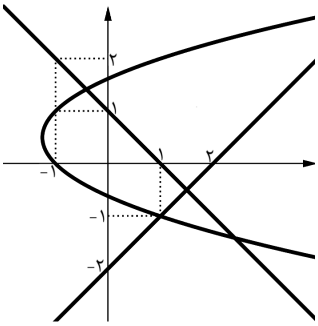
۱۹. کدام گزینه مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند (x,y) در صفحه را با این خاصیت نمایش می‌دهد که بیش‌ترین مقدار در بین سه عبارت $x-y-۱$، $x+y$ و $y^۲-x-y$ برابر یک است؟



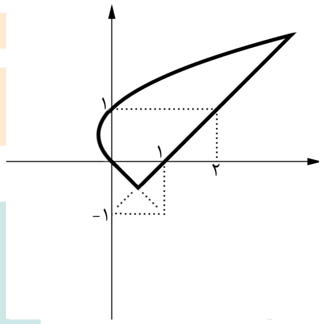
۱)



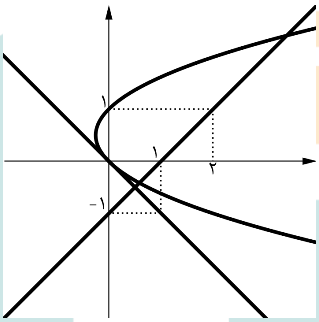
۲)



۳)



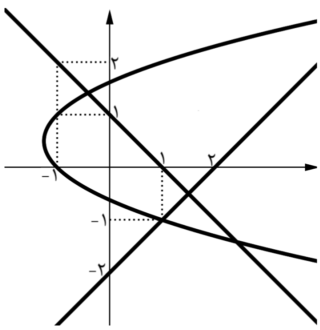
۴)



۵)

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

شکل جواب مسئله بخشی از اجتماع سه منحنی $x + y = ۱$، $x - y - ۱ = ۱$ و $y^۲ - x - y = ۱$ است. یعنی قسمتی از منحنی شکل زیر:



حال باید بررسی کنیم که در نقاط این شکل کدام‌یک از سه عبارت $x + y$، $x - y - ۱$ و $y^۲ - x - y$ بیشینه است.

- نقطه‌هایی که در آن‌ها $x+y=۱$ و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left.\begin{array}{r} y^۲-x-y\leq ۱ \Leftrightarrow y^۲\leq ۲ \Leftrightarrow y\in[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}] \\ x-y-۱\leq ۱ \Leftrightarrow ۲y+۱\geq ۰ \Leftrightarrow y\geq \frac{-۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-۱}{۲}\leq y\leq\sqrt{۲}$$

پس قسمتی از خط $x+y=۱$ که $\frac{-۱}{۲}\leq y\leq\sqrt{۲}$ جزئی از ناحیهٔ مورد نظر هست.

- نقطه‌هایی که در آن‌ها $y^۲-x-y=۱$ و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left.\begin{array}{r} x+y\leq ۱ \Leftrightarrow y^۲-۱\leq ۱ \Leftrightarrow y\in[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}] \\ x-y-۱\leq ۱ \Leftrightarrow y^۲-۲y-۳\leq ۰ \Leftrightarrow y\in[-۱,۳] \end{array}\right\} \Rightarrow -۱\leq y\leq\sqrt{۲}$$

پس قسمتی از سهمی $y^۲-x-y=۱$ که $-۱\leq y\leq\sqrt{۲}$ قسمتی از ناحیهٔ مورد نظر ماست.

- نقطه‌هایی که در آن‌ها $x-y-۱=۱$ و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left.\begin{array}{r} y^۲-x-y\leq ۱ \Leftrightarrow y^۲-۲y-۳\leq ۰ \Leftrightarrow y\in[-۱,۳] \\ x+y\leq ۱ \Leftrightarrow x+y\geq x-y-۱ \Leftrightarrow y\leq \frac{-۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow -۱\leq y\leq\frac{-۱}{۲}$$

پس قسمتی از خط $x-y-۱=۱$ که در آن $-۱\leq y\leq\frac{-۱}{۲}$، قسمتی از این ناحیه است.

و در کل ناحیهٔ مورد نظر اجتماع این سه قسمت است که متناظر با نمودار موجود در گزینهٔ (۱) است.

۲۰. در ابتدای روز اول یک ویروس موذی وارد بدن شده است. در انتهای هر روز، هر ویروس موذی که k روز عمر کرده باشد، k ویروس موذی جدید تولید می‌کند و خودش نیز به زندگی ادامه می‌دهد. در انتهای روز ششم چند ویروس موذی متولد می‌شود؟

۱) ۸۹ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۴۴ ۵) ۲۴۳

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

فرض کنید a_n تعداد ویروس‌هایی باشد که در انتهای روز n-ام متولد می‌شوند. در این‌صورت دنبالهٔ (a_n)در رابطهٔ بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$a_n=a_{n-۱}+۲a_{n-۲}+\cdots+(n-۱)a_۱+n.$$

زیرا تعداد ویروس‌هایی که در انتهای روز n-ام متولد می‌شوند، برابر با تعداد ویروس‌هایی است که یک روز عمر کرده‌اند (یعنی a_{n-1}) به اضافهٔ دو برابر ویروس‌هایی که دو روز عمر کرده‌اند (یعنی $2a_{n-2}$) و همین‌طور تا $n-1$ برابر ویروس‌هایی که $n-1$ روز عمر کرده‌اند، (یعنی $(n-1)a_1$) به اضافهٔ n ویروسی که از ویروس اولیه متولد می‌شوند. پس با نوشتن جملات ابتدایی a_n ها به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
a_2 &= 1+2=3,\\
a_3 &= 3+2\times 1+3=8,\\
a_4 &= 8+2\times 3+3\times 1+4=21,\\
a_5 &= 21+2\times 8+3\times 3+4\times 1+5=55,\\
a_6 &= 55+2\times 21+3\times 8+4\times 3+5\times 1+6=144.
\end{aligned}$$

که پاسخ ۱۴۴ را به دست می‌آورد.

