Física I

2º Semestre de 2013

Instituto de Física- Universidade de São Paulo

Aula – 9 Rotação, momento inércia e torque

Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdirg@if.usp.br
Fone: 3091.7104

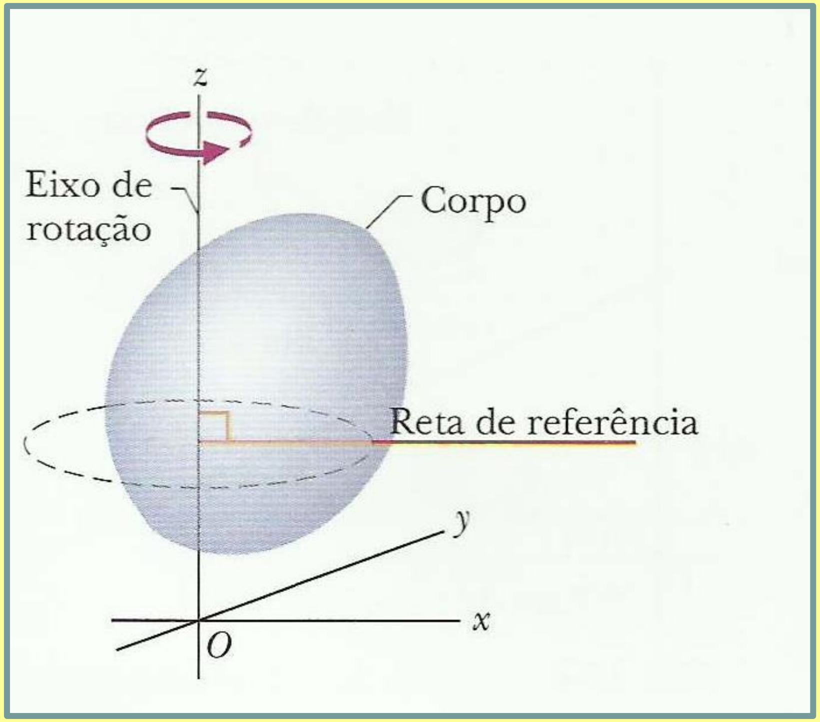
Variáveis da rotação

Neste tópico, trataremos da rotação em torno de um eixo fixo no espaço, ou em torno de um eixo que se move sem alterar sua direção no espaço.

Corpo Rígido

Eixo Fixo

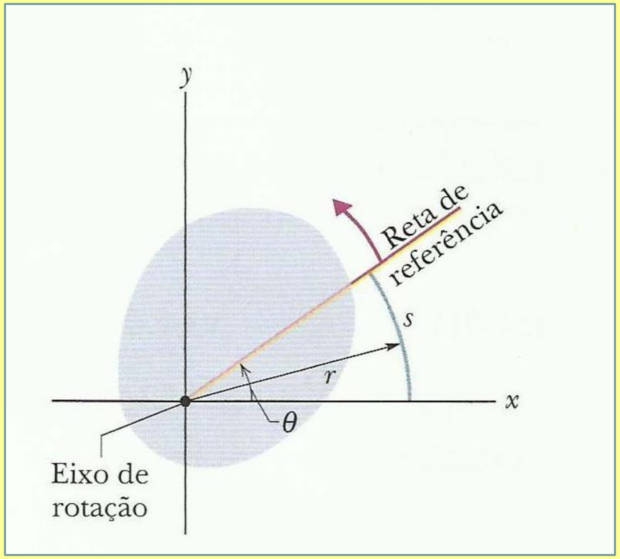
Eixo de Rotação



Cinemática Rotacional

Posição angular

Seja um corpo rígido de massa M, que gira em torno de um eixo fixo. Cada ponto deste corpo descreve um círculo, cujo raio r_i é a distância entre o ponto e o eixo de rotação.



A posição angular dessa reta é o ângulo que a reta de referência faz com a reta fixa.

O ângulo é medido em radianos.

Deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

É positivo no sentido anti-horário.

Quando o corpo gira de um ângulo dθ, o ponto descreve um arco de comprimento dS_i

$$dS_i = r_i d\theta$$

Cinemática Rotacional

Velocidade angular

A taxa de variação do ângulo é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de velocidade angular ω.

Para os valores médios temos:

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

velocidade angular instantanea

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Delta S = r\Delta\theta$$

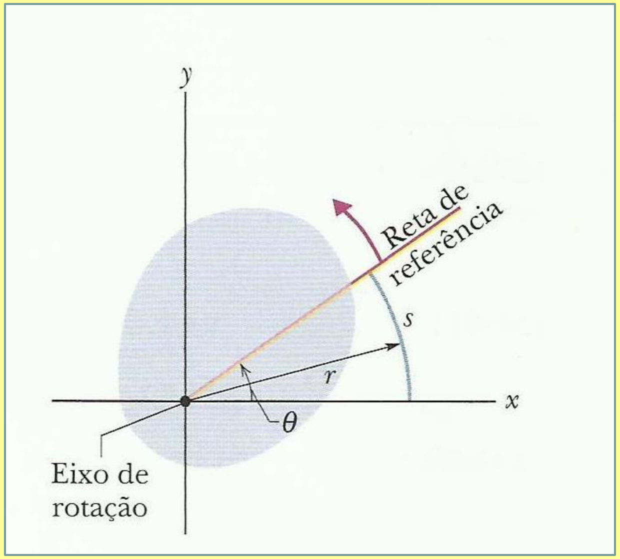
$$dS_i = r_i d\theta$$

Dividindo-se por Δt

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{r_i d\theta}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt}$$

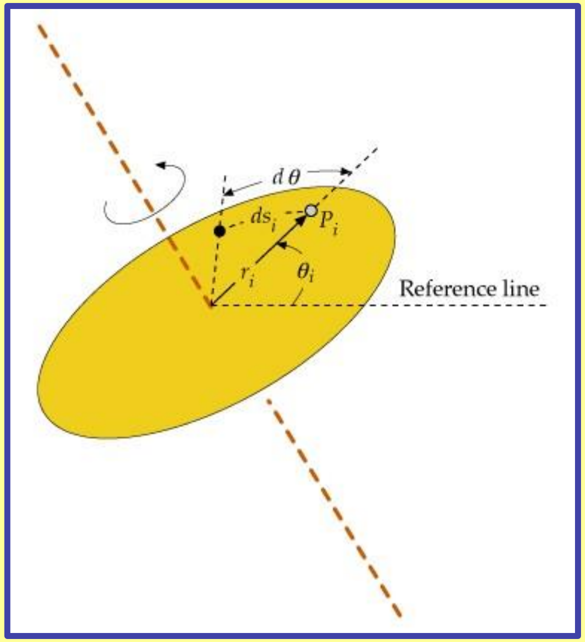
$$\omega = \frac{v_i}{r_i}$$

$$v_i = r_i \omega$$



aceleração angular

Analogamente, a taxa de variação da velocidade angular é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de aceleração angular α.

