



باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست.
«امام خمینی (ره)»



دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۴۰۰

چهلمین دوره المپیاد ریاضی

صبح - ساعت: ۰۹:۰۰

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات	مدت آزمون (دقیقه)
۲۵	۲۱۰

شماره صندلی:

نام خانوادگی:

نام:

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

۱. کد دفترچه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه شما تصحیح نخواهد شد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه برگه‌های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
۴. برگه پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج‌گزینه‌ای هستند، پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
۶. شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
۷. دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.
۸. وبگاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.



آزمون مرحله اول چهلمین المپیاد ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

سؤال ۱			
یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سوالات پاسخ‌کوتاه بخشی

به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.

۱. معادله زیر چند جواب در اعداد حقیقی دارد؟

$$[x] + [-x] = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

توضیح: منظور از $[x]$ جزء صحیح عدد x است.

: جواب عددی زوج است.



آزمون مرحله اول چهلمین المپیاد ریاضی کشور

۲. یک ۱۴۰۰ ضلعی محدب، حداکثر چند زاویه حاده می‌تواند داشته باشد؟

🔊 : جواب عددی فرد است.

۳. حداکثر چند عدد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰ می‌توان انتخاب کرد که حاصل جمع هر دوتای نه لزوماً متمایز آن‌ها بر ۳ بخشپذیر نباشد؟

🔊 : جواب ارقام تکراری دارد.

۴. در قرعه‌کشی وام یک صندوق قرض‌الحسنه خانگی بین علی، رضا و محمد به صورت زیر عمل می‌شود. ابتدا حروف اسم هر فرد روی کاغذهای مجزا نوشته می‌شود. مثلاً حرف ع یک بار و حرف م دوبار نوشته می‌شود. سپس این ۱۰ کاغذ داخل یک گلدان ریخته می‌شود. هربار یک کاغذ از گلدان بیرون آورده می‌شود. اگر با بعضی از حروفی که تا بحال از گلدان بیرون آورده‌ایم بتوان اسم یک فرد را تشکیل داد، آن فرد برنده شده و در غیر این صورت یک حرف دیگر از گلدان بیرون می‌آوریم. مثلاً اگر تاکنون حروف ح، ل، ا، ع و ی بیرون آمده باشد، علی برنده است. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) قرعه‌کشی عادلانه است و همه شانس مساوی برای برنده شدن دارند.

(۲) شانس برنده شدن علی بین ۵۰ تا ۶۰ درصد است.

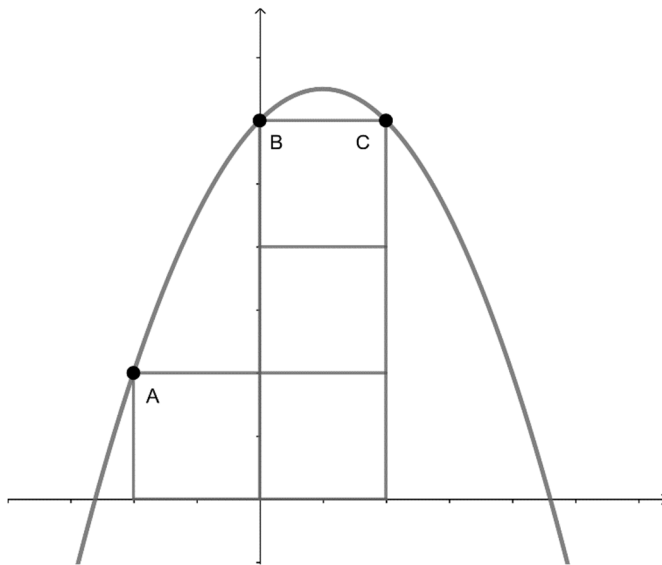
(۳) شانس برنده شدن رضا از یک سوم کمتر است.

(۴) شانس برنده شدن رضا و علی مساوی است.

(۵) گزینه‌های ۱ و ۴ درست اند.



آزمون مرحله اول چهارمین المپیاد ریاضی کشور



۵. چهار مربع به ضلع ۲ مانند شکل کنار یکدیگر قرار دارند. یک سهمی از نقاط A ، B و C عبور کرده و محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله نقاط تقاطع چند است؟

- (۱) ۷
- (۲) $2\sqrt{13}$
- (۳) $5\sqrt{2}$
- (۴) $3\sqrt{7}$
- (۵) ۸

۶. برای مثلث ABC می‌دانیم $AB > AC > BC$. مثلث را حول یکی از اضلاع آن 360° درجه دوران می‌دهیم تا شکلی سه‌بعدی ایجاد شود. بیشترین حجم بدست آمده از دوران حول کدام ضلع پدید می‌آید؟

- (۱) AB
- (۲) AC
- (۳) BC
- (۴) نمی‌توان تعیین کرد.
- (۵) برای هر سه ضلع یکسان است.