البته می‌توان رابطهٔ بازگشتی ساده‌تری هم برای دنبالهٔ (a_n) به دست آورد که محاسبهٔ مقادیر آن را سریع‌تر می‌کند. روش کار به این صورت است: اگر رابطهٔ بازگشتی را برای n و $n-1$ بنویسیم و از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود: $(n>1)$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + 1, \Longrightarrow$$
$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + 1.$$

حال اگر $n>2$ و رابطهٔ بالا را هم برای $n-1$ بنویسیم و از رابطهٔ متناظر برای n کم کنیم، داریم: $(n>2)$

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-2} \Longrightarrow a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}.$$

رابطهٔ بالا به همراه دو مقدار اولیهٔ $a_1=1, a_2=3$ توصیفی ساده‌تر از دنبالهٔ بازگشتی (a_n) است.

۲۱. به چند طریق می‌توان عدد 150^7 را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی (بیش از یک عدد) نوشت که در آن ترتیب اعداد مهم نباشد؟

۱) صفر ۲) ۵۹ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۷۹ ۵) ۲۳۹

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

فرض کنیم $۱۵۰^{۷}$ را به صورت حاصل‌جمعی از اعداد m تا $m+n$ نوشته باشیم که $m,n \geq ۱$. در این‌صورت:

$$۱۵۰^{۷} = m + (m+۱) + \cdots + (m+n) = \frac{(۲m+n)(n+۱)}{۲} \Longrightarrow$$
$$۲^{۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۱۴} = (n+۱)(۲m+n).$$

بنابراین اگر بنویسیم $a = n+۱$ و $b = ۲m+n$، a و b زوجیت متفاوت دارند و $b > a > ۱$ و $ab = ۲^{۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۱۴}$. برای شمارش تعداد حالات a,b کافیست تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد $۲^{۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۱۴}$ (غیر از ۱) را بشماریم، زیرا هر مقسوم‌علیه فرد در مقسوم‌علیه زوج مکملش برابر $۲^{۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۱۴}$ است و هر کدام که بزرگتر بود را می‌توان b و دیگری را a در نظر گرفت، البته باید حالت $a = ۱$ را هم حذف کنیم. علاوه بر این واضح است که برای هر زوج a,b با شرایط ذکر شده، دقیقاً یک زوج m,n به صورت بالا وجود دارد.

تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد $۲^{۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۱۴}$ برابر با تعداد مقسوم‌علیه‌های $۳^{۷} \times ۵^{۱۴}$ است، یعنی $۱۲۰ = (۱۴+۱)(۷+۱)$. پس جواب مسأله $۱۱۹ = ۱ - ۱۲۰$ است.

۲۲. به چند طریق می‌توان یک جدول ۷×۱ را با کاشی‌های ۲×۱ پر کرد، طوری که هر خانه توسط حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی پر شده باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ ۵) ۱۹

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

فرض کنیم a_n تعداد راه‌های پر کردن یک جدول $n \times ۱$ با دومینوها (کاشی‌های ۲×۱) باشد که در هر خانه حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی قرار داشته باشد. علاوه بر این b_n را تعداد راه‌های پر کردن یک جدول $n \times ۱$ با دومینوها در نظر بگیرید که در هر خانه غیر از خانهٔ اول، حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی باشد و در خانهٔ اول حداقل صفر و حداکثر یک کاشی باشد.

حال برای $n > ۱$، رابطهٔ زیر را برای a_n داریم:

$$a_n = a_{n-۲} + b_{n-۱},$$

زیرا اگر یکی از حالاتی که در شمارش a_n ظاهر می‌شود در نظر بگیرید، یا در خانهٔ اول دو دومینو قرار دارد که در این‌صورت این دومینوها با خانهٔ دوم مشترکند و هیچ دومینوی دیگر در این دو خانه قرار ندارد. پس تعداد حالات برابر با تعداد حالات پر کردن بقیهٔ خانه‌ها یعنی یک جدول $۱ \times (n-۲)$ با شرط مسأله است. اما اگر در خانهٔ اول فقط یک دومینو باشد، پس از حذف این دومینو و خانهٔ اول، در جدول $۱ \times (n-۱)$ باقیمانده، در هر خانه غیر از خانهٔ اول، بین ۱ تا دو دومینو قرار دارد و در خانهٔ اول، بین ۰ تا ۱ دومینو. پس تعداد حالاتی که در خانهٔ اول جدول اصلی دقیقاً یک دومینو قرار داشته باشد، برابر $b_{n-۱}$ است. با استدلالی کاملاً مشابه و حالت‌بندی روی تعداد دومینوهای خانهٔ اول جدول، می‌توان رابطهٔ بازگشتی زیر را برای b_n به دست آورد:

$$b_n = a_{n-۱} + b_{n-۱}.$$

بنابراین با استفاده از رابطهٔ بازگشتی اول برای هر $n > ۱$ داریم:

$$b_n = a_{n+۱} - a_{n-۱},$$

و اگر این رابطه را برای n و $n-۱$ در رابطهٔ بازگشتی دوم جایگذاری کنیم، به دست می‌آید:

$$a_{n+۱} - a_{n-۱} = a_{n-۱} + a_n - a_{n-۲} \Longrightarrow a_{n+۱} = a_n + ۲a_{n-۱} - a_{n-۲}.$$

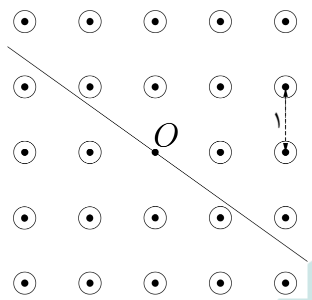
پس برای محاسبهٔ مقادیر دنبالهٔ (a_n) کافیست سه مقدار اولیهٔ آن را بدانیم که با توجه به صورت سؤال به سادگی به دست می‌آیند:

$$a_۱ = ۰, a_۲ = ۲, a_۳ = ۱.$$

حال با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (a_n) داریم:

$$\begin{aligned} a_۴ &= ۱ + ۴ - ۰ = ۵, \\ a_۵ &= ۵ + ۲ - ۲ = ۵, \\ a_۶ &= ۵ + ۱۰ - ۱ = ۱۴, \\ a_۷ &= ۱۴ + ۱۰ - ۵ = ۱۹. \end{aligned}$$

