EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

Respostas esperadas

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) Sim, pois a única força capaz de gerar o torque para que a esfera role sem deslizar é o atrito.

(b) Sim, pois o atrito é estático e não realiza trabalho, uma vez que a velocidade do ponto de contato entre a esfera e o plano inclinado é nula (rolamento sem deslizamento).

(c) Tomando a base do plano como o zero de energia potencial gravitacional, a energia mecânica inicial é apenas potencial gravitacional, dada por $E_i = mgh$. Na base do plano inclinado, a energia mecânica é puramente cinética, dada pela energia cinética de translação do centro de massa (CM) mais a energia de rotação em torno do CM, ou seja, $E_f = mv^2/2 + I\omega^2/2$, onde v e ω são, respectivamente, as velocidades de translação do CM e angular na base do plano. Por conservação de energia mecânica,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{1}$$

Como há rolamento sem deslizamento, a velocidade de translação do CM e a velocidade de rotação satisfazem $v = \omega r$. Substituindo na Eq. (1) e usando a expressão para o momento de inércia dada no enunciado obtemos

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.}$$

(d) Definimos um sistema de coordenadas com um eixo x paralelo ao plano inclinado e apontando para a base do plano e um eixo y perpendicular ao plano e apontando para cima do plano. A força resultante no eixo y é nula. No eixo x, usando a segunda lei de Newton,

$$mg\sin\theta - f_{at} = ma, \tag{2}$$

onde f_{at} é a força de atrito e a a aceleração do CM. Para o movimento de rotação

$$\tau = f_{at}r = I\alpha, \tag{3}$$

onde τ é o torque em relação a um eixo que passa pelo CM da esfera e α é sua aceleração angular. Derivando em relação ao tempo a expressão do item anterior, $v = \omega r$, obtemos $a = \alpha r$. Levando esta última relação e a Eq. (2) na Eq. (3) obtemos

$$(mg\sin\theta - ma)r = \frac{2}{5}mr^2\frac{a}{r},$$

donde

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta. \tag{4}$$

Dado que a é constante, podemos usar a seguinte relação, válida para um movimento uniformemente acelerado,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta x \\ &= 2ah/\sin\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

onde $v_0 = 0$ é a velocidade no instante inicial e $\Delta x = h/\sin\theta$ o deslocamento no eixo x. Levando a Eq. (4) na Eq. (5)

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}gh},}$$

que coincide com o resultado já encontrado no item (c).

Q2. (a) Utilizaremos como coordenada generalizada o ângulo θ que a haste faz com a vertical. O módulo da velocidade da partícula é dado por $v = l\dot{\theta}$, de modo que sua energia cinética é

$$T = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2}.$$

A altura na vertical, em relação à posição em que $\theta = 0$, é dada por $h = l - l\cos\theta$. Segue que a energia potencial gravitacional é

$$V = mgl(1 - \cos\theta).$$

Finalmente, a Lagrangiana do sistema é

$$\boxed{L = T - V = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos\theta).} \tag{6}$$

(b) A equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Utilizando a Eq. (6) na equação acima, temos

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta.}$$

(c) Nos pontos de equilíbrio, $dV/d\theta = 0$, o que nos dá $\sin\theta = 0$, ou seja, os pontos procurados são

$$\boxed{\theta = 0 \ \text{ e } \ \theta = \pi.}$$

Para avaliar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, analisamos o sinal de

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgl\cos\theta.$$

Para $\theta = 0$, a expressão acima tem valor positivo (mínimo de V), caracterizando um equilíbrio **estável**, enquanto que para $\theta = \pi$, o sinal é negativo (máximo de V), correspondendo a um ponto de equilíbrio **instável**.

(d) Para pequenas oscilações em torno de $\theta = 0$, podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$. A equação de movimento fica

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta,$$

cuja solução geral é, por inspeção,

$$\theta(t) = A\sin(\omega t + \delta),$$

onde A e δ são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais e

$$\boxed{\omega = \sqrt{g/l},}$$

que é a frequência (angular) procurada. Alternativamente, pode-se comparar a Eq. (2) com a equação de movimento de um oscilador harmônico simples uni-dimensional de frequência (angular) ω,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

e inferir que no caso em questão teremos $\omega = \sqrt{g/l}$.

Q3. a) A conservação de energia nos dá

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + E, \tag{7}$$

enquanto a conservação de momento linear é

$$\vec{p}_0 + \vec{0} = \vec{p} + \vec{p}_e.$$

b) Da conservação de momento linear

$$p_e^2 = (\vec{p}_0 - \vec{p})^2 = p_0^2 + p^2 - 2pp_0 \cos\theta.$$

Usando que, para os fótons, $p_0 = E_0/c$ e $p = E/c$ e levando na Eq. (7)

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos\theta + m^2c^4} + E.$$

Isolando a raiz quadrada e elevando a equação ao quadrado

$$\begin{aligned}
\left(E_0 - E + mc^2\right)^2 &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos\theta + m^2c^4 \\
E_0^2 + E^2 + m^2c^4 - 2EE_0 + 2mc^2 (E_0 - E) &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos\theta + m^2c^4 \\
-EE_0 + mc^2 (E_0 - E) &= -EE_0 \cos\theta \\
mc^2 (E_0 - E) &= EE_0 (1 - \cos\theta) .
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos\theta) .} \tag{8}$$

c) Da relação entre a energia e o comprimento de onda dos fótons

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{e} \qquad E_0 = \frac{hc}{\lambda_0},$$

onde λ é o comprimento de onda do fóton espalhado. Portanto,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) .$$

Para $\theta = \pi/2$,

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}.}$$

c) A energia cinétia do elétron espalhado é

$$K = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2c^4} - mc^2 = E_0 - E.$$

Fazendo $\theta = \pi/2$ na Eq. (8)

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2},$$

donde

$$E = \frac{mc^2 E_0}{E_0 + mc^2}.$$

Assim,

$$K = E_0 \left(1 - \frac{mc^2}{E_0 + mc^2}\right) = \frac{hc}{\lambda_0} \left(1 - \frac{mc^2}{\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2}\right).$$

Finalmente,

$$\boxed{K = \frac{hc}{\lambda_0} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_C}}.}$$

Q4. (a) Queremos calcular $\langle n'|\,\hat{x}\,|n\rangle$ e $\langle n'|\,\hat{p}\,|n\rangle$. Utilizando que

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right),\\
\hat{p} &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right).
\end{aligned}$$

Os elementos de matriz pedidos são

$$\begin{aligned}
\langle n'|\,\hat{x}\,|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n'|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)|n\rangle\,,\\
\langle n'|\,\hat{p}\,|n\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\langle n'|\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)|n\rangle\,.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle n'|\,\hat{a}\,|n\rangle &= \langle n'|\,\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1},\\
\langle n'|\,\hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \langle n'|\,\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1},
\end{aligned}$$

segue que

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle n'|\,\hat{x}\,|n\rangle &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}\right),\\
\langle n'|\,\hat{p}\,|n\rangle &= i\sqrt{\tfrac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}-\sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right).
\end{aligned}}$$

(b) Primeiramente, escrevemos $\hat{x}^2$ em termos de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{x}^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right].$$

O valor esperado procurado é

$$\langle n|\,\hat{x}^2\,|n\rangle = \langle n|\,\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right)|n\rangle\,.$$

Calculamos cada termo separadamente

$$\begin{aligned}
\langle n|\,\hat{a}^2\,|n\rangle &= \langle n|\,a\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\delta_{n,n-2} = 0,\\
\langle n|\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|n\rangle &= \langle n|\,a^\dagger\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\delta_{n,n+2} = 0,\\
\langle n|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \langle n|\,a\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = (n+1)\,\langle n|\,n\rangle = n+1,\\
\langle n|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle &= \langle n|\,a^\dagger\sqrt{n}\,|n-1\rangle = n\,\langle n|\,n\rangle = n.
\end{aligned}$$

Juntando todas as contribuições

$$\boxed{\langle n|\,\hat{x}^2\,|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right).}$$

(c) A energia total média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n| \hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \langle n| \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

onde usamos o valor esperado do operador número calculado no item anterior. A energia potencial média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n| \hat{V} |n\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle n| \hat{x}^2 |n\rangle \, .$$

Do item anterior

$$\langle n| \hat{V} |n\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{\langle n| \hat{H} |n\rangle}{\langle n| \hat{V} |n\rangle} = 2.}$$

(d) Primeiro notamos que

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \left[\hat{a}_H(t), \hat{H}\right] = e^{i\hat{H}t/\hbar} \left[\hat{a}, \hat{H}\right] e^{-i\hat{H}t/\hbar},$$

já que o Hamiltoniano comuta com as exponenciais. O comutador procurado é

$$\left[\hat{a}, \hat{H}\right] = \hbar\omega \left[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right] = \hbar\omega \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}\right],$$

onde usamos que um número comuta com qualquer operador. Mas

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}\right] = \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^2\right) = \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\right) \hat{a} = \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] \hat{a} = \hat{a},$$

já que $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$. Assim,

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \hbar\omega \; e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{a} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \hbar\omega \hat{a}_H(t).$$

Resolvendo essa equação diferencial

$$\boxed{\hat{a}_H(t) = \hat{a}(0)\, e^{-i\omega t} = \hat{a} e^{-i\omega t}.}$$

Q5. a) O gráfico pedido é mostrado na Fig. 5:

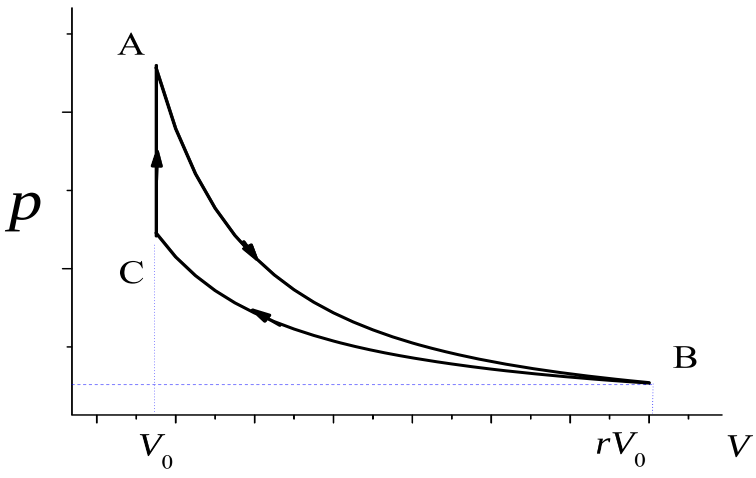


Figura 1: Gráfico esquemático mostrando o ciclo num diagrama p x V.

b) (i) De maneira geral, o trabalho realizado pelo gás num processo reversível quando o volume varia de V_1 até V_2 é dado por

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Portanto, o trabalho realizado no trecho CA é nulo, pois não há variação de volume. O trecho AB é adiabático, portanto não há troca de calor Q_{AB} entre o gás e a vizinhança. Da primeira lei da termodinâmica $\Delta U = Q - W$ (U é a energia interna),

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = nc_V(T_A - T_B),$$

onde usamos a expressão para a energia interna de um gás ideal. Finalmente, na isoterma BC, usando a equação de estado do gás ideal,

$$W_{BC} = \int_{rV_0}^{V_0} p dV = -nRT_B \ln r.$$

Como $T_C = T_B$ e as isotermas são hipérboles $p = nRT/V$ num gráfico p x V, segue que $T_{\min} = T_B < T_A = T_{\max}$. Logo, usando $c_V = R/(\gamma - 1)$, o trabalho total é dado por

$$\boxed{W_{\text{total}} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_{\max} - T_{\min}) - nRT_{\min} \ln r.}$$

(ii) Só há troca de calor entre o gás e a vizinhança nos trechos BC e CA, pois o processo AB é adiabático. Como BC é uma isoterma, a energia interna do gás se mantém constante e, usando a primeira lei,

$$Q_{BC} = W_{BC} = -nRT_B \ln r < 0,$$

o que corresponde a uma liberação de calor do gás para sua vizinhança. Na isocórica CA, o trabalho é nulo e, usando novamente a primeira lei,