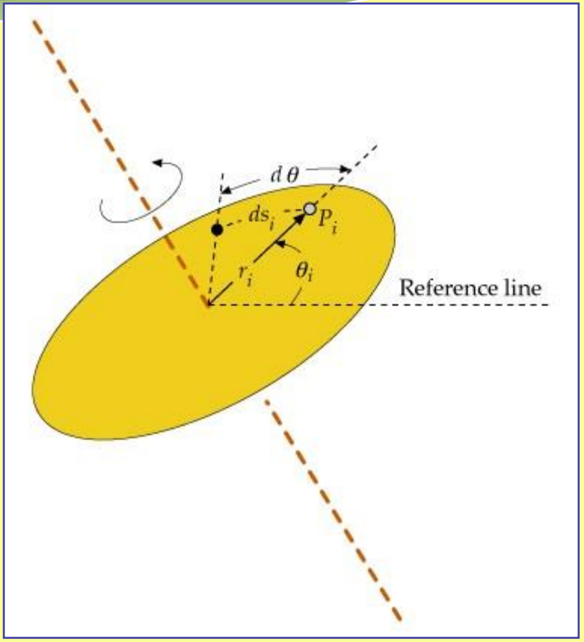


$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Se α é constante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \right\} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

Exemplo



Um CD gira, do repouso até 500 rpm, em 5,5 s.

(a) Qual a aceleração angular suposta constante?

(b) Quantas voltas o disco dá em 5,5 s?

(c) Qual a distância percorrida por um ponto a 6,0 cm do centro, nestes 5,5 s?

$$\omega = 500rpm = 500 \cdot 2\pi / 60 = 52{,}36\, rad/s$$

(a) $$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$52{,}36 = 0 + \alpha 5{,}5$$

$$\boxed{\alpha = 9{,}5 rad/s^2}$$

(b) $$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2} 9{,}5 (5{,}5)^2$$

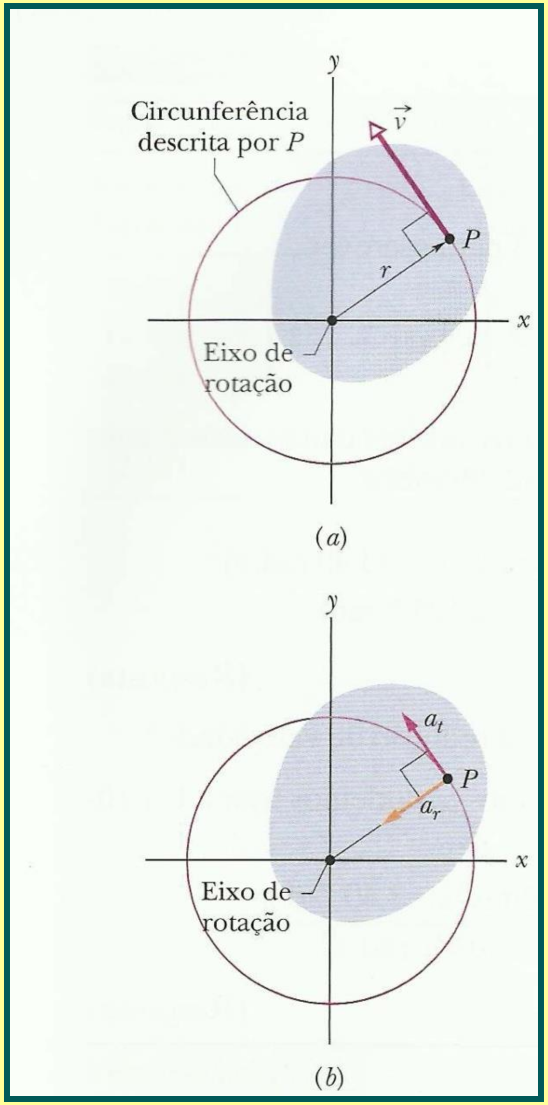
$$\boxed{\theta = 143{,}7 rad}$$ = 22,9 voltas

(c) $$\Delta S = r \cdot \Delta\theta = 0{,}06 \cdot 143{,}7 = 8{,}62 m$$

Acelerações e velocidades angulares

Já vimos que:

$$dS_i = r_i d\theta \quad \Rightarrow \quad v_i = r_i \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_i}{r_i}$$



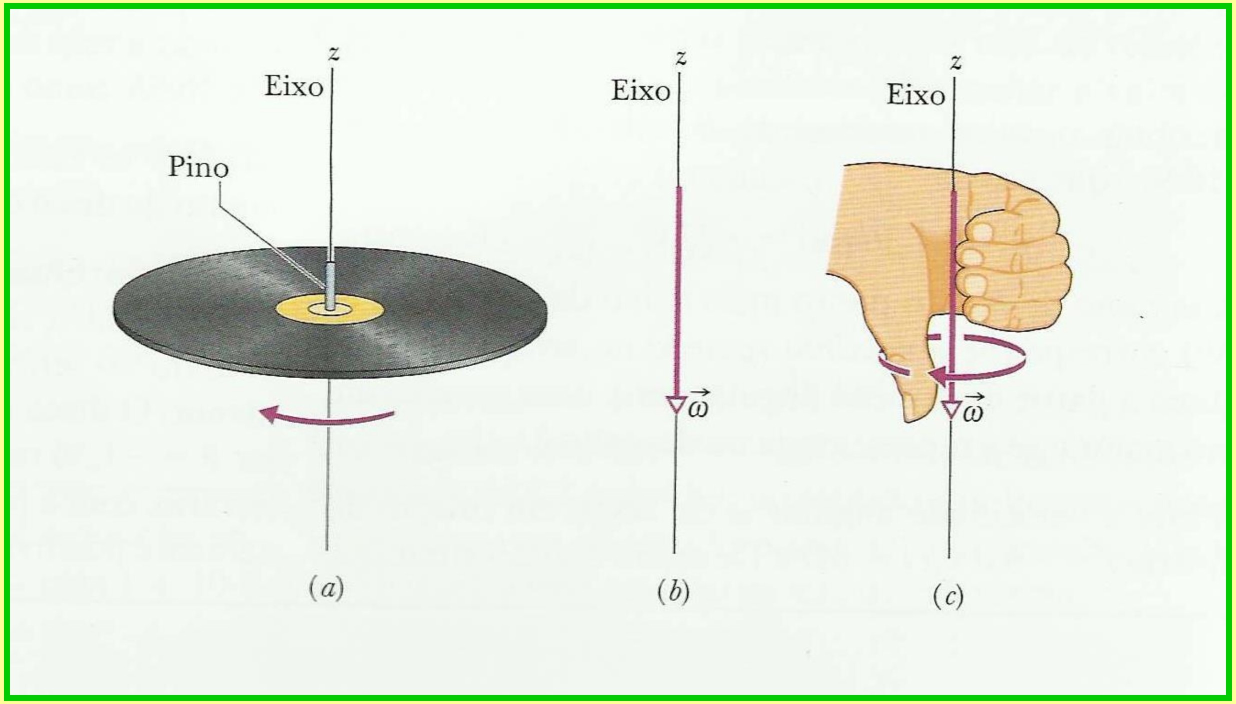
Analogamente, para a aceleração tangencial temos:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r_t \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_t = r\alpha$$