۲۳. می‌خواهیم در تمام نقاط یک شبکهٔ منظم ۵ × ۵، غیر از نقطهٔ مرکزی، ستون‌هایی استوانه‌ای و برابر نصب کنیم، به‌نحوی که نقطهٔ مرکزی از بیرون دیده نشود؛ یعنی در نقشهٔ مسطحی که می‌بینید، هر خط گذرنده از نقطهٔ مرکزی دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند. در صورتی که فاصلهٔ بین نقاط مجاور یک متر باشد، کم‌ترین مقدار لازم برای شعاع مقطع ستون‌ها چند متر است؟



۱) $\sqrt{\frac{۱}{۱۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۱}{۵}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۴}{۱۷}}$ ۵) $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

برای هر خط l که از نقطهٔ مرکزی (O) می‌گذرد، $m(l)$ را فاصلهٔ خط l تا ۲۴نقطهٔ دیگر می‌گیریم. در این صورت جواب مسئله باید بزرگ‌ترین عدد در بین $m(l)$ها باشد. زیرا اگر این بزرگ‌ترین مقدار را با R نمایش دهیم، برای هر $r \geq R$ می‌توان خطی مثل l یافت که فاصلهٔ یکی از نقطه‌های غیر مرکزی تا خط l کم‌تر از r باشد و بنابراین دایرهٔ به مرکز آن نقطه و شعاع r حتماً با l اشتراک دارد. از طرف دیگر اگر $r < R$ می‌توان خط l یافت که $m(l) > r$. یعنی فاصلهٔ همهٔ نقطه‌های غیر مرکزی از l کم‌تر از r است و بنابراین دایرهٔ به مرکز هر یک از این نقاط و شعاع r با l اشتراک ندارد.

برای راحتی فرض می‌کنیم که نقطه‌ها به گونه‌ای در صفحهٔ مختصات قرار گرفتند که همه دارای مختصات صحیح هستند، نقطهٔ مرکزی در مبدأ قرار دارد و فاصلهٔ بین نقاط مجاور یک است. هم چنین برای نمایش فاصلهٔ نقطهٔ X و خط l، از نماد $d(X,l)$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به تقارن‌های شکل می‌توان برای محاسبهٔ $m(l)$ برای خطوط مختلف، خود را محدود به خطوط l کنیم که شیب آن‌ها بین صفر و یک است و تنها فاصلهٔ پنج نقطهٔ $(۱,۰)$، $(۲,۰)$، $(۱,۱)$، $(۲,۱)$ و $(۲,۲)$ را با l در نظر بگیریم.

به سادگی دیده می‌شود که برای خط l که از مبدأ می‌گذرد، فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۰)$ از خط

l کم‌تر از فاصلهٔ نقطهٔ $(2,0)$ از l است. پس می‌توانیم در محاسباتمان نقطهٔ $(2,0)$ را در نظر نگیریم. به دلیل مشابه و با مقایسهٔ فاصلهٔ نقطه‌های $(1,1)$ و $(2,2)$ با هر خط l، می‌بینیم که می‌توانیم نقطهٔ $(2,2)$ را نیز در نظر نگیریم و تنها فاصلهٔ سه نقطهٔ $A = (1,0)$، $B = (1,1)$ و $C = (2,1)$ را با خط l برای یافتن $m(l)$ محاسبه کنیم. نقطهٔ $(0,0)$ را نیز مطابق شکل با O نمایش می‌دهیم.
با یک محاسبهٔ ساده مشخص می‌شود که اگر شیب خط l (که از O می‌گذرد) برابر a باشد، فاصلهٔ سه نقطه A، B و C از l به ترتیب برابر $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$، $\frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$ و $\frac{|1-2a|}{\sqrt{1+a^2}}$ است.
حال لم زیر را ثابت می‌کنیم.
لم. فرض کنید M نقطهٔ وسط ضلع YZ از مثلث XYZ باشد و T نقطه‌ای روی پاره‌خط MY باشد. در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ Y از خط XT، کم‌تر از فاصلهٔ Z از این خط است و اگر T بر M منطبق شود. این دو مقدار با هم مساوی خواهند شد.
اثبات. اگر Y_1 و Z_1 را به ترتیب پای عمودهای وارد از Y و Z بر خط XM بگیریم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ YY_1T و ZZ_1T متشابه هستند و لذا $\frac{YY_1}{ZZ_1} = \frac{YT}{ZT}$. بنابراین اگر T بین M و Y باشد، $YT < YM = MZ < ZT$ و لذا $YY_1 < ZZ_1$. هم‌چنین اگر $T = M$، $YT = ZT$ و لذا $YY_1 = ZZ_1$.

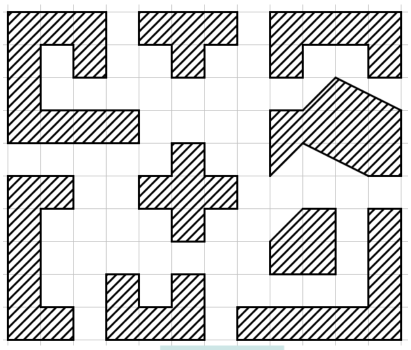
حال با استفاده از این لم به ادامهٔ مسئله می‌پردازیم. اگر شیب خط l کم‌تر از $\frac{1}{2}$ باشد،

$$d(C,l) = \frac{1-2a}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = d(B,l)$$

پس $m(l)$ برابر عدد کم‌تر در بین دو عدد $d(C,l)$ و $d(A,l)$ است. حال طبق لم بالا، اگر خط l زیر میانهٔ وارد بر ضلع AC در مثلث AOC باشد، $m(l) = d(A,l)$ و اگر بالای این میانه باشد، $m(l) = d(C,l)$. حال چون زاویهٔ $\angle AOC$ حاده است، $d(A,l)$ با افزایش شیب l افزایش و $d(C,l)$ با افزایش شیب l کاهش می‌یابد. بنابراین بیش‌ترین مقدار $m(l)$ وقتی شیب l بین 0 و $\frac{1}{2}$ تغییر می‌کند زمانی است که l میانهٔ ضلع AC از مثلث AOC باشد که چون شیب این خط برابر $\frac{1}{3}$ است، با استفاده از محاسبه‌های بالا حداکثر مقدار $m(l)$ در این بازه برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ می‌شود. با استدلال مشابه در مورد وقتی که شیب l بین $\frac{1}{2}$ و یک تغییر می‌کند، می‌بینیم که بیشینه $m(l)$ مربوط به میانهٔ ضلع BC از مثلث OBC است و چون شیب این میانه برابر $\frac{2}{3}$ است، بیشینهٔ $m(l)$ در این بازه برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ می‌شود. پس در کل

بیشینه مقدار $m(l)$، $\frac{1}{\sqrt{10}}$ خواهد بود و جواب مسئله همین $\frac{1}{\sqrt{10}}$ هست.