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = nc_V(T_{\max} - T_{\min}).$$

Portanto, o calor injetado no gás é

$$\boxed{Q_{\text{injetado}} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_{\max} - T_{\min}).}$$

c) O rendimento é dado por

$$\boxed{\eta = \frac{W_{\text{total}}}{Q_{\text{injetado}}} = 1 - \frac{(\gamma - 1)T_{\min}}{(T_{\max} - T_{\min})} \ln r.}$$

d) Na adiabática AB temos que

$$p_A V_0^\gamma = p_B (rV_0)^\gamma \Rightarrow p_B = p_A / r^\gamma,$$

e na isoterma BC temos que

$$p_B r V_0 = p_C V_0 \Rightarrow p_C = r p_B,$$

donde

$$r = \frac{p_C}{p_B} = \frac{p_C}{p_A} r^\gamma \Rightarrow r^{\gamma - 1} = \frac{p_A}{p_C}.$$

Da equação de estado dos gases ideais para a isovolumétrica CA

$$\frac{p_A}{p_C} = \frac{T_A}{T_C} = \frac{T_{\max}}{T_{\min}}.$$

Assim,

$$r = \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right)^{1/(\gamma - 1)}.$$

Levando na expressão para o rendimento,

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{(T_{\max} - T_{\min})} \ln \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right).}$$

Se $T_{\max} = 2T_{\min}$, temos que

$$\eta = 1 - \ln 2 \approx 0.31,$$

e o rendimento da máquina de Carnot correspondente é

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 0.5,$$

de forma que

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_{\text{Carnot}}} = 2(1 - \ln 2).}$$

O rendimento da máquina é menor do que o da máquina de Carnot correspondente. Isso é o esperado porque uma das consequências da segunda lei da termodinâmica é que nenhuma máquina operando entre dois reservatórios a temperaturas $T_{\max}$ e $T_{\min}$ pode ter rendimento maior que a máquina de Carnot entre esses reservatórios.

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

Respostas esperadas

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. a) Pela lei de Gauss, de maneira geral, sabemos que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_V}{\epsilon_0}, \tag{9}$$

onde a integral é feita sobre a superfície S de uma região V e q_V é a carga total contida em V. Tomaremos, nessa questão, regiões esféricas de raio r centradas no centro da esfera isolante. Por simetria, o campo elétrico apontará sempre na direção radial, ou seja, $\vec{E} = E\hat{r}$.

i) Campo elétrico para $r < a$: Neste sub-item, escolhemos regiões esféricas de raio $r < a$, representadas pelas linhas pontilhadas na Fig. 2. Desta forma, a carga em V é

$$\begin{aligned} q_V &= \rho V\,, \\ q_V &= \frac{4\pi\rho}{3} r^3\,. \end{aligned}$$

Aplicando a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} r^3.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será dada por

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.}$$

ii) Campo elétrico para $a < r < b$: Neste caso, as regiões esféricas tem raio r tal que $a < r < b$, como mostrado na Fig. 3. A carga total contida em V é $q_V = Q$. Aplicando a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.}$$

iii) Campo elétrico para $b < r < c$: Nesta região, queremos o campo elétrico dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático (veja a Fig. 4), que sempre se anula. Portanto,

$$\boxed{E = 0.}$$

(iv) Campo elétrico para $r > c$: Agora, as regiões esféricas tem raio $r > c$, como mostrado na Fig. 5. A carga contida em V é $q_V = Q$. Aplicando novamente a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.}$$

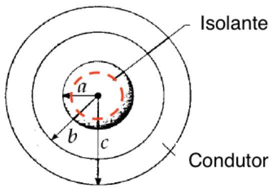


Figura 2: Região V no caso (i) $r < a$.

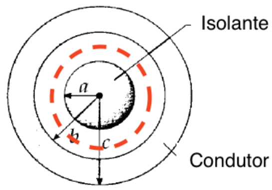


Figura 3: Região V no caso (ii) $a < r < b$.

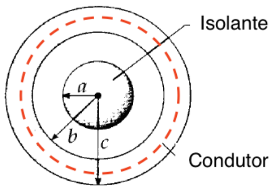


Figura 4: Região V no caso (iii) $b < r < c$.

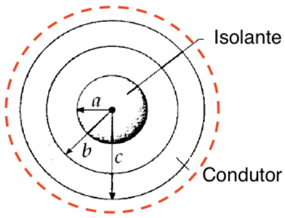


Figura 5: Região V no caso (iv) $r > c$.

b) Em todo condutor em equilíbrio eletrostático, a carga líquida se distribui na sua superfície. Vamos denotar por q_1 a carga induzida na superfície interna do condutor ($r = b$) e q_2 a a carga induzida na superfície externa do condutor ($r = c$). Como dentro do condutor temos $E = 0$, aplicando a Eq. (9) a uma região como as do item (a)(iii) (raio r, tal que $b < r < c$), a carga total em V nesse caso é nula. Portanto,

$$\begin{aligned} q_V &= Q + q_1 = 0 \\ \Rightarrow q_1 &= -Q. \end{aligned}$$

Como, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, segue que a densidade de carga induzida em $r = b$ é

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi b^2}.}$$

Como o condutor está descarregado, por conservação de carga, temos que

$$\begin{aligned} Q_{condutor} = 0 &= q_1 + q_2 \\ q_2 &= -q_1 \end{aligned}$$

Usando novamente que, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, a densidade de carga induzida em $r = c$ é

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi c^2}.}$$

c) Esboço do gráfico $E \times r$:

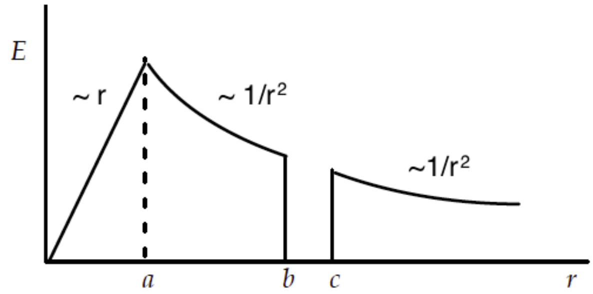


Figura 6: Esboço do gráfico $E \times r$.

Q7. a) Pelo formulário podemos ver que no vácuo (onde $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$), as equações de Maxwell são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0\,; && (10)\\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\,; && (11)\\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,; && (12)\\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,; && (13) \end{aligned}$$

Tomando o rotacional da Eq. (12) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{14}$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (10), podemos re-escrever o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}\,.$$

Desta forma a Eq. (14) pode ser re-escrita, trocando a ordem das derivadas parciais, como

$$-\nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = 0\,.$$

Utilizando a Eq. (13) obtemos a equação da onda para o campo elétrico

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.}$$

Tomando agora o rotacional da Eq. (13) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) - \mu_0\epsilon_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0\,.$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (11) e trocando a ordem das derivadas parciais, podemos re-escrever a equação acima como

$$-\nabla^2 \vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{E}\right) = 0\,. \tag{15}$$

Finalmente, utilizando a Eq. (12) no segundo termo da Eq. (15) obtemos

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.}$$

b) A equação de onda para uma função $f(\vec{r},t)$ se propagando com velocidade v é dada por

$$\boxed{\nabla^2 f(\vec{r},t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(\vec{r},t)}{\partial t^2}.} \tag{16}$$

Comparando com as Eqs. (15) e (16), notamos que a velocidade de propagação de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é dada por

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0\epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c.} \tag{17}$$

c) **(0,2 pontos)** Supondo que $\vec{E}$ aponte na direção $\hat{x}$ e se propague na direção $\hat{z}$, podemos escrever que

$$\vec{E} = E_0\, e^{i(kz-wt)}\hat{x}\,, \tag{18}$$

$$\vec{B} = B_0\, e^{i(kz-wt)}\hat{y}\,. \tag{19}$$

O campos "físicos" podem ser escritos como (supondo E_0 e B_0 reais)

$$\vec{E_f} = Re(\vec{E}) = E_0\, \cos(kz-wt)\hat{x}\,, \tag{20}$$

$$\vec{B_f} = Re(\vec{B}) = B_0\, \cos(kz-wt)\hat{y}\,. \tag{21}$$

Essas soluções, de fato, satisfazem as quatro Eqs. (10-13) desde que $\omega = ck$, como pode ser verificado. De maneira geral, a direção de $\vec{E}$ é arbitrária, desde que seja perpendicular a $\vec{z}$. Uma vez fixada a direção de $\vec{E}$, $\vec{B}$ tem que ser perpendicular a $\vec{E}$ e $\vec{z}$. Os *módulos* de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são:

$$\begin{aligned} E &= E_0\, \cos(kz-wt)\,, \\ B &= B_0\, \cos(kz-wt)\,. \end{aligned}$$

d) Tomando a divergência da Eq. (13) temos

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) = \mu_0\nabla\cdot\vec{J}\,. \tag{22}$$

O primeiro termo se anula pela segunda identidade dada no enunciado. Usando a Eq. (10)

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0}$$

Esta equação expressa a *lei de conservação da carga*: em sua forma integral, ela implica que a taxa de variação temporal da carga total incluída em uma região espacial fixa é igual ao fluxo de corrente elétrica entrando pela superfície que delimita a região.

Q8. (a)Das relações fornecidas

$$\hat{H}\left|\pm\right\rangle = -\gamma B\hat{S}_z\left|\pm\right\rangle = \mp\frac{\gamma B\hbar}{2}\left|\pm\right\rangle$$

Portanto, $\left|\pm\right\rangle$ são auto-vetores do Hamiltoniano com auto-valores dados, respectivamente, por

$$\boxed{E_\pm = \mp\frac{\gamma\hbar B}{2}.}$$

(b) De maneira geral,

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \left[c_+e^{-i(E_+/\hbar)t}\left|+\right\rangle + c_-e^{-i(E_-/\hbar)t}\left|-\right\rangle\right],$$

onde $c_\pm$ são coeficientes determinados pelas condições iniciais. Usando as expressões dos auto-valores do item anterior

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \left[c_+e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle + c_-e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right].$$

Em $t = 0$ temos

$$\left|\psi\left(t=0\right)\right\rangle = \left[c_+\left|+\right\rangle + c_-\left|-\right\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle - \left|-\right\rangle\right],$$

donde $c_+ = -c_- = 1/\sqrt{2}$. Portanto,

$$\boxed{\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right].}$$

(c) A média de $\hat{S}_i$ é dada por

$$\left\langle\hat{S}_i\right\rangle = \left\langle\psi\left(t\right)\right|\hat{S}_i\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$$

Utilizando a $\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ obtida no item anterior

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x\left|\psi\left(t\right)\right\rangle &= \hat{S}_x\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle\right], \\
\hat{S}_y\left|\psi\left(t\right)\right\rangle &= \hat{S}_y\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right] \\
&= i\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle\right], \\
\hat{S}_z\left|\psi\left(t\right)\right\rangle &= \hat{S}_z\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right].
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\,\hat{S}_x\,|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\langle+| - e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\langle-|\right]\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle\right] \\
&= -\frac{\hbar}{2}\cos(\gamma B t) \\
\langle\psi(t)|\,\hat{S}_y\,|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\langle+| - e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\langle-|\right]i\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{2}\sin(\gamma B t) \\
\langle\psi(t)|\,\hat{S}_z\,|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\langle+| - e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\langle-|\right]\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\left\langle\hat{S}_x\right\rangle &= -\tfrac{\hbar}{2}\cos(\gamma B t) \\
\left\langle\hat{S}_y\right\rangle &= \tfrac{\hbar}{2}\sin(\gamma B t) \\
\left\langle\hat{S}_z\right\rangle &= 0
\end{aligned}}$$

(d) Queremos t tal que

$$\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= |\psi(t)\rangle\,, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - |-\rangle\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{+i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle\right],
\end{aligned}$$

onde usamos o resultado do item (b). Por inspeção nota-se que a condição a ser satisfeita é

$$e^{\pm i\frac{\gamma B}{2}t} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma B}{2}t = 2n\pi \quad (n = 1,2,\ldots).$$

O menor valor de t corresponde a $n = 1$

$$\boxed{t = \frac{4\pi}{\gamma B}.}$$

Q9. a) Em qualquer outro referencial S', o intervalo invariante terá o mesmo valor

$$\Delta s^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2 .$$

Se nesse referencial os eventos ocorressem no mesmo ponto do espaço, $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e teríamos $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$, o que contradiz o enunciado. Portanto, esse referencial não existe.

b) Como o intervalo invariante é positivo

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Supondo a propagação de um sinal com velocidade $\vec{V}$ entre os eventos, teríamos $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Levando na desigualdade acima

$$\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right) \Delta t^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Assim, teríamos $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2 > c^2$. Portanto, o sinal teria que se propagar com uma velocidade maior do que a da luz, o que é impossível.

c) (i) Como o relógio está em repouso em S', $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$. O sinal é negativo.