Mas, como o movimento é circular, existe uma aceleração centrípeta

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_t} = \frac{(r_t\omega)^2}{r_t} \quad \Rightarrow \quad a_c = r_t\omega^2$$

velocidade angular é uma grandeza vetorial



Energia Cinética Rotacional

A energia cinética de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é a soma das energias cinéticas das partículas individuais que constituem o corpo.

Para a i^{esima} partícula, de massa m_i e velocidade v_i, temos:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Somando sobre todas as partes, obtemos a energia cinética do corpo:

$$K = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i \left(m_i r_i^2 \right)}$$

momento de inércia (I)

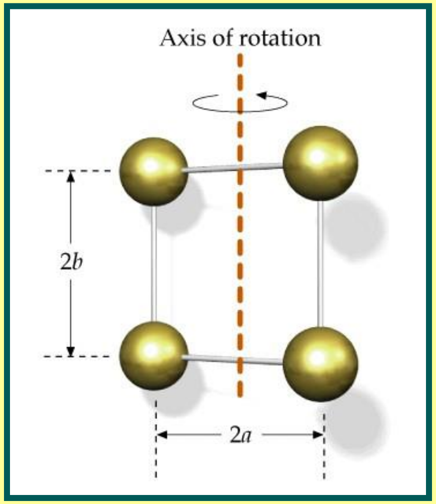
$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right)$$

Energia Cinética Rotacional

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Exemplo

Um corpo consiste de 4 partículas pontuais, com massas m, ligadas por hastes sem massa, como na figura ao lado. O sistema gira com velocidade angular ω em torno do centro do corpo. (a) Determine o momento de inércia do corpo. (b) Determine a energia cinética do corpo.

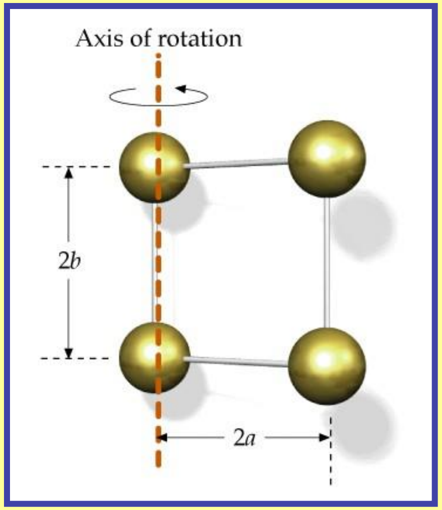


$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right) \Rightarrow I = 4ma^2$$

Energia Cinética Rotacional

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K = 2ma^2\omega^2$$

Repetir os cálculos para a nova configuração ao lado.



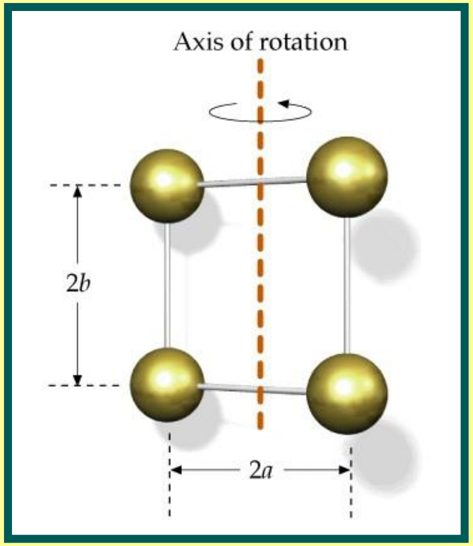
$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right) \Rightarrow I = 2m(2a)^2 = 8ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K = 4ma^2\omega^2$$

Cálculos do Momento de Inércia

Para sistemas discretos:

$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right)$$



Corpos contínuos

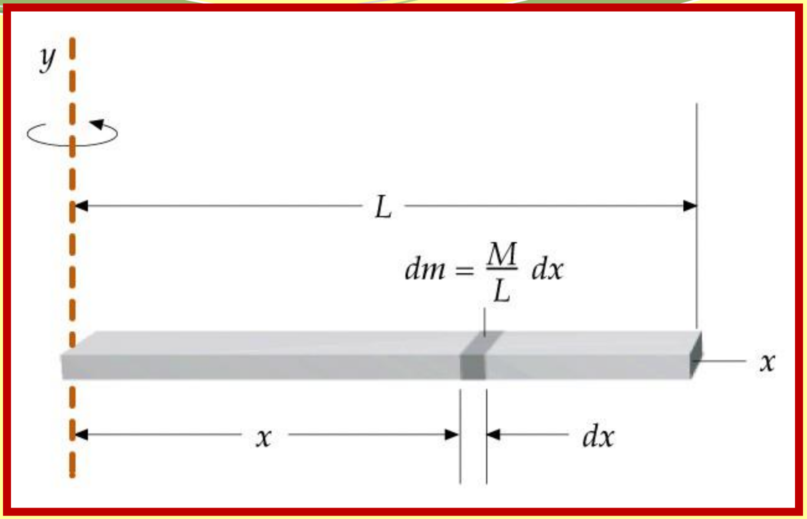
Se subdividirmos o corpo em pequenas porções, no limite quando a massa de cada porção vai a zero, a somatória acima se transforma na integral:

$$I = \int r^2 dm$$

Onde r é a distância ao eixo, de cada parcela dm do corpo.