۷. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های A ، B و C را از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ انتخاب کرد به‌طوری‌که داشته باشیم $A \subseteq (B \cap C)$

- (۱) 5^1
- (۲) 10^5
- (۳) 4^1
- (۴) 10^4
- (۵) 3^1



آزمون مرحله اول چهلمین المپیاد ریاضی کشور

۸. چند عدد طبیعی ۵ رقمی وجود دارد که باقیمانده تقسیم آن‌ها بر هر سه عدد ۴ و ۵ و ۱۸ برابر ۳ باشد؟

🔊 : باقیمانده جواب بر ۷ برابر ۳ است.

۹. توابع $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به این صورت تعریف می‌شوند که $f(x) = |x + 1| - 4$ و $g(x) = f(f(x))$. در این صورت معادله $f(x) = g(x)$ چند جواب در اعداد حقیقی دارد؟

۱۰. مثلث ABC زاویه منفرجه ندارد. همچنین می‌دانیم $\angle ABC = 3 \times \angle ACB$. عمود منصف ضلع BC نیمساز داخلی زاویه $\angle ABC$ را در نقطه P قطع می‌کند. حداکثر مقدار زاویه $\angle PCA$ چند درجه است؟

🔊 : جواب عددی طبیعی و فرد است.



آزمون مرحله اول چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱۱. اگر دو عدد طبیعی a و b حداقل سه مقسوم علیه مشترک داشته باشند و مقسوم علیه های مشترک آن ها به ترتیب $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k$ باشد، تعریف می کنیم: $D(a, b) = d_p$. به طور مثال $D(40, 60) = 4$ زیرا مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۴۰ و ۶۰ به ترتیب اعداد $1 < 2 < 4 < 5 < 10 < 20$ می باشند. کدامیک از گزینه های زیر درست است؟ (در هر گزینه فرض کنید a و b دو عدد طبیعی دلخواه با حداقل سه مقسوم علیه مشترک اند)

(۱) $D(2a, 2b)$ همواره عددی زوج است.

(۲) $D(10! + 20, 20! + 10) = 4$

(۳) $D(a^2, b^2)$ همواره مربع کامل است.

(۴) $D(2^{100} - 1, 3^{100} - 1) = 7$

(۵) $D(a, b)$ حداکثر یک عامل اول دارد.

۱۲. به چند طریق می توان هر خانه از یک جدول 4×4 را سیاه یا سفید کرد به طوری که هر خانه دقیقاً با دو خانه غیر همرنگ با خود، ضلع مشترک داشته باشد؟

۱۳. اگر $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ به طوری که $abc = 10^{11}$ و همچنین

$$\log(a) \log(bc) + \log(b) \log(ac) + \log(c) \log(ab) = 40$$

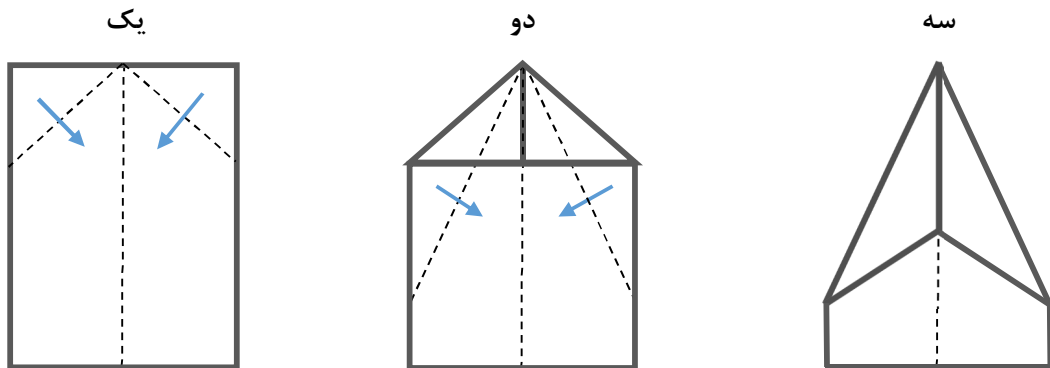
حاصل $(\log(a))^2 + (\log(b))^2 + (\log(c))^2$ را بیابید.

🔔: جواب عددی طبیعی و بر ۳ بخشپذیر است.



آزمون مرحله اول چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱۴. کاغذی با ابعاد ۶ در ۸ سانتی متر را مانند شکل چند بار تا میزنیم.



مساحت شکل سه چند سانتی متر مربع است؟

- (۵) $35 - 5\sqrt{2}$ (۴) $36 - 6\sqrt{2}$ (۳) $37 - 7\sqrt{2}$ (۲) $38 - 8\sqrt{2}$ (۱) $39 - 9\sqrt{2}$


۱۵. تعداد سه تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ را بیابید به طوری که رقم یکان حاصل $a \times b \times c$ برابر با ۳ باشد.