(ii) Observados no referencial S, os eventos são tais que $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Logo,

$$\Delta s^2 = \left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right) \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 (\Delta t')^2 ,$$

onde usamos que o valor do intervalo invariante não depende do referencial. Segue que

$$\boxed{\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t.}$$

d) (i) No referencial de laboratório S, a separação espacial entre os eventos é a distância entre F e D e a separação temporal é o tempo que a partícula leva para viajar entre um e outro

$$\boxed{\Delta x = L \quad \text{e} \quad \Delta t = \frac{L}{V}.}$$

(ii) No referencial da partícula, os eventos ocorrem no mesmo ponto espacial e a separação temporal entre eles pode ser obtida usando o resultado do item (c)(ii)

$$\boxed{\Delta x' = 0 \quad \text{e} \quad \Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\frac{L}{V}\right).}$$

(iii) Do ponto de vista de S', $L' = V \Delta t'$, pois F e D (e o refencial S) se movem com velocidade $-\vec{V}$. Usando a expressão para $\Delta t'$ obtida no item anterior

$$\boxed{L' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} L.}$$

Q10. a) A função de partição é obtida somando sobre todos os estados do sistema com o peso de Boltzmann

$$Z = \mathrm{Tr} e^{-\beta H} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdp}{h} \exp\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\right],$$

onde $\beta^{-1} = k_B T$. Usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

obtemos

$$Z = \frac{\pi}{h}\sqrt{\frac{2m}{\beta}}\sqrt{\frac{2}{\beta m\omega^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{2\pi k_B T}{h\omega} = \frac{k_B T}{\hbar\omega}.}$$

b) Como os osciladores são independentes, o número médio $n(x)dx$ pedido é igual a $3N$ vezes a probabilidade de um oscilador ter sua posição no intervalo considerado. Esta probabilidade, por sua vez, é igual ao peso de Boltzmann integrado sobre todos os valores de momento linear, donde

$$n(x)dx = \frac{3Ndx}{Z}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{h} \exp\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{n(x)dx = 3N\omega dx\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right).}$$

c) A energia potencial média por oscilador é

$$\begin{aligned}
\langle U\rangle &= \frac{1}{3N}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right) n(x)dx \\
&= \omega\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right)dx \\
&= \omega\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}(k_B T)\sqrt{\frac{2k_B T}{m\omega^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Usando que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2$,

$$\boxed{\langle U\rangle = \frac{k_B T}{2}.}$$

Esse resultado é o esperado pelo teorema da equipartição, que diz que o valor médio clássico de cada grau de liberdade quadrático da Hamiltoniana (como a energia potencial) é $k_B T/2$.

d) Temos que

$$\frac{m\omega^2 x_0^2}{2} = \frac{k_B T}{2} \Rightarrow f = \frac{x_0}{d} = \frac{1}{\omega d}\sqrt{\frac{k_B T}{m}}.$$

Para os dados fornecidos

$$\boxed{f \approx 0.03 = 3\%.}$$

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2017

Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) Da componente da segunda lei de Newton na direção vertical (orientada para cima), a queda é descrita por

$$F = m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -(g + kv) \Rightarrow \int_0^v \frac{dv'}{g + kv'} = -\int_0^t dt', \tag{1}$$

onde usamos a condição inicial de que o corpo parte do repouso. Usando

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a}\ln(ax + b),$$

segue que

$$\int_0^v \frac{dv'}{g + kv'} = -\int_0^t dt' \Rightarrow \ln\left(\frac{g + kv}{g}\right) = -kt. \tag{2}$$

Invertendo a última relação

$$v(t) = \frac{g}{k}\left(e^{-kt} - 1\right). \tag{3}$$

Como $v(t) < 0$ (corpo em queda), o módulo da velocidade é

$$|v(t)| = -\frac{g}{k}\left(e^{-kt} - 1\right) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).$$

(b) A velocidade terminal v_{term} é obtida tomando-se o limite $t \to \infty$ na Eq. (3)

$$v_{term} = \lim_{t\to\infty} \frac{g}{k}\left(e^{-kt} - 1\right) = -\frac{g}{k} \Rightarrow |v_{term}| = \frac{g}{k}.$$

(c) A posição vertical do corpo é obtida integrando mais uma vez a Eq. (3)

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{g}{k}\left(e^{-kt} - 1\right) \Rightarrow \frac{k}{g}\int_0^z dz' = \int_0^t \left(e^{-kt'} - 1\right) dt' \Rightarrow \frac{kz}{g} = -\frac{e^{-kt}}{k} + \frac{1}{k} - t,$$

donde

$$z(t) = \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{gt}{k}. \tag{4}$$

(d) Das Eqs. (3) e (4),

$$z = -\frac{v}{k} - \frac{g}{k}t.$$

Eliminando t usando a Eq. (2), encontramos a expressão procurada

$$z(v) = \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{kv}{g}\right) - \frac{v}{k}.$$

Alternativamente, da Eq. (1)

$$a = \frac{dv}{dt} = -(g + kv).$$

Mas

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dz} = \frac{a}{v} \Rightarrow v\,dv = a\,dz = -(g + kv)dz.$$

Logo

$$-\int_0^v \frac{v'}{g + kv'}\,dv' = \int_0^z dz' \Rightarrow \left.\frac{g\ln(g + kv) - kv}{k^2}\right|_0^v = z\Big|_0^z,$$

onde usamos o resultado $\int \frac{x}{a+bx}\,dx = \frac{bx - a\ln(a+bx)}{b^2}$. Segue que

$$z(v) = \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{kv}{g}\right) - \frac{v}{k}.$$

Q2. (a) Seja um sistema cartesiano de coordenadas com x na horizontal orientada para a direita e y na vertical orientada para baixo e com a origem no ponto de sustentação do pêndulo superior. Sejam (x_1,y_1) e (x_2,y_2) as coordenadas cartesianas das partículas de massas m_1 e m_2, respectivamente. Então,

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1, \quad y_1 = l_1\cos\theta_1, \quad x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, \quad y_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2.$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1, \quad \dot{x}_2 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2, \\ \dot{y}_1 &= -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1, \quad \dot{y}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2. \end{aligned}$$

A energia cinética da partícula 1 é

$$T_1 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) = \frac{m_1}{2}\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1\right) = \frac{m_1}{2}\, l_1^2\dot{\theta}_1^2.$$

Para a partícula 2

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^2 &= l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2, \\ \dot{y}_2^2 &= l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2, \end{aligned}$$

donde

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]$$

A energia cinética total é

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}\, l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right].$$

(b) A energia potencial é

$$V = -m_1gy_1 - m_2gy_2 = -m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2g\left(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right).$$

(c) A Lagrangiana é $L = T - V$

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2}\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2gl_1\cos\theta_1\right) \\ &+ \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + 2g\left(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right)\right]. \end{aligned}$$

(d) As equações de movimento são as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_i} = 0 \quad (i = 1,2).$$

Temos para $i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\theta_1} &= -(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2), \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} &= (m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2), \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \, \sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2),$$

e para $i=2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2 g l_2 \, \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \, \sin(\theta_1-\theta_2), \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2),
\end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \, \sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2).$$

As equações procuradas são, portanto,

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2)(l_1^2\ddot{\theta}_1 + g l_1 \, \sin \theta_1) + m_2 l_1 l_2[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \, \sin(\theta_1-\theta_2)] &= 0, \\
m_2[l_2^2\ddot{\theta}_2 + g l_2 \, \sin \theta_2] + m_2 l_1 l_2[\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \, \sin(\theta_1-\theta_2)] &= 0.
\end{aligned}$$

Q3. a) A Hamiltoniana do oscilador isotrópico é

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

que corresponde à soma de 3 osciladores unidimensionais independentes, um para cada direção cartesiana. Como os osciladores são independentes, os auto-estados do sistema são dados pelo produto tensorial (ou Kronecker, ou externo) dos auto-estados de cada oscilador

$$|n_1,n_2,n_3\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \ ,$$

onde $n_i = 0,1,2,\ldots (i = 1,2,3 \equiv x,y,z)$ e $|n_i\rangle$ são os auto-estados do oscilador harmônico na direção i. As auto-energias são a soma das auto-energias dos 3 osciladores independentes

$$E_n = \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \equiv \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega,$$

onde definimos $n = n_1 + n_2 + n_3$, que é um número natural arbitrário.

b) $E_n = \frac{7}{2}\hbar\omega$ corresponde a $n = n_1 + n_2 + n_3 = 2$. Esta última equação pode ser satisfeita por $(n_1,n_2,n_3) = (0,0,2)$ e suas permutações $(0,2,0)$ e $(2,0,0)$ e por $(n_1,n_2,n_3) = (0,1,1)$ e suas permutações $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$, correspondendo a uma degenerescência total de 6.

c) Os valores possíveis de serem medidos são as auto-energias E_n. A probabilidade de se medir a auto-energia E_n é

$$P_n = \sum_{n_1,n_2,n_3} \delta_{n,n_1+n_2+n_3} |\langle n_1,n_2,n_3|\psi\rangle|^2.$$

Os únicos valores com probabilidade não nula de serem medidos nesse caso são

$$\begin{aligned}
\left(0+0+1+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega &= \frac{5}{2}\hbar\omega = E_1 \\
\left(0+1+0+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega &= \frac{5}{2}\hbar\omega = E_1 \\
\left(0+1+1+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega &= \frac{7}{2}\hbar\omega = E_2.
\end{aligned}$$

A probabilidade de se medir $E_1 = (5/2)\hbar\omega$ é

$$|\langle 0,0,1|\psi\rangle|^2 + |\langle 0,1,0|\psi\rangle|^2 = 1/2 + 1/4 = 3/4.$$

A probabilidade de se medir $E_1 = (7/2)\hbar\omega$ é

$$|\langle 0,1,1|\psi\rangle|^2 = 1/4.$$

d) O resultado da medida foi E_1. O estado logo após a medida é a projeção do estado $|\psi\rangle$ no auto-sub-espaço de E_1, ou seja,

$$|\psi(t>0)\rangle = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0,0,1\rangle + \frac{1}{2}|0,1,0\rangle\right) \ ,$$

onde α é uma constante de normalização. Normalizando o estado, acha-se $|\alpha|^2(1/2 + 1/4) = 1 \Rightarrow \alpha = 2/\sqrt{3}$. Assim,

$$|\psi(t>0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0,0,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,1,0\rangle.$$

Q4. (a) Fazendo a mudança de variáveis $\nu = xT$, na expressão para a densidade de energia, fornecida no enunciado, obtém-se

$$u(T) = T^4 \int_0^\infty x^3 f(x)dx. \equiv KT^4,$$

onde K é uma constante independente da temperatura. Como u tem dimensão de energia por unidade de volume, segue que K tem dimensão de energia por unidade por unidade de temperatura absoluta à quarta potência ou

$$[K] = \frac{[E]}{l^3 k^4} = \frac{m}{lt^2 k^4},$$

onde m tem dimensão de massa, l tem dimensão de comprimento, t tem dimensão de tempo e k tem dimensão de temperatura absoluta e usamos que $[E] = ml^2/t^2$.

(b)

(i) O fator $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$ é número de modos normais de vibração do campo eletromagnético, por unidade de volume, com frequência no intervalo $[\nu,\nu + d\nu]$.