Momento de Inércia de uma barra

Calcule o momento de inércia de uma barra fina de comprimento L e massa M, em relação ao eixo que passa por sua extremidade.



$$I = \int r^2 dm$$

Um pedaço dm da barra, situado na posição x, ocupa uma extensão dx da barra.

Considerando a densidade linear de massa λ.

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

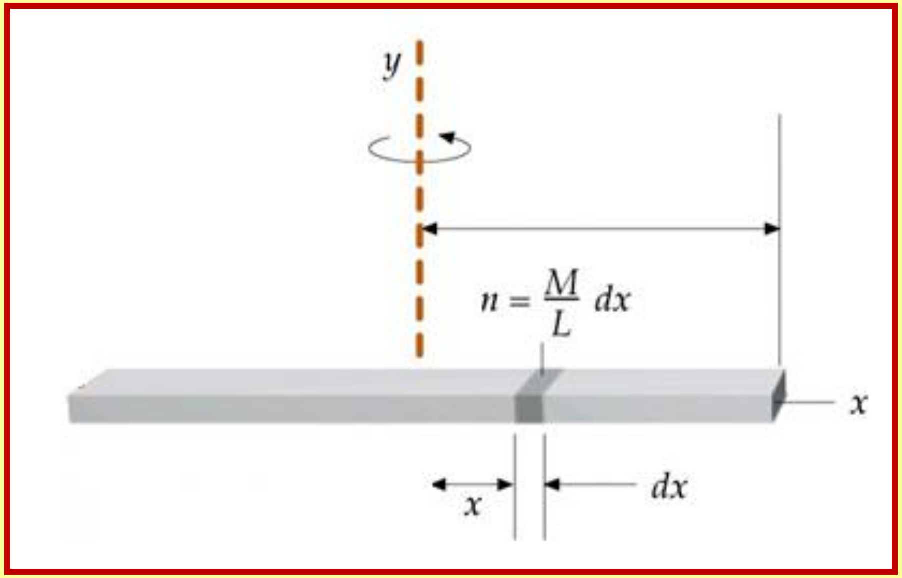
$$r^2 = x^2 \qquad dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx \quad \Rightarrow \quad I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Momento de Inércia de uma barra

eixo no centro da barra.

$$I = \int r^2 dm$$



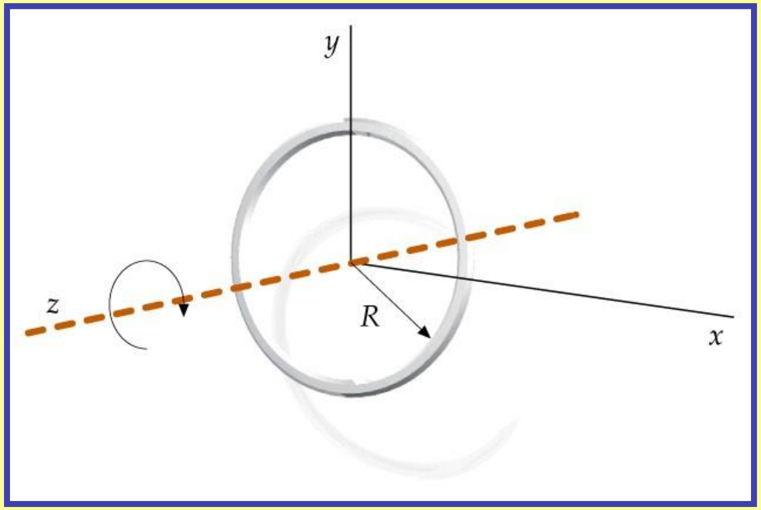
$$r^2 = x^2 \qquad dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3} \right) = \frac{M}{L} 2 \left(\frac{(L/2)^3}{3} \right) = \frac{ML^2}{12}$$

Momento de Inércia de um anel

Calcule o momento de inércia de um anel circular de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.



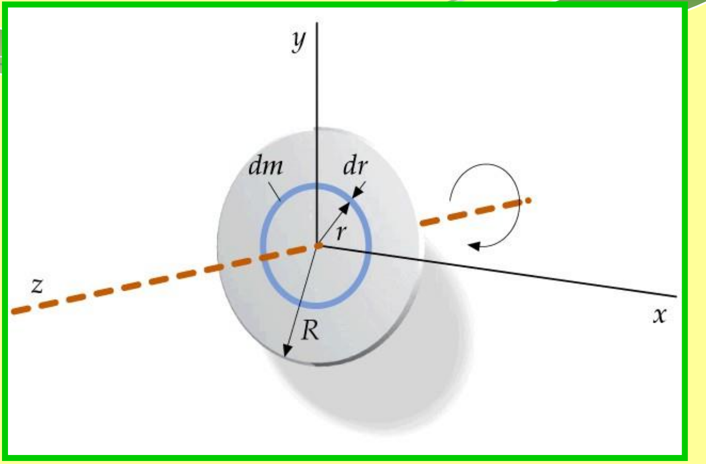
$$I = \int r^2 dm$$

Todos os pedaços dm do anel, estão situados a uma mesma distância R do eixo.

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

Momento de Inércia de um disco

Calcule o momento de inércia de um disco homogêneo de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.



$$I = \int r^2 dm$$

Podemos subdividir o disco em uma série de anéis concentricos.

Cada anel tem uma massa dm, raio r e espessura dr.

Considerando a densidade superficial de massa σ.

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

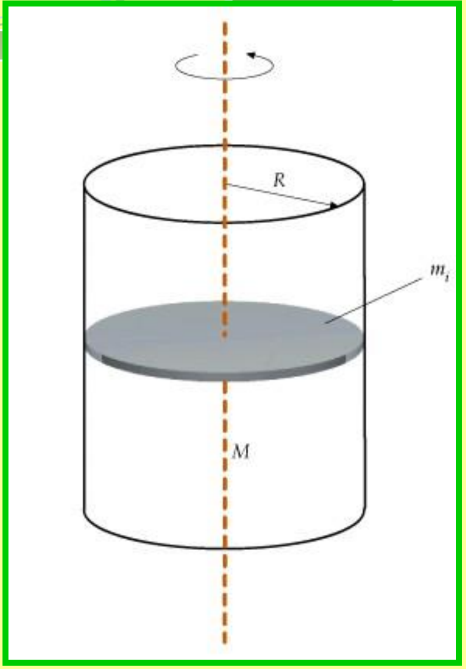
$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$I = \int_0^R r^2 \frac{M}{R^2} 2r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Momento de Inércia de um cilindro

momento de inércia de um cilindro maciço homogêneo de raio R e massa M, em relação ao seu eixo.