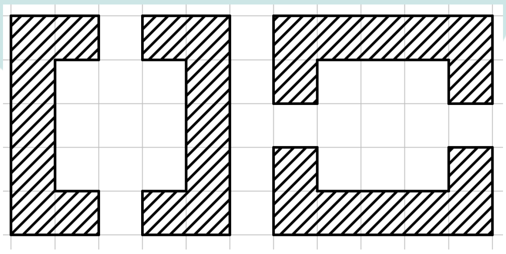
۲۴. می‌گوییم با یک چندضلعی می‌توان صفحه را کاشی‌کاری کرد، هرگاه بتوان نامتناهی شکل هم‌نهشت با آن چندضلعی را در صفحه کنار هم قرار داد به گونه‌ای که کل صفحه را بپوشانند و ضمناً به جز احتمالاً در اضلاع هم‌پوشانی نداشته باشند. با چند تا از اشکال روبه‌رو نمی‌توان صفحه را کاشی‌کاری کرد؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

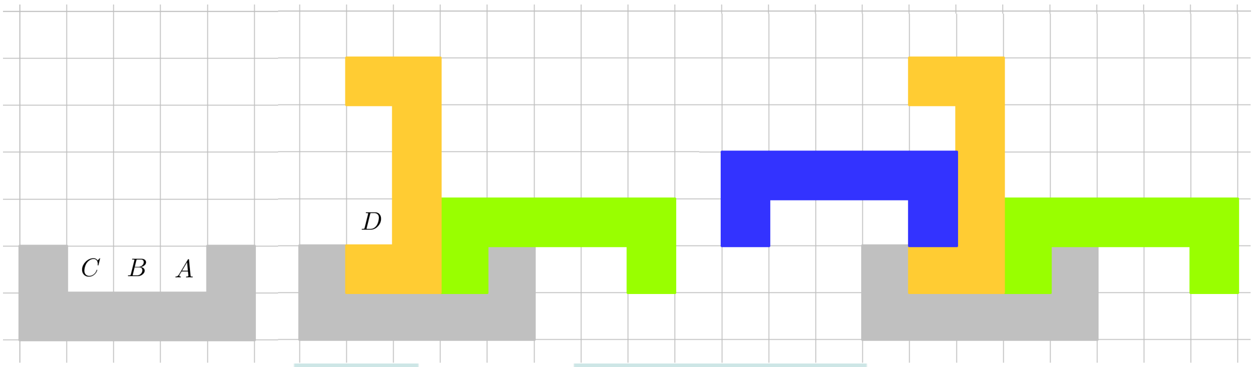
ادعا می‌کنیم تنها کاشی‌کاری با شکل زیر امکان‌پذیر نیست و برای بقیه امکان‌پذیر است.



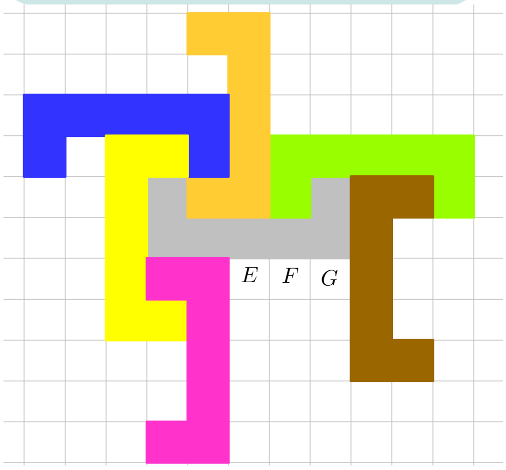
فرض کنید که کاشی‌کاری با این کاشی ممکن باشد. به وضوح می‌توان فرض کرد که در این کاشی‌کاری رئوس نسخه‌های مختلف چندضلعی روی نقطه‌های شبکه‌ای قرار می‌گیرد و اضلاع آن‌ها موازی محورها می‌شوند. بنابراین تنها چهار نسخهٔ بالا از این کاشی ظاهر می‌شوند که به دو نسخهٔ سمت چپ در شکل کاشی‌های عمودی و به دو نسخهٔ سمت راست کاشی‌های افقی می‌گوییم.

حال یک کاشی افقی از کاشی‌کاری مطابق شکل سمت چپ زیر در نظر بگیرید (با قرینه کردن و دوران فرض کنید چنین نسخه‌ای در کاشی‌کاری وجود دارد). به سادگی می‌توان چک کرد که برای پر کردن سه خانهٔ A، B و C از شکل به یک کاشی افقی و یک کاشی

عمودی نیاز داریم که مطابق شکل دوم قرار گرفته باشند (یا قرینهٔ شکل نسبت به خط عمودی). با استدلال مشابه در مورد کاشی عمودی جدید می‌فهمیم که برای پوشاندن خانهٔ D باید یک کاشی افقی مطابق شکل قرار دهیم.