(ii) Se $h\nu \ll k_BT$, $\exp(h\nu/k_BT) \approx 1 + h\nu/k_BT$ e a distribuição de energia é

$$\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{(h\nu/k_BT)} - 1} \approx \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{k_BT}} = k_BT.$$

(iii) O resultado obtido no item anterior é o que seria obtido utilizando um tratamento clássico, via o *teorema de equipartição* para osciladores clássicos: $k_BT/2$ para cada termo quadrático na energia, termo cinético e potencial harmônico.

(c) Determinamos primeiramente t_P. Escrevendo, de maneira geral,

$$t_P = G^\alpha h^\beta\, c^\gamma$$

e levando em conta que

$$[G] = l^3t^{-2}m^{-1}; \;\; [\hbar] = ml^2t^{-1}; \;\; [c] = lt^{-1},$$

obtém-se

$$l^{3\alpha+2\beta+\gamma}m^{-\alpha+\beta}t^{-2\alpha-\beta-\gamma} = t.$$

Logo, $\alpha = \beta = 1/2$ e $\gamma = -5/2$. Portanto,

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}.$$

A distância de Planck é

$$l_P = ct_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}.$$

De maneira similar, para a massa de Planck

$$l^{3\alpha+2\beta+\gamma}m^{-\alpha+\beta}t^{-2\alpha-\beta-\gamma} = m_P,$$

que fornece $\alpha = -\beta = -1/2$ e $\gamma = 1/2$. Logo,

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}.$$

A temperatura de Planck pode ser determinada fazendo a razão entre a energia de Planck, $m_P c^2$, e a constante de Boltzmann

$$T_P = \frac{m_p c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}.$$

Utilizando os valores numéricos das quatro constantes fundamentais, $\hbar$, c, G e k_B

$$t_P \approx 10^{-44} \ \text{s}; \quad l_P \approx 10^{-35} \ \text{m}; \quad m_P \approx 10^{-8} \ \text{kg}; \quad T_P \approx 10^{32} \ \text{K}.$$

Q5. (a) A conservação de energia interna leva a

$$m_x c_x (T_x - T_{eq}) = (K + m_{H_2O} c_{H_2O})(T_{eq} - T_{amb}) \Rightarrow c_x = \frac{(K + m_{H_2O} c_{H_2O})(T_{eq} - T_{amb})}{m_x (T_x - T_{eq})}.$$

(b) Usando os dados fornecidos e as fórmulas de propagação de erros do formulário

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{(30{,}0 + 50{,}0 \times 1{,}0)(27{,}8 \pm 0{,}1 - 25{,}0 \pm 0{,}1)}{200(37{,}8 - 27{,}8 \pm 0{,}1)} \\ &= 0{,}40 \times \frac{2{,}8 \pm 0{,}14}{10{,}0 \pm 0{,}1}. \end{aligned}$$

A fração acima é

$$\begin{aligned} \frac{2{,}8 \pm 0{,}14}{10{,}0 \pm 0{,}1} &= 0{,}28 \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}14}{2{,}8}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{10{,}0}\right)^2}\right] \\ &= 0{,}28 \left[1 \pm \sqrt{25 \times 10^{-4} + 10^{-4}}\right] \\ &= 0{,}28 \left[1 \pm \sqrt{26 \times 10^{-4}}\right] \\ &= 0{,}28 \left[1 \pm 5{,}1 \times 10^{-2}\right] \\ &= 0{,}28 \pm 0{,}014. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} c_x &= 0{,}40 \times (0{,}28 \pm 0{,}014) \\ c_x &= (0{,}112 \pm 0{,}006)\ \text{cal}/\left(\text{g}^{\text{o}}\text{C}\right). \end{aligned}$$

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2017

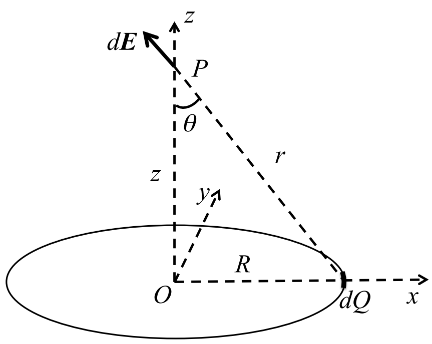
Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. a) O elemento de carga dQ do anel produzirá um campo $d\vec{E}$ no ponto P, como mostrado na figura. O módulo deste elemento de campo elétrico é

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, .$$



A componente deste elemento de campo elétrico perpendicular ao eixo z é cancelada pela componente perpendicular ao eixo z produzida pelo elemento de carga situado na posição diametralmente oposta do anel. Ao somar os elementos de campo elétrico devido a todos os elementos de carga do anel, apenas sobrevivem as componentes na direção do eixo z,

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{z}{r} \, .$$

Somando todas as contribuições dos elementos de carga do anel, obtemos

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \hat{z}\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \, .$$

b) O potencial elétrico devido ao elemento de carga dQ no ponto P é

$$dV(z) = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \, .$$

O potencial devido a todas as contribuições dos elementos de carga do anel é obtido somando todas as contribuições, donde se obtém

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \, .$$

c) A energia cinética inicial da partícula é nula, porque ela parte do repouso. A energia potencial elétrica inicial da partícula é nula também, porque $-qV(z_0) \approx 0$ se $z_0 \gg R$. A conservação da energia mecânica (cinética mais potencial elétrica) nos dá a velocidade v no centro do anel via

$$0 + 0 = \frac{mv^2}{2} + (-q)V(0) = \frac{mv^2}{2} - q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \, ,$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 mR}} \, .$$

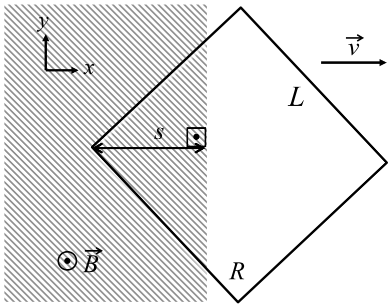
Q7. a) Como o aro é quadrado, a área da região interna ao aro e contida no retângulo sombreado é um triângulo isósceles de altura s e ângulos internos 45°,90° e 45°. Portanto, o tamanho da base do triângulo é $2s$ e sua área é

$$A = \frac{1}{2}s(2s) = s^2.$$

O fluxo do campo magnético através do aro é

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA = Bs^2,$$

onde usamos o fato de que o campo magnético é constante na região sombreada e normal ao plano da figura.



b) A força eletromotriz induzida pode ser calculada pela lei de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{\partial t} = -B2s\frac{ds}{dt} = -2Bsv\,,$$

e o valor da corrente elétrica é

$$I = \frac{2Bsv}{R}\,. \tag{5}$$

A área sombreada diminui com o movimento do aro e, portanto, o fluxo do campo magnético também diminui. O sentido da força eletromotriz, pela lei de Lenz, é anti-horário para se contrapor à diminuição do fluxo de $\vec{B}$. Segue que a corrente fluirá também no sentido anti-horário.

c) A força magnética sobre um elemento do aro é

$$d\vec{F}_m = Id\vec{l} \times \vec{B}\,.$$

Os elementos do aro dentro da região sombreada são: $d\vec{l} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl + \hat{y}dl)$ (lado superior esquerdo) e $d\vec{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl - \hat{y}dl)$ (lado inferior esquerdo). A força magnética é, então,

$$d\vec{F}_m = I[-\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl + \hat{y}dl) \times B\hat{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}dl - \hat{y}dl) \times B\hat{z}]\,,$$

ou

$$d\vec{F}_m = -\sqrt{2}IBdl\hat{x}\,,$$

e integrando em dl de 0 a $\sqrt{2}s$ (lembrando que as contribuições dos dois segmentos já foram somadas) obtemos

$$\vec{F}_m = -2IBs\hat{x}\,. \tag{6}$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (6), obtemos

$$\vec{F}_m = -\hat{x}\frac{4B^2s^2v}{R}\,.$$

Para que o quadrado se mova com velocidade constante, temos que aplicar uma força de mesmo módulo que $\vec{F}_m$, mas de sentido oposto, isto é para a direita (sentido positivo de x).

Q8. a) A parte da Hamiltoniana devida ao campo elétrico é

$$\hat{V}_E = (-e)(-E\hat{x}) = eE\hat{x},$$

onde $\hat{x}$ é o operador posição. A Hamiltoniana total é a soma da Hamiltoniana do oscilador harmônico e $\hat{V}_E$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + eE\hat{x}.$$

b) A coreção da energia do primeiro estado excitado em ordem linear em E é

$$\Delta E_1^{(1)} = \langle 1|\hat{V}_E|1\rangle = eE\langle 1|\hat{x}|1\rangle.$$

Podemos usar a definição do operador de destruição

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right),$$

e obter

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger).$$

Logo, a coreção procurada é

$$\Delta E_1^{(1)} = eE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|1\rangle = 0.$$

c) A coreção da energia do primeiro estado excitado em ordem quadrática em E é

$$\begin{aligned}
\Delta E_1^{(2)} = &= \langle 1|V|\delta\psi_1^{(1)}\rangle \\
&= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{eE}{\hbar\omega}\right) eE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|(|0\rangle - \sqrt{2}|2\rangle) \\
&= \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}(\langle 1|1\rangle - 2\langle 1|1\rangle) = -\frac{e^2E^2}{2m\omega^2}.
\end{aligned}$$

d) Podemos re-escrever a Hamiltoniana total do sistema como

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x} + \frac{eE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}.$$

Definindo $\hat{x}' = \hat{x} + eE/(m\omega^2)$ e observando que $[\hat{x}',\hat{p}] = [\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$, segue que o Hamiltoniano em termos de $\hat{x}'$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}')^2 - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}$$

corresponde a um oscilador harmônico simples mais uma constante. Portanto, suas auto-energies são

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}.$$

Por outro lado, do cálculo perturbativo temos

$$E_1^{(0)} + \Delta E_1^{(1)} + \Delta E_1^{(1)} = \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{e^2E^2}{2m^2\omega^2},$$

que é igual ao resultado exato. Isto indica que as correções de ordem superior são todas nulas.

Q9. (a) Denotemos quantidades no referencial da Terra sem “linha” e no referencial da nave com “linha”. O intervalo de tempo próprio medido pelos astronautas para a viagem de ida é $\Delta t' = 3T/4$ anos. O intervalo de tempo medido na Terra, por outro lado, é $\Delta t = cT/V$, onde V é a velocidade da nave. Da fórmula de dilatação temporal

$$\Delta t' = \gamma(V)\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{c/V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

donde se obtém que

$$V = \frac{4c}{5}.$$

(b) A distância D' percorrida pela nave em seu próprio referencial corresponde à distância percorrida no referencial da Terra cT contraída pelo fator de Lorentz $\gamma(V = \frac{4c}{5}) = \frac{5}{3}$. Logo, $D' = cT/\gamma = \frac{3cT}{5}$.