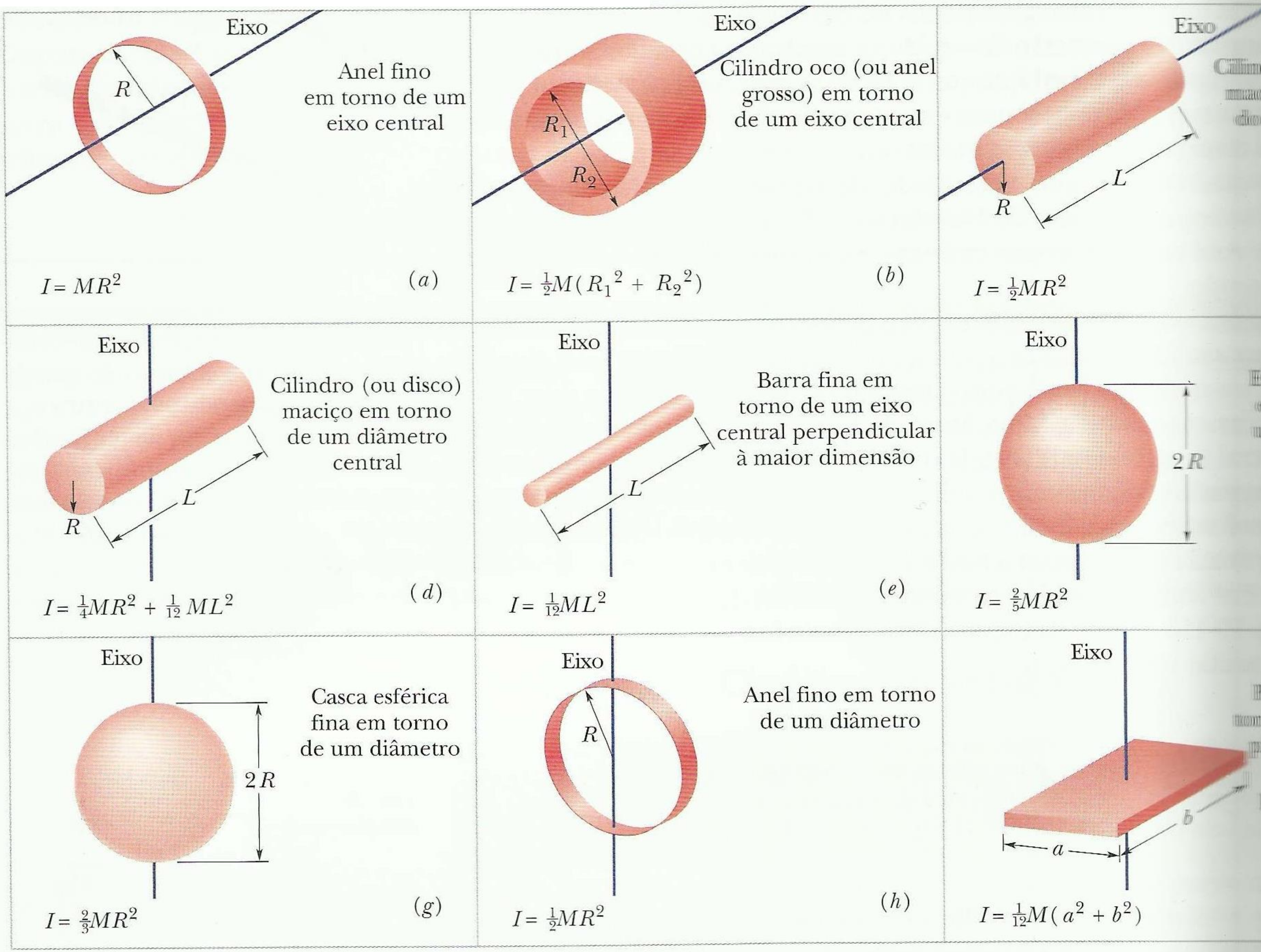
$$I = \int r^2 dm$$

Podemos subdividir o cilindro em uma série de discos paralelos.

Como todos os discos são equivalentes, podemos considerar o momento de inércia do cilindro como igual ao dos discos.

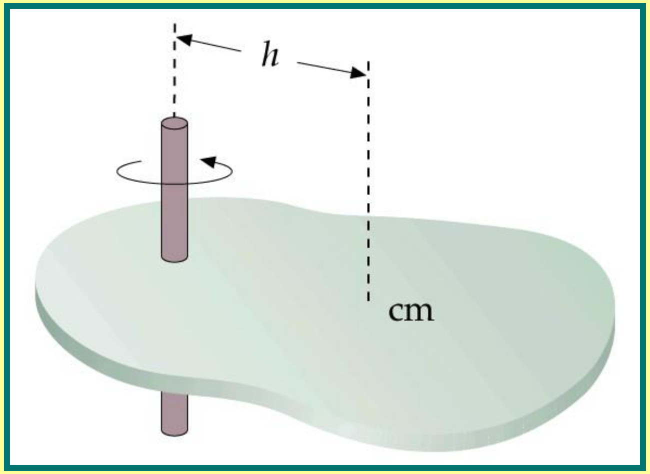
$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Alguns momentos de Inércia



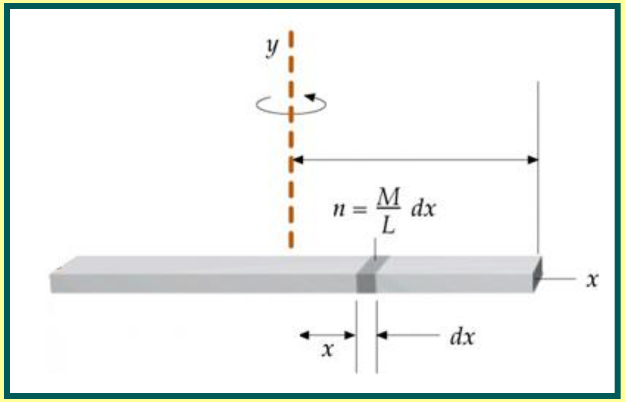
Teorema dos Eixos Paralelos

Este teorema permite que se calcule o momento de inércia de um corpo de massa M em relação a um eixo qualquer, a partir do seu valor para o centro de massa, sabendo-se a distância h entre os dois eixos.