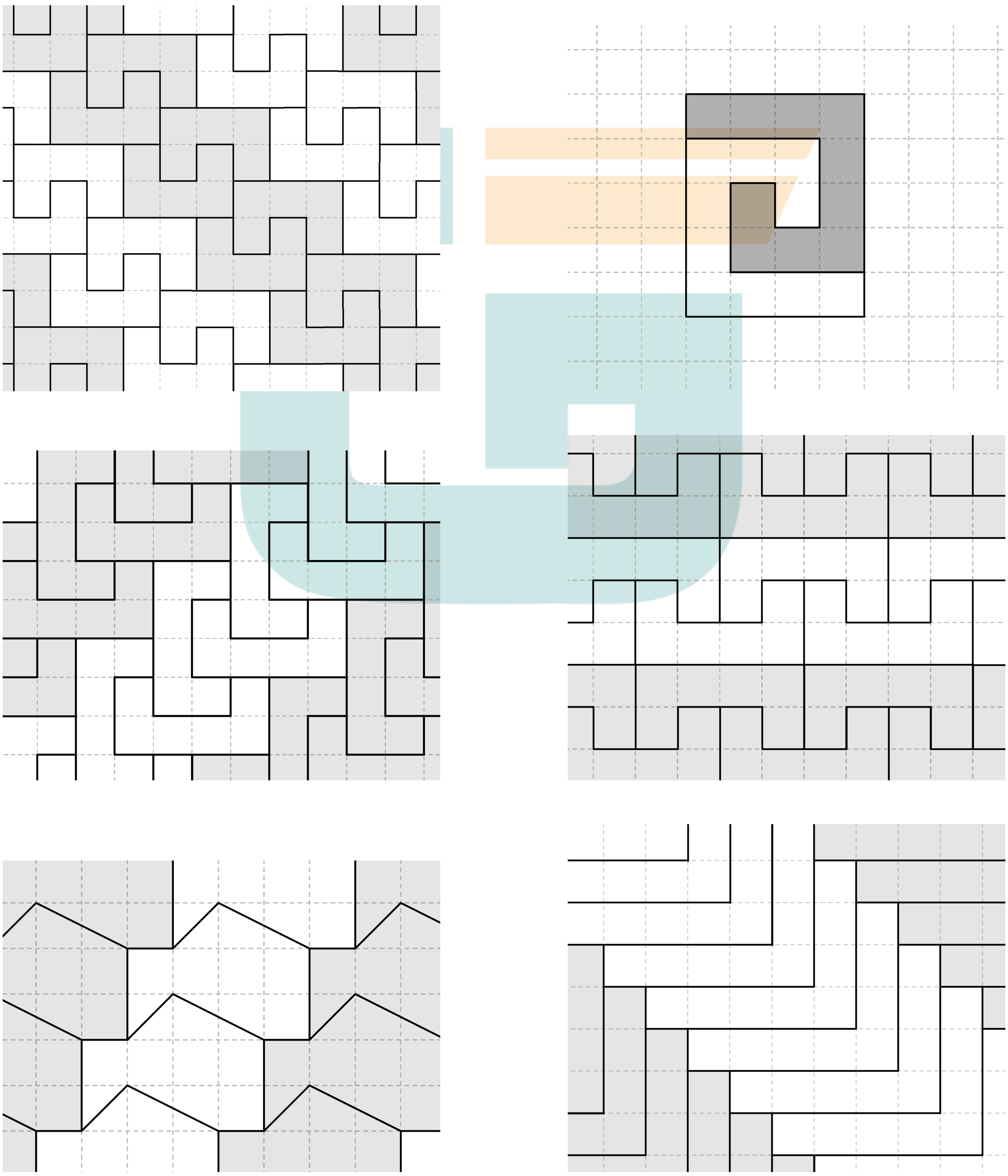


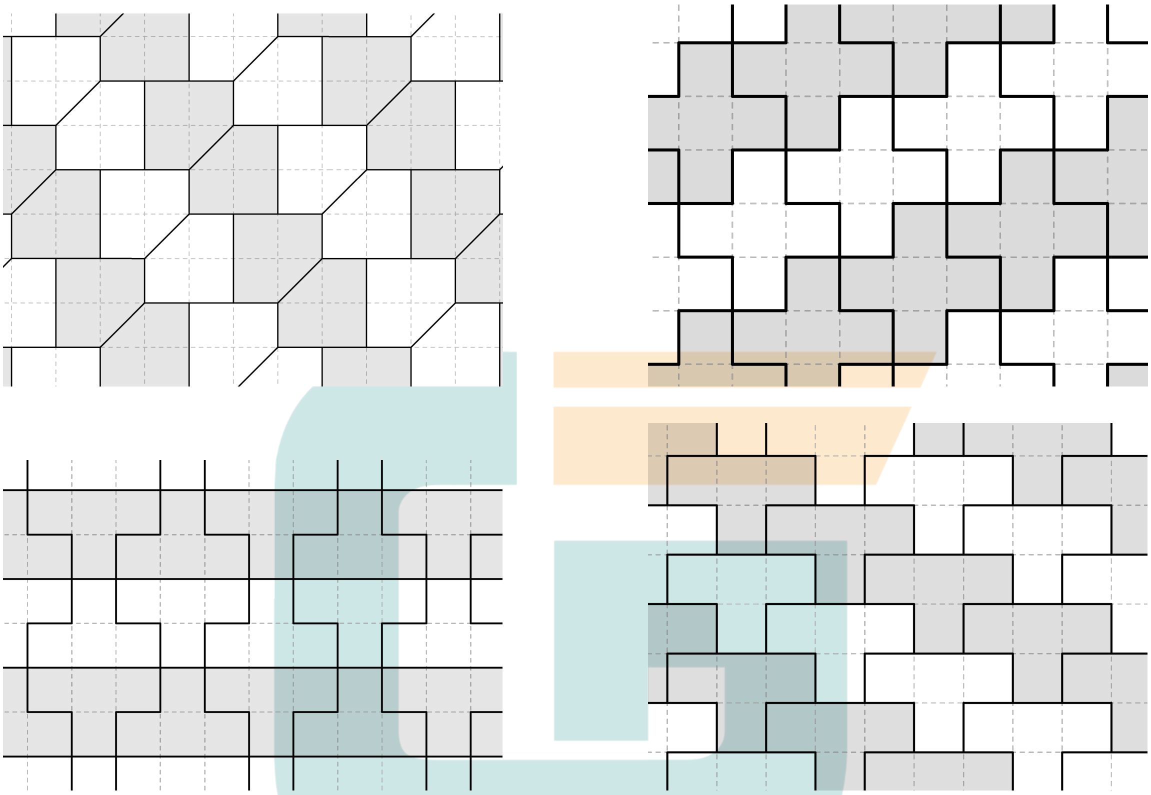
به همین ترتیب با قرار دادن کاشی‌های مختلف به شکل زیر می‌رسیم. در این حالت با کمی بررسی دیده می‌شود که نمی‌توان سه خانهٔ E، F و G را به هیچ شکلی پوشاند. پس کاشی‌کاری با این چندضلعی امکان‌پذیر نیست.