(c) Seja $t_1 = t_1' = 0$ o instante de emissão do primeiro pulso com a nave ainda na posição $x_1 = x_1' = 0$. O segundo pulso é emitido em $t_2' = T_0 = 1$ ano, na posição $x_2 = Vt_2$ ($x_2' = 0$). Esse pulso chegará na Terra em $t_3 = t_2 + x_2/c = T_P$, onde T_P é o período procurado, medido no referencial da Terra. Da fórmula da dilatação temporal, $t_2 = \gamma(V)t_2' = \frac{5}{3}$ anos. Assim,

$$T_P = t_2 + \frac{x_2}{c} = t_2\left(1+\frac{V}{c}\right) = \frac{5}{3}\left(1+\frac{4}{5}\right) = 3 \text{ anos}.$$

Alternativamente, da expressão do efeito Doppler da luz com $T_0 = 1$ ano

$$T_P = T_0\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} = 1 \text{ ano}\sqrt{\frac{1+4/5}{1-4/5}} = 3 \text{ anos}.$$

(d) A velocidade do módulo espacial no referencial da Terra é

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1+\frac{Vu_x'}{c^2}} = \frac{\frac{-5c}{6}+\frac{4c}{5}}{1-\frac{4.5}{5.6}} = -\frac{c}{10}.$$

Portanto, o tempo da viagem de retorno do módulo é

$$t_R = (cT/2)/|u_x| = \frac{cT}{2}\frac{10}{c} = 5T.$$

Este tempo deve ser somado ao tempo necessário para chegar à metade do caminho antes de ser feito o retorno

$$t_{1/2} = (cT/2)/V = \frac{5T}{8}.$$

Assim, o tempo total procurado é

$$t_{\text{tot}} = t_{1/2} + t_R = 5T + \frac{5T}{8} = \frac{45T}{8}.$$

Q10. (a) Podemos escrever

$$E_n = \hbar\omega_0\left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_0\left(2n + \frac{3}{2}\right) \qquad n = 0,1,2,\dots$$

A função de partição para o ensemble canônico de um oscilador é

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_0\left(2n+\frac{3}{2}\right)} = e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega_0 n} = e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0}\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

onde $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ e $x = e^{-2\beta\hbar\omega_0}$. Usando $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$,

$$Z_1 = \frac{e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0}}{1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0}}.$$

A função de partição para o sistema de N osciladores é $Z = Z_1^N$. A energia interna por oscilador é

$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{N} = -\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1 = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0 + \ln(1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0})\right] \\ &= \frac{3}{2}\hbar\omega_0 + \frac{2\hbar\omega_0 e^{-2\beta\hbar\omega_0}}{1 - e^{-2\beta\hbar\omega_0}} = \hbar\omega_0\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{e^{2\beta\hbar\omega_0} - 1}\right). \end{aligned}$$

No limite clássico $\hbar\omega_0 \ll k_B T$, $e^{2\beta\hbar\omega_0} \approx 1 + 2\beta\hbar\omega_0$ e

$$u \approx \hbar\omega_0\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2\beta\hbar\omega_0}\right) = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 + k_B T \approx k_B T.$$

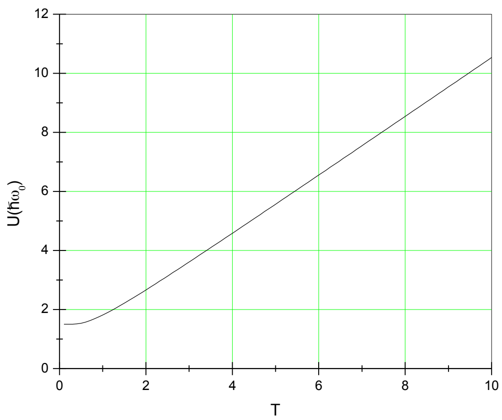


Figura 1: Esboço de u x T.

(b) A entropia por oscilador é

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{S}{N} = \frac{U-F}{NT} = \frac{u}{T} + \frac{k_B \ln Z}{N} = \frac{u}{T} + k_B \ln Z_1 \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{T}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{e^{2\beta\hbar\omega_0}-1}\right) - k_B\left[\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_0 + \ln(1-e^{-2\beta\hbar\omega_0})\right] \\
&= \frac{2\hbar\omega_0/T}{e^{2\beta\hbar\omega_0}-1} - k_B \ln(1-e^{-2\beta\hbar\omega_0}),
\end{aligned}
$$

onde usamos alguns resultados do item (a). No limite clássico

$$
s \approx \frac{2\hbar\omega_0/T}{2\beta\hbar\omega_0} - k_B \ln(2\beta\hbar\omega_0) = k_B\left[1 + \ln\left(\frac{k_B T}{2\hbar\omega_0}\right)\right].
$$

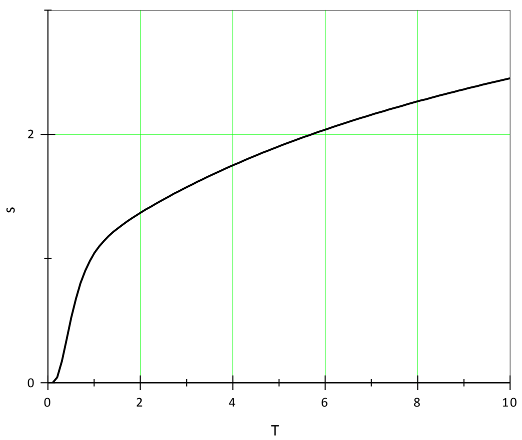


Figura 2: Esboço de s x T.

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2017

Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As componentes vertical (y) e horizontal (x) da equação da segunda lei de Newton são

$$\begin{aligned} F_y &= T\cos\theta - mg = m\ddot{y}, \\ F_x &= -T\sin\theta = m\ddot{x}, \end{aligned}$$

onde T é a tração no fio. Para pequenos ângulos θ, o movimento é aproximadamente horizontal e $y = \dot{y} = \ddot{y} \approx 0$. Assim, $T\cos\theta \approx T \approx mg$. A dinâmica horizontal fica então

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = -mg\sin\theta &\approx -mg\theta \approx -mg\frac{x}{l} \\ \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}x &= 0. \end{aligned}$$

Esta é a equação do oscilador harmônico simples com frequência angular $\omega = \sqrt{g/l}$. O período procurado é, portanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(b) Como a massa da esfera era muito maior que a massa do fio e os deslocamentos iniciais eram muito menores que o comprimento do fio, o que foi confirmado pela ausência de variação do período dentro do intervalo de variação dos deslocamentos iniciais, podemos tratar o pêndulo utilizado com um pêndulo simples. Assim, utilizando a resposta do item anterior,

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}.$$

Usando os valores medidos

$$g = 4\pi^2\frac{4{,}00}{(4{,}00)^2} = 9{,}86960 \text{ m/s}^2,$$

que ainda está expresso com algarismos significativos em excesso. Para o cálculo do erro de g, utilizamos

$$\begin{aligned} \Delta g &= \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \\ \Delta_1 &= \frac{\partial g}{\partial l}\Delta_l = 4\pi^2\frac{1}{T^2}\Delta_l, \\ \Delta_2 &= \frac{\partial g}{\partial T}\Delta_T = -8\pi^2\frac{l}{T^3}\Delta_T. \end{aligned}$$

Usando os dados fornecidos

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \pi^2 \times 5 \times 10^{-3} \\ \Delta_2 &= -\pi^2 \times 25 \times 10^{-3}, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta g = \pi^2 \times \sqrt{650} \times 10^{-3} = 5\pi^2 \times \sqrt{26} \times 10^{-3} \approx 0{,}2 \text{ m/s}^2.$$

Alternativamente, pode-se argumentar que $\Delta_2 \gg \Delta_1$ e $\Delta g \approx |\Delta_2|$. O resultado final é

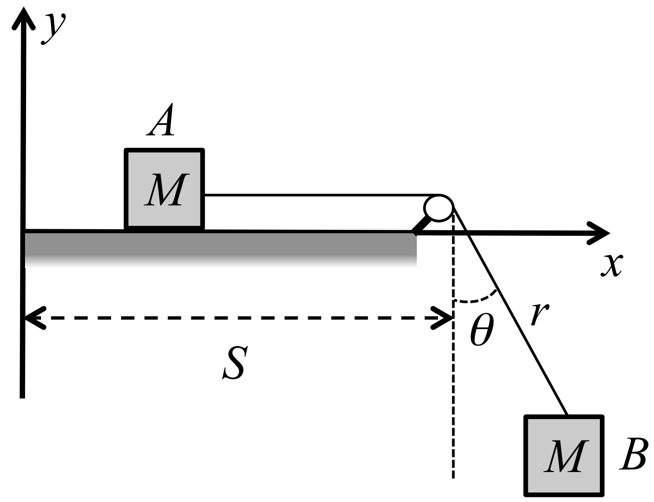
$$g = 9{,}9 \pm 0{,}2 \text{ m/s}^2.$$

Q2. Considerando o sistema de referência da figura abaixo, definimos as coordenadas do corpo A como x_A e $y_A = 0$ e do corpo B como x_B e y_B. Dadas as distâncias S e r definidas na figura, segue que

$$\begin{aligned} x_B &= S + r\sin\theta, \\ y_B &= -r\cos\theta, \end{aligned}$$

e a inextensibilidade da corda impõe o vínculo entre as coordenadas

$$(S - x_A) + r = l.$$



(a) Para esse item, podemos impor $\theta = 0$ desde o início. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= 0, \\ \dot{y}_B &= -\dot{r}, \\ \dot{x}_A &= \dot{r}, \end{aligned}$$

onde usamos o vínculo na última equação. A energia potencial gravitacional do corpo B é $V = Mgy_B = -Mgr$, onde tomamos a altura $y = 0$ como referência (e, portanto, o corpo A não contribui para V). A Lagrangiana do sistema é

$$\begin{aligned} L_a &= \frac{M}{2}\left(\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) - V \\ L_a &= M\dot{r}^2 + Mgr. \end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_a}{\partial \dot{r}}\right) &= \frac{\partial L_a}{\partial r} \\ 2M\ddot{r} &= Mg \Rightarrow \ddot{r} = \frac{g}{2}, \end{aligned}$$

que é a aceleração comum pedida.

(b) Deixando agora θ variar, as componentes das velocidades ficam

$$\begin{aligned}
\dot{x}_B &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \\
\dot{y}_B &= -\dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta, \\
\dot{x}_A &= \dot{r},
\end{aligned}$$

e a Lagrangiana do sistema fica

$$\begin{aligned}
L_b &= \frac{M}{2}\left(\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) - Mgy_B \\
L_b &= \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{M}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Mgr\cos\theta.
\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange para r é

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}}\right) &= \frac{\partial L_b}{\partial r} \\
2\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta. \qquad (1)
\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange para θ é

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{\partial L_b}{\partial \theta} \\
\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) &= 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = -gr\sin\theta.
\end{aligned}$$

Fazendo $\theta = \dot{\theta} = 0$ na Eq. (1), o lado direito se reduz a g e recuperamos

$$\ddot{r} = \frac{g}{2}.$$

(c) Nesse caso, precisamos acrescentar as contribuições da corda para as energias cinética e potencial. A energia cinética é

$$T_{\text{corda}} = \frac{m}{2}\dot{r}^2,$$

já que a velocidade da corda é a mesma do corpo B e a energia potencial é

$$V_{\text{corda}} = -\left(\frac{r}{l}\right) mg\frac{r}{2} = -\frac{mg}{2l}r^2,$$

onde usamos que a fração de massa da corda que pende ao lado da mesa é $(r/l)m$ e a altura do seu centro de massa é $-r/2$. Portanto, a Lagrangiana fica

$$\begin{aligned}
L_c &= M\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\dot{r}^2 + Mgr + \frac{mg}{2l}r^2 \\
L_c &= \left(M + \frac{m}{2}\right)\dot{r}^2 + Mgr + \frac{mg}{2l}r^2.
\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange é

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}}\right) &= \frac{\partial L_c}{\partial r} \\
(2M + m)\,\ddot{r} &= Mg + \frac{mg}{l}r.
\end{aligned}$$

Q3. (a) A energia total da partícula 1 é $E_1 = \gamma mc^2$. Segundo o enunciado, $E_1 = 2mc^2$. Portanto,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}.$$

Resolvendo para v,

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

(b) Da conservação de energia, $E_1^i + E_2^i = E^f$,

$$2mc^2 + mc^2 = \gamma(V)Mc^2$$

$$3m = \gamma(V)M \tag{2}$$

Da conservação de momento linear

$$\gamma(v)mv = \gamma(V)MV$$

$$2\frac{\sqrt{3}}{2}mc = \sqrt{3}\,mc = \gamma(V)MV. \tag{3}$$

Dividindo (3) por (2), temos

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3}c. \tag{4}$$

Substituindo (4) em (2), temos

$$M = \frac{3m}{\gamma(V)} = \sqrt{1 - 1/3}\,3m = \sqrt{2/3}\,3m = \sqrt{6}\,m.$$

(c) A energia cinética procurada é dada por

$$K = \gamma(V)Mc^2 - Mc^2 = [\gamma(V) - 1]\,Mc^2.$$

Usando o resultado do item anterior,

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/3}} - 1\right)Mc^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)\sqrt{6}mc^2 = \left(3 - \sqrt{6}\right)mc^2.$$

Q4. (a) Para $E \in [0,U_0]$, $E > V(x)$ se $x \in [0,L]$ e $E < V(x)$ se $x < 0$ ou $x > L$. Isso leva a que, nessas duas últimas regiões, a função de onda decaia exponencialmente com a distância ao poço, o que impõe condições de contorno restritivas sobre as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo (ESIT). Como consequência dessas condições de contorno, a ESIT só pode ter solução para valores discretos de E.