- (۵) ۱۶۰۰۰ (۴) ۱۵۰۰۰ (۳) ۸۰۰۰ (۲) ۵۰۰۰ (۱) ۱۰۰۰



آزمون مرحله اول چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱۶. ۱۶ لامپ خاموش در خانه‌های یک جدول 4×4 قرار دارند. برای هر مربع 2×2 از این جدول کلیدی وجود دارد که فشردن آن باعث تغییر وضعیت ۴ لامپ داخل این مربع شده و لامپ دیگری را تغییر وضعیت نمی‌دهد. با فشردن هر تعداد دلخواه از این کلیدها چند الگوی مختلف از لامپ‌های این جدول می‌توانیم بدست آوریم؟

 : در بین ارقام جواب، یک رقم ۲ وجود دارد.

۱۷. سه بانک جدید در شکرستان باز شده‌اند. بانک اول، انتهای هر سال به اندازه ۲۰ درصد موجودی حساب، به آن سود واریز می‌کند. بانک دوم، انتهای هر ۵ سال موجودی حساب را دو برابر می‌کند. بانک سوم انتهای سال n ام به مقدار $\frac{5}{4} \times n$ درصد موجودی حساب، به آن اضافه می‌کند. امید می‌خواهد پول خود را برای ۲۰ سال در یکی از بانک‌ها پس‌انداز کرده و به سودهایش هم دست نزنند. سرمایه‌گذاری در کدام بانک سود بیشتری خواهد داشت؟

(۱) بانک اول (۲) بانک دوم (۳) بانک سوم (۴) فرقی ندارد. (۵) بستگی به پول اولیه امید دارد.

۱۸. عدد $n \geq 3$ را جالب گویند اگر بتوان n نقطه متمایز روی محیط یک مربع انتخاب کرد که راس‌های یک n ضلعی منتظم را تشکیل دهند. مجموع همه اعداد جالب چند است؟

۱۹. چند عدد طبیعی n داریم به‌طوری‌که اعداد $a, b \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند که

$$2^n + n^a = 32n^b$$




آزمون مرحله اول چهلمین المپیاد ریاضی کشور

۲۰. در یک ساختمان ۸ طبقه هیچ طبقه‌ای خالی از سکنه نیست. دو ساکن از این ساختمان را همسایه می‌نامیم اگر در یک طبقه یا دو طبقه مجاور سکونت داشته باشند. می‌دانیم هر ساکن از این ساختمان با ۶ یا ۱۰ نفر دیگر همسایه است. اگر تعداد ساکنان این ساختمان برابر n باشد، برای n چند مقدار قابل قبول وجود دارد؟

۲۱. هرگاه $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ و $y \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ و بدانیم $\tan(x) = \cot(y)$ و

$\cos(\pi \times \cos(x)) = \sin(\pi \times \sin(y))$ مقدار عددی $\frac{1}{\cos(x)}$ چند است؟

 : جواب عددی طبیعی است.

۲۲. مربعی به ضلع یک داده شده است. نقطه‌ای مانند G درون این مربع را "متعادل" می‌گوییم اگر سه نقطه A ، B و C درون یا روی محیط این مربع باشند که تشکیل مثلثی به مساحت $\frac{1}{2}$ دهند و مرکز ثقل آن مثلث بر G منطبق باشد. مجموعه همه نقطه‌های متعادل چه شکلی تشکیل می‌دهند؟ (منظور از مرکز ثقل در یک مثلث محل برخورد سه میانه است)

- (۱) نقاط روی محیط مربعی با اضلاع موازی اضلاع مربع اصلی
- (۲) نقاط روی محیط و یا درون مربعی با اضلاع موازی اضلاع مربع اصلی
- (۳) نقاط روی محیط مربعی با اضلاع موازی قطرهای مربع اصلی
- (۴) نقاط روی محیط و یا درون مربعی با اضلاع موازی قطرهای مربع اصلی
- (۵) نقاط روی محیط دایره‌ای به مرکز محل برخورد قطرهای مربع اصلی



آزمون مرحله اول چهلمین المپیاد ریاضی کشور

۲۳. ابتدا یک عدد طبیعی روی تخته نوشته شده است. در مرحله بعد ابتدا آن را در کوچکترین عدد طبیعی ممکن ضرب می‌کنیم تا مربع کامل شود و سپس جذر آن را بجای عدد اولیه روی تخته می‌نویسیم. به همین ترتیب روی عدد جدید همین عمل را تکرار می‌کنیم و اعداد جدیدی را جایگزین اعداد قبلی می‌کنیم. تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که با حداکثر چهار بار انجام عمل بالا روی آن‌ها به عدد ۱۰ برسیم چند است؟ برای مثال اگر ابتدا عدد ۲۴ نوشته شده باشد، به جای آن عدد ۱۲ نوشته می‌شود زیرا کوچک‌ترین عدد مربع کامل مضرب ۲۴ برابر ۱۴۴ است و جذر آن برابر ۱۲ می‌شود.

۲۴. تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم تا سه عدد a, b, c حاصل شود. در چند حالت با سه پاره‌خط با طول این سه عدد، می‌توان یک مثلث ساخت؟

۲۵. عدد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. رقم دوم سمت راست ممیز در عدد A چند است؟

$$A = \frac{202}{100^2} + \frac{204}{101^2} + \frac{206}{102^2} + \dots + \frac{402}{200^2}$$

سعادتمند پاشیده