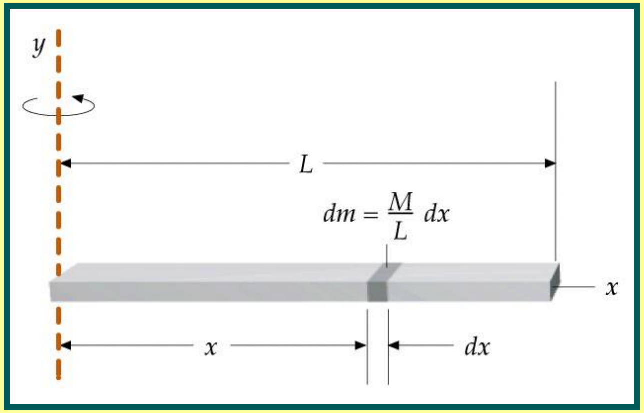
$$I = \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad I = I_{cm} + Mh^2$$

Exemplo:



$$I = I_{cm} + Mh^2$$

$$h = \frac{L}{2}$$

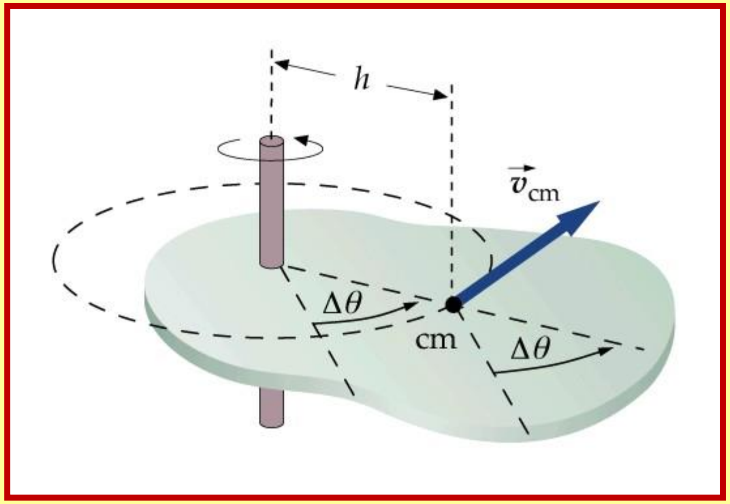


$$I = I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$$

$$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{ML^2}{3}$$

Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelos

Vamos calcular a energia cinética de rotação para o eixo paralelo do corpo de massa M ao lado, quando girando com velocidade ω.



$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

A energia cinética de rotação um corpo pode ser escrita como a energia cinética de rotação em relação ao CM mais a energia de translação do CM.

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = K_{rotação_{CM}} + K_{translaçao_{CM}} \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Mas, $v_{cm} = h\omega$

e $\omega_{cm} = \omega$

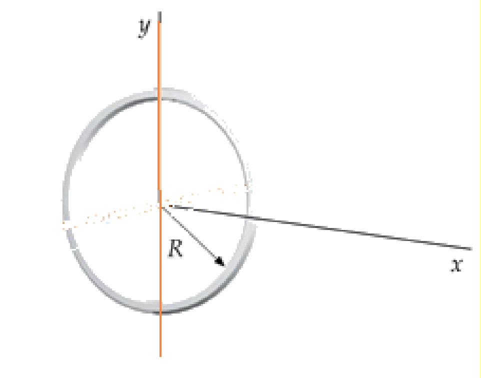
$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M h^2\omega^2$$

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

Teorema dos Eixos Paralelos

Vamos calcular o momento de inércia do corpo ao lado.

Mas inicialmente, calcularemos o momento de inércia de uma espira de massa m e raio R, através do eixo que passa por seu cento de massa.



$$\lambda = \frac{m}{2\pi R} \Rightarrow dm = \lambda dl = \frac{m}{2\pi R} R d\theta$$

$$I = 4\int_0^{\pi/2} (R\cos\theta)^2 \frac{m}{2\pi R} R d\theta = \frac{2mR^2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^2 d\theta \qquad I_{cm} = \frac{mR^2}{2}$$

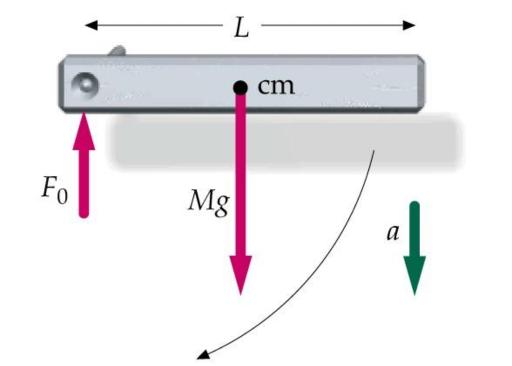
Mas, se esta espira estiver com seu eixo a uma distância l do eixo principal, ela contribuirá para o momento de inércia total, com

$$dI = \frac{dm \cdot R^2}{2} + dm \cdot l^2 \qquad dm = \frac{M}{L} dl \qquad dI = \frac{\frac{M}{L} dl \cdot R^2}{2} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{Mdl \cdot R^2}{2L} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2 = \frac{MR^2}{2} + \frac{ML^2}{12}$$

Exemplo

Uma barra de comprimento L e massa M, articulada em sua extremidade, é largada do repouso, da posição horizontal. Determine:



(a) a sua velocidade angular, na posição vertical,

(b) a força exercida pelo pivô sobre a barra, neste instante

(c) a velocidade angular inicial necessária para a barra chegar até uma posição vertical superior.