(b) Se $x < 0$ (região I) ou $x > L$ (região III), a função de onda decai exponencialmente, enquanto que se $0 < x < L$ (região II) ela tem comportamento oscilatório/senoidal. Assim, de maneira geral,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &: \psi(x) = Ae^{-\alpha|x|} = Ae^{\alpha x}, \quad x < 0, \\
\mathrm{II} &: \psi(x) = C\cos(\gamma x + \phi), \quad 0 < x < L, \\
\mathrm{III} &: \psi(x) = Be^{-\beta|x-L|} = Be^{-\beta(x-L)}, \quad x > L.
\end{aligned}$$

(c) A ESIT é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Logo, para um potencial contínuo por partes não infinito, a função de onda e sua primeira derivada são sempre contínuas. Impondo essas condições nas descontinuidades do potencial em $x = 0$ e $x = L$

$$\psi(x = 0^-) = \psi(x = 0^+) \quad \Rightarrow \quad A = C\cos\phi \tag{5}$$

$$\psi(x = L^-) = \psi(x = L^+) \quad \Rightarrow \quad C\cos(\gamma L + \phi) = B \tag{6}$$

$$\psi'(x = 0^-) = \psi'(x = 0^+) \quad \Rightarrow \quad A\alpha = -\gamma C\sin\phi \tag{7}$$

$$\psi'(x = L^-) = \psi'(x = L^+) \quad \Rightarrow \quad -\gamma C\sin(\gamma L + \phi) = -\beta B. \tag{8}$$

A ESIT

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''x + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = [E - V(x)]\,\psi(x)$$

aplicada nas 3 regiões nos dá

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &: -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi(x) = -|U_0 - E|\psi(x) \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2m|U_0 - E|}{\hbar^2}}, \\
\mathrm{II} &: -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma^2\psi(x) = +E\psi(x) \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \\
\mathrm{III} &: -\frac{\hbar^2}{2m}\beta^2\psi(x) = -|U_0 - E|\psi(x) \Rightarrow \beta = \alpha = \sqrt{\frac{2m|U_0 - E|}{\hbar^2}}.
\end{aligned}$$

De (5) e (6), obtemos A e B em termos de C

$$A = C\cos\phi, \quad B = C\cos(\gamma L + \phi),$$

que, quando levadas em (7) e (8), fornecem

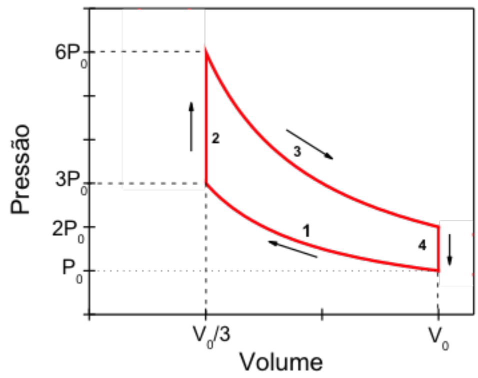
$$\alpha C\cos\phi = -\gamma C\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \tan\phi = -\alpha/\gamma \tag{9}$$

$$\gamma C\sin(\gamma L + \phi) = \beta C\cos(\gamma L + \phi) \quad \Rightarrow \quad \tan(\gamma L + \phi) = \beta/\gamma = \alpha/\gamma. \tag{10}$$

As Eqs. (9) e (10) formam um sistema de duas equações em duas incógnitas, ϕ e E (através de α e γ), que pode ser resolvido para achar a energia E.

(d) No limite $L \to 0$, podemos ver que a condição na energia se torna $\alpha \to -\alpha$, que só tem solução se $\alpha \to 0$ ou $E \to U_0$.

Q5. (a) O esboço do ciclo num diagrama P x V é



(b) Usaremos a convenção de que trabalho realizado *pelo* gás e calor *injetado* no gás são positivos. Nesse caso, $\Delta U = Q - W$. A energia interna de um gás ideal só depende da sua temperatura. Como não há variação de temperatura no processo 1, a variação da energia interna é nula $\Delta U_1 = 0$. No processo 2 o trabalho é nulo, pois não há variação de volume. A variação de energia interna é, portanto, igual ao calor injetado no sistema (note que $n = 1$)

$$\Delta U_2 = Q_2 = C_V \Delta T = \frac{3R}{2}(2T_0 - T_0) = \frac{3RT_0}{2}.$$

(c) Como o processo 3 é isotérmico à temperatura $2T_0$, a pressão é dada por

$$P = \frac{2RT_0}{V},$$

donde se deduz que o trabalho realizado pelo gás é

$$W_3 = \int_{V_0/3}^{V_0} PdV = \int_{V_0/3}^{V_0} \frac{2RT_0}{V} dV = 2RT_0 \ln 3.$$

(d) De forma semelhante ao feito no item (c), o trabalho realizado pelo gás no processo isotérmico 1 à temperatura T_0 é

$$W_1 = \int_{V_0}^{V_0/3} PdV = \int_{V_0}^{V_0/3} \frac{RT_0}{V} dV = -RT_0 \ln 3,$$

de tal forma que o trabalho total é $W_{tot} = W_1 + W_3 = RT_0 \ln 3$, onde usamos que o trabalho é nulo nos processos isovoluméticos 2 e 4. Calor é injetado (positivo na nossa convenção) no sistema apenas nos processos 2 e 3, pois:

(i) o calor no processo 1 é igual ao trabalho W_1 (já que a energia interna é constante, porque a temperatura é constante) e $W_1 < 0$ (ver acima) e

(ii) o calor no processo 4 é $Q_4 = C_V \Delta T = \frac{3R}{2}(T_0 - 2T_0) = -\frac{3RT_0}{2} < 0$.

O calor no processo 2 foi calculado no item (b) e é $Q_2 = 3RT_0/2$. O calor no processo 3, que é isotérmico, é igual ao trabalho realizado pelo gás $Q_3 = W_3 = 2RT_0 \ln 3$, como calculado no item (c). O calor total injetado é, portanto,

$$Q_{inj} = Q_2 + Q_3 = RT_0 \left(\frac{3}{2} + 2 \ln 3 \right).$$

Finalmente, o rendimento da máquina é

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{inj}} = \frac{\ln 3}{\frac{3}{2} + 2\ln 3} \approx 0{,}30.$$

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2017

Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. (a) O potencial eletrostático total $V(z)$ é a soma dos potenciais dos dois aros. O potencial devido ao aro de carga negativa é

$$V_-(z) = -\frac{\lambda \cdot 2\pi b}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}},$$

já que cada elemento de carga do aro está à mesma distância do ponto P. Analogamente, o potencial devido ao aro de carga positiva é

$$V_+(z) = \frac{2\lambda \cdot 2\pi 2b}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+(2b)^2}}.$$

Somando as duas contribuições

$$V(z) = V_-(z) + V_+(z) = \frac{\lambda b}{2\epsilon_0}\left[\frac{4}{\sqrt{z^2+4b^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}\right].$$

(b) Por simetria, $E_x(z) = E_y(z) = 0$. O campo elétrico ao longo do eixo z é

$$E_z(z) = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\lambda b z}{2\epsilon_0}\left[\frac{4}{(z^2+4b^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2+b^2)^{3/2}}\right].$$

(c) Pela segunda lei de Newton aplicada ao sistema, temos

$$m\ddot{z} = qE_z(z),$$

onde $E_z(z)$ é dado no item (b).

(d) Linearizando o campo elétrico do item (b) em torno de $z = 0$ obtemos

$$\ddot{z} \approx -\frac{q\lambda}{4\epsilon_0 m b^2}z.$$

A equação diferencial é equivalente à equação de um oscilador harmônico simples com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{q\lambda}{4\epsilon_0 m b^2}}.$$

A frequência de oscilação é, portanto,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4\pi b}\sqrt{\frac{q\lambda}{m\epsilon_0}}.$$

Q7. (a) O campo elétrico físico é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{Re}\left[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\right]\\ &= E_0\left\{\hat{\mathbf{x}}\mathrm{Re}\left[e^{i(kz-\omega t)}\right]+\hat{\mathbf{y}}\mathrm{Re}\left[ie^{i(kz-\omega t)}\right]\right\}\\ &= E_0\left[\hat{\mathbf{x}}\cos(kz-\omega t)-\hat{\mathbf{y}}\sin(kz-\omega t)\right].\end{aligned}$$

(b) Vamos usar a lei de Faraday. Primeiramente, calculamos o rotacional de $\tilde{\mathbf{E}}$ usando a substituição $\nabla \to i\mathbf{k}$ para ondas planas

$$\begin{aligned}\nabla\times\tilde{\mathbf{E}} &= E_0\nabla\times\left(e^{i(kz-\omega t)}(\hat{\mathbf{x}}+i\hat{\mathbf{y}})\right)\\ &= E_0 ik\hat{\mathbf{z}}\times\left(e^{i(kz-\omega t)}(\hat{\mathbf{x}}+i\hat{\mathbf{y}})\right)\\ &= ikE_0e^{i(kz-\omega t)}\left(\hat{\mathbf{y}}-i\hat{\mathbf{x}}\right).\end{aligned}$$

Escrevendo o campo magnético na forma $\tilde{\mathbf{B}}=\tilde{\mathbf{B}}_0e^{i(kz-\omega t)}$ obtemos

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}=-i\omega\tilde{\mathbf{B}}_0e^{i(kz-\omega t)}.$$

Conseguimos então satisfazer a lei de Faraday se a amplitude $\tilde{\mathbf{B}}_0$ for tal que

$$\begin{aligned}\nabla\times\tilde{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}.\\ ikE_0e^{i(kz-\omega t)}\left(\hat{\mathbf{y}}-i\hat{\mathbf{x}}\right) &= i\omega\tilde{\mathbf{B}}_0e^{i(kz-\omega t)}\\ \Rightarrow\tilde{\mathbf{B}}_0 &= \frac{E_0}{c}\left(\hat{\mathbf{y}}-i\hat{\mathbf{x}}\right).\end{aligned}$$

Logo, o campo magnético complexo é

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)=\frac{E_0}{c}\left(\hat{\mathbf{y}}-i\hat{\mathbf{x}}\right)e^{i(kz-\omega t)},$$

e o campo magnético físico é

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{Re}\left[\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)\right]\\ &= \frac{E_0}{c}\left\{\hat{\mathbf{y}}\mathrm{Re}\left[e^{i(kz-\omega t)}\right]-\hat{\mathbf{x}}\mathrm{Re}\left[ie^{i(kz-\omega t)}\right]\right\}\\ &= \frac{E_0}{c}\left[\hat{\mathbf{y}}\cos(kz-\omega t)+\hat{\mathbf{x}}\sin(kz-\omega t)\right].\end{aligned}$$

(c) A densidade de momento linear é

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \epsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}\\ &= \frac{\epsilon_0E_0^2}{c}\left(\hat{\mathbf{x}}\cos(kz-\omega t)-\hat{\mathbf{y}}\sin(kz-\omega t)\right)\times\left(\hat{\mathbf{y}}\cos(kz-\omega t)+\hat{\mathbf{x}}\sin(kz-\omega t)\right)\\ &= \frac{\epsilon_0E_0^2}{c}\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

(d) Escrevendo o vetor posição em coordenadas cilíndricas $\mathbf{r}=\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+z\hat{\mathbf{z}}$ e usando o resultado do item (c), obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) &= \frac{\epsilon_0E_0^2}{c}(\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+z\hat{\mathbf{z}})\times\hat{\mathbf{z}}\\ &= -\frac{\epsilon_0E_0^2\rho}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

Q8. (a) Usando a relação entre a energia cinética e o momento linear (não-relativísticos) e a relação de de Broglie

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} &= E_{\text{cin}} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\,E_{\text{cin}}}} \\ &= \frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times (9{,}11 \times 10^{-31}) \times (22) \times (1{,}6 \times 10^{-19})}} = 0{,}26 \text{ nm}. \end{aligned}$$

(b) Numa transição para o estado fundamental, temos

$$h\,f = 10{,}2\,\text{eV} = 13{,}6\,\text{eV}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Podemos verificar que esta relação é satisfeita para $n = 2$, uma vez que

$$13{,}6 \times \frac{3}{4} = \frac{136}{4}\frac{3}{10} = 34 \times 3/10 = 10{,}2.$$

Assim, o número quântico do estado excitado é $n = 2$.