در مورد بقیهٔ کاشی‌ها، کاشی‌کاری امکان‌پذیر است که در ادامه (در مورد بعضی کاشی‌ها به دو شکل متفاوت) می‌بینید. در اکثر موارد روش کار این است که با استفاده از کاشی‌ها، ابتدا شکلی نوار یا پلکان‌مانند را بپوشانیم و سپس با کنار هم قرار دادن نوارها و یا پلکان‌ها

کل صفحه را بپوشانیم. مثلاً در مورد کاشی مربوط به شکل سمت راست زیر با کنار هم قرار دادن دو نسخه یک مستطیل ساخته‌ایم و با کنار هم قرار دادن این مستطیل‌ها صفحه را کاشی‌کاری می‌کنیم.





۲۵. اعداد $\sqrt{۷}^{\sqrt{۳}}$، $\sqrt{۵}^{\sqrt{۵}}$ و $\sqrt{۳}^{\sqrt{۷}}$ را به ترتیب با A، B و C نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

۱) $A < B < C$ ۲) $B < C < A$ ۳) $C < B < A$ ۴) $A < C < B$ ۵) $C < A < B$

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

اول نشان می‌دهیم $\sqrt{۷}^{\sqrt{۳}} < \sqrt{۵}^{\sqrt{۵}}$. دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، کافی است نشان دهیم $۷^{\sqrt{۳}} < ۵^{\sqrt{۵}}$. اکنون دو طرف را به توان $\sqrt{۵}$ می‌رسانیم. کافی است نشان دهیم $۷^{\sqrt{۱۵}} < ۵^{۵}$، یعنی $۷^{\sqrt{۱۵}} < ۳۱۲۵$. اما داریم $\sqrt{۱۵} < ۴$، پس $۷^{\sqrt{۱۵}} < ۷^{۴} = ۲۴۰۱$. پس حکم ثابت شد.

حال نشان می‌دهیم $\sqrt{۳}^{\sqrt{۷}} < \sqrt{۷}^{\sqrt{۳}}$. مجدداً دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، کافی است نشان دهیم $۳^{\sqrt{۷}} < ۷^{\sqrt{۳}}$. اکنون دو طرف را به توان $\sqrt{۷}$ می‌رسانیم. کافی است نشان دهیم $۳^{۷} < ۷^{\sqrt{۲۱}}$، یعنی $۲۱۸۷ < ۷^{\sqrt{۲۱}}$. اما داریم $\sqrt{۲۱} > ۴$، پس $۷^{\sqrt{۲۱}} > ۷^{۴} = ۲۴۰۱$. پس حکم ثابت شد.

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۶. چند دنبالهٔ $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ از اعداد مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ داریم به گونه‌ای که برای هر $1 \leq i, j \leq 15$ که $i + j \leq 15$، داشته باشیم: $a_{i+j} > a_i + a_j$ ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۹ ۵) ۱۵

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

طبق فرض مسأله داریم:

$$a_{15} \geq a_{14} + a_1 + 1 \geq a_{13} + 2a_1 + 2 \geq \cdots \geq a_2 + 13a_1 + 13 \geq 15a_1 + 14.$$

از طرف دیگر، $a_{15} \leq 30$ نتیجه می‌دهد $15a_1 + 14 \leq 30$ پس $a_1 = 1$ و برای هر $j > 1$، $a_j \geq a_{j-1} + 2$.

حال داریم، $29 = a_1 + 28$ و در نتیجه:

$$29 \leq a_2 + 26 \leq a_3 + 24 \leq \cdots \leq a_{13} + 4 \leq a_{14} + 2 \leq a_{15} \leq 30.$$

حال اگر در میان ۱۴ عدد بالا، k عدد برابر ۲۹ و $14 - k$ عدد برابر ۳۰ شود، داریم:

$$a_i = \begin{cases} 2i - 1 & i \leq k + 1 \\ 2i & i > k + 1 \end{cases}$$

اگر k کمتر از ۶ باشد، شرط سؤال نقض می‌شود، چون که:

$$k < 6 \Longrightarrow k + 1 < 7, 14 \Longrightarrow a_7 = 14, a_{14} = 28,$$

و این با شرط $a_{14} > a_7 + a_7$ در تناقض است.

از طرف دیگر، ثابت می‌کنیم $6 \leq k \leq 14$ شرط $a_{i+j} > a_i + a_j$ را برآورده می‌کند: چون اگر k حداقل ۶ باشد و $i + j$ حداکثر ۱۵، هر دوی i و j نمی‌توانند از $k + 1$ بیشتر باشند، چون در غیر این‌صورت:

$$i, j \geq k + 2 \geq 8 \Longrightarrow i + j \geq 16.$$

پس حداقل یکی از i و j مثلاً i از $k + 1$ بیشتر نیست و در نتیجه $a_i = 2i - 1$. حال با توجه به حالت‌بندی بالا یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$\begin{cases} j \leq k + 1 \Longrightarrow & a_j = 2j - 1, a_{i+j} \geq 2(i + j) - 1 & \Longrightarrow & a_{i+j} > a_i + a_j \\ j > k + 1 \Longrightarrow & i + j > k + 1 \Longrightarrow a_j = 2j, a_{i+j} = 2(i + j) & \Longrightarrow & a_{i+j} > a_i + a_j \end{cases}$$

پس در همهٔ حالات $۶ \le k \le ۱۴$ شرط مسأله برقرار است و تعداد دنباله‌های ممکن برابر با تعداد حالات k، یعنی ۹ حالت است.