Considerando o sistema como sendo constituído pela barra, pivô e a Terra, temos conservação da energia mecânica, então

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + Mgy_{cm}$$

$$0 = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 + Mg\left(-\frac{L}{2}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$F_0 - Mg = Ma_c = M\frac{L}{2}\omega^2$$

$$F_0 = M\left(g + \frac{L}{2}\frac{3g}{L}\right) = \frac{5Mg}{2}$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

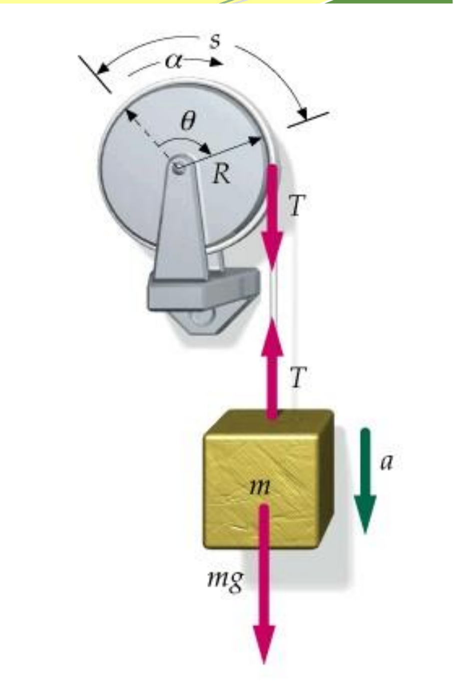
$$\frac{1}{2} I\omega^2 + Mgy_{cm} = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 + Mg(-\frac{L}{2}) = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Exemplo

Um objeto de massa m está suspenso por um fio de massa m_f que foi enrolado na polia, que tem raio R e massa m_r. Suponha que toda a massa da polia esteja em sua borda e que no instante inicial o corpo esteja em repouso e o fio enrolado. Determine qual a velocidade do corpo quando ele tiver caído uma distância d.

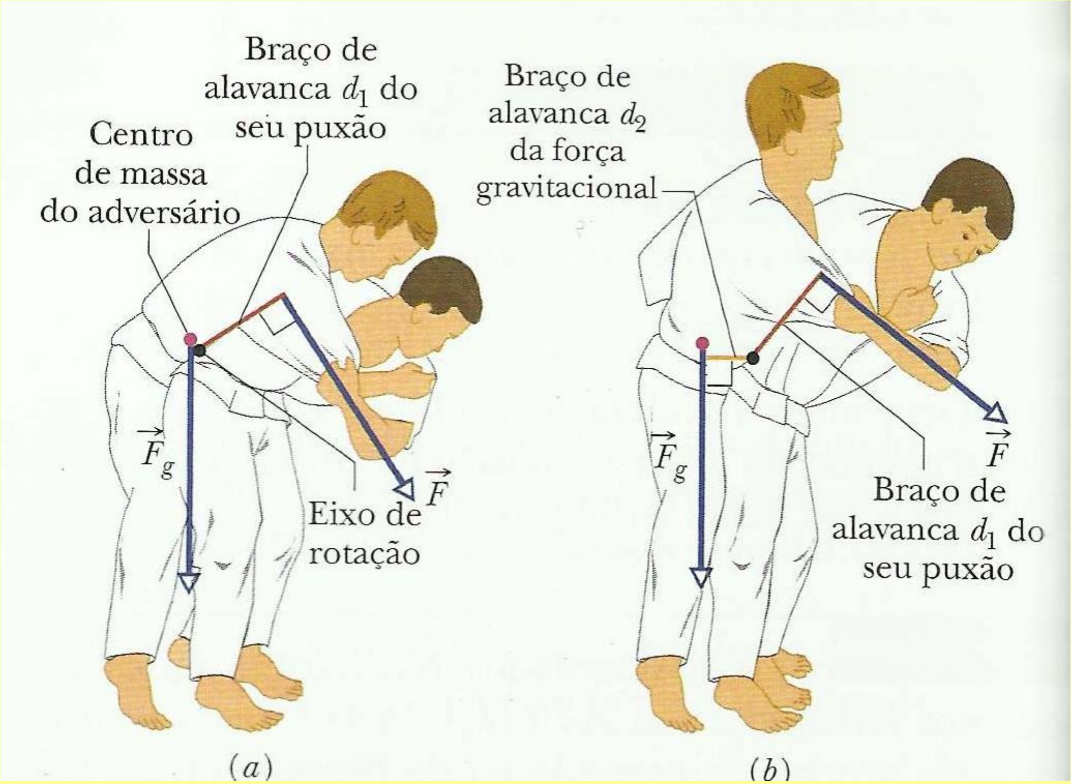


Considerando o sistema como sendo constituído pela corpo, polia e a Terra, temos conservação da energia mecânica, então

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

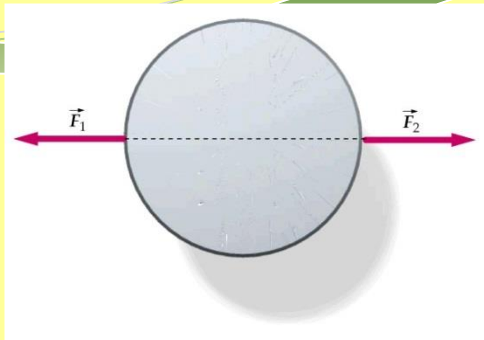
$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_f v^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-d) + m_f^* g(-d/2) \\ I &= m_p R^2 \\ m_f^* &= \frac{d}{L}m_f \end{aligned}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{(2mL + m_f d)gd}{(m_f + m + m_p)L}}$$

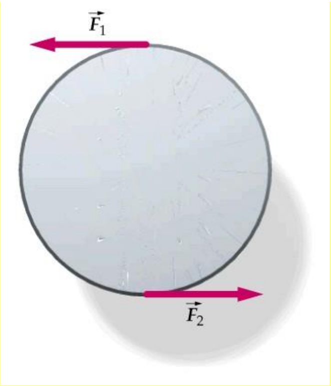
Rotação, inércia, torque



Torque

Já vimos a Segunda Lei de Newton, onde a resultante das forças externas provoca a aceleração do centro de massa de sistemas. Porém, quando a linha de ação das forças externas não passa pelo centro de massa, temos um segundo efeito, que é a rotação do sistema. Esta rotação é acelerada. Assim, temos o equivalente à Segunda Lei de Newton, para a rotação.