(c) Da relação de incerteza energia-tempo, temos

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-8}}\,\text{J} = 10^{-7}\,\text{eV},$$

que é a incerteza procurada.

(d) A energia cinética relativística é ($\beta \equiv v/c$).

$$E_{\text{cin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2.$$

Resolvendo para β^2,

$$\beta^2 = 1 - \left(1 + E_{\text{cin}}/mc^2\right)^{-2}.$$

Como $E_{\text{cin}} \ll mc^2$, podemos expandir até primeira ordem, obtendo

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \approx 1 - \left(1 - 2\frac{E_{\text{cin}}}{mc^2}\right) = 2\frac{E_{\text{cin}}}{mc^2}.$$

Logo,

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{mv^2}{2} \approx \frac{p^2}{2m}.$$

Alternativamente, pode-se apontar que a energia cinética do elétron incidente, 22 eV, é muito menor que a energia de repouso da partícula, 511 keV, o que justifica o uso da aproximação não-relativística.

Q9. (a) Como todo observável, à Hamiltoniana deve corresponder um operador Hermitiano. Sua representação matricial é realizada por uma matriz Hermitiana, ou seja, uma matriz que é igual a sua transposta complexa-conjugada, ou ainda, uma matriz cujos elementos H_{ij} são tais que

$$H_{ij} = H^*_{ji}.$$

Segue que, para que a matriz fornecida seja Hermitiana, então o elemento que falta é M^*_{23} e $E_3 \in \mathbb{R}$ e sua parte imaginária é zero.

(b) A matriz de A é evidentemente diagonal e dada na base considerada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O comutador entre A e H pode ser calculado

$$[A,H] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{23} \\ 0 & -M^*_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

e ele é, de maneira geral, não nulo. Segue que A não pode ser medido simultaneamente com a energia. Alternativamente, pode-se dizer que A só pode ser medido simultaneamente com a energia se $M_{23} = 0$.

(c) Devemos diagonalizar a Hamiltoniana. De sua estrutura de blocos, segue que o estado $|1\rangle$ é auto-estado de H com auto-valor $\lambda_1 = E_1$

$$H|1\rangle = E_1|1\rangle \; .$$

Focando agora no sub-espaço gerado por $|2\rangle$ e $|3\rangle$, as outras autoenergias são soluções de

$$\det \begin{pmatrix} E_2 - \lambda & M_{23} \\ M^*_{23} & E_3 - \lambda \end{pmatrix} = (E_2 - \lambda)(E_3 - \lambda) - |M_{23}|^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(E_2 + E_3) + E_2E_3 - |M_{23}|^2 = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau, obtemos as outras duas autoenergias

$$\lambda_{2,3} = \frac{E_2 + E_3 \pm \sqrt{(E_2 - E_3)^2 + 4|M_{23}|^2}}{2} \; .$$

(d) A Hamiltoniana nesse caso é

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; ,$$

e os autovalores são, usando o resultado do item (c),

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 4.$$

Já vimos que o auto-estado de λ_1 é $|\lambda_1\rangle = |1\rangle$. Os auto-estados de $\lambda_{2,3}$ são obtidos de

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_{2,3} & 1 \\ 1 & 3 - \lambda_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 2$, o auto-estado é

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \to |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle - |3\rangle\right),$$

e para $\lambda_3 = 4$, o auto-estado é

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to |\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle + |3\rangle\right).$$

O estado em $t = 0$ é $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\lambda_2\rangle + |\lambda_3\rangle\right)$. A evolução temporal posterior é simples na base de auto-estados de H

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\lambda_2}{\hbar}t}|\lambda_2\rangle + e^{-i\frac{\lambda_3}{\hbar}t}|\lambda_3\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{2}{\hbar}t}|\lambda_2\rangle + e^{-i\frac{4}{\hbar}t}|\lambda_3\rangle\right).$$

Na base original, o estado é

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{2}{\hbar}t}\left(|2\rangle - |3\rangle\right) + e^{-i\frac{4}{\hbar}t}\left(|2\rangle + |3\rangle\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(e^{-i\frac{4}{\hbar}t} + e^{-i\frac{2}{\hbar}t}\right)|2\rangle + \left(e^{-i\frac{4}{\hbar}t} - e^{-i\frac{2}{\hbar}t}\right)|3\rangle\right].$$

O vetor coluna correspondente na base original é

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ e^{-i\frac{4}{\hbar}t} + e^{-i\frac{2}{\hbar}t}\\ e^{-i\frac{4}{\hbar}t} - e^{-i\frac{2}{\hbar}t}\end{pmatrix}.$$

Q10. (a) Nos itens abaixo, $1/\beta = k_B T$. Como os íons são independentes, a função de partição é dada pelo produto das funções de partição de cada íon

$$Z = Z_1^N,$$

onde

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{\sigma_1=-1,0,+1} e^{-\beta D\sigma_1^2+\beta h\sigma_1} \\ &= e^{-\beta D+\beta h} + 1 + e^{-\beta D-\beta h} \\ &= 1 + 2e^{-\beta D}\cosh(\beta h). \end{aligned}$$

Logo

$$Z = (1 + 2e^{-\beta D}\cosh(\beta h))^N.$$

(b) A energia livre de Helmholtz por íon é

$$f = \frac{F}{N} = -\frac{k_B T}{N}\ln Z = -k_B T\ln Z_1 = -k_B T\ln(1 + 2e^{-\beta D}\cosh(\beta h)).$$

(c) A energia interna por íon é dada por

$$u = \frac{U}{N} = -\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1.$$

Calculando a derivada

$$u = \frac{2e^{-\beta D}}{2e^{-\beta D}\cosh h\beta + 1}\left(D\cosh h\beta - h\sinh h\beta\right).$$

(d) Para $h = 0$, temos que

$$u = \frac{2De^{-\beta D}}{2e^{-\beta D} + 1} = \frac{2D}{2 + e^{\beta D}}.$$

O calor específico é dado por

$$c = \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial T} = \frac{2D^2 e^{\frac{D}{k_B T}}}{k_B T^2(2 + e^{\frac{D}{k_B T}})^2}.$$

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2018

Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As equações de movimento são

$$\mathbf{F}_g = -mg\hat{\mathbf{z}} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_x = 0, \quad \dot{v}_z = -g.$$

(b) Integrando em relação ao tempo as equações de movimento,

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= 0 \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = C_1 \\ v_x(0) &= v_0 \cos\theta = C_1 \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = v_0\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_z &= -g \quad \Rightarrow \quad v_z(t) = -gt + C_2 \\ v_z(0) &= v_0 \sin\theta = C_2 \quad \Rightarrow \quad v_z(t) = v_0\sin\theta - gt. \end{aligned}$$

(c) Integrando em relação ao tempo as componentes da velocidade obtidas no item (b),

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x &= v_0\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 t\cos\theta + C_1 \\ x(0) &= 0 = C_1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 t\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v_0\sin\theta - gt \quad \Rightarrow \quad z(t) = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + C_2 \\ z(0) &= 0 = C_2 \quad \Rightarrow \quad z(t) = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

(d) Utilizando os resultados dos itens (b) e (c),

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v} \\ \mathbf{L} &= m\left[\hat{\mathbf{x}}\left(v_0 t\cos\theta\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\right] \times \left[\hat{\mathbf{x}}\left(v_0\cos\theta\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(v_o\sin\theta - gt\right)\right] \\ \mathbf{L} &= \left(\frac{1}{2}mgv_0t^2\cos\theta\right)\hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

(e) Novamente, utilizando o resultado do item (c),

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{r}\times\mathbf{F}_g \\ \mathbf{N} &= \left[\hat{\mathbf{x}}\left(v_0 t\cos\theta\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\right] \times \left(-mg\hat{\mathbf{z}}\right) \\ \mathbf{N} &= \left(mgv_0t\cos\theta\right)\hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Comparando os resultados dos itens (d) e (e) temos, como esperado,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}.$$

Q2. (a) A força pedida é

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla U_2(r) = -\hat{\mathbf{r}}\frac{dU_2(r)}{dr} = -kr\hat{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} = -k(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}).$$

(b) A energia cinética da partícula é dada por

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right).$$

Como $U_1(y) = \lambda y = \lambda r \sin\theta$, a energia potencial em coordenadas polares é

$$U = \frac{1}{2}kr^2 + \lambda r\sin\theta.$$

A lagrangiana da partícula é, portanto,

$$\begin{aligned} L &= T - U, \\ L &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}kr^2 - \lambda r\sin\theta. \end{aligned}$$

Usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - kr - \lambda\sin\theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\lambda r\cos\theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta}, \end{aligned}$$

as equações de movimento de Euler-Lagrange são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -kr - \lambda\sin\theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -\lambda r\cos\theta, \qquad (1) \\ & \qquad\quad m\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right) + \lambda r\cos\theta = 0. \end{aligned}$$

(c) Utilizando os resultados do item (b), os momentos canonicamente conjugados são

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}. \end{aligned}$$

A hamiltoniana é dada por

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 + \lambda r\sin\theta.$$

(d) O momento angular é

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v} = mr\hat{\mathbf{r}}\times\left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}.$$

Comparando o resultado acima com os resultados do item (c), temos que

$$p_\theta = L_z.$$

A equação de movimento (1) indica que $p_\theta = L_z =$ constante se $\lambda = 0$, isto é, $\mathbf{L}$ é conservado apenas na ausência da força $\mathbf{F}_1$.

Q3. (a) A forma geral das soluções $\psi_1(x)$ (região 1: $x < 0$) e $\psi_2(x)$ (região 2: $x > 0$) é

$$\psi_1(x) = A\,e^{ik_1x} + B\,e^{-ik_1x}, \qquad k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar,$$
$$\psi_2(x) = C\,e^{ik_2x} + D\,e^{-ik_2x}, \qquad k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar,$$

onde A, B, C e D são constantes complexas a serem determinadas.

(b) O percentual pedido é dado pelo coeficiente de reflexão, que é obtido da razão entre as densidades de corrente $J = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\frac{d\psi^*}{dx} - \psi^*\frac{d\psi}{dx})$ das ondas refletida e incidente. Ele é dado por $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$. Como as partículas são incidentes pela esquerda, $D = 0$. Os outros coeficientes são determinados exigindo-se a continuidade da função de onda e sua derivada em $x = 0$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad\Rightarrow\quad A + B = C,$$
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \quad\Rightarrow\quad k_1(A - B) = k_2\,C.$$

Assim,

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \Rightarrow R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{1 - k_2/k_1}{1 + k_2/k_1}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{(E - V_0)/E}}{1 + \sqrt{(E - V_0)/E}}\right)^2.$$

(c) Para $E < V_0$, a solução geral é

$$\psi_1(x) = A\,e^{ik_1x} + B\,e^{-ik_1x}, \qquad k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar,$$
$$\psi_2(x) = C\,e^{-\kappa x}, \qquad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar > 0,$$

onde A, B e C são constantes complexas a serem determinadas e já excluímos um termo com exponencial crescente para $x > 0$ por corresponder a uma função de onda que não é limitada superiormente quando $x \to +\infty$.

(d) A probabilidade pedida é o coeficiente de reflexão $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$, como no item (b).