۲۷. حاصل‌ضرب اعضای مجموعهٔ A را با $f(A)$ نشان می‌دهیم. اگر $A_۱$، $A_۲$، . . . و $A_{۱۰۲۳}$ تمام زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ باشد، باقی‌ماندهٔ

$$f(A_۱) + f(A_۲) + \cdots + f(A_{۱۰۲۳})$$

بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۱۲

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

با بسط کامل عبارت

$$(۱ + ۱)(۱ + ۲)(۱ + ۳)\cdots(۱ + ۱۰)$$

متوجه می‌شویم که هر یک از جملات به صورت حاصل‌ضربی به این صورت است که از هر یک از پرانتزهای به صورت $(۱ + i)$ یکی از دو عدد ۱ و i را انتخاب کنیم و همهٔ اعداد انتخاب‌شده را در هم ضرب کنیم. اما توجه کنید که ۱ در ضرب به صورت خنثی عمل می‌کند و در نتیجه حاصل‌ضرب نهایی برابر با حاصل‌ضرب همهٔ اعداد غیر از ۱ هستند که از پرانتزها انتخاب شده‌اند. پس حاصل‌ضرب نهایی را می‌توانیم این‌طور توصیف کنیم که برای همهٔ زیرمجموعه‌های $\{۱, \ldots, ۱۰\}$، حاصل‌ضرب اعضای آن را محاسبه می‌کنیم و همهٔ این اعداد را با هم جمع می‌زنیم. حال با توجه به اینکه یکی از این مجموعه‌ها تهی است، داریم:

$$۱۱! = (۱ + ۱)(۱ + ۲)\cdots(۱ + ۱۰) = f(A_۱) + \cdots + f(A_{۱۰۲۳}) + ۱.$$

در نتیجه جواب مسأله باقیماندهٔ $۱۱! - ۱$ بر ۱۳ است. حال بنابر قضیهٔ ویلسون (برای هر عدد اول p، باقیماندهٔ $(p - ۱)!$ بر p برابر $p - ۱$ است) داریم:

$$۱۲! \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \Longrightarrow ۱۱! \times ۱۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \Longrightarrow ۱۱! \overset{۱۳}{\equiv} ۱,$$

پس باقیماندهٔ $۱۱! - ۱$ بر ۱۳ برابر با صفر است.

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

---

۲۸. دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از اعداد حقیقی برای هر $n \geq ۰$، در رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$x_{n+۱} = x_n^۲ + x_n y_n + y_n^۲, \qquad y_{n+۱} = x_n^۲ - x_n y_n + y_n^۲.$$

اگر $x_۰$ و $y_۰$ اعدادی مثبت باشند و $x_۰ + y_۰ = ۲$ ، در مورد $S = x_۸ + y_۸$ کدام درست است؟

۱) $S < ۲^{۵۰}$ ۲) $۲^{۵۰} \leq S < ۲^{۲۰۰}$ ۳) $۲^{۲۰۰} \leq S < ۲^{۸۰۰}$ ۴) $۲^{۸۰۰} \leq S < ۲^{۲۰۰۰}$ ۵) $۲^{۲۰۰۰} \leq S$

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

ابتدا دقت کنید که برای هر $n \geq ۰$،

$$x_n^۲ \pm x_n y_n + y_n^۲ = \frac{۱}{۲}\left((x_n \pm y_n)^۲ + x_n^۲ + y_n^۲\right) \geq ۰$$

پس برای هر $n \geq ۱$، x_n و y_n نامنفی هستند. حال اگر $x_n + y_n$ را با s_n نمایش دهیم، داریم:

$$s_n^۲ = (x_n + y_n)^۲ \leq ۲(x_n^۲ + y_n^۲) = s_{n+۱} \leq ۲(x_n + y_n)^۲ = ۲s_n^۲$$

که نابرابری سمت راست نتیجهٔ نامنفی بودن x_n و y_n و نابرابری سمت چپ نتیجهٔ نابرابری حسابی-هندسی است. حال با توجه به این نابرابری‌ها برای $n = ۰, ۱, \ldots, ۷$ نتیجه می‌گیریم:

$$۲^{۲۵۶} = s_۰^{۲^۸} \leq s_۸ \leq s_۰^{۲^۸} ۲^{۱+۲+\cdots+۲^۷} = ۲^{۵۱۱}$$

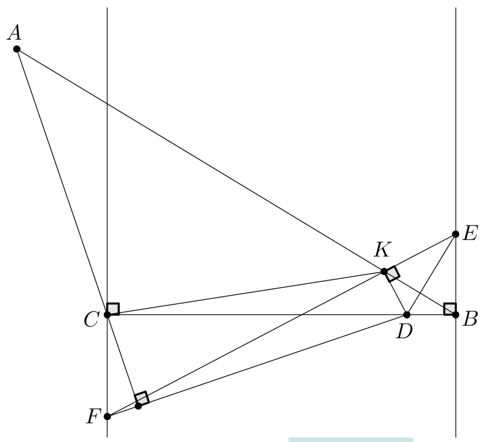
پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲۹. نقطهٔ D روی خط BC از مثلث ABC با $\angle BAC = ۴۰^\circ$ مفروض است. از B و D به ترتیب بر BC و AB عمود می‌کنیم تا یک‌دیگر را در E قطع کنند. به طور مشابه از C و D به ترتیب عمودهایی بر BC و AC رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در F قطع کنند. پای عمود وارد از D بر EF را K می‌نامیم. می‌دانیم K روی خط AB قرار دارد و منطبق بر B نیست. زاویهٔ $\angle ACK$ چند درجه است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰ ۵) ۱۴۰

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

ما در این‌جا تنها حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطهٔ K روی ضلع AB و نه امتداد آن قرار دارد. جواب در حالت دیگر هم کاملاً مشابه است. در این حالت $\angle ACK = \angle CKB - ۴۰°$. پس سعی می‌کنیم مقدار زاویهٔ $\angle CKB = \angle CKD + \angle BKD$ را بیابیم.



از آن‌جا که $\angle DCF = ۹۰°$ و $\angle DKF = \angle DKE + \angle DBF = ۹۰° + ۹۰° = ۱۸۰°$، دو چهارضلعی $CKDF$ و $DKEB$ محاطی هستند. پس:

$$\angle CKD = ۱۸۰° - \angle CFD = ۹۰° + (\angle ACB - ۹۰°) = \angle ACB$$

$$\angle BKD = \angle BED = \angle ABC$$

در تساوی‌های بالا از اینکه $AC \perp DF$ و $AB \perp DE$ استفاده شد. پس در نهایت داریم

$$\angle CKB = \angle CKD + \angle BKD = \angle ACB + \angle ABC$$
$$= ۱۸۰° - \angle BAC = ۱۴۰° \Rightarrow ACK = ۱۰۰°$$

اگر نقطهٔ K در امتداد پاره‌خط AB می‌بود، زاویهٔ $\angle ACK$ برابر $\angle BAC = ۴۰°$ به دست می‌آمد و در این حالت چون $\angle ACK = ۱۸۰° - \angle BAC - \angle CKB$ جواب مجدداً برابر $۱۰۰°$ بود.