Considere uma partícula de massa m, presa a uma barra de comprimento r. Uma força F é aplicada à partícula, como na figura ao lado. Para a componente tangencial da força, temos:

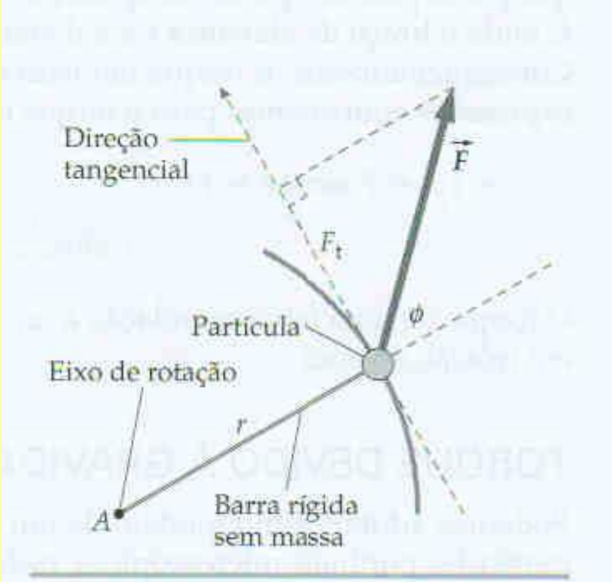


FIGURA 9-19

$$F_t = ma_t$$

Onde, $F_t = F\sin\Phi$

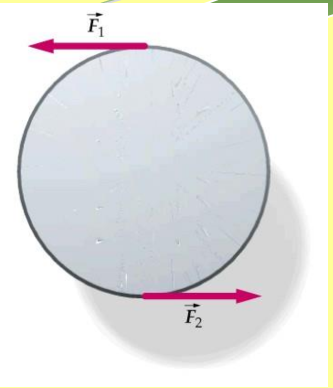
Usando-se $a_t = r\alpha$ e multiplicando a equação por r, temos:

$$rF_t = mr^2\alpha$$

O produto rF_t é o Torque τ em relação ao eixo de rotação A

$$\tau = mr^2\alpha$$

Torque



Um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é uma coleção de partículas, com as mesmas velocidade e aceleração angulares.

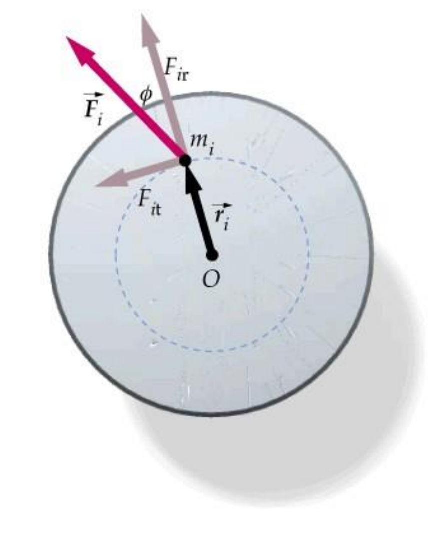
$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Somando sobre todas as partículas do corpo, temos:

$$\sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = (\sum m_i r_i^2)\alpha = I\alpha$$

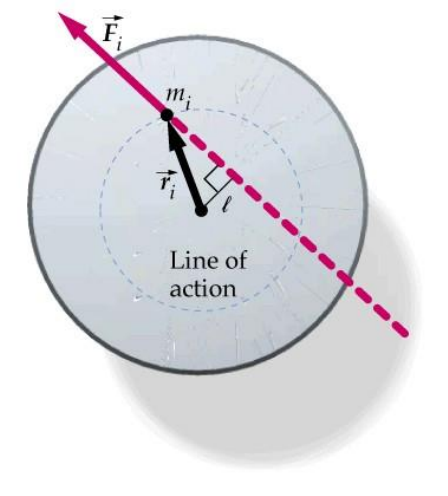
$$\tau_{ext_{res}} = I\alpha$$

Segunda Lei de Newton para a rotação



Para rotações, o que nos interessa são as componentes tangenciais da força

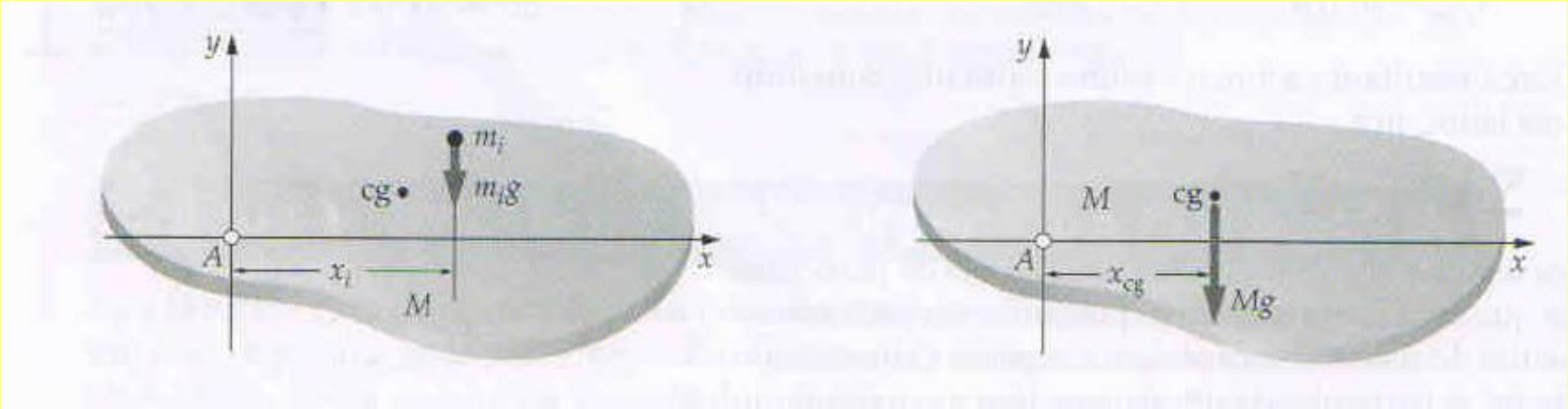
$$\tau = F_t r = F \sin\phi \cdot r = Fr\sin\phi = Fl$$



Onde, l é o "braço de alavanca"

Exemplo

Considere um corpo extenso de massa M, apoiado pelo eixo A e submetido à força gravitacional.



O torque sobre cada partícula constituinte será:

$$\tau_i = F_i r_i = m_i g x_i$$

O torque total sobre o corpo será a soma dos torques sobre todas as partículas constituintes

$$\tau_{ext_{res}} = \sum m_i g x_i = (\sum m_i x_i) g = M x_{cm} g = P x_{cm}$$

Exemplo

Uma bicicleta ergométrica possui uma roda com grande massa (2,4 kg) e raio R= 35 cm. Aplica-se uma força de 18 N a uma distância de 7 cm do eixo da roda. Após 5 s, qual é a velocidade angular da roda?

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t \\ \tau_{ext_{res}} = I\alpha = Fr \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{Fr}{I} = \frac{Fr}{MR^2}$$

$$\omega = \frac{Fr}{MR^2} t = 21 rad/s$$

Rotação, inércia, torque