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad\Rightarrow\quad A + B = C,$$
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \quad\Rightarrow\quad i\,k_1(A - B) = -\kappa\,C,$$

donde

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - i\kappa}{k_1 + i\kappa} \Rightarrow R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{k_1^2 + \kappa^2}{k_1^2 + \kappa^2} = 1.$$

Q4. (a) Do gráfico, pode-se estimar $y_1 \approx 25\mu$m. Para o ângulo, se L é a distância da grade ao plano do detector

$$\theta_1 \approx \mathrm{tg}\theta_1 = y_1/L = \frac{2{,}5 \times 10^{-5}}{1{,}25} = 2{,}0 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

(b) Se d é a separação entre as fendas da grade, a condição para interferência construtiva é, do formulário,

$$d \ \mathrm{sen}\theta_n = n\lambda.$$

Para o primeiro máximo ($n = 1$)

$$\lambda = d \ \mathrm{sen}\theta_1 \approx d \ \theta_1 = (100 \times 10^{-9})(2{,}0 \times 10^{-5}) = 2{,}0 \times 10^{-12} \text{ m.}$$

(c) A massa molar do C_{60} é $60 \times 12 = 72 \times 10^1$ g/mol. Logo, a massa de uma molécula é

$$M = \frac{72 \times 10^1 \text{ g}}{6{,}02 \times 10^{23}} = 1{,}2 \times 10^{-24} \text{ kg.}$$

O módulo do momento linear de uma molécula é

$$p = Mv = 1{,}2 \times 10^{-24} \times 220 = 2{,}6 \times 10^{-22} \text{ kg m/s.}$$

(d) O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = 6{,}63 \times 10^{-34}/2{,}6 \times 10^{-22} = 2{,}6 \times 10^{-12} \text{ m.}$$

Q5. (a) A pressão final P_f é a soma da pressão externa P_a e a pressão P_m devido à força da mola. Esta última é

$$P_m = \frac{kx}{A} = \frac{400 \times 2}{5 \times 10^{-3}} = 1{,}6 \times 10^5 \text{ N/m}^2,$$

onde x é a variação de comprimento do cilindro. Assim

$$P_f = P_m + P_a = 2{,}6 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

(b) A relação entre as variáveis termodinâmicas iniciais e finais é

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow T_f = \frac{P_f V_f T_i}{P_i V_i} = \frac{P_f T_i (L + x)}{P_i L} = \frac{2{,}6 \times 300 \times 27}{1 \times 25} = 8{,}4 \times 10^2 \text{ K}.$$

Alternativamente, da equação do gás ideal

$$T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = \frac{2{,}6 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} \times 27 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-2} \times 8{,}31} = 8{,}4 \times 10^2 \text{ K}.$$

(c) O trabalho total W realizado pelo gás é igual à soma da variação de energia potencial elástica da mola W_m com o trabalho W_a realizado contra a pressão externa constante

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{kx^2}{2} = \frac{400 \times 10^2 \times (2 \times 10^{-2})^2}{2} = 8 \text{ J}, \\
W_a &= P_a \Delta V = P_a A x = 1 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-2} = 10 \text{ J}, \\
W &= W_m + W_a = 18 \text{ J}.
\end{aligned}$$

(d) O calor Q fornecido ao gás é igual ao trabalho total W calculado em (c) mais a variação da energia interna do gás ΔU

$$\begin{aligned}
\Delta U &= n c_V \Delta T = 5 \times 10^{-2} \times 12{,}5 \times (8{,}4 \times 10^2 - 300) = 3{,}4 \times 10^2 \text{ J}, \\
Q &= \Delta U + W = 3{,}6 \times 10^2 \text{ J}.
\end{aligned}$$

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2018

Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. (a) Há conservação de energia mecânica dos íons entre a fonte e a fenda de entrada. A energia mecânica total é a soma da energia cinética e potencial elétrica. Assim, se a velocidade final procurada tem módulo v e as energias mecânicas inicial e final são E_i e E_f, respectivamente,

$$E_i = qV = E_f = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

Dentro da câmara, a energia mecânica, que é puramente cinética, é conservada, já que o campo magnético não realiza trabalho. Portanto, v é também o módulo da velocidade dos íons quando passam pela fenda de saída.

(b) O módulo da força magnética $\mathbf{F}_m$ dentro da câmara é

$$|\mathbf{F}_m| = |q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})| = qvB,$$

pois $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares entre si. A força magnética é a resultante centrípeta responsável pelo movimento circular uniforme dos íons. Portanto,

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow m = \frac{qBr}{v} \Rightarrow m = \frac{qB^2r^2}{2V},$$

onde usamos o resultado do item (a) no último passo.

(c) A resolução das medidas de massa Δm está relacionada ao erro na medida do raio Δr por

$$\Delta m = \frac{\partial m}{\partial r}\Delta r \Rightarrow \Delta m = \frac{qB^2r}{V}\Delta r.$$

Assim,

$$\Delta m = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \times (1{,}00)^2 \times 1{,}0 \times 10^{-1}}{4{,}0 \times 10^3} 100 \times 10^{-6} = 4{,}0 \times 10^{-28} \text{ kg}.$$

(d) A diferença de massa entre os isótopos δm é aproximadamente duas vezes a massa do nêutron

$$\delta m = 2 \times 1{,}7 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3{,}4 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Essa diferença é 8,5 vezes a resolução do aparelho. Portanto, é possível distinguir os isótopos.

Q7. (a) Partindo das equações de Maxwell em meios materiais (dadas no formulário) e fazendo $\rho_F = 0$, $\mathbf{J}_F = \sigma\mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$,

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_F \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{E} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_F + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{5}$$

Deve-se notar que as equações sem fontes não são modificadas em meios materiais.

(b) Tomando o rotacional da Eq. (3)

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B}) \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})$$

Usando as Eqs. (2) e (5)

$$-\nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right).$$

Finalmente,

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

(c) Supondo que $\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$,

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E} &= \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} = -k^2\mathbf{E}\\ \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= -i\omega\mathbf{E}\\ \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2\mathbf{E}\\ \Rightarrow \left(-k^2 + i\mu\sigma\omega + \mu\epsilon\omega^2\right)\ \mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

Portanto

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega = \mu\epsilon\omega^2\left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right).$$

(d) Quando $\sigma \neq 0$, obtemos um k complexo, ou seja, $k = k_R + ik_I$, onde $k_R = \mathrm{Re}[k]$ e $k_I = \mathrm{Im}[k]$. Haverá então atenuação da amplitude da onda

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_0\, e^{i(kx-\omega t)} = \mathbf{E}_0\, e^{i[(k_R+ik_I)x-\omega t]} = \mathbf{E}_0\, e^{-k_I x}\, e^{i((k_R x-\omega t)}.$$

Quando $\sigma = 0$, k é real e a propagação da onda se dá com amplitude constante, sem atenuação.

Q8. (a) Medidas da energia dão como resultado auto-valores do hamiltoniano. Ao auto-valor E_0 corresponde unicamente o estado $|1\rangle$. Portanto, o protocolo P_1 prepara sempre o estado $|1\rangle$.

(b) Ao auto-valor E corresponde o sub-espaço gerado pelos estados $|2\rangle$ e $|3\rangle$. Portanto, os estados preparados por P_2 são da forma

$$|\psi\rangle = C_1|2\rangle + C_2|3\rangle,$$

onde C_1 e C_2 são números complexos quaisquer, não simultaneamente nulos.

(c) O hamiltoniano total após $t = 0$ é

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E & W \\ 0 & W & E \end{pmatrix}.$$

Para acharmos os auto-valores, precisamos resolver a equação secular

$$\begin{vmatrix} E_0 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & E - \lambda & W \\ 0 & W & E - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (E_0 - \lambda)\left[(E - \lambda)^2 - W^2\right] = 0.$$

Os auto-valores são

$$\lambda_0 = E_0, \qquad \lambda_+ = E + W, \qquad \lambda_- = E - W.$$

Um dos auto-vetores é óbvio da forma bloco-diagonal do hamiltoniano.

$$|\lambda_0\rangle = |1\rangle$$

Os outros auto-vetores de $\lambda_\pm$ são obtidos de

$$\begin{pmatrix} E - \lambda_\pm & W \\ W & E - \lambda_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp W & W \\ W & \mp W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde obtém-se $a_\pm = \pm b_\pm$. Assim, normalizando os auto-vetores,

$$|\lambda_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle \pm |3\rangle\right).$$

(d) Primeiramente, escrevemos o estado inicial $|\psi(t=0)\rangle = |2\rangle$ na base de auto-estados de H

$$|\psi(t=0)\rangle = |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\lambda_+\rangle + |\lambda_-\rangle\right).$$

Para $t > 0$, a evolução temporal na base de auto-estados de H é simples

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\lambda_+}{\hbar}t}|\lambda_+\rangle + e^{-i\frac{\lambda_-}{\hbar}t}|\lambda_-\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{E+W}{\hbar}t}|\lambda_+\rangle + e^{-i\frac{E-W}{\hbar}t}|\lambda_-\rangle\right).$$

Alternativamente, na base inicial o estado é

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{E+W}{\hbar}t}\left(|2\rangle + |3\rangle\right) + e^{-i\frac{E-W}{\hbar}t}\left(|2\rangle - |3\rangle\right)\right], \\ |\psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\left[\cos\left(Wt/\hbar\right)|2\rangle - i\sin\left(Wt/\hbar\right)|3\rangle\right]. \end{aligned}$$

Q9. (a) A energia dos fótons $E = hc/\lambda$ é inversamente proporcional ao comprimento de onda. Portanto, os fótons espalhados, que transferiram parte de sua energia aos elétrons, têm comprimento de onda maior que os incidentes. Segue que o comprimento de onda dos raios X incidentes é λ_1 e o comprimento de onda dos fótons espalhados é $\lambda_2 > \lambda_1$.

(b) O comprimento de onda do fóton incidente é

$$\lambda_i = \frac{hc}{E_i} = \frac{1{,}24 \text{ keV nm}}{23 \times 10^3 \text{ eV}} = 0{,}54 \text{ Å}.$$

(c) O comprimento de onda do fóton espalhado é, do formulário,

$$\lambda = \lambda_i + \frac{h}{m_0 c}\left[1 - \cos\left(60^{\mathrm{o}}\right)\right] = \lambda_i + \frac{\lambda_C}{2} = 0{,}54 + \frac{0{,}0243}{2} = 0{,}55 \text{ Å}.$$

(d) A variação da energia total relativística do elétron no evento é igual à variação procurada de sua energia cinética ΔK, já que a energia de repouso não varia. Como a energia cinética inicial do elétron é praticamente nula, sua energia cinética após o espalhamento é ΔK. Essa variação, por sua vez, é igual (em módulo) à variação da energia do fóton no espalhamento, ou seja,

$$\Delta K = E_i - \frac{hc}{\lambda} = 23 \text{ keV} - \frac{1{,}24 \text{ keV nm}}{0{,}055 \text{ nm}} = (23 - 22{,}5) \text{ keV} = 0{,}5 \text{ keV}.$$

Q10. a) Se o momento da partícula é $\mathbf{p} = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}$, seu hamiltoniano H_1 é a soma das energias cinética e potencial gravitacional

$$H_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz$$

b) Por se tratar de um sistema de partículas que não interagem entre si, sua função partição Z é

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!},$$

onde já incluímos o fator de correção de contagem de Gibbs e

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int_0^L\int_0^L\int_0^L dxdydz \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y dp_z\ e^{-\beta H_1},$$

onde $\beta = 1/(k_B T)$. As integrais gaussianas sobre os momentos são dadas no formulário e obtém-se

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{L^2}{h^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)^3 \int_0^L e^{-\beta mgz}dz \\ &= \frac{L^2}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\left(\frac{1-e^{-\beta mgL}}{\beta mg}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$Z = \frac{1}{N!}\left[\frac{L^2}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\left(\frac{1-e^{-\beta mgL}}{\beta mg}\right)\right]^N.$$

c) Usando que $e^{-\beta mgL} \approx 1 - \beta mgL$,

$$Z \approx \frac{1}{N!}\left[\frac{L^2}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\frac{(1+\beta mgL-1)}{\beta mg}\right]^N = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2}.$$

d) A energia livre de Helmholtz é

$$F = -k_B T\ln Z = -k_B T N\ln V - k_B T\ln\left[\frac{h^{-3N}}{N!}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2}\right].$$

Usando agora que

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$$

e notando que o segundo termo da energia livre não depende de V, obtém-se

$$p = \frac{Nk_B T}{V} \Rightarrow pV = Nk_B T,$$

que é a equação de estado do gás ideal, como esperado, já que os efeitos do campo gravitacional são desprezíveis no regime em questão.