توضیح. اگر فرآیند مسئله را با شروع از نقطه‌های مختلف D روی BC انجام دهیم، مکان هندسی نقطهٔ K قرینهٔ دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به BC خواهد بود. اثبات این مطلب کاملاً شبیه بالاست. در واقع دقت در استدلال فوق نشان می‌دهد که در پیدا کردن ارتباط $\angle CKB$ و $\angle BAC$ از این که K روی AB قرار دارد استفاده نکرده‌ایم.

۳۰. یک فرمول سه‌متغیره با متغیرهای x, y, z را «جالب» می‌گوییم، هرگاه در آن فقط از ترکیب توابع مینیمم و ماکسیمم استفاده شده باشد. مثل سه فرمول زیر:

$$\min(\max(x, z), y),\ \min(x, x),\ \max(x, \min(x, y)).$$

دو فرمول را متفاوت می‌گوییم، اگر یک مقداردهی برای متغیرهای x, y, z وجود داشته باشد که دو فرمول مقادیر مختلفی را برای آن‌ها محاسبه کنند. مثلاً دو فرمول $\min(x, x)$

و $\max(x, \min(x, y))$ متفاوت نیستند. چند فرمول متفاوت داریم؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۸ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶ ۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

نکتهٔ اساسی راه‌حل، این است که برای هر سه عدد دلخواه a, b, c،

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(b, c)).$$

(این اتحاد را می‌توانید به راحتی با در نظر گرفتن همهٔ ترتیب‌های ممکن a, b, c ثابت کنید.)
این اتحاد یادآور خاصیت پخشی ضرب روی جمع است:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

به عبارت دیگر، دو عمل min و max در تمامی خواص جابجایی (مثل $\min(a, b) = \min(b, a)$) و پخشی نسبت به هم، که برای دو عمل ضرب و جمع برقرار است، صدق می‌کنند.

این دو خاصیت جمع و ضرب به ما کمک می‌کردند تا هر فرمول پیچیده بر حسب جمع و ضرب تعدادی متغیر را، بدون اینکه مقدارش تغییر کند، «بسط» دهیم: یعنی به صورت حاصل‌جمعی از تعدادی حاصل‌ضرب بنویسیم. پس با توجه به وجود خواص مشابه برای توابع مینیمم و ماکزیمم، هر فرمولی (مانند $F(x, y, z)$) را که با استفاده از این‌دو تابع از سه متغیر x, y, z ساخته شده باشد، می‌توان ساده‌سازی کرد تا نهایتاً به صورت زیر درآید:

$$F(x, y, z) = \max(\min(-, -, \dots, -), \dots, \min(-, -, \dots, -)),$$

که در هر یک از جاهای خالی، یکی از متغیرها قرار دارد.

حال به دو نکتهٔ اساسی دیگر در مورد توابع مینیمم و ماکزیمم توجه کنید:

اول اینکه، اگر در جاهای خالی $\min(-, -, \dots, -)$ یک متغیر بیش از یک بار آمده باشد، می‌توان بدون اینکه فرمول تغییری کند، تکرارهای آن را حذف کرد. بنابراین فقط مجموعهٔ متغیرهایی که در داخل مینیمم ظاهر می‌شوند، مهم است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$F(x, y, z) = \max(\min(A_1), \dots, \min(A_k)),$$

که هر یک از A_iها زیرمجموعه‌ای از $\{x, y, z\}$ است.

نکتهٔ دوم این است که اگر در فرمول بالا A_i شامل A_j باشد ($i \neq j$)، به وضوح مینیمم اعضای A_i کمتر یا مساوی مینیمم اعضای A_j است و در نتیجه مقدار آن در محاسبهٔ ماکزیمم بی‌تأثیر است. پس می‌توان $\min(A_i)$ را از فرمول حذف کرد. اگر این کار را برای هر دو مجموعهٔ شامل یکدیگر در فرمول انجام دهیم، نهایتاً به جایی می‌رسیم که هیچ کدام از مجموعه‌ها شامل یکدیگر نیستند.

پس اگر عبارت نهایی به صورت زیر باشد:

$$F(x, y, z) = \max(\min(B_1), \dots, \min(B_n)),$$

هر یک از B_i ها زیرمجموعه‌های ناتهی از $\{x, y, z\}$ هستند و هیچ کدام شامل دیگری نیست. البته در این نمایش ترتیب B_iها اهمیتی ندارد، اما می‌توان نشان داد که اگر دو فرمول به صورت بالا (و دارای شرایط ذکرشده برای B_i ها) متحد باشند، مجموعه‌های B_i در آن‌دو یکسان است و در نتیجه هر فرمول نمایش یکتایی به صورت بالا (در حد جایگشتی روی B_i ها) دارد. (این نکته را می‌توانید با مقدارگذاری‌های متغیرهای x, y, z از مجموعهٔ $\{0, 1\}$ نشان دهید.)

حال برای یک خانواده مانند $\{B_1, \dots, B_n\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی $\{x, y, z\}$ که هیچ کدام شامل دیگری نباشد، به راحتی می‌توان دید که $n \leq 3$. برای شمارش همهٔ این خانواده‌ها هم روی n حالت بندی کنید:

- $n = 1$، در این‌صورت B_1 یک زیرمجموعهٔ ناتهی از یک مجموعهٔ ۳ عضوی است که ۷ حالت دارد.
- $n = 2$، در این‌صورت یا B_1 و B_2 هر دو تک‌عضوی هستند (۳ حالت) یا هر دو، دوعضوی (۳ حالت) و یا یکی تک‌عضوی و دیگری مجموعهٔ مکملش (۳ حالت).
- $n = 3$، در این‌صورت یا هر سهٔ B_i ها تک‌عضوی هستند، (یک حالت) و یا هر سه دوعضوی (یک حالت).

پس تعداد کل فرمول‌های جالب برابر با تعداد خانواده‌های با خاصیت بالاست که بنابر شمارش بالا برابر $1 + 1 + 3 \times 3 + 7$ مساوی ۱۸ حالت است.